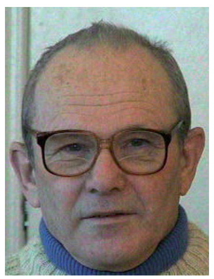
Книга написана для инженеров, интересующихся не только тем, какими методами решать экстремальные задачи, но и тем, как эти методы были получены, как можно сформулировать и преобразовать экстремальную задачу, чтобы облегчить ее решение. Во вводной главе почти без формул рассказано о схемах получения условий оптимальности и их использования. Вторая часть книги посвящена конечномерным задачам нелинейного программирования, на примере которых удобно иллюстрировать основные подходы, изложенные во вводной главе. Использование понятий функции достижимости и расширения экстремальных задач позволило существенно упростить изложение. В третьей части рассмотрены вариационные задачи, изложены условия оптимальности в форме принципа максимума для вариационных задач со связями разного типа и показана связь этих условий с принципом максимума для задач нелинейного программирования, усредненных по части переменных. Всюду, где это было возможно, автор стремился подчеркнуть геометрический смысл тех или иных соотношений и проиллюстрировать его рисунками.



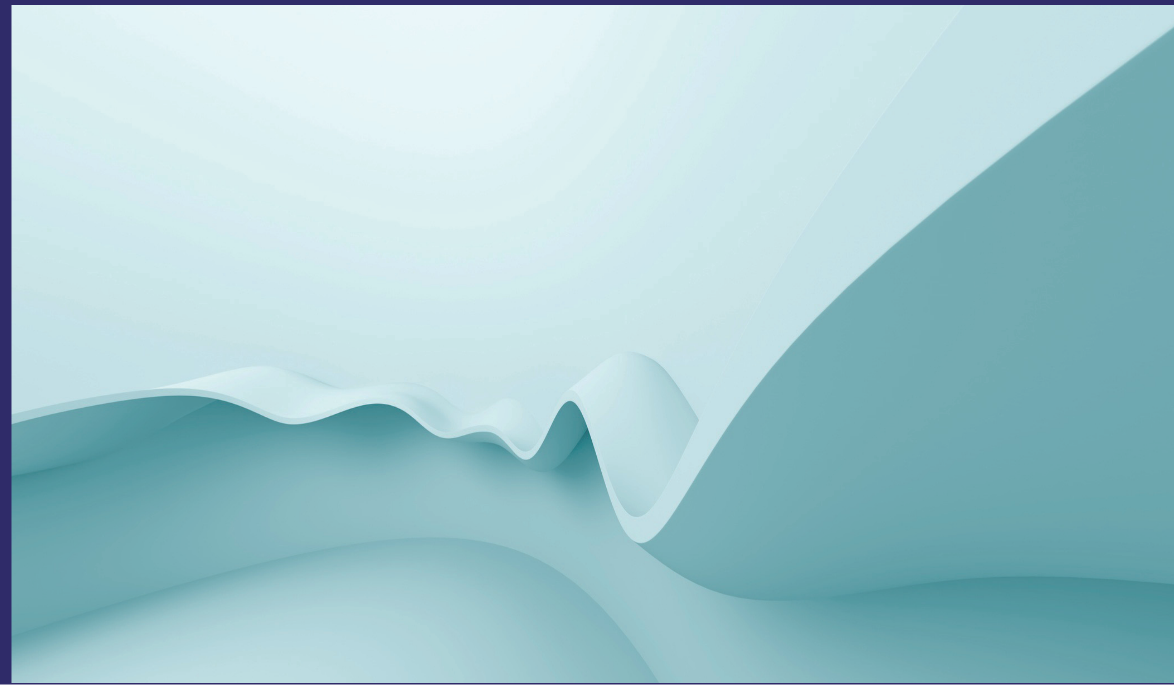
Анатолий Цирлин

Цирлин Анатолий Михайлович, д.т.н., проф. Центра системного анализа Института программных систем им. А.К. Айламазяна Российской Академии Наук. Специалист по методам оптимального управления и их применению в технологических, термодинамических и экономических системах. Автор 14 монографий и учебных пособий.

978-3-659-23616-7

Оптимизация для инженеров

Цирлин



Анатолий Цирлин

Методы оптимизации для инженеров

Монография

LAP LAMBERT Academic Publishing

Анатолий Цирлин

Методы оптимизации для инженеров

Анатолий Цирлин

Методы оптимизации для инженеров

Монография

LAP LAMBERT Academic Publishing

Impressum / Выходные данные
Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу http://dnb.d-nb.de.

Coverbild / Изображение на обложке предоставлено: www.ingimage.com

Verlag / Издатель:
LAP LAMBERT Academic Publishing
ist ein Imprint der / является торговой маркой
AV Akademikerverlag GmbH & Co. KG
Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Deutschland / Германия
Email / электронная почта: info@lap-publishing.com

Herstellung: siehe letzte Seite /
Напечатано: см. последнюю страницу
ISBN: 978-3-659-23616-7

Содержание

Предисловие

Эта книга предназначена инженерам, формулирующим и решающим экстремальные задачи. Для того, чтобы это делать успешно, необходимо знать не только имеющиеся методы и результаты решения известных типов экстремальных задач, но и логические схемы получения этих методов.

В книге основное внимание уделено взаимосвязи между методами решения конечномерных задач нелинейного программирования и вариационных задач оптимального управления. Во вводной главе неформально изложены логические схемы получения условий оптимальности экстремальных задач любого типа. Затем эти схемы проиллюстрированы на примере задачи нелинейного программирования и ее усредненной постановки. Показано влияния усреднения на вид условий оптимальности. Конечномерная задача позволяет проиллюстрировать полученные соотношения рисунками, поясняющими геометрическую сущность этих соотношений.

Последняя часть книги посвящена вариационным задачам. Возможных вариантов постановок этих задач очень много, так как типы связи между функциями и критерии оптимальности этих задач очень разнообразны. Здесь изложен принцип максимума в такой форме, которая позволяет получить расчетные соотношения, определяющие решение для произвольного сочетания различных типов связей и критериев оптимальности. Здесь же рассказано о некоторых типовых приемах преобразования вариационных задач, упрощающих их решение или позволяющих получить оценки для критерия оптимальности.

Автор сознательно упрощал изложение, предполагая, что когда читатель узнает, например, что условие непрерывности можно в некоторых утверждениях заменить на полунепрерывность сверху, он сам с большим удовольствием внесет поправку.

Автор благодарен М.А. Нуцковой и М.Г. Химшиашвили за большой труд по оформлению рукописи, а также Г.К. Крюкову и Ю.Н. Софиевой за подбор задач.

1 Введение

Методы оптимизации — дисциплина, относящаяся к прикладной математике. Задачи возникают в самых разных приложениях, поэтому роль инженеров в постановке задач и в развитии методов их решения велика. Важно, чтобы они не только знали существующие результаты, но и представляли, как эти результаты получены. Поэтому во введении остановимся на основных логических схемах исследования и решения экстремальных задач, которые являются общими для задач самого разного рода, по возможности избегая формул. Далее эти методы будут изложены детальнее на примерах конкретных типов задач.

1.1 Роль инженеров в развитии методов оптимизации

Экстремальная задача возникает из желания найти предельные возможности того или иного процесса или устройства и ту его конструкцию или закон поведения, для которого этот предел реализуется. Осознание, что предел должен существовать и первоначальная словесная постановка задачи как правило принадлежат инженеру. Для точной формулировки задачи и получения ее решения инженер часто вынужден обращаться к математику.

Этап перехода к математической постановке (формализация задачи) может быть совсем не простым. Одна и та же задача может допускать несколько формальных постановок, от выбора их зависит трудоемкость решения. Роль инженера здесь очень велика, так как именно он понимает насколько существенно то или иное условие и форма критерия. Он знает, например, каким законам сохранения должно удовлетворять искомое решение (энергии, материи, энтропии, если процесс обратимый, ...), и наоборот, что заведомо невозможно для оптимального процесса.

После того как задача сформулирована, математик может применить к ней те или иные методы, если она принадлежит к одному из изученных классов задач, и получить ее решение, как правило численное.

Здесь инженера интересует не только полученное решение, но и влияние на него изменения тех или иных условий (критерия, набора ограничений и пр.).

Особенно существенно, исследование «грубости» задачи, чтобы быть уверенным, что небольшие изменения в исходных условиях соответствуют небольшим изменениям в значении критерия оптимальности, найденном на оптимальном решении (в «значении» задачи), или в самом оптимальном решении.

Это обстоятельство требует деления экстремальных задач на два класса:

— задачи об оптимальном значении;

— задачи об оптимальном решении.

В первом случае значительные изменения решения, соответствующие практически неизмененному критерию качества, не играют роли. Во втором — важно именно оптимальное решение, а величина критерия играет вспомогательную роль.

К какому классу относится та или иная задача решает тот, кто ее сформулировал.

В ряде случаев задача оказывается новой с точки зрения ее математических особенностей и инженеру удается тем или иным, обычно «кустарным» способом ее решить. Это дает математикам стимул для развития математических методов решения нового класса экстремальных задач. Впечатляющим примером эффективного взаимодействия инженеров и математиков является задача А.А. Фельдбаума, которая привела к разработке принципа максимума Понтрягина.

В 1954 году д.т.н., проф. А.А. Фельдбаум сформулировал задачу о переводе линейной системы, характеризующейся обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами, из заданного начального в заданное конечное состояние за минимальное время [18]. При этом управляющее воздействие ограничено в каждый момент времени.

Формально

$$\begin{gathered}
x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = u, \\
\{x(0), \dot{x}(0), \ldots, x^{(n-1)}(0)\} \to \text{fix}, \\
x(T) = \dot{x}(T), \ldots, x^{(n-1)}(T) = 0, \quad u_{\max} \geq u(t) \geq u_{\min}, \quad T \to \min .
\end{gathered} \tag{1.1}$$

От классических задач вариационного исчисления задача Фельдбаума (1.1) отличалась ограничениями на управление, критерием (быстродействие) и самой формой записи, при которой критерий и связи между переменными были отделены друг от друга. Задача была названа задачей оптимального управления.

Фельдбаум не только сформулировал, но и получил решение задачи (1.1). Он доказал, что оптимальное управление $u^*(t)$ принимает только крайние значения, переключаясь скачком между ними. При этом число интервалов постоянства не превышает порядка n дифференциального уравнения (теорема об n интервалах). Но логика решения этой задачи отличалась от общей логической схемы получения условий оптимальности в вариационном исчислении. Причем существенно использовались особенности конкретной задачи.

Между тем хотелось получить структуру решения и условия оптимальности для целого класса подобных задач. С этой целью М.А. Айзерман поставил на своем семинаре доклад Фельдбаума, пригласив на него Понтрягина и сотрудников его кафедры в МГУ.

В 1958 году на сессии Академии наук СССР, Л.С. Понтрягин выступил с гипотезой об условиях оптимальности задач оптимального управления, в которых $u^*(t)$ находилось по условиям максимума функции Гамильтона. Эти условия были названы принципом максимума Понтрягина. Управляемая система имела гораздо более общую форму, чем в задаче Фельдбаума

$$\dot{x}_i = f_i(x, u, t), \quad i = 1, ..., n, \tag{1.2}$$

ограничения на векторное управление $u(t)$ имели тот же вид, что и в (1.1), а целью задачи первоначально, как и в (1.1) было оптимальное быстродействие.

Справедливость принципа максимума Понтрягина была доказана Л.И. Розоноэром [16]. Там же дано его обобщение на более широкий класс критериев, исследованы особые решения и пр.

Этот пример показывает, как эффективно может быть взаимодействие инженеров и математиков. При этом важно понимание необходимости такого взаимодействия. Роль М.А. Айзермана в появлении принципа максимума Понтрягина весьма значительна.

Это видно на примере задачи Б.В. Булгакова, который задолго до Фельдбаума сформулировал задачу о самом опасном возмущении линейной системы (см. [6]). В этой задаче рассматривалась такая же система, как и в (1.1) с теми же ограничениями на управление, находящаяся при $t = 0$ в равновесии. Продолжительность процесса T фиксирована. Надо найти управление $u^*(t)$, для которого $x(T) \to \max$.

Управление в этой задаче по своему физическому смыслу было возмущающим воздействием, а линейная система была задана не дифференциальным уравнением, а более общим интегральным уравнением свертки. Для нулевых начальных условий

$$x(t) = \int\limits_0^t k(t-\tau)u(\tau)d\tau, \tag{1.3}$$

где $k(t)$ — импульсная переходная функция (реакция линейной системы на единичный импульс).

Каждому линейному дифференциальному уравнению можно поставить в соответствие $k(t)$, но не наоборот. Задача Булгакова по существу — задача оптимального управления. Булгаков дал решение этой задачи, оно, как и в задаче Фельдбаума имело переключательный характер, и было выражено через $k(t)$. Возможно из-за отсутствия специалиста, который бы привлек к ней внимание математиков, она не получила обобщения и развития. Только после публикации принципа максимума Понтрягина А.Г. Бутковским (см. [7]) был сформулирован принцип максимума для задач с интегральными уравнениями.

Цель этой книги дать возможность инженерам познакомиться с общей схемой формализации экстремальных задач, получения условий оптимальности их решения.

Не случайно в теории оптимальных задач значительных успехов добились математики, получившие инженерное образование, такие как А.А. Фельдбаум, Л.И. Розоноэр, А.Г. Бутковский, В.Ф. Кротов, В.И. Гурман, А.Д. Иоффе и многие другие.

1.2 Последовательность формализации экстремальных задач

Одним из важнейших навыков инженера является умение ставить экстремальную задачу в форме пригодной для ее решения математическими методами. Оно предполагает использование или создание математической модели и её уточнение по результатам решения задачи.

Переход от словесной к формальной постановке экстремальной задачи часто сложен и как всякое умение кроме математической подготовки требует опыта. Правильной постановке способствует использование стандартной последовательности основных этапов формализации.

Этапы математической формулировки задачи оптимизации

1. Словесная постановка задачи.

2. Введение обозначений для переменных. При этом полезно указывать их размерность для проверки правильности полученных соотношений.

3. Запись в принятых обозначениях критерия оптимальности как функции искомых переменных.

4. Введение множества допустимых значений переменных, которое определяют как ограничения, наложенные на совокупность переменных, так и условия, ограничивающие каждую из них.

5. Предварительный анализ поставленной задачи. Этот анализ предусматривает исследование возможности преобразования задачи с целью упрощения ее решения (декомпозиции или агрегирования, исключения части переменных и сокращения числа условий), т.е. исследования структурных особенностей задачи.

В качестве примера, демонстрирующего сложность формализации экстремальных задач, приведем задачу о выборе системы розыгрыша, или об упорядочении объектов по на базе парных сравнений:

Пусть имеется n объектов (игроков, команд, ...) каждый из которых характеризуется ценой (силой) $C_i (i = 1, 2, ..., n)$ заранее неизвестной. Нужно упорядочить эти объекты по величине цены, используя только парные сравнения. Сравнение характеризуется погрешностью Δ. Это случайная величина с заданной плотностью распределения. Результат упорядочивания будет неточным. Его точность, которую надо как то оценить (как?), зависит от числа сравнений и от их организации (системы розыгрыша).

Как организовать розыгрыш, чтобы достигнуть заданной точности упорядочивания при минимальном числе парных сравнений?

Мы знаем, что в разных видах спорта, а часто в одном и том же виде, используют разные системы розыгрыша (круговую, кубковую, швейцарскую, смесь круговой и кубковой и пр.) Какая из них лучше? Как выбор системы зависит от Δ? Как учесть априорные знания о C_i (рейтинги), если они имеются и известна их точность?

1.3 Решение и значение экстремальной задачи

В самой общей форме записи экстремальная задача имеет вид

$$I(y) \Rightarrow \max / y \in D. \tag{1.4}$$

Здесь y — искомое решение (вектор или функция), I — критерий оптимальности, отображающий множество D допустимых значений y на ось действительных чисел. Если решение задачи существует, его обозначают как y^*. Значение критерия на найденном решении $I(y^*) = I^*$ называют *значением задачи*

$$I^* \geq I(y) \quad \forall y \in D. \tag{1.5}$$

Задача о максимуме некоторого критерия I на множестве допустимых решений D не всегда имеет решение. Причинами отсутствия решения могут быть:

а) противоречивость предъявляемых к нему требований (множество D — пусто, т.е. не содержит ни одного элемента);

б) неограниченность сверху критерия I на D;

в) не для всякой сходящейся последовательности элементов множества D предел допустим.

Во всех этих случаях может отсутствовать элемент $y^* \in D$, для которого выполнялось бы неравенство (1.5).

Для того, чтобы гарантировать существование решения, помимо ограниченности критерия на D нужно, чтобы предел каждой сходящейся последовательности элементов D также принадлежал этому множеству. Достаточные условия существования решения для конечномерных задач сформулировал Вейерштрасс (см. [8]): *функция I должна быть непрерывна и ограниченна, а множество D ограничено и замкнуто.* Последнее означает, что все точки границы по условиям задачи допустимы.

Мы в дальнейшем будем предполагать, что критерий ограничен, а множество допустимых решений не пусто. Остановимся подробнее на последней из названных выше причин отсутствия решения.

Рассмотрим задачу

$$I(y) = (1 + y) \to \max / 0 \leq y < 1. \tag{1.6}$$

Множество допустимых решений представляет собой полуинтервал $[0, 1)$, правая граница которого, точка $y = 1$, не принадлежит D. Поэтому максимальное значение $I(y)$ на D не достигается. Однако на любой монотонно возрастающей последовательности $\{y_i\} \in D$, предел которой равен единице, значения $I(y_i)$ растут и стремятся к двум. Таким образом, в данной задаче критерий ограничен сверху, множество D не пусто, но максимума I не существует. Это не удивительно, так как не выполнено условие теоремы Вейерштрасса о замкнутости множества допустимых решений.

Определение. *Точной верхней гранью критерия I на множестве D (супремумом) называют такое минимальное число M, для которого выполнено неравенство*

$$M \geq I(y) \quad \forall y \in D. \tag{1.7}$$

В нашем примере $M = 2$, так как любое меньшее число не отвечает неравенству (1.7), а любое большее число не является минимальным. Для верхней грани введено специальное обозначение — sup. Так что

$$\sup(1+y)=2 \quad 0\le y<1.$$

В том случае, когда множество D не пусто и критерий I ограничен и определен на D, максимизирующая последовательность и супремум всегда существуют.

Если решения задачи не существует, но найдется такая последовательность допустимых решений, на которой критерий оптимальности стремится к своему предельному значению $\sup I$, то полагают этот предел (точную верхнюю грань) значением задачи, а максимизирующую последовательность называют *обобщенным решением*. Как правило такая последовательность не единственная.

1.4 Локализация и необходимые условия оптимальности

Задачу вида (1.4) будем называть исходной. Здесь $I(y)$, критерий оптимальности определен на любом элементе множества допустимых решений D, y^* — оптимальное решение, если оно существует, $I^* = I(y^*)$ — значение исходной задачи.

Один из подходов к получению решения сводится к использованию необходимого условия: «Если x^* — лучший элемент D, то он заведомо не хуже любого из элементов подмножества $L(x^*) \subset D$».

$L(x^*)$ включает в себя x^* и еще некоторые элементы D. Его называют множеством сравнения. Множество сравнения выбирают так, чтобы из неравенства

$$I(x^*) \ge I(x^0) \quad \forall x^0 \in d(x^*) \tag{1.8}$$

вытекали расчетные соотношения, позволяющие найти на D все элементы x_i^*, которые им удовлетворяют. Таких элементов, претендующих на оптимальность, меньше чем элементов D, а иногда «претендент» вообще единственный.

Переход к множеству сравнения $L(x^*)$ от множества D называют *локализацией* исходной задачи (1.4), а соотношения, вытекающие из (1.8), — условиями локальной неулучшаемости. Чем «шире» множество сравнения, тем меньше «претендентов» выделяют необходимые условия (они «сильнее»), но тем труднее как правило найти из этих условий x_i^*.

Пример: x — скаляр, D — отрезок $[0,1]$, $I(x)$ — непрерывная и гладкая функция. Множество сравнения — все значения x, отличающиеся от x^* не более чем на сколь угодно малое ϵ.

Условие локальной неулучшаемости

$$\left(\frac{dI}{dx}\right)_{x^*} \delta x \leq 0, \quad |\delta x| \leq \epsilon. \tag{1.9}$$

Из (1.9) следует, что если δx имеет любой знак, то $\left(\frac{dI}{dx}\right)_{x^*} = 0$; если $x^* = 0$, а значит $\delta x \geq 0$, то $\left(\frac{dI}{dx}\right)_{x=0} \leq 0$; если $x^* = 1$, то $\delta x \leq 0$ и из (1.9) $\left(\frac{dI}{dx}\right)_{x^*=1} \geq 0$. Когда x — вектор, то из тех же условий следует требования к градиенту I в точке x^*.

Множество сравнения в этом примере было выбрано столь малым, что на нем $I(x)$ сколь угодно точно можно было приблизить линейной функцией. Но при этом необходимо было ограничить класс функций непрерывными и непрерывно дифференцируемыми.

В ряде случаев по всем или по некоторым переменным множество $L(x^*)$ можно расширить и выделить на нем x^* условиями типа максимума. О таких задачах речь пойдет ниже. Соответствующие условия оптимальности называют условиями в форме «принципа максимума».

Любые необходимые условия формулируют как: «Если x^* — оптимальное решение, то ...(выполнены те или иные условия)». В ряде случаев нельзя заранее утверждать, что решение существует. Тогда оговаривают его существование «Если оптимальное решение x^* существует, то ...».

Достаточные условия имеют обратную формулировку: «Если по отношению к x^* выполнены некоторые условия, то это оптимальное решение». Т.е. x^* может быть оптимальным решением и в том случае, когда достаточные условия не выполнены.

Схема Лагранжа

В задаче условной оптимизации об экстремуме функции многих переменных с наложенными на них ограничениями вида $f(y) = 0$ наличие связей между переменными существенно осложняет решение. Лагранж предложил для этой задачи способ трансформации к задаче без ограничений. Он писал: «Если ищется максимум или минимум некоторой функции многих переменных при условии, что между этими переменными имеется связь, задаваемая одной или несколькими функциями, то нужно прибавить к функции, экстремум которой ищется, функции, задающие уравнения связи, умноженные на неопределенные множители, и затем искать максимум или минимум построенной суммы (ее называют функцией Лагранжа), как если бы переменные были независимы. Полученные уравнения, присоединенные к уравнениям связи, послужат для определения всех неизвестных.»

Под неизвестными он понимал не только значения искомых переменных, но и значения неопределенных множителей. Оказалось, что «принцип максимума Лагранжа» не всегда справедлив, максимуму/минимуму исходной задачи может соответствовать вовсе не максимум/минимум функции Лагранжа, а ее точка стационарности или, если решение лежит на границе, локально неулучшаемая точка.

1.5 Расширение экстремальных задач, определение и общие свойства

Во многих случаях полезно наряду с исходной задачей рассматривать задачу с более широким множеством допустимых решений. Ниже мы дадим точное определение расширения экстремальной задачи, но прежде, чем это сделать, поясним цели, с которыми оно вводится.

Таких целей несколько:

1. Сведение задачи условной оптимизации к задаче безусловного оптимума.

2. Определение приближенного решения или решения в классе максимизи-

рующих последовательностей для тех задач, которые обычного решения не имеют.

3. Получение условий оптимальности решения и оценок значения задачи.

4. Конструирование и обоснование некоторых типов вычислительных алгоритмов.

Те или иные типы расширения экстремальных задач широко используются, как это будет видно из дальнейшего изложения. Мы попытаемся здесь дать определение расширения в такой форме, чтобы с единой точки зрения охватить разнообразные сферы его использования. Выделение общих свойств расширения и выявление связей между различными типами расширений оказывается полезным для решения многих задач.

Включим в состав множества допустимых решений задачи A: $I_A(y) \to \max / y \in D_A$, также обобщенные решения — такие последовательности $\{y_i\}$, составленые из элементов множества D_A, на которых критерий эффективности $I_A(y)$ стремится к конечному пределу. В дальнейшем не будем делать различия между допустимыми решениями и последовательностями, называя и те и другие элементами множества допустимых решений. Причем значение критерия на последовательности будем считать равным его предельной величине.

Определения:

1. **Изоморфность.** *Две экстремальные задачи A и A_1 назовем изоморфными относительно решения, если между элементами множеств их допустимых решений можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что из неравенства*

$$I_A(y) \geq I_A(z), \quad (y, z) \in D_A \tag{1.10}$$

следует неравенство

$$I_{A_1}(y_1) \geq I_{A_1}(z_1), \quad (y_1, z_1) \in D_{A_1}. \tag{1.11}$$

Причем решение $y \in D_A$ соответствует решению y_1 задачи A_1, а решение z задачи A соответствует решению z_1 задачи A_1 (рис. 1). Все задачи, изоморфные A, будем объединять в класс $\overline{A}$.

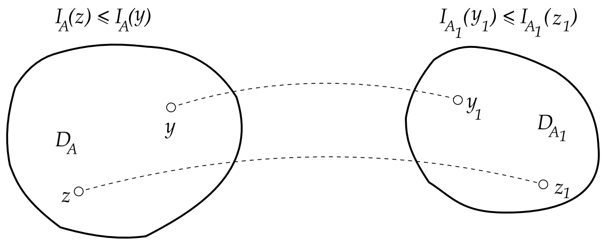


Рис. 1: К определению изоморфных задач.

Неравенства (1.10) и (1.11) гарантируют, что оптимальному решению задачи A соответствует оптимальное решение задачи A_1.

Пример. Рассмотрим задачу A вида

$$f_0(y) \to \max / a \le y \le b; \quad f_0(y) > 0$$

и задачу A_1

$$\int_a^b \sqrt{f_0(\tau)}\delta(t-\tau)d\tau \to \max .$$

Функция f_0 — непрерывна и ограничена на $[a, b]$. Если ввести соответствие между элементами множеств их допустимых решений такое, что некоторому решению $y = y^0$ соответствует решение $\delta(y^0 - \tau)$ в задаче A_1, то задачи окажутся изоморфны в смысле данного выше определения. (Покажите, что неравенства (1.10) и (1.11) в данном случае выполнены).

В том случае, когда на соответствующих друг другу элементах множеств D_A и D_{A_1} критерии задач A и A_1 равны друг другу, т.е.

$$I_A(y) = I_{A_1}(y_1); \quad I_A(z) = I_{A_1}(z_1),$$

не только оптимальные решения задач A и A_1 соответствуют друг другу, но и значения задач одинаковы.

Так получится, если в рассмотренном примере в задаче A_1 под знаком интеграла вместо $\sqrt{f_0(\tau)}$ стояла бы сама функция $f_0(\tau)$.

Понятие изоморфности используется в математике для характеристики объектов, с какой-то точки зрения тождественных друг другу. Две задачи, приведенные в примере, различны по форме записи, но по существу тождественны.

2. **Расширение.** *Задачу B:* $I_B(y) \to \max / y \in D_B$, *назовем расширением задачи A:* $I_A(y) \to \max / y \in D_A$, *если по отношению хотя бы к одной из задач класса* $\overline{A}$ *выполнены условия*

$$D_{\overline{A}} \subset D_B; \quad I_{\overline{A}}(y) = I_B(y) \quad \forall y \in D_{\overline{A}}. \tag{1.12}$$

Чаще всего, но не всегда, в условиях (1.12) фигурирует непосредственно множество D исходной задачи, но в некоторых случаях, например, в расширении задачи за счет усреднения, как ниже будет видно, эти неравенства справедливы по отношению к множеству допустимых решений задачи, изоморфной исходной.

3. *Расширение называют* **параметрическим**, *если в задаче B критерий и условия, определяющие множество допустимых решений, зависят от некоторого векторного или функцонального параметра* λ *таким образом, что при любом значении* λ *выполнены условия* (1.12).

4. *Расширение задачи A* **эквивалентно,** *если верхние грани критериев исходной и расширенной задачи одинаковы:*

$$I_A^* = \sup_{y \in D_A} I_A(y) = I_B^* = \sup_{y \in D_B} I_B(y). \tag{1.13}$$

Параметрическое расширение эквивалентно, если равенство (1.13) *выполнено хотя бы для одного* $\lambda \in V_\lambda$. *Неэквивалентное расширение* **эффективно.**

В этом определении фигурируют верхние грани соответствующих функций, а не их максимумы. Поэтому оно справедливо и в том случае, когда одна из упомянутых в нем задач или обе эти задачи имеют решение в форме максимизирующих последовательностей.

5. **Показателем эффективности** *расширения называют величину* $\Delta = I_B^* - I_A^*$.

Для параметрического расширения

$$\Delta = \min_\lambda (I_B^*(\lambda) - I_A^*), \quad \lambda \in V_\lambda.$$

Основные свойства расширения

1. Пусть $I_B^* = \sup I_B(y)/y \in D_B$, аналогично $I_A^* = \sup I_A(y)/y \in D_A$, тогда справедливо неравенство

$$I_B^* \geq I_A^* \quad (\Delta \geq 0). \tag{1.14}$$

Для параметрического расширения

$$I_B^*(\lambda) \geq I_A^*, \tag{1.15}$$

т.е. значение исходной задачи не превосходит значения расширенной задачи, а решение расширенной задачи, будучи подставлено в I_B, позволяет получить верхнюю оценку для I_A^*.

2. Для эквивалентного параметрического расширения справедливы неравенства седловой точки

$$I_B^*(y, \lambda^*) \leq I_B(y^*, \lambda^*) = I_A(y^*) \leq I_B(y^*, \lambda).$$

Здесь y^*, λ^* — значения переменных, на которых $I_B = I_A$. При этом y^* является решением исходной задачи или некоторой задачи из класса $\overline{A}$.

Эти условия следуют из того факта, что для любого λ справедливо неравенство (9), а для λ^* это неравенство превращается в равенство. Функция $I^*(\lambda)$ равная максимуму $I(\lambda, y)$ по y, принимает в точке λ^* свое минимальное значение (рис. 2а).

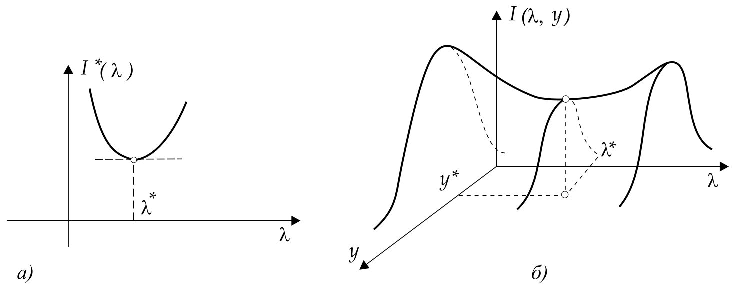


Рис. 2: Зависимость значения I^* расширенной задачи от параметра λ (а) и седловая точка эквивалентного параметрического расширения (б).

Функция $I(\lambda, y)$ выглядит при этом так, как показано на рис. 2б.

3. Если y^* — решение задачи A, а B — эквивалентное расширение этой задачи, причем $D_A \subset D_B$, то y^* удовлетворяет необходимым условиям оптимальности расширенной задачи.

Это свойство позволяет выразить необходимые условия оптимальности исходной задачи через необходимые условия оптимальности расширенной, предварительно доказав эквивалентность расширения.

4. Лемма В.Ф.Кротова: *чтобы* $y^* \in D_A$ *или максимизирующая последовательность* $\{y_i\}$*, в которой* $y_i \in D_A$*, доставляли верхнюю грань критерию исходной задачи, достаточно, это решение или предел максимизирующей последовательности оказались оптимальным решением расширенной задачи.*

Из леммы Кротова вытекает, что для нахождения решения исходной задачи достаточно построить такую расширенную задачу, оптимальное решение которой оказалось бы допустимым в исходной (в более общем случае в некоторой задаче из $\overline{A}$).

5. Для эквивалентности расширения достаточно, чтобы любое допустимое решение y^0 расширенной задачи B, удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности этой задачи, можно было приблизить последовательностью $\{y_i\}$, каждый элемент которой принадлежит D_A, причем

$$\lim_{i\to\infty}[I_A(y_i) - I_B(y^0)] = 0. \tag{1.16}$$

Условие 5 во многих случаях позволяет доказать эквивалентность расширения.

Приведенные утверждения следуют непосредственно из определения расширения и не требуют доказательства.

Связь необходимых условий оптимальности исходной и расширенной задач

Выше было отмечено, что условия оптимальности решения задачи A могут быть получены через условия оптимальности ее эквивалентного расширения. Возникает вопрос, а нельзя ли выразить необходимые условия оптимальности исходной задачи через условия оптимальности расширенной и в том случае, когда расширение не эквивалентно?

Напомним логику получения необходимых условий оптимальности: пусть y^0 — элемент множества D_A, «подозреваемый на решение». Если y^0 — решение, то для любого подмножества $L_A \in D_A$, заключающего в себя y^0 (рис. 3), он является решением задачи A_L :

$$I_A(y) \to \max / y \in L_A. \tag{1.17}$$

Задача (1.17) поставлена на более узком множестве, чем исходная. Чтобы сформулировать условия оптимальности исходной задачи через условия оптитмальности расширенной нужно лишь доказать эквивалентность соответствующих локализованных задач.

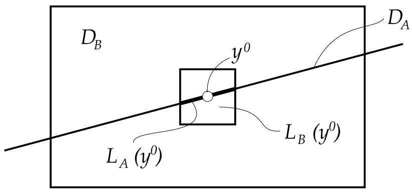


Рис. 3: Связь необходимых условий оптимальности исходной задачи и ее локально-эквивалентного расширения.

Действительно, для задачи A_L построим расширение по тому же правилу, что и расширение B для задачи A. Получим задачу B_L:

$$I_B(y) \to \max / y = L_B. \tag{1.18}$$

Множество L_B включает элемент y^0. Назовем расширение B локально-эквивалентным задаче A, если задача B_L эквивалентна A_L.

Утверждение. *Необходимые условия оптимальности исходной задачи и ее локально-эквивалентного расширения совпадают.*

Справедливость сделанного утверждения следует из того факта, что решение задачи A_L, в силу эквивалентности расширения, отвечает условиям оптимальности расширенной задачи B_L, а последние являются необходимыми условиями оптимальности в задаче B.

Задачу о поиске максимума функции Лагранжа без ограничений можно рассматривать как расширение задачи с ограничениями. Причем критерий оптимальности этих задач на множестве, где выполнены уравнения связей, совпадают. Поэтому, если найдутся множители Лагранжа, для которых максимум функции Лагранжа достигнут в точке, удовлетворяющей связям, то это и есть искомое решение (достаточное условие оптимальности). К сожалению, гарантировать это можно не всегда. Однако можно обобщить расширение Лагранжа так, чтобы для этого обобщения «принцип максимума» оказался справедлив.

Схема трансформации задачи с ограничениями к задаче без ограничений как для конечномерных задач об условном экстремуме функции так и для вариационных задач такова:

1. Для исходной задачи условной оптимизации строится некоторая вспомогательная задача, оптимальное решение которой на множестве допустимых решений D исходной задачи совпадает с решением последней. Однако вне множества D целевые функции этих двух задач различны.

2. В целевую функцию вспомогательной задачи вводят один или несколько параметров, выбирая которые, можно деформировать эту функцию за пределами множества D.

3. Выбор параметров осуществляют таким образом, чтобы для вспомогательной задачи оптимальное решение оказалось принадлежащим D, т.е. ее условный и безусловный оптимумы совпадали. А это значит, что и решение исходной задачи может быть получено посредством безусловной оптимизации (совпадает с решеним вспомогательной задачи).

При использовании такого подхода нужно разобраться с тем, как выбирать вспомогательную задачу? Как влияют на этот выбор характеристики исходной задачи? Как находить неопределенные параметры? Использование понятия функции достижимости экстремальных задач позволяет ответить на эти вопросы.

1.6 Усреднение в экстремальных задачах

Пусть исходную задачу (1.4) требуется решать многократно, причем при таком многократном решении нужно добиться максимума среднего по множеству значения $I(x)$, а множество D изменено так, что все или часть определяющих его условий должны быть выполнены не при каждом однократном решении, а в среднем на множестве решений.

Такое ослабление ограничений расширяет наши возможности. Если при каждом однократном решении x^* оказывается одинаковым, удовлетворяющим всем ограничениям, то среднее значение критерия будет равно I^* и никакого выигрыша от перехода к усредненной постановке нет. Если оказывается выгоднее менять оптимальное решение, то среднее значение $I(x)$ в усредненной задаче $\overline{I}^* > I^*$.

Задачу

$$\overline{I}(P_x) \to \max / P_x \in \overline{D} \tag{1.19}$$

называют усредненным расширением задачи (1.4). Черта в (1.19) означает усреднение. Решением задачи (1.19) является не вектор x, а распределение этого вектора P_x на множестве многократных решений. Если во всех однократных задачах решение одинаково, то $P_x = \delta(x - x^*)$ если в 10% решений однократных задач $x^* = x_1$, а в 90% решений $x^* = x_2$ то

$$P_x = 0,1\delta(x - x_1) + 0,9\delta(x - x_2)$$

и т.д.

Более подробно усредненные расширения будут рассмотрены ниже, пока же подчеркнем, что множество допустимых решений $\overline{D}$ задачи (1.19) не включает в себя множество D, так как его элементами являются распределения, однако каждому элементу $x^0 \in D$ соответствует при переходе к усредненной постановке $P_x^0 = \delta(x - x^0)$. И уже множество таких δ-образных распределений расширено до $\overline{D}$ в задаче (1.19).

В усредненных задачах условия определяющие $\overline{D}$, можно разбить на три класса:

1. Не меняющиеся при переходе к усреднению (они должны быть выполнены при каждом однократном решении). Эти условия выделяют множество $V \supset \overline{D}$.

2. Усредняемые, с распределением P_x, как и критерий

$$\overline{I} = \int_V I(x) P_x dx.$$

3. Наложенные на среднее значение искомого решения

$$\overline{x} = \int^V x P_x dx.$$

Отметим, что как всякое распределение

$$P_x \geq 0, \quad \int\limits_V P_x dx = 1.$$

Усредненные задачи могут возникнуть объективно. Так, если в систему добавить емкость, то ограничения на расход продукта становятся усредненными. В ряде случаев усреднение может быть использовано и как средство исследования и решения исходных неусредненных задач.

Три типа переменных в вариационных задачах

Задачу относят к вариационным, если хотя бы одна из составляющих искомого решения является функцией. В дальнейшем мы будем рассматривать только функции скалярного аргумента, например, времени.

Кроме функций искомое решение может содержать и векторы. Например, если одна из искомых функций может быть представлена полиномом, то коэффициенты полинома образуют вектор параметров.

В технологических процессах часто требуется выбрать как режим аппарата, изменяющийся во времени или по длине, так и конструктивные параметры, остающиеся неизменными.

Функциональные составляющие решения по разному влияют на возможное усредненное расширение вариационной задачи. По одним функциональным переменным (они названы ниже переменными первой группы) усреднение приводит к эквивалентному расширению, а по другим эквивалентность возможна лишь в исключительных случаях. Их называют переменными второй группы.

Объясняется это тем, что одни переменные могут изменяться столь быстро, что на любом даже малом интервале времени dt эффект их изменения сколь угодно близок к тому, как если бы задача решалась многократно и на интервале dt эти переменные были распределены с некоторой плотностью вероятности $P_x(t)$, зависящей от t. Так что, если задача усредненно расширена только по этим переменным, всегда можно построить последовательность решений исходной задачи, на которой $I^* \to \overline{I}$.

Как выделить эти переменные и когда они в задаче найдутся, обсудим ниже. Отметим, что если в задаче есть переменные первой группы, то ее необходимые условия оптимальности могут быть сформулированы через условия оптимальности усредненного расширения.

Таким образом в вариационных задачах переменные делятся на три типа:

1. Вектор параметров.

2. Функциональные переменные, по которым усредненное расширение эквивалентно (первой группы).

3. Функциональные переменные второй группы.

Усреднение в экстремальных задачах возникает как в силу их постановки, когда в задаче фигурируют средние значения переменных или функций, зависящих от этих переменных, так и в качестве приема, позволяющего доказать те или иные свойства решения рассматриваемой задачи. Ниже доказано, что для усредненных задач нелинейного программирования приведенный выше «принцип максимума Лагранжа» справедлив применительно к тем переменным, по которым производят усреднение.

1.7 О записи экстремальной задачи в канонической форме

Каноническая форма тех или иных соотношений предполагает, что любые конкретные формы записи достаточно просто с введением вспомогательных переменных или изменением обозначений могут быть переписаны в канонической форме, а все теоремы, справедливые для задач, записанных в канонической форме, могут быть без специального доказательства переформулированы для задачи, записанной в конкретном виде. Так, канонической формой записи обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка является их запись в форме системы n дифференциальных уравнений первого порядка.

Для усредненных экстремальных задач в каждом конкретном случае усреднение может входить различным способом. Было бы нецелесообразно доказывать свойства оптимального решения для каждой из многообразия постановок. Поэтому использована каноническая форма усредненной конечномерной задачи и условия оптимальности, полученные для нее, переносятся на каждый конкретный случай без отдельного доказательства.

То же относится и к вариационным задачам. Целесообразно получить условия оптимальности решения для вариационной задачи в канонической форме со скалярным аргументом, принимающим значения на интервале $[0, T]$. Разного типа критерии оптимальности и зависимости, связывающие искомые переменные, могут быть переписаны в канонической форме. Условия оптимальности сводятся к требованию максимума обобщенной функции Лагранжа такой задачи по переменным первой группы, требованию ее стационарности по остальным переменным и локальной неулучшаемости интеграла от этой функции по вектору параметров.

Эти условия в конкретных постановках приводят к соотношениям, выделяющим оптимальное решение для каждого класса задач.

2 Выпуклые множества и функции. Выпуклые оболочки

Приведем здесь основные определения, касающиеся свойств выпуклости множеств и функций, и поясним важность этих свойств для решения экстремальных задач.

2.1 Выпуклость множества.

Пусть $x \in M \in R^n$, т.е. является n-мерным вектором с действительными составляющими, и принадлежит множеству М. Рассмотрим операцию *усреднения* нескольких таких векторов.

Будем называть числа γ_i весовыми коэффициентами, если они удовлетворяют требованиям

$$\gamma_i \geq 0; \quad \sum_i \gamma_i = 1. \tag{2.1}$$

Ясно, что из (2.1) следует неравенство $\gamma_i \leq 1$.

Средневзвешенным из n элементов $x^1, x^2, \ldots, x^n$ называют

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x^i. \tag{2.2}$$

Множество M выпукло, если средневзвешенное из любых двух его элементов принадлежит M.

В n-мерном пространстве действительных векторов R^n элемент

$$\overline{x} = \gamma_1 x^1 + \gamma_2 x^2$$

(в силу (2.1) $\gamma_2 = 1 - \gamma_1$) лежит на отрезке, соединяющем точки x^1 и x^2, и при увеличении γ_1 от нуля до единицы скользит вдоль этого отрезка от точки x^1 до x^2 (рис. 4а). Примеры выпуклых множеств показаны на рис. 4а и 4б, невыпуклых — на рис. 5а и 5б.

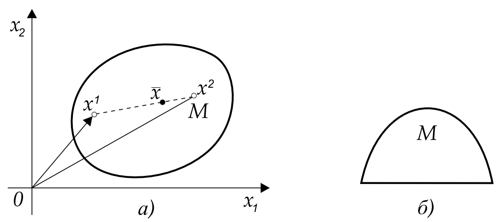


Рис. 4: Примеры выпуклых множеств.

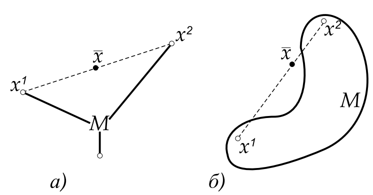


Рис. 5: Примеры невыпуклых множеств.

2.2 Выпуклые функции

Скалярная функция многих переменных $f(x)$ ставит в соответствие вектору x действительное число. Далее, если это не оговорено, мы будем иметь дело с такими функциями.

Дадим два определения выпуклой функции, равнозначных друг другу.

1. Функция $f(x)$ выпукла вверх, если выпукло множество П, лежащее под графиком $f(x)$ («подграфик», рис. 6а).

2. Функция выпукла вверх, если для любых x^i в области ее определения среднее значение функции не превышает функции от среднего значения аргумента.

Формально

$$\overline{f(x)} \leq f(\overline{x}). \tag{2.3}$$

Здесь $\overline{f(x)} = \sum\limits_i \gamma_i \cdot f(x^i)$, а $\overline{x} = \sum\limits_i \gamma_i x^i$.

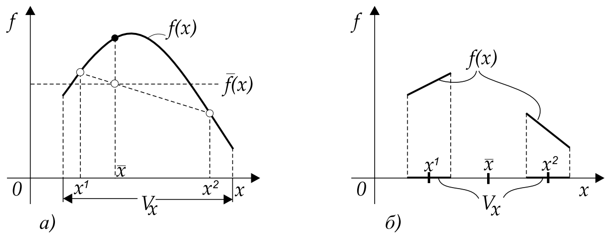


Рис. 6: Выпуклая (а) и невыпуклая (б) вверх функции.

Отметим, что оба определения предполагают, что множество V_x значений аргумента x выпукло. Действительно, если это не так, то «подграфик» не может быть выпуклым множеством или $f(x)$ может быть не определена для $X = \overline{x}$ при использовании второго определения (рис. 6б). Поэтому понятие выпуклой функции неотделимо от выпуклости множества тех значений аргумента, для которых она определена.

Если функция $f(x)$ выпукла и в некоторой точке x^0 дифференцируема, то касательная, проведенная к этой точке, проходит выше всех остальных точек графика функции (рис. 7а). Аналогично для выпуклого множества плоскость, касательная к любой точке его границы, никогда не проходит через внутренние точки множества. Выпуклая функция или граница выпуклого множества могут быть недифференцируемы, например, иметь излом (рис. 7). Важно однако, что через любую точку границы выпуклого множества всегда можно провести плоскость, которая не проходила бы через внутренние точки множества. Этих плоскостей может быть и несколько.

Если выпуклая функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x^0, то квадратичная форма, являющаяся аналогом второй производной,

$$(\delta x, B, \delta x^T) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_i \delta x_j \tag{2.4}$$

неположительна для любых δx_i и δx_j. Справедливо и обратное — если квадратичная форма (2.4) неположительна для любого $x^0 \in V_x$, то функция $f(x)$ выпукла на V_x.

Утверждение: *Дважды дифференцируемая функция строго выпукла тогда и только тогда, когда квадратичная форма для любых δx_i и δx_j меньше нуля (отрицательно определенная).* Матрицу B с элементами

$$b_{ij} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \tag{2.5}$$

(матрицу Гессе) для отрицательно определенной квадратичной формы также называют отрицательно определенной.

Для решения вопроса о том, будет ли квадратичная форма отрицательно определенной, пользуются критерием Сильвестра, который звучит так:

Квадратичная форма (2.4) *отрицательно определенная тогда и только тогда, когда все главные миноры нечетного порядка матрицы Гессе* (2.5) *отрицательны, а четного — положительны.*

Напомним, что главный минор матрицы порядка k — определитель матрицы, образованной первыми k строками и столбцами исходной матрицы.

Пример 1. $f(x) = -x_1^2 - x_2^2$. Элементы матрицы Гессе

$$b_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -2; \quad b_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0; \quad b_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 0;$$

$$b_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -2; \quad B = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Матрица B имеет два главных минора: порядка $k = 1$ и $k = 2$. Первый из них равен $-2 < 0$, второй же равен $4 > 0$. Т.о. матрица B отрицательно определенная, и функция $f(x)$ выпукла.

Пример 2. $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2$. Матрица Гессе

$$B = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Значения ее миноров -2; +3, так что функция выпукла.

Пример 3.

$$f(x) = x_1^3 + x_2^2 + x_1x_2^2,$$

$$B = \begin{vmatrix} 6x_1 & 2x_2 \\ 2x_2 & 2(1+x_1) \end{vmatrix}.$$

В данном случае мы можем, пользуясь условиями Сильвестра, выделить в плоскости x_1x_2 область, для которой $f(x)$ выпукла:

$$x_1 < 0; \quad 3 - x_2^2 + 3x_1^2 > 0.$$

Данные выше определения относятся к функциям выпуклым вверх. Совершенно аналогично могут быть определены функции выпуклые вниз, т.е. такие, для которых функция среднего значения аргумента меньше или равна среднему значению функции. Квадратичная форма (2.4) для таких функций положительно определенная. Все главные миноры матрицы Гессе положительны.

2.3 Выпуклые оболочки множеств и функций

В ряде случаев наряду со значениями $x \in M$ требуется включить в рассмотрение и все те значения x, которые могут быть получены из элементов множества M посредством операции усреднения. Ясно, что для выпуклого множества такое расширение эквивалентно, т.е. новых элементов, кроме тех, которые принадлежали M, при этом не добавится. Ведь по определению любой результат усреднения также принадлежит M. Иначе дело обстоит, если M — не выпукло. Тогда в результате подобного расширения мы получим множество CoM, включающее в себя M и еще некоторые элементы R^n, не принадлежащие M. Множество CoM называют выпуклой оболочкой M. Для выпуклого множества CoM и M совпадают.

Определения.

1. *Выпуклой оболочкой множества M называют множество, любой элемент которого может быть получен из элементов M посредством операции усреднения.*

Формально $y \in CoM$, если найдутся такие $x^i \in M$ и такие веса γ_i, что

$$y = \sum_i \gamma_i x^i. \tag{2.6}$$

2. *Выпуклой оболочкой множества M называется минимальное выпуклое множество, включающее M, т. е. такое, что*

а) любой элемент M принадлежит CoM и

б) изъятие из CoM любого элемента превращает его в невыпуклое.

На рис. 8 показаны примеры множеств и их выпуклых оболочек. Выпуклая (а) и невыпуклая (б) вверх функции.

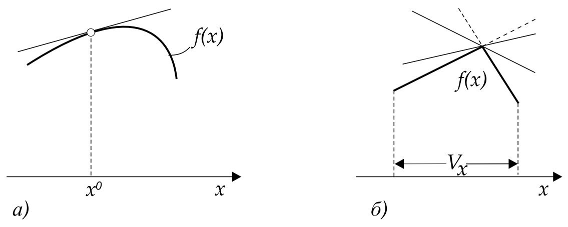


Рис. 7: Выпуклые дифференцируемая (а) и не дифференцируемая (б) функции.

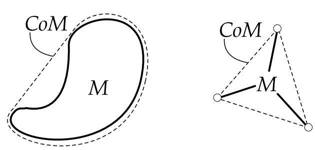


Рис. 8: Примеры выпуклых оболочек множеств.

В формуле (2.6) не проставлено число слагаемых в правой части. Между тем важно знать, какое минимальное число элементов M необходимо иметь в этом выражении, чтобы получить любой элемент выпуклой оболочки. Ответ на этот вопрос дает т е о р е м а   К а р а т е о д о р и [19]: *для получения любого элемента выпуклой оболочки множества M, принадлежащего линейному векторному пространству размерности n, требуется усреднять не более*

$(n+1)$*-го элемента* M. Таким образом, индекс i в правой части равенства (2.6) должен меняться от нуля до n.

Понятие аналогичное выпуклой оболочке множества можно ввести и по отношению к функции. Дадим несколько эквивалентных определений.

Определения.

1. *Выпуклой оболочкой функции* $f(x)$*, определенной на множестве* $x \in V_x$*, называют минимальную выпуклую функцию, не меньшую, чем* $f(x)$ $\forall x \in V_x$ (рис. 9). Обозначают выпуклую оболочку функции как $Co_{V_x} f(x)$.

2. *Выпуклой оболочкой функции на множестве* V_x *называют верхнюю границу выпуклой оболочки «подграфика».*

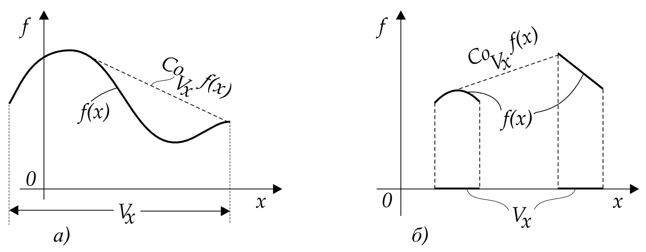


Рис. 9: Выпуклые оболочки функций, определенных на выпуклом (а) и невыпуклом (б) множествах.

Оба эти определения не конструктивны, т.е. не дают способа построить выпуклую оболочку функции. В этом смысле удобнее третье определение.

3. *Функция* $F(x)$ *называется выпуклой оболочкой* $f(x)$ *на* V_x*, если для любого* x *ее значение может быть получено как решение следующей задачи:*

$$F(x) = Co_{V_x} f(x) = \max_{\gamma_i, x^i} \sum_{i=0}^{n} \gamma_i f(x^i) \Big/ \begin{array}{c} x^i \in V_x, \\ \sum_{i=0}^{n} \gamma_i x^i = x. \end{array} \qquad (2.7)$$

Из (2.7) следует, что при среднем значении аргумента, равном y, максимум среднего значения функции $\overline{f(x)}$ равен ординате выпуклой оболочки функции для среднего значения x равного y ($\overline{x} = y$).

Прокомментируем эти определения:

Прежде всего из неравенства (2.3) следует, что для выпуклой функции все

γ_i, кроме γ_0 равны нулю, $\gamma_0 = 1$, а $Co_{V_x} f(x) = f(x)$, так как любое усреднение только уменьшает значение функции.

Число слагаемых в выражении (2.7) равно $(n+1)$, причем предполагается, что $x \in R^n$. На первый взгляд, нужно было бы использовать $(n+2)$ слагаемых, ведь размерность «подграфика» на единицу больше размерности множества V_x и равна $(n+1)$. Дело, однако, заключается в том, что нам нужно использовать не любые элементы «подграфика», а лишь те, которые лежат на его верхней границе, размерность же множества таких элементов равна n. Например, на плоскости $(n = 2)$ размерность верхней границы «подграфика» т.е. линии $f(x)$, равна единице.

И последнее, множество V_x в (2.7) может быть и не выпуклым, ведь множество значений x, для которых определена $Co_{V_x} f(x)$, представляет собой выпуклую оболочку $V_x(\overline{x} = \sum \gamma_i x^i)$ (рис. 9б).

Не следует думать, что на тех участках, где $Co_{V_x} f(x)$ не совпадает с $f(x)$, она представляет собой плоскость. Это так лишь для $n = 1$. Для $n = 2$ функция $f(x)$ представляет собой поверхность в трехмерном пространстве. Пусть эта поверхность — винтообразная лента(рис. 10а). Тогда выпуклая оболочка этой функции — круговой цилиндр. Другой пример, когда множество V_x — отдельные точки на плоскости. Тогда выпуклая оболочка $f(x)$ представляет собой выпуклую комбинацию кусков плоскостей (рис. 10).

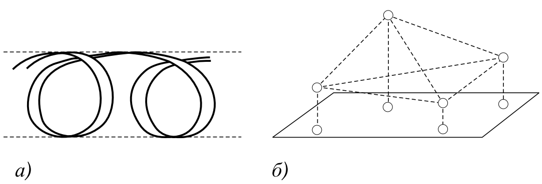


Рис. 10: Выпуклая оболочка винтообразной ленты (а) и функции, определенной в изолированных точках (б).

Пусть нам требуется при заданной средней нагрузке агрегата $\overline{x}$ обеспечить максимум его средней производительности. Легко показать, что зависимость максимально возможной средней производительности $\overline{f}$ от средней нагрузки $\overline{x}$

совпадает с графиком выпуклой оболочки функции $f(x)$. При этом нагрузка агрегата меняется так, что в течении доли γ_i от цикла его работы нагрузка равна x_i.

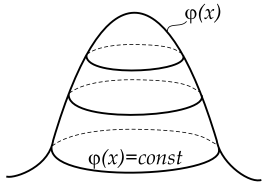


Рис. 11: Пример квазивыпуклой функции.

3 Задача нелинейного программирования и условия оптимальности ее решения

Задача нелинейного программирования, т.е. задача об экстремуме функции нескольких переменных при условиях в форме равенств и неравенств, играет особую роль при изучении методов оптимизации и оптимального управления. Общая логика ее исследования и решения в значительной степени переносится и на более сложные вариационные задачи, но объяснить и графически проиллюстрировать основные подходы к решению задач условной оптимизации проще в конечномерном случае. Для задачи линейного программирования ниже подчеркнуты лишь ее особенности и приведен наиболее распространенный алгоритм численного решения.

Последовательность решения задачи об экстремуме функции нескольких переменных без ограничений такова:

1. Выписывают необходимые условия экстремума (если функция непрерывно дифференцируемая, то условия равенства нулю ее градиента). Эти условия выделяют множество «претендентов на решение» (критических точек) и имеют форму системы уравнений, число которых совпадает с размерностью вектора искомых переменных.

2. Если решение существует, например, выполнены условия теоремы Вейерштрасса, то, перебрав значения функции в критических точках, можно найти ее максимум либо минимум.

Подобная процедура может оказаться очень трудоемкой из-за сложности решения уравнений, вытекающих из необходимых условий экстремума. В этом случае используют тот или иной способ поиска экстремума, который не обязательно приводит к точке максимума или минимума, но к одной из критических точек.

3.1 Постановка задачи нелинейного программирования

Под задачей нелинейного программирования (НП) понимают обычно задачу о максимуме функции $f_0(x)$ при наложенных на вектор x условиях в форме равенств и неравенств.

Формально

$$f_0(x) \longrightarrow \max \Bigg/ \begin{array}{c} x \in V_x \\ f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ \varphi_\nu(x) \geq 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots \end{array} \tag{3.1}$$

Множество векторов x, удовлетворяющих всем условиям задачи, образует множество допустимых решений D, принадлежащее n-мерному векторному пространству R^n. При этом множество V_x определяется ограничениями, наложенными на каждую из составляющих вектора x, типа

$$a_k \leq x_k \leq b_k,$$

т.е. представляет собой параллелепипед в пространстве R^n.

Число условий в форме равенства меньше n. В противном случае решениями являются корни системы $f_i(x) = 0\,(i = 1, 2, \ldots, m)$ или множество допустимых решений пусто. Функции f_0, f_i, φ_ν, если это специально не оговорено, предполагаются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми.

Заметим, что условия в форме неравенств всегда можно свести к условиям в форме равенств, введя добавочные переменные. Например,

$$\varphi_\nu(x) \geq 0 \longrightarrow \varphi_\nu(x) + z_\nu^2 = f_{m+\nu}(x, z_\nu) = 0.$$

Можно считать добавочную переменную неотрицательной и не возводить ее в квадрат. Ниже мы часто для сокращения выкладок будем рассматривать задачу с условиями только в форме равенств.

Задача НП называется выпуклой, если выполнено два условия:

а) функция $f_0(x)$ выпукла,

б) множество допустимых решений D также выпукло. В свою очередь, выполнение последнего требования можно гарантировать, если множество D представляет собой пересечение выпуклых множеств, выделяемых каждым из условий. Так как V_x — выпукло, то достаточным для выпуклости D является линейность всех функций $f_i(x)$ и выпуклость функций $\varphi_\nu(x)$.

Последнее условие можно несколько ослабить, ведь нам нужно, чтобы линия уровня $\varphi_\nu(x) = 0$ ограничивала выпуклое множество. Функции же, обладающие этими свойствами по отношению к любой из линий уровня, называют квазивыпуклыми. Так, функция, изображенная на рис. 11, не выпукла, но квазивыпукла.

Чем же замечателен класс выпуклых задач? Чтобы пояснить это, введем понятие о локально неулучшаемом решении x^0, как о таком элементе множества допустимых решений D, в сколь угодно малой окрестности которого, принадлежащей D, $L(x^0 \subset D)$ (на множестве сравнения), не найдется другого «лучшего» элемента.

Формально

$$f_0(x^0) \geq f_0(x) \quad \forall x \in L(x^0).$$

Таким образом, любая сколь угодно малая по величине допустимая (не выводящая за пределы D) вариация δx не приведет в точку лучшую, чем x^0. В выпуклой задаче функция f_0 и множество D, на котором она определена, выпуклы, значит подграфик П является выпуклым множеством, а f_0 — его верхней границей.

Утверждение. *Для выпуклой задачи любое локально не улучшаемое решение x^0 доставляет функции f_0 абсолютный максимум на D.*

Действительно, точка с координатами $(x^0, f_0(x^0))$ принадлежит границе выпуклого множества, причем ближайшим к ней точкам соответствуют значения f_0 не большие, чем $f_0(x_0)$. Таким образом, горизонтальная плоскость, проведенная через точку $(x^0, f_0(x^0))$, не проходит через внутренние точки подграфика, а всюду оказывается над ним (рис. 12). Следовательно, для любого $x \in D \quad f_0(x^0) \geq f_0(x)$.

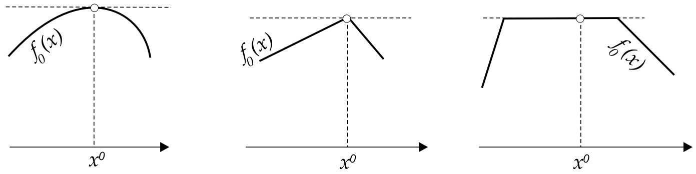


Рис. 12: Локально-неулучшаемые решения в задаче о максимуме выпуклых функций.

Определения:

Значением задачи НП называют максимальное значение функции $f_0(x)$ на множество D.

Оптимальным решением задачи НП называют такой элемент $x^* \in D$, для которого $f_0(x^*) \geq f_0(x) \quad \forall x \in D$. Иногда, когда по контексту это не вызывает недоразумений, его называют просто решением.

3.2 Необходимые условия оптимальности задачи НП. Функция Лагранжа

Пусть x^* — элемент множества допустимых решений D такой, что величина $f_0(x^*)$ не меньше, чем величина f_0 для любого другого элемента D, т.е. x^* — решение или одно из решений задачи НП. Выясним, каким условиям кроме неравенства

$$f_0(x^*) \geq f_0(x) \quad \forall x \in D \tag{3.2}$$

должно это решение удовлетворять. Потребность в таких условиях связана с тем, что неравенство (3.2) не конструктивно, т.е. не дает никакого иного пути для определения x^*, кроме полного перебора.

Будем рассматривать в качестве множества сравнения L множество элементов D, отличающихся от x^* на сколь угодно малый по модулю вектор δx

(вариацию x), так что

1. $x^* + \delta x \in D \quad \forall \delta x \in l$;

2. $|\delta x| \le \varepsilon$.

Множество вариаций l образуется из L вычитанием x^* из всех его элементов.

Предположим, что определяющие условия задачи функции f_0 и f_i непрерывно дифференцируемы в x^*, условия в форме неравенств в задаче (2.1) отсутствуют и точка x^* лежит строго внутри V_x. Заменим, пользуясь малостью δx_i, функции f_0 и f_i линейной частью их разложения в ряд Тейлора:

$$f_0(x) = f_0(x^*) + (\nabla f_0(x^*), \delta x)d; \tag{3.3}$$

$$f_i(x) = f_i(x^*) + (\nabla f_i(x^*), \quad \delta x) \quad ; \quad i = 1, 2, ... \tag{3.4}$$

Условия принадлежности x к множеству L можно записать как

$$f_i(x) = f_i(x^*) = 0$$

или из (3.3)

$$(\nabla f_i(x^*),\ \delta x) = 0 \quad \forall \delta x \in l, \quad i = 1, 2, ..., m. \tag{3.5}$$

Условия оптимальности на l

$$f_0(x^*) \ge f_0(x) \quad \forall x \in l$$

или

$$(f_0(x^*),\ \delta x) \le 0 \quad \forall \delta x \in l. \tag{3.6}$$

Так как точка x^* лежит строго внутри множества L, то вектор δx лежит в плоскостях, выделяемых условиями (3.5), и может иметь любой знак. А это значит, что неравенство в (3.6) можно заменить равенством. Действительно, если бы нашелся такой вектор δx^1, для которого это неравенство было бы строгим (< 0), то вектор $\delta x^2 = -\delta x^1$ тоже удовлетворял бы (3.5), однако для него неравенство (3.6) уже не выполнялось бы, так как его левая часть окажется > 0. Так что мы пришли к противоречию и доказали, что неравенство (3.6) может быть записано как

$$(\nabla f_0(x^*),\ \delta x) = 0 \quad \forall \delta x \in l. \tag{3.7}$$

Как же расположены векторы ∇f_0 и $\nabla f_i (i = 1, 2, ..., m)$ в точке x^*? Условие (3.7) говорит о том, что $\nabla f_0(x^*)$ нормален к любым допустимым векторам δx. Если $m = 1$, то множество допустимых δx представляет собой плоскость. Градиент f_1, как и градиент f_0, нормален к этой плоскости (рис. 13). Следовательно, оба эти вектора лежат на одной прямой, т.е. найдется такой скаляр λ, что

$$\nabla f_0(x^*) + \lambda \nabla f_1(x^*) = 0. \tag{3.8}$$

Если $m = 2$, а размерность x равна, например, трем, то множество l — прямая, полученная пересечением двух плоскостей. Градиенты f_1 и f_2, а также градиент f_0 нормальны к ней (рис. 10б). Следовательно, они лежат в одной плоскости и найдутся такие λ_1 и λ_2, что

$$\nabla f_0(x^*) + \lambda_1 \nabla f_1(x^*) + \lambda_2 \nabla f_2(x^*) = 0.$$

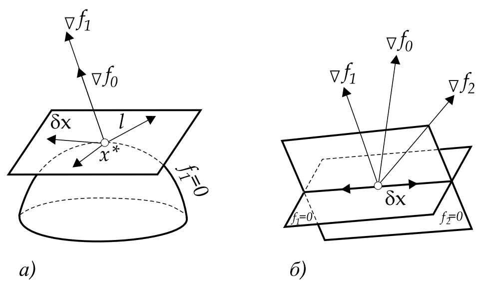


Рис. 13: Взаимное расположение градиентов функций f_0 и f_1, в локально-неулучшаемой точке x^*.

В общем случае m связей равенства (3.5) и (3.7) означают, что в точке x^* градиенты целевой функции и функций f_i линейно зависимы, т.е. найдется такой вектор λ с составляющими λ_i, что

$$\nabla f_0(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x^*) = 0. \tag{3.9}$$

Мы получили условия оптимальности для задачи НП в гораздо более удобной, чем (3.2), форме. Совместное решение (3.9) и системы уравнений связи

$$f_i(x^*) = 0, \quad i = 1, 2, ..., m \tag{3.10}$$

позволяет найти векторы x^* и λ. (Проверьте, что число уравнений в точности равно числу неизвестных).

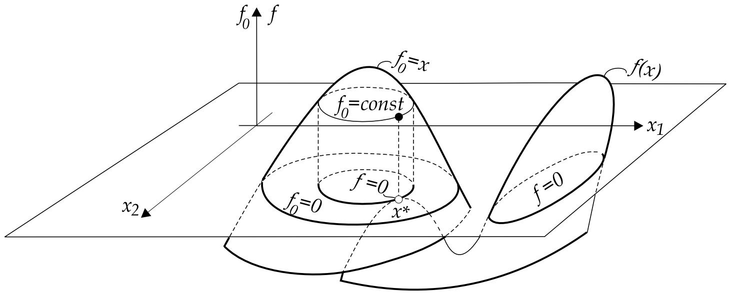


Рис. 14: Взаимное расположение функций f_0 и f_1 в случае вырожденного решения.

Эти уравнения линейны относительно λ, но нелинейны по x. Поэтому они могут иметь не единственное решение. Каждое из таких решений удовлетворяет необходимым условиям оптимальности, а одно из них является решением задачи. Ниже мы покажем, что в некоторых особых случаях «вырожденных решений» полученные условия требуют обобщения.

Условиям (3.9) можно придать более изящную форму, введя функцию

$$R = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x). \tag{3.11}$$

Тогда, если x^* — решение задачи НП, то оно удовлетворяет уравнениям связей и условию

$$\nabla R(x^*) = 0, \tag{3.12}$$

т.е. функция R в этой точке стационарна.

Функцию R называют *функцией Лагранжа задачи НП.*

Отметим, что если бы в задаче НП мы требовали не максимума, а минимума $f_0(x)$ на том же множестве допустимых решений, то условия (3.9) и (3.10), определяющие x^* и λ, не изменились бы. Ведь при выводе необходимых условий минимума в неравенствах (3.6) фигурировал бы знак $\geq$, однако для внутренней точки D такое неравенство переписывается как равенство, т.е. принимает вид

(3.7), что и приводит к условиям (3.9). Этому факту не стоит удивляться, если вспомнить, что для задач о безусловном максимуме и минимуме непрерывно дифференцируемой функции необходимые условия оптимальности совпадают.

Вырожденный случай. Записывая условия, определяющие множество l допустимых вариаций δx, мы предполагали, что вектор δx имеет в условиях (3.5) ту же размерность, что и в (3.6). При этом каждое из условий (3.5) уменьшает размерность вектора допустимых вариаций на единицу, т.е. выделяет в пространстве x гиперплоскость.

Таким образом, в «нормальном» случае размерность множества допустимых вариаций равна размерности x минус число условий. Однако это не всегда так. В некоторых случаях подобные допущения неверны.

Приведем пример. Пусть $m = 1$. Для этого случая мы получили условия оптимальности в форме (3.8). Пусть точка x^* кроме того оказалась точкой стационарности функции f_1 (рис. 14). Это значит, что $\nabla f_1(x^*)$ равен нулю, и при любом ограниченном λ из (3.8) следует, что $\nabla f_0(x^*)$ также должен быть равен нулю. Но это, очевидно, не так, ведь градиент f_0 в точке x^*зависит от вида этой функции и не обязан обращаться в нуль. Дело заключается в том, что в этом случае условие

$$(\nabla f_1(x^*),\ \delta x) = 0 \tag{3.13}$$

выполнено не только для допустимых вариаций δx, но для любого вектора δx, так как $\nabla f_1(x^*) = 0$.

Аналогичная ситуация возможна и в общем случае, если одна из функций, например, f_1 стационарна на множестве вариаций, определяемых остальными условиями. В этом случае равенство (3.5) справедливо для любых вариаций δx, удовлетворяющих условиям вида

$$(\nabla f_i(x^*),\ \delta x) = 0; \quad i = 2, 3, ... \tag{3.14}$$

На рис. 15 показан вид функций f_1 и f_2 для случая, когда решение оказывается вырожденным.

Условие стационарности любой из функций f_i на множестве, определяемом остальными условиями задачи, может быть записано аналогично условиям оп-

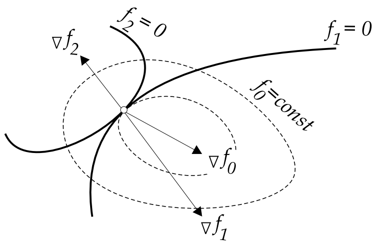


Рис. 15: Взаимное расположение градиентов целевой функции f_0 и двух условий в форме равенств в точке, соответствующей вырожденному решению.

тимальности как условие линейной зависимости градиентов этих функций. Если решение x^* — вырождено, то

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x^*) = 0. \tag{3.15}$$

Здесь любой отличный от нуля множитель λ_ν можно принять равным единице, так как условие (3.15) не изменится при делении его правой и левой части на λ_ν. Вырожденные решения называют экстремальными точками системы связей и ограничений.

Чтобы распространить условия оптимальности (3.9) на обычные и на вырожденные решения, функцию Лагранжа модернизируют, записывая как

$$R = \lambda_0 f_0(x) + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x). \tag{3.16}$$

В обычном случае $\lambda_0 = 1$, а в вырожденном $\lambda_0 = 0$. В последнем случае условие стационарности R совпадает с условием (3.15) вырожденности решения. При расчете x^* нужно, вообще говоря, найти как обычные, так и вырожденные решения, подставить их в $f_0(x)$ и выбрать то, для которого целевая функция окажется больше. Вырождение может иметь и более высокий порядок, если экстремум одного из условий достигается в экстремальной точке системы оставшихся связей и ограничений.

Отметим, что вектор $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m)$ в нуль не обращается, т.е. хотя бы одна его составляющая отлична от нуля.

3.3 Задача с условиями в форме неравенств

Выше мы предполагали, что условия в форме неравенств отсутствуют. При этом для приведения задачи с ограничениями в форме неравенств к задаче, содержащей только равенства, нам потребовалось введение добавочных переменных. Эти переменные входят в задачу таким образом, что условия оптимальности по ним имеют специальный вид. Рассмотрим первоначально задачу с одним условием в форме неравенства

$$f_0(x) \to max \Bigg/ \begin{array}{c} \varphi_1(x) \geq 0 \\ x \in V_x \end{array} \tag{3.17}$$

Выясним особенности этой задачи по сравнению с задачей с условиями в форме равенств.

Введя новую составляющую решения y, запишем условие $\varphi_1(x) \geq 0$ как

$$f_1(x, y) = \varphi_1(x) - y^2 = 0. \tag{3.18}$$

Тогда условия оптимальности (2.8а) могут быть использованы для задачи с неравенствами. Функция Лагранжа имеет вид

$$R = \lambda_0 f_0(x) + \zeta_1(\varphi_1(x) - y^2). \tag{3.19}$$

Здесь через ζ_1 обозначен множитель Лагранжа при функции f_1. Запишем условия стационарности R по x и y

$$\nabla_x R = \lambda_0 \nabla_x f_0(x^*) + \zeta_1 \nabla_x \varphi_1(x^*) = 0, \nabla_y R = 2\zeta_1 y = 0. \tag{3.20}$$

Последнее равенство является по существу логическим условием. Именно:

а) если $y \neq 0$, то $\zeta_1 = 0$ (иначе, если $\varphi_1(x^*) > 0$, то $\zeta_1 = 0$);

б) если $y = 0$ (т.е. $\varphi_1(x^*) = 0$), то ζ_1 может быть отличен от нуля. Мы можем теперь для задачи (3.17) записать функцию Лагранжа в такой же форме, как для задачи со связями

$$R = \lambda_0 f_0(x) + \zeta_1 \varphi_1(x).$$

Однако необходимо учитывать, что решение может быть строго внутри области, ограничиваемой условием $\varphi_1(x) \geq 0$, и тогда $\zeta_1 = 0$. Если же решение находится на границе $\varphi_1(x^*) = 0$, то ζ_1 может отличаться от нуля. Этот результат естественен, так как для $\varphi_1(x^*) > 0$ условия оптимальности должны совпадать с условиями оптимальности в задаче безусловной оптимизации, т.е.

$$\lambda_0 \nabla f_0(x) = 0.$$

Причем λ_0 здесь может быть принят равным единице, потому что ζ_1 и λ_0 не могут быть равны нулю одновременно.

Условия оптимальности для задачи с неравенствами, сформулированные выше, можно уточнить. Именно, *множитель* ζ_1 *ни при каких условиях не может быть отрицательным* $(\zeta_1 \geq 0)$.

Поясним причины этого факта. Пусть x^* — решение, лежащее на линии $\varphi_1(x) = 0$ (рис. 16). Это значит, что градиент φ_1 направлен внутрь допустимой области.

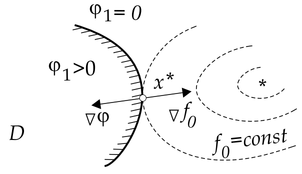


Рис. 16: Взаимное расположение градиента f_0 и ограничения $\lambda_1 \geq 0$ в локально-неулучшаемой точке.

Градиент же f_0 обязательно направлен в противоположную сторону, ибо в противном случае, сделав шаг вдоль ∇f_0, можно было бы увеличить f_0, не нарушая условий задачи. Так что в выражении (3.20) коэффициент пропорциональности между градиентами f_0 и φ_1 в точке x^* должен быть отрицательным, а он равен $-\zeta_1/\lambda_0$. Так что множитель $\zeta_1 \geq 0$.

Совершенно аналогично выглядят условия оптимальности для задач с любым числом неравенств. Для задачи НП общего вида

$$f_0(x) \to \max \Bigg/ \begin{array}{l} f_i(x) = 0; \quad i = 1, 2, ..., m \\ \varphi_\nu(x) \geq 0; \quad \nu = 1, 2, ..., x \in V_x. \end{array}$$

Функция Лагранжа R принимает вид

$$R = \lambda_0 f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) + \sum_{\nu} \zeta_\nu \varphi_\nu(x). \tag{3.21}$$

Условия оптимальности дает теорема Куна-Таккера:

Если x^* — решение задачи (3.1), то найдется такой вектор множителей Лагранжа λ с составляющими $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m, \zeta_1, \dots \zeta_\nu, \dots$ (λ_0 — равно нулю или единице; все составляющие вектора λ не равны нулю одновременно), что в точке x^* выполнены условия

$$(\nabla_x R(x^*, \lambda), \delta x) \leq 0; \tag{3.22}$$

$$\sum_{\nu} \zeta_\nu \varphi_\nu(x^*) = 0; \tag{3.23}$$

$$\zeta \geq 0, \quad \nu = 1, 2, \dots \tag{3.24}$$

Смысл этих условий ясен из рассмотренных выше частных случаев задачи (3.1), однако сделаем два замечания:

1. Во внутренних точках множества V_x условия (3.22) превращаются в условия стационарности функции R. Через δx в (3.22) обозначен вектор допустимых по условиям $x \in V_x$ вариаций.

2. Условия (3.23) и (3.24) эквивалентны требованию

$$\zeta_\nu \varphi_\nu(x^*) = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

так как каждое из слагаемых в (3.23) неотрицательно. Эти условия часто называют *условиями дополняющей нежесткости.*

Вырожденный случай в задаче с ограничениями и связями. Наличие неравенств в задаче НП приводит к вырожденным решениям типа, показанного на рис. 17. Область D заштрихована. В точке x^* градиенты ограничений направлены по одной прямой (линейно зависимы). Градиент же функции f_0 в точке x^* направлен так, что ни при каких ζ_1 и ζ_2 не будет выполнено равенство

$$\nabla f_0(x^*) + \zeta_1 \nabla \varphi_1(x^*) + \zeta_2 \nabla \varphi_2(x^*) = 0.$$

Поэтому и в данном случае приходится вводить в функцию R множитель λ_0 при $f_0(x)$ и полагать его равным нулю, чтобы получить вырожденные решения. И в этом случае, как и в случае равенств, в точке, соответствующей вырожденному решению, градиенты ограничений линейно зависимы. Для сравнения на рис. 17 показано обычное решение.

Таким образом, условия Куна-Таккера с множителем $\lambda_0 = 0$ в задаче НП с равенствами и неравенствами выделяют вырожденные решения.

В заключение отметим, что в вырожденном случае множество допустимых вариаций имеет меньшую размерность, чем в случае невырожденном. Так, на рис. 16а это множество превращается в линию по сравнению с конусом на рис. 13б. Аналогично, на рис. 11 точка x^* — изолированная и множество вариаций δx, ведущих из этой точки в допустимую область, стягивается в ноль.

Достигает ли функция Лагранжа максимума в точке x^*?

Условие (3.22) теоремы Куна-Таккера совпадает по форме с необходимым условием максимума функции Лагранжа R на множестве V_x. В связи с этим возникает желание заменить условие (3.22) «принципом максимума Лагранжа»

$$x^* = \arg\max R(x, \lambda), \quad x \in V_x. \tag{3.25}$$

Правомерна ли такая замена? На этот вопрос мы ответим ниже. Сейчас же отметим, что переход от условий (3.22) к (3.25) очень заманчив по двум причинам:

1. Условия (3.22) содержат градиент R и следовательно требуют дифференцируемости $f_0(x)$ и функций, определяющих D. Условия же (3.25) подобных требований не содержат, функция $R(x, \lambda)$ должна быть лишь ограничена и непрерывна по x. Тогда на ограниченном замкнутом множестве V_x она достигает точки максимума (теорема Вейерштрасса [8]). Множество V_x при использовании (3.25) может состоять из изолированных областей или отдельных точек.

2. Условия (3.22) являются лишь необходимыми для максимума R по x. Множество сравнения L при их использовании гораздо «уже», чем при использовании (3.25), и в общем случае они выделяют больше «претендентов» на решение, среди которых требуется сделать дополнительный выбор.

К сожалению, переход от слабых условий (3.22) стационарности внутри или локального максимума на границе V_0 к условиям абсолютного максимума R для задачи НП в общем случае нельзя сделать, т.е. нет гарантии, что найдется такой конечный вектор λ, для которого вектор x^*, полученный по условию (3.25), удовлетворял бы уравнениям связей и ограничениям. Дальнейшее изложение поможет нам ответить на следующие вопросы:

1. Для каких задач можно использовать условия (3.25) абсолютного максимума?

2. Как нужно видоизменить функцию Лагранжа R, чтобы для неё можно было свести задачу НП к задаче безусловной оптимизации?

3. Нельзя ли использовать конструкции, аналогичные конструкции Лагранжа, для оценок значения задачи НП сверху и снизу?

С ответами на эти вопросы тесно связаны численные методы решения задачи НП, возможность декомпозиции этой задачи на ряд вспомогательных подзадач и т.д.

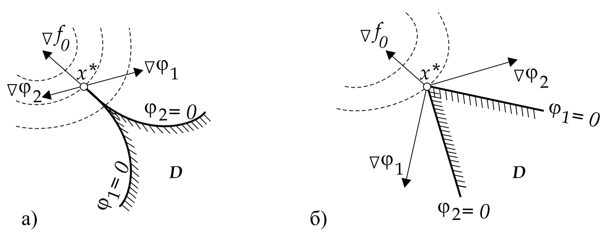


Рис. 17: Области допустимых решений и взаимное расположение целевой функции и ограничений для вырожденного (а) и обычного (б) решений.

4 Функция достижимости

В математике, механике, оптике и т.д. для решения некоторых задач часто используют принцип погружения, когда для исследования исходной задачи ее погружают в более широкий класс задач. Приведем пример метода погружения.

Исходная задача: определить, будет ли виден предмет, находящийся в точке A, человеку, глаз которого расположен в Б (рис. 18). На рисунке через D обозначено зеркало, а через П — непрозрачная перегородка. **Погружение**: Опре-

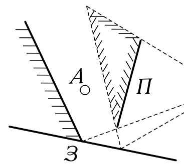


Рис. 18: Пример решения задачи с использованием принципа погружения.

делить все те точки пространства, которые видны глазу, находящемуся в точке Б.

Решение последней сравнительно просто. Требуется построить два луча, проходящие через нижнюю границу зеркала и точку Б и удовлетворяющие условию равенства углов падения и отражения. Построение показывает, что не видны лишь предметы, оказавшиеся в заштрихованных секторах. Так как точка А в них не попала, то ответ положителен.

Метод погружения используется и в задачах оптимизации. Ниже мы используем его для анализа условий оптимальности и вычислительных алгоритмов задачи НП.

4.1 Функция достижимости задачи НП

Введем понятие о функции достижимости задачи НП, считая что условия в форме неравенств отсутствуют. Заменим в задаче условия $f_i(x) = 0$ на требования $f_i(x) = c_i$ и будем искать максимум функции f_0 для всех значений вектора c, при которых эти требования и условия $x \in V_x$ совместны друг с другом. Ясно, что максимальное значение $f_0(x)$ зависит от c. Эту зависимость и назовем функцией достижимости задачи НП. Формально, *функция достижимости задачи НП*

$$f_0^*(c) = \max f_0(x) \Big/ \begin{matrix} x \in V_x \\ f_i(x) = c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{matrix} \tag{4.1}$$

При $c = 0$ величина $f_0^*(0)$ равна значению задачи НП. Как будет показано ниже, условия оптимальности и эффективность вычислительных алгоритмов во многом зависят от вида f_0^*.

Будем предполагать, что для любого $x \in V_x$ функции $f_0(x)$ и $f_i(x)$ принимают ограниченные значения. Тогда множеству V_x можно сопоставить множество V_c значений вектора c, которое может быть и невыпуклым: причем нескольким элементам V_x в общем случае соответствует один элемент V_c. Например, для задачи

$$f_0(x_1, x_2) \to \max \Big/ \begin{array}{c} f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 1 = 0, \\ |x_1| \le 1; \quad |x_2| \le 1 \end{array} \tag{4.2}$$

линии уровня и множество допустимых решений изображены на рис. 19.

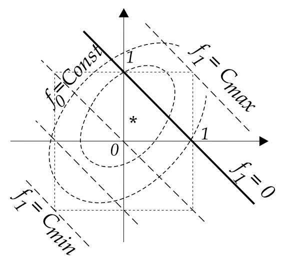


Рис. 19: Линии уровня функций f_0 и f_1 в задаче (4.2).

Множество V_c для этой задачи представляет собой отрезок действительной оси

$$-\sqrt{2} + 1 \le c \le \sqrt{2} + 1.$$

Каждой точке этого отрезка соответствуют все точки плоскости, лежащие на линии $x_1 + x_2 = c + 1$ внутри квадрата, выделяемого неравенствами в (4.2).

Для задач с условиями в форме неравенства типа $\varphi_\nu(x) \ge 0$ функция достижимости определяется как

$$f_0^*(c) = \max f_0(x) \Big/ \begin{array}{c} x \in V_x \\ \varphi_\nu(x) \ge c_\nu, \quad \nu = 1, 2 \ldots \end{array} \tag{4.3}$$

Ясно, что с ростом c_ν множество допустимых решений задачи (4.3) сужается, а значит f_0^* с ростом c_ν может только падать. Таким образом, функция $f_0^*(c)$

монотонно уменьшается с ростом c_ν (рис. 20а). Если решение задачи (4.3) $x^*(c)$ лежит строго внутри области, ограниченной неравенством $\varphi_\nu(x) \geq c_\nu$, то с ростом c_ν значение $x^*(c)$ в некотором диапазоне измения c_ν не будет меняться, а значит не изменится и $f_0^*(c)$. Таким образом, $\partial f_0^*(c)/\partial c_\nu$ на этом участке равна нулю (рис. 20б).

4.2 Связь функции достижимости с целевой функцией и функциями, определяющими множество допустимых решений

Будем рассматривать задачу с условиями в форме равенств

$$f_0(x) \to \max / f_i(x) = c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{4.4}$$

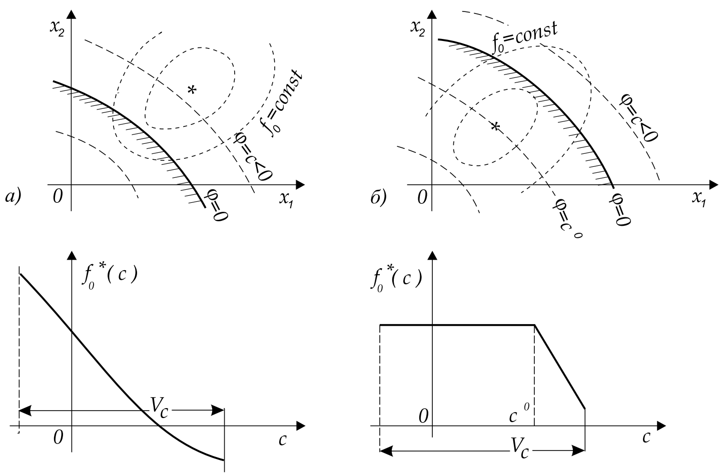


Рис. 20: Линии уровня целевой функции, ограничения и вид функции достижимости для случаев, когда ограничение активно (а) и неактивно (б) при $c < c^0$.

Пусть $x^*(c)$ — решение этой задачи, а вектор $\lambda^*(c) = (\lambda_1^*(c), \ldots, \lambda_m^*(c))$ — соответствующий этому решению вектор множителей Лагранжа. Пусть также решение невырожденное и как x^*, так и λ^* непрерывны и непрерывно дифференцируемы по c в ϵ — окрестности c^0. Вычислим частную производную функции достижимости $f_0^*(c)$ в точке c^0 по c_i

$$\frac{\partial f_0^*}{\partial c_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_0}{\partial x_j^*} \frac{\partial x_j^*}{\partial c_i}. \tag{4.5}$$

Условия, определяющие множество D в (4.4), перепишем как $\tilde{f}_i(x, c_i) = f_i(x) - c_i = 0$ и вычислим частные производные каждого из них по c_i:

$$\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial c_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j^*} \frac{\partial x_j^*}{\partial c_i} - 1 = 0; \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial \tilde{f}_\nu}{\partial c_i} = \sum_{j=1}^{n} \quad \frac{\partial f_\nu}{\partial x_j^*} \frac{\partial x_j}{\partial c_i} = 0, \quad \nu = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m. \tag{4.7}$$

Умножим каждое из равенств (4.5),(4.6),(4.7) на $\lambda_\nu (\nu = 0, 1 \ldots i, \ldots, m)$ и просуммируем друг с другом. Получим

$$\lambda_0 \frac{\partial f_0^*}{\partial c_i} + \lambda_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j^*}{\partial c_i} (\lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial x_j^*} + \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu \frac{\partial f_\nu}{\partial x_j^*}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j^*}{\partial c_i} \frac{\partial R}{\partial x_j^*}. \tag{4.8}$$

Так как x^* — точка стационарности функции Лагранжа, то $\dfrac{\partial R}{\partial x_j^*} = 0$, откуда

$$\frac{\partial f_0^*}{\partial c_i} = \frac{-\lambda_i}{\lambda_0}. \tag{4.9}$$

Таким образом, если решение x^* задачи (4.4) — невырожденное ($\lambda_0 \neq 0$) и градиент функции достижимости ограничен, то в точке c^0 он равен вектору множителей Лагранжа λ задачи (4.4) при $c_i = c_i^0$.

Поясним причины недифференцируемости функции достижимости в вырожденном случае. На рис. 14 решение находится в вырожденной точке. При малых изменениях c_ν от нуля в сторону уменьшения значение $x^*(c)$ меняется мало, а значит мало меняется и $f_0^*(c)$. Если же c_ν увеличивается, то величины $x^*(c)$ и $f_0^*(c)$ меняются скачком. Функция достижимости при $c = 0$ имеет скачок (ее производная обращается в бесконечность) (рис. 21).

Пусть для задачи с условиями в форме равенства вырожденному решению соответствует изолированная точка «a» на плоскости x (рис. 22а, 14). При замене равенства $f_i = 0$ на $f_i = c$ эта точка может либо превратиться в линию, либо исчезнуть совсем в зависимости от того, касается ли поверхность $f(x_1, x_2)$ плоскости x в этой точке сверху или снизу. Если точка a при сколь угодно малом изменении c исчезнет, то функция достижимости испытает скачок в сторону уменьшения (рис. 22б).

Справедливо следующее утверждение [19]: *в том случае, когда задача НП выпукла, множество V_c и ее функция достижимости $f_0^*(c)$ также выпуклы.*

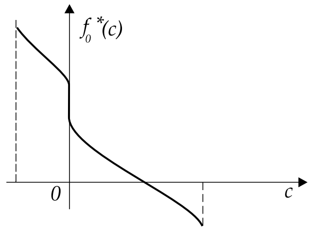


Рис. 21: Характер функции достижимости для задачи с неравенствами, имеющей вырожденное решение.

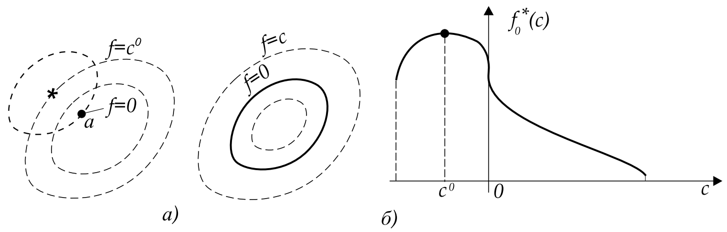


Рис. 22: Линии уровня функции f (а) и характер функции достижимости (б) для случая вырожденного решения в задаче с условиями в форме равенств.

4.3 Случай, когда безусловный максимум целевой функции принадлежит множеству D

В этом исключительном случае решение задачи условной оптимизации совпадает с безусловным оптимумом, и ограничения можно отбросить. В терминах функции достижимости этот факт выразится в том, что функция достижимости $f_0^*(c)$ имеет абсолютный максимум на множестве V_c в точке $c = 0$.

Действительно, абсолютный максимум функции $f_0(x)$ на множестве V_x достигается в некоторой точке x, которой соответствуют значения $f_i(x^0) = c_i^0$ (рис. 23а). Если x является решением задачи НП, то c_i^0 равны нулю, а точка $f_0^*(c)$ оказывается точкой абсолютного максимума $f_0^*(c)$ (рис. 23б).

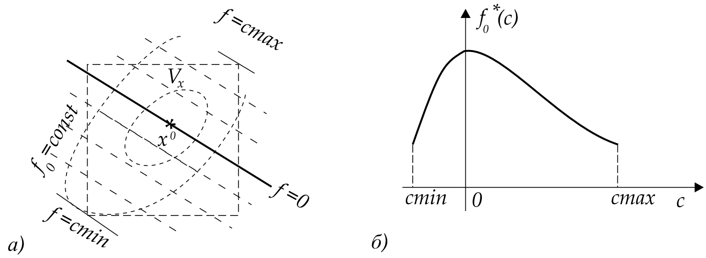


Рис. 23: Линии уровня функций f_0 и f_1 (а) и вид функции достижимости (б) в случае, когда условный и безусловный максимумы совпадают.

В задаче НП такой вариант может возникнуть лишь в исключительных случаях. Пусть, однако, нам удалось построить такую преобразованную задачу, для которой оптимальное решение или значение (или то и другое) совпадали бы с решением и значением для исходной задачи НП. Если при этом абсолютный максимум функции достижимости преобразованной задачи окажется в точке $c = 0$, то для нее можно перейти от требования условного максимума к требованию максимума безусловного. Ниже рассмотрим некоторые способы подобных преобразований для задачи НП и функции достижимости преобразованных задач.

5 Расширения задачи НП, связанные с переходом к безусловной оптимизации

Любую экстремальную задачу можно деформировать таким образом, чтобы ее решение, значение или и то и другое не изменилось. Например, целевую функцию $f_0(x)$ заменить другой функцией $F_0(x)$ так, чтобы для любых допустимых x_1 и x_2 из условия

$$f_0(x_1) \geq f_0(x_2) \tag{5.1}$$

следовало бы неравенство

$$F_0(x_1) \geq F_0(x_2), \tag{5.2}$$

т.е. большему значению исходной целевой функции соответствует большее значение преобразованной. Из неравенства (5.1), (5.2) следует, что зависимость F_0 от f_0 монотонно возрастающая. В тех точках, где $F(f_0)$ дифференцируема,

$$dF_0/df_0 \geq 0. \tag{5.3}$$

5.1 Преобразование целевой функции и связей

Преобразование, удовлетворяющее условиям (5.1), (5.2), называют монотонным преобразованием целевой функции. При таком преобразовании оптимальное решение исходной задачи обязательно является оптимальным решением преобразованной (задачи изоморфны) (рис. 24).

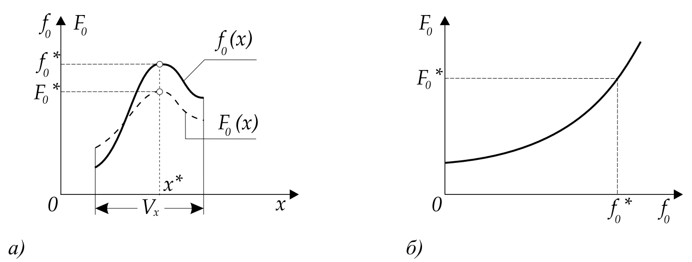


Рис. 24: Зависимость от x целевой функции и его монотонного преобразования (а) и вид монотонной зависимости $F_0(f_0)$ (б).

Аналогичным образом можно изменить и функции, определяющие множество допустимых решений. Так, в задаче НП условие $f(x) = 0$ можно заменить условием

$$F[f(x)] = 0, \tag{5.4}$$

в котором функция F такова, что она обращается в нуль тогда и только тогда, когда $f = 0$. При таком преобразовании множество допустимых решений не изменяется, а значит решение x^* исходной задачи останется решением и преобразованной. Если целевые функции у них одинаковы, то задачи изоморфны.

Ниже мы будем рассматривать задачу НП как исходную (задачу А). Иногда нас будет интересовать эквивалентность расширения относительно решения. В этом случае все задачи, изоморфные A с точностью до монотонного преобразования $f_0(x)$, включаем в класс $\overline{A}$.

5.2 Расширения задачи НП, основанные на снятии ограничений

Задача А.

$$f_0(x) \to \max \Big/ \begin{array}{c} f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2 \dots \\ x \in V_x. \end{array} \tag{5.5}$$

Наибольшую трудность при решении задачи вызывает наличие условий в форме $f_i(x) = 0$, так как множество V_x выделяется двусторонними ограничениями на каждую из составляющих вектора x и представляет собой параллелепипед. Задачу (5.5) будем называть исходной.

Задача В.

$$R(x) = R[f_0(x), f(x)] \to \max / x \in V_x. \tag{5.6}$$

Здесь через $f(x)$ обозначена вектор-функция с составляющими $f_i(x)$.

Сформулируем требования к функции R, при выполнении которых эта задача оказывается расширением для задачи (5.5). Первое из условий (1.12) выполнено, так как множество допустимых решений в задаче (5.5) является подмножеством V_x. Что касается второго условия, то мы будем требовать его выполнения с точностью до монотонного преобразования $f_0(x)$, т.е. в форме

$$I_B(y) = R(I_A(y)) \quad \forall y \in D_A. \tag{5.7}$$

Чтобы условие (5.7) было выполнено, необходимо и достаточно монотонности по f_0 функции R при $f = 0$, т.е.

$$\frac{\partial R(f_0, 0)}{\partial f_0} \geq 0 \tag{5.8}$$

для тех значений f_0, при которых $R(f_0, 0)$ дифференцируема.

Действительно, на множестве D_A функции $f_i = 0$, поэтому монотонность $R(f_0, 0)$ гарантирует, что на множестве D решения, соответствующие максимумам целевых функций задач (5.5) и (5.6), совпадают.

Рассмотрим теперь задачу из класса $\overline{A}$ вида

$$R(x) = R(f_0(x), f(x)) \to \max \Big/ \begin{array}{c} F(f(x)) = 0, \\ x \in V_x. \end{array} \tag{5.9}$$

Здесь R совпадает с целевой функцией в задаче (5.6), а вектор-функция F равна нулю в том и только в том случае, когда $f(x) = 0$, так что множество допустимых решений задачи (5.9) совпадает с множеством D_A. Задача (5.9) изоморфна задаче НП и их оптимальные решения одинаковы. В зависимости от конкретного вида функции R расширенной задачи мы получим соответствующую задачу (5.9). Расширение (5.6) эквивалентно задаче (5.9), от которой оно отличается снятием ограничений. Следовательно, чтобы свести решение задачи НП к решению расширенной задачи без связей (построить эквивалентное расширение), нужно в задаче (5.9) так выбрать функции R и F, чтобы ее функция достижимости имела абсолютный максимум при $c = 0$ т.е. ее условный и безусловный максимумы совпали.

Предварительно рассмотрим частные виды задач типа (5.9) и соответствующие им расширения.

Расширение Лагранжа

Пусть в (5.6) и (5.9) функция

$$R(x) = f_0(x) + \Sigma_\iota \lambda_i f_i(x), \tag{5.10}$$

где λ_i — любые ограниченные числа. Функция (5.10) совпадает с функцией Лагранжа (см. п.2). Выберем функцию F в (5.9) равной f, т.е. задача (5.9) примет вид

$$R(x, \lambda) \to \max \Big/ \begin{array}{c} f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, \\ x \in V_x, \end{array} \tag{5.11}$$

а расширенная задача (5.6) запишется как

$$R(x,\lambda) \to \max / x \in V_x. \tag{5.12}$$

Ясно, что задача (5.11) изоморфна задаче НП, так как множество ее допустимых решений то же, что и в задаче (5.5), и для любого из элементов этого множества $R(x,\lambda) = f_0(x)$, так как $f_i(x) = 0$. Вопрос об условиях эквивалентности расширения (5.12) сводится к вопросу о том, при каких условиях найдутся такие ограниченные λ — множители, для которых решение задачи НП доставляет функции R максимум на множестве V_x.

Выясним связь между функцией достижимости $f_0^*(c)$ задачи НП и функцией достижимости задачи (5.11). Ввиду того, что

$$R^*(c\lambda) = \max R(x,\lambda) \Big/ \begin{array}{r} f_i(x) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ x \in V_x, \end{array}$$

получим

$$R^*(c,\lambda) = f_0^*(c) + \Sigma_{i=1}^m \lambda_i c_i. \tag{5.13}$$

Справедливость выражения (5.13) следует из того, что при $f(x) = c$ второе слагаемое в $R(x,\lambda)$ не зависит от x, и максимум в (5.13) может быть достигнут только за счет максимизации $f_0(x)$. А ее максимальное значение при условиях $f(x) = c$ есть не что иное, как $f_0^*(c)$. Таким образом, функция достижимости задачи (5.11) отличается от $f_0^*(c)$ добавлением m - мерной гиперплоскости, проходящей через начало координат. Множители λ_i определяют наклон этой плоскости (это составляющие ее градиента).

Утверждение.*Расширение Лагранжа* (5.12) *задачи НП эквивалентно тогда и только тогда, когда через точку* $(f_0^*(0), 0)$ *на плоскости с координатами* $f^*(c), c$, *можно провести плоскость* $M(c) = \Sigma_i k_i c_i + f_0^*(0)$ *такую, что для любого* $c \in V_c$

$$M_(c) \geq f_0^*(c).$$

При этом $\lambda_i^* = -k_i$. Плоскость $M(c)$ в том случае, когда $(df_0^*/dc)_{c=0}$ существует, является касательной к f_0^*. В более общем случае эту плоскость называют опорной.

Покажем справедливость этого утверждения в одномерном случае (рис. 25). Функция $f_0^*(c)$ может быть и негладкой в точке $c = 0$, поэтому касательной в

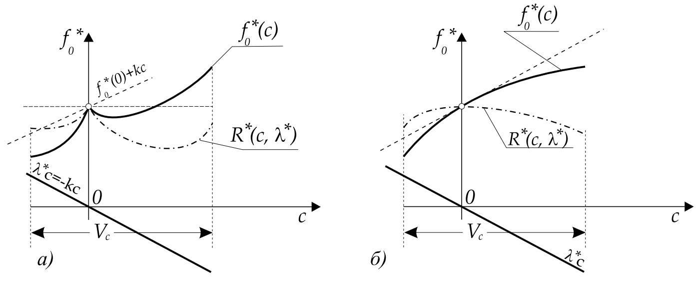


Рис. 25: Вид функций достижимости задачи НП в случае, когда расширение Лагранжа эквивалентно.

этой точке не существует, но опорная прямая может быть проведена. Ее наклон равен k, и она всюду выше, чем f_0^*. Если теперь ко всем ординатам f_0^* добавить величину — kc, т.е.

$$R^*(c) = f_0^*(c) + \lambda c, \quad (\lambda = -k),$$

то построенная таким образом функция имеет в точке $c = 0$ горизонтальную опорную прямую, нигде не пересекающуюся с $R^*(c)$. Таким образом, $R^*(0) \geq R^*(c) \quad \forall c \in V_c$, т.е. максимум функции достижимости задачи (5.11) оказался в точке c=0, так что расширение (5.12) эквивалентно задаче (5.11), а значит и исходной задаче НП.

В том случае, когда такой опорной прямой нельзя построить, как видно из рис. 26, никакое значение λ не обеспечит нам смещение максимума $R^*(c)$ в точку $c = 0$. Поясним этот факт. На рис. 26 абсолютный максимум функции достижимости исходной задачи оказался на правом конце отрезка V_c. Так как мы хотим сместить точку максимума в точку $c = 0$, то выбираем λ отрицательным. При этом правый конец $R^*(\lambda^0, c)$ опускается, но зато левый поднимается, и при некотором λ^0 для двух значений c, одно из которых больше, а другое меньше нуля, величина $R^*(c, \lambda^0)$ окажется одинакова. Любое изменение λ приводит к увеличению значения расширенной задачи. При $\lambda = \lambda^0$ значение расширенной задачи $\max R^*(c, \lambda^0)$ минимально по λ, но бльше, чем значение исходной задачи $f_0^*(0)$.

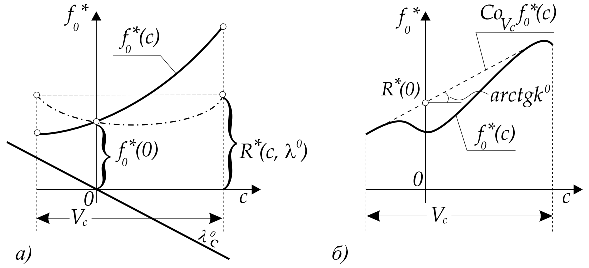


Рис. 26: Вид функции достижимости задачи НП в случае, когда расширение Лагранжа не эквивалентно.

Мы не будем приводить доказательства условия эквивалентности расширения Лагранжа, так как оно представляет собой формализацию тех построений, которые проведены на рис. 25 и 26. Обсудим лишь некоторые следствия из этого условия:

1. Если функция достижимости $f_0^*(c)$ выпукла, то расширение Лагранжа заведомо эквивалентно (рис. 25б).

2. Если функция $f_0^*(c)$ строго вогнута (даже только в окрестности $c = 0$), то расширение Лагранжа заведомо не эквивалентно (рис. 26).

В том случае, когда расширение эквивалентно, можно воспользоваться свойством седловой точки и определить решение x^* задачи НП из условия

$$f_0(x^*) = \min_{\lambda} \max_{x \in V_x} R(x, \lambda). \tag{5.14}$$

При этом функции $f_0(x)$ и $f(x)$ могут быть и не дифференцируемыми.

Отметим, что когда расширение не эквивалентно, множители λ^0, при которых максимум $R(x, \lambda)$ по x минимален, вовсе не равны составляющим градиента плоскости, касательной к функции $f_0^*(c)$ в точке $c = 0$. Они соответствуют равенству максимальных значений $R^*(c)$ в нескольких точках, между которыми находится точка $c = 0$. Для одномерного случая таких точек оказалось две.

Для случая m измерений можно предположить, что число таких максимумов не будет превышать $(m+1)$. Ниже мы покажем, что это действительно так.

Построим выпуклую оболочку $Co_{V_c} f_0^*(c)$ функции достижимости на множестве V_c. В некоторых точках она совпадает с $f_0^*(c)$, в других проходит выше. В тех точках, где выпуклая оболочка совпадает с функцией достижимости, любая опорная к $f_0^*(c)$ плоскость является опорной и к выпуклой оболочке, для других значений c она не ниже, чем $Co_{V_c} f_0^*(c)$, а значит тем более не ниже, чем функция достижимости.

Таким образом, если в точке $c = 0$ функция достижимости и ее выпуклая оболочка совпадают, то расширение Лагранжа эквивалентно (достаточное условие эквивалентности).

Покажем, что это условие и необходимо, т.е. в том случае, когда

$$Co_{V_c} f_0^*(0) > f_0^*(0), \tag{5.15}$$

расширение Лагранжа не эквивалентно. Действительно, согласно определению выпуклой оболочки

$$Co_{V_c} f_0^*(0) = \max \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu f_0^*(c^\nu) \Bigg/ \begin{array}{ll} \gamma_\nu \geq 0; & (a) \\ \sum\limits_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu = 1; & (b) \\ \sum\limits_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu c^\nu = 0. & (c) \end{array} \tag{5.16}$$

Из условия (5.16) следует, что начало координат в пространстве c является внутренней точкой выпуклой оболочки множества, состоящего из точек c^ν.

Предположим, что мы так подобрали вектор $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$, что значения функции R в точках c^ν одинаковы и максимальны, т.е.

$$f_0^*(c_\nu) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c_i^\nu = R^*(0), \quad \nu = 0, 1, \ldots, m. \tag{5.17}$$

Мы имеем $(m+1)$–но уравнение с $(m+1)$–им неизвестным ($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ и R^*). Эти уравнения определяют вектор λ^0,для которого плоскость, опорная к $R^*(c)$ и касающаяся этой функции в точках $R^*(c_\nu)$, оказывается горизонтальной и отстоящей от начала координат на расстояние $R^*(0)$. Изменение наклона гиперплоскости приведет к тому, что значение функции $R^*(c)$ в некоторых из точек c^ν возрастет и станет больше, чем $R^*(0)$, а в других уменьшится. Таким образом, никаким изменением λ нельзя сделать значение расширенной задачи меньшим, чем $R^*(0)$. Между тем $R^*(0)$ равно ординате выпуклой оболочки функции достижимости при $c = 0$, так как добавление слагаемого $\sum \lambda_i c_i$ не меняет ординаты выпуклой оболочки функции $f_0^*(c)$ в точке $c = 0$. Таким образом, если выполнено неравенство (5.15), то расширение Лагранжа не эквивалентно, показатель эффективности

$$\Delta = Co_{V_c} f_0^*(0) - f_i^*(0),$$

а λ^0 определяется наклоном k^0 выпуклой оболочки функции достижимости $f_0^*(c)$ в нуле (рис. 26б).

В заключение отметим, что опорная гиперплоскость может пройти не через $(m+1)$, а через меньшее число точек выпуклой оболочки. В этом случае некоторые из γ_ν в (5.16) обращаются в нуль. Число одинаковых максимумов функции $R^*(c)$ меньше, чем $(m+1)$, однако для этих максимумов условия (5.17) выполнены, и все проведенные выше рассуждения остаются в силе.

Расширение Лагранжа в комбинации с монотонным преобразованием целевой функции.

Рассмотрим задачу, изоморфную задаче НП, вида

$$R_F(x,\lambda) = F_0(f_0(x)) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \to \max \Big/ \begin{array}{c} x \in V_x \\ f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots m, \end{array} \tag{5.18}$$

в которой F_0 — монотонно возрастающая функция f_0. Соответствующее (5.18) расширение задачи НП

$$R_F(x,\lambda) = F_0(f_0(x)) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \to \max / x \in V_x. \tag{5.19}$$

Функция достижимости для задачи (5.18) связана с $f_0^*(c)$ зависимостью

$$R^*(c) = F_0(f_0^*(c)) + \sum_i \lambda_i c_i. \tag{5.20}$$

Равенство (5.20) следует из того, что максимум функции $R(x)$ при $f(x) = c$ достигается за счет максимума первого слагаемого. А так как F_0 монотонно возрастает, то ее максимум достигается тогда, когда максимальна $f_0(x)$ при условиях $f(x) = c$. Величина этого максимума равна $f_0^*(c)$.

Функция $F_0(f_0^*(c)) = F_0^*(c)$ может оказаться выпуклой, хотя $f_0^*(c)$ и невыпукла, так как при монотонном преобразовании меняются наклон и кривизна при каждом c. Если удастся подобрать F_0, так, чтобы обеспечить выпуклость $F_0^*(c)$, то, как мы убедились выше, найдется такой вектор λ, что абсолютный максимум в (5.20) окажется в точке $c = 0$. Это будет означать, что расширение (5.19) эквивалентно задаче НП с точностью до монотонного преобразования целевой функции. Если это так, то можно определить решение x^* задачи НП из условия седловой точки функции R_F

$$R_F(x^*, \lambda^*) = \min_{\lambda} \max_{x \in V_x} R_F(x, \lambda). \tag{5.21}$$

Подставив x^* в $f_0(x)$, нетрудно получить значение задачи НП.

Пусть функция достижимости дважды непрерывно дифференцируема. Рассмотрим изменение матрицы Гессе функции $f_0^*(c)$ при ее монотонном преобразовании, предварительно записав составляющие градиента $F_0^*(c)$ в точке c^0.

$$\frac{\partial F_0^*}{\partial c_i} = \left(\frac{dF_0}{df_0^*}\right)_{f_0^*(c^0)} \left(\frac{\partial f_0^*}{\partial c_i}\right)_{c^0}, \tag{5.22}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 F_0}{\partial c_i \partial c_j} = \left(\frac{\partial F_0}{\partial f_0^*}\right)_{f_0^*(c^0)} \left(\frac{\partial^2 f_0^*}{\partial c_i \partial c_j}\right)_{c^0} + \\ + \left(\frac{d^2 F_0}{df_0^{*2}}\right)_{f_0^*(c^0)} \left(\frac{\partial f_0^*}{\partial c_i}\right)_{c^0} \left(\frac{\partial f_0^*}{\partial c_j}\right)_{c^0},\end{gathered} \tag{5.23}$$

или в сокращенной записи

$$\nabla F_0^*(c) = \frac{dF_0}{df_0^*} \nabla f_0^*(c); \tag{5.24}$$

$$\Gamma_{ij} = \frac{dF_0}{df_0^*} \gamma_{ij} + \frac{d^2 F_0}{df_0^{*2}} f_{0c_i}^* f_{0c_j}^*. \tag{5.25}$$

Здесь через Γ_{ij} и γ_{ij} обозначены элементы матрицы Гессе преобразованной и исходной задач, а через $f_{0c_\nu}^*$ — частная производная f_0^* по c_ν.

Чтобы функция $F_0^*(c)$ была выпукла вверх, достаточно, чтобы матрица $\Gamma = ||\Gamma_{ij}||$ была отрицательно определенной. Первые слагаемые в выражениях (5.25) отличаются от элементов γ_{ij} матрицы Гессе исходной задачи неотрицательным множителем, так как функция F_0 монотонно возрастающая. Если вторые слагаемые в этих выражениях равны нулю, то вогнутой функции достижимости исходной задачи будет соответствовать вогнутость и $F_0^*(c)$. Однако наличие второго слагаемого позволяет в ряде случаев добиться отрицательной определенности матрицы Г.

Пример:

Пусть $f_0^*(c)$ определена на интервале $0 \leq c \leq 1$ и имеет вид (рис. 27)

$$f_0^*(c) = (c-2)^2 - 5.$$

Эта функция вогнута. Ее вторая призводная

$$d^2 f_0^*/dc^2 = 2.$$

Сама же она в интервале $(0,1)$ меняется от -1 до -4.

Выберем преобразование $F_0(f_0)$ в форме

$$F_0(f_0^*) = (f_0^*)^k$$

и подберем такое значение показателя степени k, для которого величина $d^2 F_0^*/dc^2$ оказалась бы отрицательной для любого $c \leq [0,1]$. В соответствии с (5.23) для скалярного случая имеем

$$\frac{d^2 F_0}{dc^2} = \frac{dF_0}{df_0^*}\frac{d^2 f_0^*}{dc^2} + \frac{d^2 F_0}{df_0^{*2}}\left(\frac{df_0^*}{dc}\right) = k f_0^{*k-1} 2 + k(k-1) f_0^{*k-2} 4 \leq 0.$$

Если $2k f_0^{*k-1} > 0$, то на эту величину можно сократить, причем знак неравенства не изменится. Получим для выбора k условие

$$1 + \max_{c \in [0,1]} \frac{2(k-1)}{f_0^*(c)}(c-2)^2 \leq 0.$$

Так как второе слагаемое отрицательно, оно достигает максимума при $c = 1$, ($f_0^* = -4$) и равно $-\frac{1}{2}(k-1)$, так что

$$\frac{k-1}{2} \geq 1$$

или $k \geq 3$.

При $k = 3$ условие $2kf^{k-1} > 0$ выполнено для любых значений $f_0^*[-1,-4]$, причем меньшим значениям f_0 соответствуют меньшие значения F_0. Функция достижимости преобразованной задачи для $F_0 = f_0^3$ показана на рис. 27.

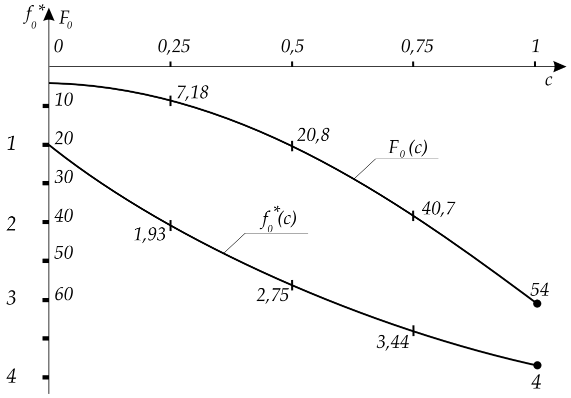


Рис. 27: Пример монотонного преобразования, меняющего знак второй производной функции достижимости.

Расширение с использованием исчезающего слагаемого

Обобщением расширения Лагранжа для задачи НП является задача

$$R = f_0(x) + \Phi(f(x)). \tag{5.26}$$

Здесь Φ — произвольная непрерывная функция, причем

$$\Phi(0) = 0.$$

На множестве D, когда $f(x) = 0$, целевые функции исходной и расширенной задач равны, а слагаемое $\Phi(f)$ — исчезает.

Расширению (5.26) соответствует задача вида

$$R = f_0(x) + \Phi(f(x)) \to \max \Bigg/ \begin{array}{c} f(x) = 0, \\ x \in V_x \end{array} \tag{5.27}$$

Функция достижимости задачи (5.27) равна

$$R^*(c) = f_0^*(c) + \Phi(c).$$

Градиент и элементы матрицы Гессе для этой функции имеют вид

$$\frac{\partial R^*}{\partial c_i} = \frac{\partial f_0^*}{\partial c_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial c_i}, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{5.28}$$

$$\frac{\partial^2 R^*}{\partial c_i \partial c_j} = \frac{\partial^2 f_0^*}{\partial c_i \partial c_j} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial c_i \partial c_j}, \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots \\ j = 1, 2, \dots \end{array} . \tag{5.29}$$

Таким образом, матрица Гессе для функции достижимости преобразованной задачи представляет собой сумму

$$\Gamma = \gamma + M,$$

где γ и M — матрицы Гессе функции достижимости исходной задачи и исчезающего слагаемого соответственно. В том частном случае, когда функция Φ линейна, расширение (5.26) совпадает с расширением Лагранжа и выпуклость $R^*(c)$ определяется выпуклостью f_0^*.

Обсудим вопрос о том, как выбирать функцию Φ, чтобы достичь эквивалентности расширения. Как уже отмечалось, для эквивалентности расширения требуется, чтобы максимум на множестве V_c функции достижимости $R^*(c)$ задачи (5.27) оказался в точке $c = 0$. Иначе говоря, чтобы через точку $R^*(0)$ графика $R^*(c)$ можно было провести горизонтальную плоскость, проходящую выше графика $R^*(c)$. Это требование можно записать в форме уравнения относительно функции Φ или ее параметров

$$\operatorname{argmax}_c R^*(c, \Phi) = 0. \tag{5.30}$$

Пусть функция $R^*(c)$ дифференцируема, тогда для эквивалентности необходимо, чтобы в точке $c = 0$ она была стационарна, т.е.

$$\left(\frac{\partial f_0^*}{\partial c_i}\right)_{c=0} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial c_i}\right)_{c=0}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Следовательно, в точке $c = 0$ градиенты функций f_0^* и Φ должны быть равны по величине и противоположны по знаку. Достаточным же условием эквивалентности является выполнение условий стационарности при $c = 0$ и выпуклость функции $R^*(c, \Phi)$.

Другим общим соображением, определяющим выбор Φ, является то, что на множестве D, т.е. при $c = 0$, всегда $R^*(0) = f_0^*(0)$, и эта ордината R^* не зависит от вида и параметров функции Φ. Так как мы хотим, чтобы $R^*(0)$ оказалось максимальным значением $R^*(c)$, то функция $\Phi(c)$ должна уменьшать

$R^*(c,\Phi)$ как при $c<0$, так и при $c>0$. При этом обсолютный максимум $R^*(c)$ заведомо уменьшается, а так как он ограничен снизу величиной $R^*(0)$, то можно надеяться, что в пределе он стремится к этой величине.

Наконец, последнее соображение, позволяющее в ряде случаев легко найти вид функции Φ, основано на лемме Кротова (см. п.4). Для эквивалентности расширения достаточно, чтобы оптимальное решение расширенной задачи или одно из ее оптимальных решений, если их несколько, оказалось допустимым для исходной задачи, т.е. удовлетворяло связям $f_i(x)=0 (i=1,2,\ldots,m)$. Пусть нам удалось так выбрать Φ, чтобы функция R в расширенной задаче достигала максимума для очень многих значений вектора $x\in V_x^*$, и хотя бы одно из них оказалось допустимым, тогда, согласно лемме Кротова, расширение эквивалентно. На методике выбора функции Φ, при котором пересечение множества V_x^* и D_A заведомо не пусто, мы остановимся ниже.

5.3 Расширение с использованием штрафных функций

Определение. *Функцию $\Phi(\alpha,x)$ называют штрафной функцией множества, если Φ (α,x) неположительна для всех $\alpha>0$ и $x\in R^N$, равна нулю для $x\in V$ и стремится к минус бесконечности при $\alpha\to\infty$ для любого $x\notin V$.*

Для множества, заданного неравенствами $\varphi_\nu(x)\geq 0 \quad (\nu=1,2,\ldots,)$, функция $\Phi(\alpha,x)$ может, например, иметь вид

$$\Phi_1(\alpha,x)=\alpha\sum_{\nu=1}^{m}[\varphi_\nu(x)],$$
$$\Phi_2(\alpha,x)=-\alpha\sum_{\nu=1}^{m}[\varphi_\nu(x)]_-^{\pounds},$$
$$\Phi_3(\alpha,x)=1-(1+\sum_{\nu=1}^{m}[\varphi_\nu(x)])_+^{\alpha}.$$

Здесь $[\varphi_\nu(x)]_-$ — «срез» функции $\varphi_\nu(x)$ (рис. 28), т.е.

$$[\varphi_\nu(x)]_-=\min[0;\varphi_\nu(x)],\quad [\varphi_\nu(x)]_+=\max[0;\varphi_\nu(x)].$$

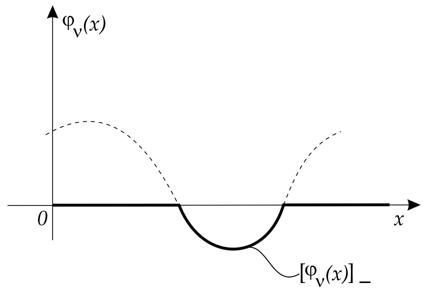


Рис. 28: Срез функции φ_ν.

Для множества, выделяемого равенствами $f_i(x) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots, n)$, возможны, например, штрафные функции вида

$$\Phi_4(\alpha, x) = -\alpha \sum_{i=1}^{n} f_i^2(x), \tag{5.31}$$

$$\Phi_5(\alpha, x) = -\alpha \sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|. \tag{5.32}$$

Если в задаче имеются и связи, и ограничения, выделяющие множество D, то нетрудно образовать штрафную функцию, например, такого вида

$$\Phi(\alpha, x) = \alpha \left(\sum_{\nu=1}^{m} [\varphi_\nu(x)]_- - \sum_{i=1}^{n} |f_i(x)| \right).$$

Расширение для задачи нелинейного программирования образуется с использованием штрафной функции множества ее допустимых решений

$$R(x, \alpha) = [f_0(x) + \Phi(\alpha, x)] \to \max / x \in V_x.$$

При фиксированном α решение этой задачи $x^*(\alpha)$ не обязательно принадлежит D, а значит

$$R(x^*(\alpha), \alpha) \geq \max_{x \in D} f_0(x).$$

По мере роста α штраф за нарушение условий задачи растет и максимум по x $R(x, \alpha) = R^*(\alpha)$ стремится к значению задачи нелинейного программирования $f_0(x^*)$ при некоторых условиях, которые приведем без доказательства [15].

Пусть последовательность $x^*(\alpha)$ имеет при $\alpha \to \infty$ предельную точку; множество, определяемое условиями $|f_1(x)| \leq \varepsilon, \quad \varphi_\nu(x) \geq -\varepsilon$, ограничено при *некотором $\varepsilon > 0$; функции f_0, f_i, φ_ν определены и непрерывны в R^n, а f_0 ограничена сверху; функция $\Phi(\alpha, x)$ является штрафной функцией множества D в смысле данного выше определения и для любого α непрерывно и монотонно зависит от f_i и φ_ν. Тогда $\lim\limits_{\alpha\to\infty} x^*(\alpha) = x$, а $\lim\limits_{\alpha\to\infty} f_0(x^*(\alpha)) = f_0(x^*)$.*

Отметим, что число параметров расширения в данном случае не связано с числом условий, как при расширении Лагранжа. Например, множетель α может быть скалярным.

Остановимся подробнее на некоторых видах штрафных функций для задачи с условиями в форме равенств.

а) Квадратичный штраф

$$\Phi(f) = -\alpha \sum_{i=1}^{m} f_i^2(x), \tag{5.33}$$

величина $\alpha > 0$. Функции $\Phi(c)$ в (5.27)

$$\Phi(c) = -\alpha \sum_{i=1}^{m} c_i^2. \tag{5.34}$$

Казалось бы, при достаточно большом α можно добиться, чтобы максимум $R^*(c)$ оказался в точке $c = 0$. Покажем, что это не так.

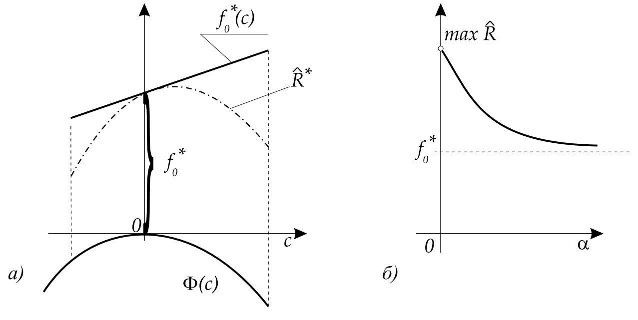


Рис. 29: Вид функции $R^*(c)$ для квадратичного штрафа (а) и изменение максимума R с ростом α (б).

С ростом α (см. рис. 29) функция $\Phi(c)$ становится все круче, величина максимума $R^*(c)$ на множестве V_c становится все ближе к $R^*(0)$, а значит и к $f_0^*(0)$.

Оценка, полученная из решения задачи

$$R^*(\alpha) = \max_{x \in V_x} [f_0(x) - \alpha \sum_{i=1}^{m} f_i^2(x)], \tag{5.35}$$

с ростом α уменьшается и стремится к значению задачи НП, но как правило лишь при $\alpha \to \infty$ (рис. 29б).

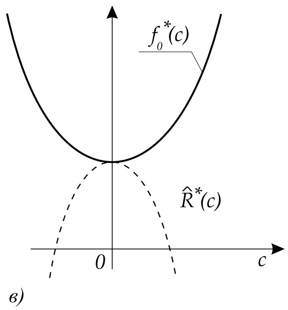


Рис. 30: Пример функции достижимости задачи НП, для которой расширение с квадратичным штрафом эквивалентно при конечном α.

С другой стороны, невыпуклость $f_0^*(c)$ часто не препятствует использованию квадратичного штрафа. Пусть, например, $f_0^*(c) = 1 + c^2$ (рис. 30), функция вогнута и использование расширения Лагранжа не позволяет свести задачу условной оптимизации к безусловной. Функция достижимости в задаче с использованием квадратичного штрафа имеет вид

$$R^*(c) = (1 + c^2) - \alpha c^2.$$

Достаточно принять $\alpha = 2$, чтобы ее абсолютный максимум оказался в точке $c = 0$, так как $R^*(c) = 1 - c^2$. Отметим, что в точке $c = 0$ функция $f_0^*(c)$ стационарна. Именно этот факт и позволил добиться эквивалентности расширения при конечном значении α.

б) Модульный штраф

Из сказанного выше следует, что достижению эквивалентности расширения при использовании квадратичного штрафа с конечным α препятствует то, что в этом случае градиент Φ по c при $c = 0$ обращается в ноль. Это же характерно для любой функции штрафа, дифференцируемой в нуле, так как точка $c = 0$ всегда является точкой максимума $\Phi(c)$. Однако можно использовать функции штрафа, не имеющие градиента в точке $c = 0$. Наибольшее распространение получил модульный штраф (рис. 31а). Для этого случая функция достижимости

$$R^*(c, \alpha) = f_0^*(c) - \alpha \sum_{i=1}^{m} |c_i| \tag{5.36}$$

На рис. 31а показан характер изменения $R^*(c, \alpha)$ с ростом α, а на рис. 31б — изменение значения расширенной задачи, т.е. абсолютного максимума $R^*(c, \alpha)$ на множестве V_c. При некотором конечном $\alpha = \alpha^0$ абсолютный максимум $R^*(c, \alpha)$ достигается в точке $c = 0$, несмотря на то, что наклон $f_0^*(c)$ положителен, а сама эта функция вогнута. При $\alpha > \alpha^0$ этот максимум не изменяется.

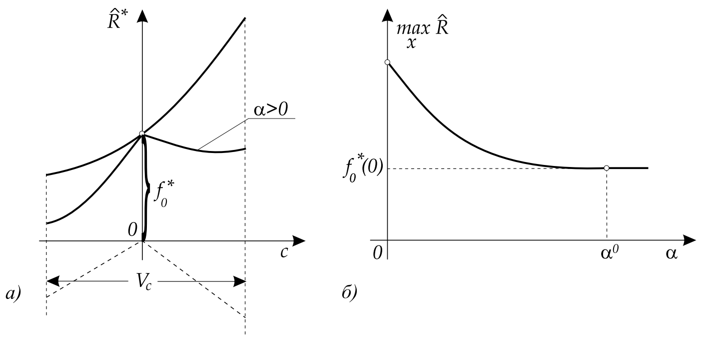


Рис. 31: Вид функции $R^*(c)$ для модульного штрафа (а) и зависимость $\max R$ по x от α (б).

Неудобство модульного штрафа состоит в том, что целевая функция расширенной задачи не является гладкой функцией и ее градиент по x не существует при $x \in D$.

Комбинация функции Лагранжа с квадратичным штрафом

Составим расширенную задачу в форме

$$R(x, \alpha, \lambda) = f_0(x) + \sum_i \lambda_i f_i(x) - \alpha \sum_i f_i^2(x) \to \max / x \in V_x. \tag{5.37}$$

Соответствующая ей функция достижимости

$$R^*(c, \alpha, \lambda) = f_0^*(c) + \sum_i \lambda_i c_i - \alpha \sum_i c_i^2. \tag{5.38}$$

Если теперь выбрать

$$\lambda_i = -\left(\frac{\partial f_0^*}{\partial c_i}\right)_{c=0}, \tag{5.39}$$

то градиент суммы первых двух слагаемых в (5.38) в точке $c = 0$ окажется равным нулю, а в этом случае, как показано выше, при конечном α может быть достигнут абсолютный максимум R^* по c в точке $c = 0$. (При этом множество V_c мы предполагаем ограниченным, а если это не так, то при $c \to \infty$ считаем, что $f_0^*(c)$ растет не быстрее квадратичной параболы).

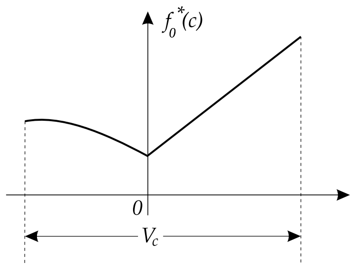


Рис. 32: Пример функции достижимости, для которой комбинация функции Лагранжа с квадратичным штрафом не приводит к эквивалентному расширению.

Класс задач, для которых комбинированное расширение эквивалентно при конечных λ и α, гораздо шире, чем для расширения Лагранжа и для расширения с использованием квадратичного штрафа. Однако и в этом случае не для всех задач удается добиться эквивалентности. Примером может служить задача, функция достижимости $f_0^*(c)$ для которой показана на рис. 32. Действительно, ни при каком ограниченном α добавление слагаемого $-\alpha c^2$ не приведет к тому, что сумма $f_0^*(c) - \alpha c^2$ будет выпукла в окрестности $c = 0$, а это означает (см. выше), что не существует такого λ – множителя, для которого

$$R^*(c) = f_0^*(c) - \alpha c^2 + \lambda c$$

была бы максимальна в точке $c = 0$. Между тем расширение с использованием модульной функции штрафа в данном случае эквивалентно при конечном α.

6 Анализ алгоритмов решения задачи НП

В этом пункте понятия расширения и функции достижимости задачи нелинейного программирования использованы для анализа способов ее решения. Вначале мы рассмотрим задачу с сепарабельной структурой, для которой переход к расширению Лагранжа позволяет провести ее декомпозицию. Затем остановимся на численных алгоритмах решения общей задачи НП.

6.1 Эквивалентность расширения и возможность декомпозиции

При решении задач оптимизации большой размерности их стремятся свести к последовательному решению нескольких задач с меньшей размерностью вектора искомых переменных. Такое разбиение — декомпозицию задачи — далеко не всегда удается провести. Как мы убедимся ниже, возможность декомпозиции тесно связана с эквивалентностью расширения Лагранжа для задачи НП.

Будем рассматривать задачу с сепарабельной структурой. Напомним, что функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называют сепарабельной, если она может быть представлена как сумма n-функций, каждая из которых зависит только от одной переменной.

Рассмотрим задачу вида

$$f_0(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{0i}(x_j) \to \max \tag{6.1}$$

при условиях

$$f_j(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{ji}(x_i) - S_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m < n; \tag{6.2}$$

$$x_i \in V_{xi}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.3}$$

В этой задаче и целевая функция $f_0(x)$ и функции $f_j(x)$, определяющие множество D, сепарабельны. Условия (6.3) наложены на каждую из составляющих вектора x в отдельности.

Запишем расширение Лагранжа для задачи (6.1)–(6.3):

$$R = f_0(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[f_{0i}(x_i) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (f_{ji}(x_i) - S_j) \right] \to \max / x \in V_x. \tag{6.4}$$

Отметим, что функция Лагранжа сепарабельна, причем, в отличие от исходной задачи, в задаче (6.4), отсутствуют ограничения (6.2), связывающие друг с другом отдельные составляющие вектора x. При фиксированных λ_j задача (6.4) распадается на n задач меньшей размерности:

$$r_i = f_{0i}(x_i) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_{ij}(x_i) \to \max / x_i^{\min} \le x_i \le x_i^{\max}. \tag{6.5}$$

Здесь S_j не учтены, так как они постоянны и не влияют на оптимальное решение задач (6.5). Если расширение (6.4) эквивалентно, т.е. найдется такой вектор λ, что решение задач (6.5) удовлетворит условиям (6.2), то переход к задачам (6.5) меньшей размерности правомерен. В противном случае такой переход не приведет к решению исходной задачи. Как было показано выше, эквивалентность расширения Лагранжа можно гарантировать, если функция достижимости исходной задачи выпукла или совпадает со своей выпуклой оболочкой в точке $c = 0$.

6.2 Анализ некоторых вычислительных алгоритмов решения задачи НП

В предыдущем разделе мы рассмотрели несколько способов сведения задачи НП к решению расширенной задачи безусловной оптимизации с подбором тех или иных параметров, входящих в расширенную задачу. Здесь мы остановимся подробнее на алгоритмической реализации такого подхода.

При решении задачи мы в действительности не знаем функции достижимости $f_0^*(c)$, но можем по некоторому закону менять параметры рсширенной задачи и находить, реализуя тот или иной метод безусловной оптимизации, соответствующие им значение и решение этой задачи. Попытаемся выяснить, как связаны решение и значение расширенной задачи с ее параметрами и по какому закону следует их изменять.

Пусть для задачи НП

$$f_0(x) \to \max / f(x) = 0; \quad x \in V_x$$

построено расширение (6.6)

$$R(f_0(x), f(x), \lambda) \to \max / x \in V_x, \tag{6.6}$$

причем при всех f, λ функция R монотонна по f_0. Пусть, кроме того, вектор-функция $f(x)$ определена в каждой точке множества V_x, т.е. принимает в ней фиксированное значение c. Тогда решению расширенной задачи $x^*(\lambda)$ соответствует значение функции f, равное $c(\lambda)$, а

$$f_0(x^*(\lambda)) = f_0^*(c(\lambda)).$$

Действительно, при фиксированном $f = c$ максимум R достигается только за счет максимизации f_0. Таким образом, $x^*(\lambda)$ доставляет $f_0(x)$ максимум при $f = c(\lambda)$, т.е. решение расширенной задачи реализует одну из ординат функции достижимости исходной задачи. При изменении λ вектор $x^*(\lambda)$ перемещается на множестве V_x, меняются величина $c(\lambda)$ и значение $R(x^*(\lambda), \lambda)$ расширенной задачи. Нас интересуют, как правило следующие вопросы:

1. Какие ординаты функции достижимости могут быть подсчитаны таким образом?

2. Пересечет ли траектория $x^*(\lambda)$ поверхность, выделяемую условиями $f(x) = 0$ (множество допустимых решений исходной задачи)? Если пересечет, расширение эквивалентно.

Для эквивалентного расширения найдется такое $\lambda = \lambda^*$, что $x^*(\lambda)$ удовлетворяет условиям $f(x) = 0$, а ординаты функции достижимости, которые могут быть получены при максимизации функции (6.6), включают ординату для

$c = 0$. При $\lambda = \lambda^*$ функция $R(c, f_0^*(c))$, полученная из (6.6) подстановкой вместо $f(x)$ вектора c, а вместо $f_0(x)$ — функции достижимости достигает абсолютного максимума в точке $c = 0$.

Для расширения Лагранжа, когда в (6.6)

$$R(f_0(x), f(x), \lambda) = f_0(x) + \sum_i \lambda_i f_i(x),$$

справедлива теорема Эверета: *Ординаты функции достижимости $f_0^*(c)$ задачи* (6.1)*, которые могут быть подсчитаны при решении расширенной задачи для различных значений λ, соответствуют тем участкам этой функции, на которых $f_0^*(c)$ совпадает со своей выпуклой оболочкой на множестве V_c.* Доказательство этой теоремы непосредственно следует из построений, приведенных в п.5.

В предположении эквивалентности расширения вычисление решения исходной задачи сводится к решению двойственной задачи

$$R(x, \lambda) \to \min_{\lambda} \max_{x} \Big/ \begin{matrix} \lambda \in V_\lambda \\ x \in V_x \end{matrix} \tag{6.7}$$

Алгоритмы отличаются друг от друга видом функции R и способом нахождения минимума и максимума в (6.7).

А. Поиск седловой точки функции Лагранжа

В этом случае функция R имеет форму (6.6). Алгоритм примет вид

$$x^{k+1} = x^k + \gamma \nabla_x R = x^k + \gamma[\nabla f_0(x) + \sum_i \lambda_i^k \nabla f_i(x)]; \tag{6.8}$$

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k - \gamma \nabla_\lambda R = \lambda^k - \gamma f(x^k). \tag{6.9}$$

В этих формулах параметр γ, определяющий величину шага, может быть различным по величине, но в обеих формулах он положителен. Алгоритм не всегда сходиться к решению двойственной задачи (6.7), он может остановиться в точке, удовлетворяющей необходимым условиям оптимальности этой задачи, в которой максимум по x и минимум по λ — локальные. Кроме того, в условиях (6.8) фигурируют градиенты функций f_0 и f_i, а значит алгоритм применим только для дифференцируемых функций f_0 и f_i.

Априори мы как правило, не знаем функции $f_0^*(c)$. Рассмотрим, как ведет себя алгоритм поиска седловой точки в случае, когда выпуклая оболочка функции достижимости проходит в точке $c = 0$ строго выше самой этой функции (рис. 33а). При изменении λ из условий (6.8), (6.9) для некоторого λ^* функция $R^*(c, \lambda^*) = f_0^*(c) = \sum_i \lambda_i^* c_i$ будет иметь несколько одинаковых максимумов, каждый из которых выше $f_0^*(0)$.

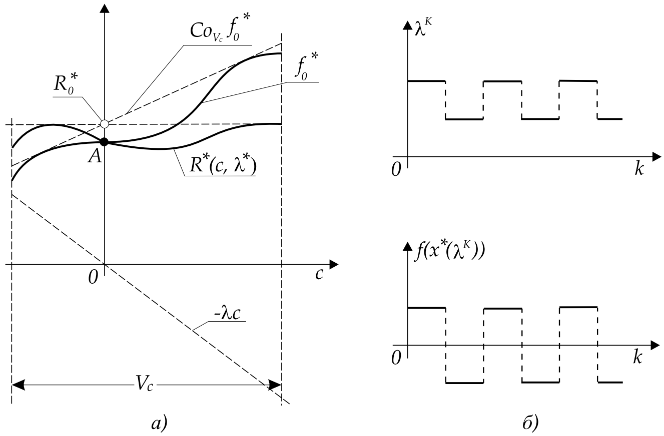


Рис. 33: Характер функции достижимости (а) и изменение по итерациям значений λ и максимума f_0 (б).

Точка A при изменении λ всегда лежит на графике $R^*(c, \lambda)$, но ни при каких λ не является точкой ее максимума. Величина R^* дает верхнюю оценку значения задачи НП; любое даже малое изменение λ, в силу условий (6.9) приводит к таким изменениям $x^{k+1}(\lambda^k)$, при которых знак функций $f_i(x)$ меняется. В соответствии с условиями (6.8) значения множителей Лагранжа колеблются от итерации к итерации, средние же их значения, подсчитанные по двум соседним итерациям, меняются незначительно и равны составляющим градиента $Co_{V_c} f_0^*(c)$ в точке $c = 0$ (рис. 33.б). Эти соображения могут быть использованы для введения в функцию R таких добавочных слагаемых, чтобы расширение оказалось эквивалентно.

Б. Комбинация функции Лагранжа с квадратичной функцией

штрафа

$$R(x, \lambda, \alpha) = f_0(x) + \sum_i \lambda_i f_i(x) - \alpha \sum_i f_i^2(x). \qquad (6.10)$$

Как уже упоминалось, расширение с использованием исчезающего слагаемого (6.10) эквивалентно при конечных значениях λ и α для непрерывной функции $f_0^*(c)$ независимо от того, выпукла она или нет. На первый взгляд кажется, что нужно взять достаточно большое значение $\alpha = \alpha^0$, зафиксировать его и использовать для выбора λ формулу (6.8), а x находить согласно выражению

$$x^{k+1} = \arg\max_{x \in V_x} [f_0(x) + \sum_i \lambda_i^k f_i(x) - \alpha^0 \sum_i f_i^2(x)]. \qquad (6.11)$$

Однако чем больше α^0, тем более ярко выражен овражный характер функции R и тем труднее решить задачу безусловной максимизации (6.11). Поэтому стремятся тем или иным способом оценить то минимальное значение α, при котором расширение задачи НП эквивалентно.

Изложим одну из возможных схем выбора параметров λ и α [6]:

1 шаг. Полагают $\lambda^0 = 0$, а множитель $\alpha = \alpha^0$ — некоторому ограниченному значению и решают задачу.

$$R = f_0(x) - \alpha^0 \sum_i f_i^2(x) \to \max / x \in V_x. \qquad (6.12)$$

Обозначим ее решение через x^0; значения $f_i(x^0) = c_i^0$.

2 шаг. Аппроксимируют функцию достижимости $f_0^*(c)$ в окрестности $c = 0$ плоскостью

$$f_0^*(c) \approx f_0^*(0) + \sum_i k_i^0 c_i \qquad (6.13)$$

Выберают λ_i так, чтобы функция достижимости расширенной задачи,

$$R_0^*(c) = f_0^*() + \sum_i \lambda_i c_i$$

в которой вместо $f_0^*(c)$ фигурирует её линейное приближение (6.12), достигала в точке $c = 0$ абсолютного максимума. Подставив в $R_0^*(c)$ правую часть равенства (6.13), получим

$$\lambda_i^0 = -k_i^0.$$

Величину же k_i^0 найдем через α^0 и c^0 из того условия, что абсолютный максимум функции достижимости расширенной задачи, достигается в точке c^0:

$$\frac{\partial}{\partial c_i}[f_0^*(c) - \alpha^0 \sum_i c_i^2]_{c=c_0} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Подставляя в это равенство выражение (6.13), получим

$$k_i^0 + 2\alpha^0 c_i^0 = 0,$$

откуда

$$\lambda_i^0 = -k_i^0 = 2\alpha^0 c_i^0. \tag{6.14}$$

Если функция достижимости действительно линейна, то найденные значения λ_i^0 — точные и подстановка их в (6.11) позволяет получить решение исходной задачи в первом же цикле алгоритма.

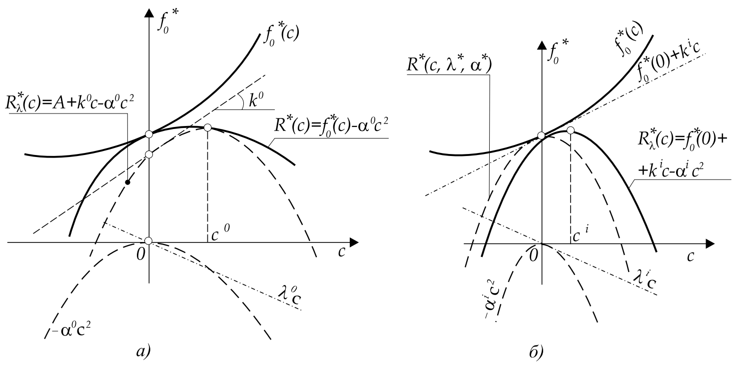


Рис. 34: Функция достижимости расширенной задачи при начальных (а) и окончательных (б) значениях неопределенных параметров.

В общем случае, если найденное согласно (6.11) решение не оказалось допустимым, увеличивают α и повторяют процедуру решения. Этот алгоритм реализует общую схему последовательной линеаризации Ньютона (алгоритм касательных для решения нелинейных уравнений) и сходится за конечное число шагов (рис. 34).

6.3 Характер изменения значения и решения расширенной задачи при изменении неопределенных параметров

Проследим, как меняется значение расширенной задачи

$$R(f_0(x), f(x), \lambda) = f_0(x) + \Phi(\lambda, f) \to \max / x \in V_x \tag{6.15}$$

при изменении λ и каким образом меняется ее решение. Как уже отмечалось, функция достижимости, соответствующая (6.15), имеет вид

$$R^*(c, \lambda) = f_0^*(c) + \Phi(\lambda, c). \tag{6.16}$$

Точка $c^*(\lambda)$, для которой выражение (6.16) достигает абсолютного максимума на множестве V_c, позволяет сказать, каково значение задачи (6.15)

$$R^{**}(\lambda) = R^*(c^*(\lambda), \lambda) \tag{6.17}$$

и как сильно нарушены на оптимальном решении этой задачи уравнения связей. Если оказалось, что при некотором λ вектор $c^*(\lambda)$ равен нулю, то решение расширенной задачи и ее значение совпадают с решением и значением исходной.

Для упрощения выкладок ниже будем полагать, что в исходной задаче всего одно условие $f(x) = 0$, а значит c в (6.16) — скалярная величина. Функцию $R^*(c, \lambda)$ будем предполагать непрерывно дифференцируемой. Тогда в точке максимума c^* для любого λ

$$\frac{\partial R^*}{\partial c} = \frac{df_0^*}{dc} + \frac{\partial \Phi}{\partial c} = M(c, \lambda) = 0. \tag{6.18}$$

Это условие позволяет найти производную $c^*(\lambda)$ по λ. Действительно,

$$\frac{\partial M}{\partial c}\delta c + \frac{\partial M}{\partial \lambda}\delta\lambda = 0$$

или

$$\left(\frac{d^2 f_0^*}{dc^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial c^2}\right)\delta c^* + \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial c}\right)\delta\lambda = 0,$$

откуда

$$\frac{dc^*}{d\lambda} = -\frac{(\partial^2\Phi/\partial c\partial\lambda)_{c^*}}{\left(\frac{\partial^2 f_0^*}{\partial c^2}\right)_{c^*} + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial c^2}\right)_{c^*}}. \tag{6.19}$$

Производная значения R^{**} расширенной задачи по λ,

$$\frac{dR^*(c^*(\lambda),\lambda)}{d\lambda} = \left(\frac{\partial R^*}{\partial \lambda}\right)_{c*} + \left(\frac{\partial R^*}{\partial c}\right)_{c*}\frac{dc^*}{d\lambda}. \tag{6.20}$$

В силу (6.18) второе слагаемое обращается в нуль всюду, где знаменатель выражения (6.19) отличен от нуля. Для всех таких λ полная производная значения расширенной задачи по λ равна частной производной по λ функции достижимости R^*.

Формулы (6.19) и (6.20) основаны на условиях стационарности, как необходимых условиях максимума по c функции $R^*(c,\lambda)$ в точке $c^*(\lambda)$. Они выделяют и точки минимума, и точки локального максимума. Чтобы выделить только точки локального максимума, нужно привлечь условие

$$\left(\frac{\partial^2 R^*}{\partial c^2}\right)_{c^*} = \left(\frac{d^2 f_0^*}{dc^2}\right)_{c*} + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial c^2}\right)_{c^*} < 0. \tag{6.21}$$

Рассмотрим конкретные расширения типа (6.16).

А. Расширение Лагранжа

В этом случае $\Phi(\lambda, f) = \lambda f$, соответственно $\Phi(\lambda, c) = \lambda c$, и выражение (6.19) имеет вид

$$\frac{dc^*}{d\lambda} = \frac{1}{(\partial^2 f_0^*/\partial c^2)_{c^*}}. \tag{6.22}$$

Если функция достижимости строго выпукла, то знаменатель в (6.22) всегда отрицателен, зависимость $c^*(\lambda)$ монотонна, и если множество V_c включает значение $c = 0$, то при некотором λ^* эта функция пересечет ось абсцисс (рис. 35а). Когда функция достижимости строго вогнута, зависимость $c^*(\lambda)$ тоже монотонна, однако c^* уже не точка максимума, а точка минимума $R^*(c,\lambda)$ на V_c. Наконец, если вторая производная функции достижимости меняет знак, то зависимость $c^*(\lambda)$ имеет вид рис. 35б. Пунктиром показаны значения c^*, соответствующие минимуму $R^*(c,\lambda)$.

Значение расширения Лагранжа в соответствии с (6.20) меняется при изменении λ так, что всюду, где $dc^*/d\lambda > 0$,

$$\frac{dR^{**}}{d\lambda} = c^*(\lambda). \tag{6.23}$$

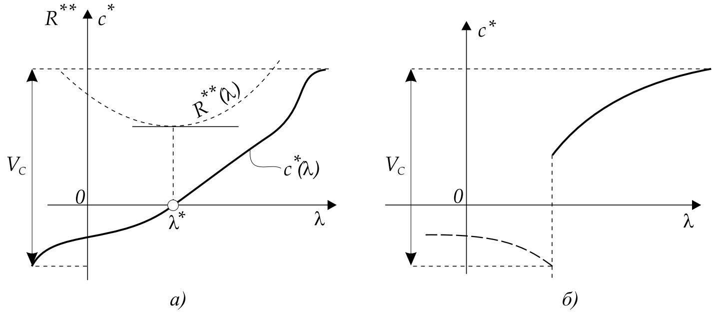


Рис. 35: Изменение положения максимума c^* функции достижимости расширенной задачи с изменением λ-множителя для выпуклой $f_0^*()$ (а) и невыпуклой (б).

Если расширение эквивалентно, то $c^*(\lambda^*) = 0$, а значит $(dR^*/d\lambda)_{\lambda^*} = 0$. Это естественно, ведь λ^* — точка минимума $R^{**}(\lambda)$ (рис. 35а).

Б. Расширение с использованием квадратичного штрафа

Исчезающее слагаемое $\Phi(\alpha, c) = -\alpha c^2$, причем $\alpha > 0$. В соответствии с (6.18)

$$\frac{dc^*}{d\alpha} = \frac{2c^*}{\left(\frac{d^2 f_0^*}{dc^2}\right)_{c^*} - 2\alpha}. \tag{6.24}$$

Условие максимума в точке c^* (6.21)

$$\left(\frac{\partial^2 R}{\partial c^2}\right)_{c^*} = \left(\frac{d^2 f_0}{dc^2}\right)_{c^*} - 2\alpha < 0. \tag{6.25}$$

Из (6.24), (6.25) следует, что при достаточно больших α точка c^* соответствует максимуму расширенной задачи, при этом $dc^*/d\alpha < 0$, т.е. $c^*(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to \infty$. Однако скорость уменьшения c^* падает, так как в числителе (6.25) стоит величина $2c^*$. Если функция достижимости $f_0^*(c)$ строго выпукла, то зависимость $c^*(\alpha)$ имеет вид рис. 36 (кривая «а»). Если же $f_0^*(c)$ строго вогнута, то при малых значениях α знаменатель (6.25) положителен, c^* растет, а затем, начиная с некоторого α, падает (рис. 36, кривая «б»). Пунктиром отмечен

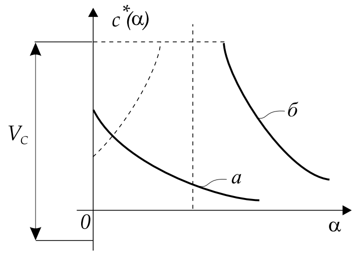


Рис. 36: Зависимость максимума c^* функции достижимости расширенной задачи от параметра α для выпуклой (а) и невыпуклой (б) $f_0^*(c)$.

тот участок на кривой «б», которому соответствуют минимальные значения $R^*(c, \alpha)$.

Поведение значения расширенной задачи определяется формулой (6.20)

$$\frac{dR^{**}}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} R^*(c^*(\alpha), \alpha) = -c^{*2}(\alpha) \tag{6.26}$$

для всех α, при которых знаменатель в (6.24) отличен от нуля. Таким образом, значение расширенной задачи монотонно падает с ростом α и при $c^*(\alpha)$, стремящемся к нулю, асимптотически стремится к значению исходной задачи (рис. 29).

В. Модифицированная функция Лагранжа

Изчезающее слагаемое Φ зададим в форме $\Phi(\lambda, \alpha, f) = \lambda f - \alpha f^2$, причем $\alpha > 0$. Соответственно $\Phi(\lambda, \alpha, c) = \lambda c - \alpha c^2$. Параметры λ и α будем выбирать не независимо друг от друга, а считая, что они связаны некоторой функцией $\lambda = \lambda(\alpha)$.

Запишем выражение (6.24) с учетом этой связи

$$\frac{dc^*}{d\alpha} = \frac{2c^* - \lambda'(\alpha)}{\left(\frac{d^2 f_0^*}{dc^2}\right)_{c^*} - 2\alpha} \tag{6.27}$$

(сравните это выражение с (6.24)). Неравенство, выделяющее точки максимума $R^*(c)$, совпадает в нашем случае с (6.25). Таким образом, знаменатель должен быть отрицателен, начиная с некоторых достаточно больших α. Функцию $\lambda(\alpha)$

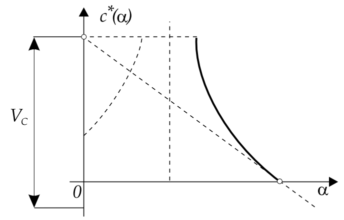


Рис. 37: Изменение максимума c^* функции достижимости расширенной задачи с ростом α при выборе $\lambda(\alpha)$ согласно (6.28).

нужно выбрать так, чтобы с ростом α величина c^* уменьшалась по модулю, причем скорость ее уменьшения не стремилась к нулю при $c^* \to 0$.

Пусть α таково, что знаменатель в (6.27) меньше нуля, тогда условие уменьшения c^* примет вид

$$\operatorname{sign}\left(2c^* - \frac{d\lambda(\alpha)}{d\alpha}\right) = \operatorname{sign}\, c^*,$$

т.е. знак числителя в (6.27) совпадает со знаком c^*. Это условие можно гарантировать, если знак $\dfrac{d\lambda}{d\alpha}$ противоположен знаку c^*. Таким образом, одним из возможных видов зависимости $\lambda(\alpha)$ является

$$\lambda(\alpha) = -\alpha\, \operatorname{sign}\, c^*. \tag{6.28}$$

В этом случае (рис. 37)

$$\frac{dc^*}{d\alpha} = \frac{2c^* + \operatorname{sign}(c^*)}{\left(\frac{d^2 f_0^*}{dc^2}\right)_{c^*} - 2\alpha}.$$

Практически можно принять $\lambda = 0$ и увеличивать α до тех пор, пока для двух соседних итераций не будет выполнено неравенство

$$\frac{c^*(\alpha^k) - c^*(\alpha^{k-1})}{(\alpha^k - \alpha^{k-1})c^*(\alpha^k)} < 0, \tag{6.29}$$

после чего ввести $\lambda(\alpha)$ в функцию $\Phi(\lambda, \alpha, c)$ в соответствии с (6.28).

В общем случае можно задать λ как функцию α и c, а параметры этой функции подобрать так, чтобы обеспечить нужный характер изменения $c^*(\alpha)$.

Зависимость $\lambda(\alpha, c)$ нужно учитывать при вычислении правых частей в (6.19) и (6.20).

Поведение значения расширенной задачи с учетом зависимости $\lambda(\alpha)$ согласно (6.20) определяется выражением

$$\frac{dR^{**}}{d\alpha} = \frac{\partial R^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial R^*}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{d\alpha} = -c^{*2}(\alpha) - c^*(\alpha)\text{sign } c^*(\alpha). \qquad (6.30)$$

При любых c^* правая часть в этом выражении отрицательна, значение расширенной задачи монотонно падает с ростом α (рис. 38). При $\alpha > \alpha^0$ это значение совпадает со значением исходной задачи.

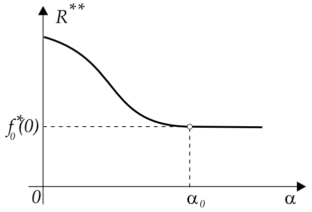


Рис. 38: Зависимость значения расширенной задачи от коэффициента α.

Функция достижимости задачи с неравенствами

$$f_0^*(c) = \max f_0(x) \Big/ \begin{matrix} \varphi(x) \geq c, \\ x \in V_x, \end{matrix} \qquad (6.31)$$

как отмечалось выше, монотонно уменьшается с ростом c, так как множество допустимых решений задачи (6.31) при этом сужается.

$$\frac{df_0^*}{dc} \leq 0. \qquad (6.32)$$

Если множество D в задаче (6.31) содержит внутренние точки, то для ее решения используют методы внутренней точки (методы барьерных функций). При этом вместо задачи (6.31) решают задачу

$$R = f_0(x) + \Phi(r, \varphi(x)) \to \max / x \in V_x, \qquad (6.33)$$

в которой функция $\Phi(r, \varphi)$ неограниченно уменьшается при φ, стремящейся к нулю. Например,

$$\Phi_1(r, \varphi) = -r/\varphi \qquad (6.34)$$

или

$$\Phi_2(r, \varphi) = r \ln \varphi, \tag{6.35}$$

причем $r > 0$ в обоих выражениях. Задача (6.33) не является расширением для задачи с неравенствами, так как не выполнено условие равенства R и f_0 на D, однако подход, основанный на анализе функции достижимости, полезен и в этом случае. Действительно, функция достижимости, соответствующая (6.33), имеет вид

$$R^*(c) = f_0^*(c) + \Phi(r, c). \tag{6.36}$$

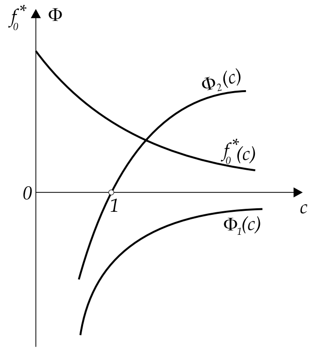


Рис. 39: Характер составляющих функции достижимости при использовании методов внутренней точки.

При выборе Φ по формулам (6.34) и (6.35) слагаемые $R^*(c)$ изображены на рис. 39. При $r \to 0$ второе слагаемое в (6.36) стремится к нулю для всех $c > 0$, а так как функция $f_0^*(c)$ имеет максимум при $c = 0$ (см. (6.32)), то $c^*(r)$ при $r \to 0$ приближается к нулю. При этом, согласно (6.19), для $\Phi(r, \varphi)$ в форме (6.35)

$$\frac{dc^*}{dr} = -\frac{1/c^*}{(\frac{d^2 f_0^*}{dc^2})_{c^*} - r/c^{*2}} = -\frac{c^*}{c^{*2}(\frac{d^2 f_0^*}{dc^2})_{c^*} - r}. \tag{6.37}$$

Таким образом, для выпуклой функции $f_0^*(c)$ знаменатель в (6.37) всегда отрицателен, а так как c^* больше нуля для любых r, то $dc^*/dr > 0$, и при $r \to 0$ значение c^* также стремится к нулю. Причем при малых c^* можно считать, что

$$\frac{dc^*}{dr} \approx \frac{c^*}{r}. \tag{6.36a}$$

Если при некотором достаточно малом $r = r^1$ величина $c^*(r^1) = c^1$, то из (6.36а) следует, что при дальнейшем уменьшении r

$$c^*(r) = \frac{c^1}{r^1}r.$$

Важно, что при этом штрафная добавка

$$\Phi_2^*(c^*(r)) = r\ln c^*(r) = r\ln r + r\frac{c_1^1}{r^1} \tag{6.38}$$

стремится к нулю со скоростью, пропорциональной r. Чтобы показать это, нужно представить первое слагаемое в форме $\ln r/r^{-1}$ и оценить его предел при $r \to 0$ по правилу Лопиталя. Таким образом, $\lim\limits_{r\to 0} R(c^*(r)) = f_0^*(0)$ — значению исходной задачи. Если функция $f_0^*(c)$ не выпукла, то в ряде случаев существенно улучшает решение переход к эквивалентной задаче с использованием монотонного преобразования целевой функции (см. выше).

Преимуществом методов внутренней точки является то, что:

а) в процессе поиска решение всегда остается в допустимой области, так что, прервав поиск, мы всегда получаем допустимое, хотя и приближенное решение;

б) в процессе поиска мы получаем оценку снизу для значения задачи.

Действительно,

$$f_0^*(c^*(r)) \leq f_0^*(0), \tag{6.39}$$

так как значение левой части этого неравенства равно величине функции f_0 в точке $x^*(r)$, являющейся решением задачи (6.33), которое допустимо, но не оптимально.

Недостатки этих методов:

1. Опасность выхода за пределы барьеров и необходимость проверки соблюдения ограничений.

2. При малых значениях r функция имеет овражный характер, что существенно затрудняет поиск максимума R на V_x.

3. Многие эффективные методы поиска безусловного максимума основаны на квадратичной аппроксимации целевой функции. Применительно к функции R такая аппроксимация для малых r неприменима.

В задачах, где наряду с неравенствами имеются равенства, или неравенства таковы, что множество D не имеет внутренних точек, барьерные функции непригодны. В этом случае к задачам с неравенствами применяют методы штрафных функций. Иногда их называют методами внешней точки. Для задач с неравенствами квадратичная функция штрафа запишется как

$$\Phi(\alpha, \varphi) = -\alpha(\min(0, \varphi(x)))^2, \quad \alpha > 0.$$

При больших значениях α все недостатки методов внутренней точки связанные с овражностью, проявляются и в методах штрафных функций. От них свободны, однако, методы, основанные на использовании функции Лагранжа и ее комбинации со штрафными добавками различного типа.

6.4 Расширение за счет ослабления ограничений. Чувствительность значения и решения задачи к изменению ее условий

Расширение задачи НП может быть связано с ослаблением ограничений, когда вместо задачи (6.39) рассматривают расширенную задачу

$$f_0(x) \to \max \Big/ \begin{array}{c} x \in V_x \\ |f(x)| \le \varepsilon \end{array} \tag{6.40}$$

Величина значения этой задачи f_0^* зависит от ε, также как и решение x^*. В реальных условиях мы не знаем функции $f(x)$ абсолютно точно, поэтому практическую ценность представляет решение таких задач, для которых в окрестности $\varepsilon = 0$ зависимости $f_0^*(\varepsilon)$ и $x^*(\varepsilon)$ непрерывны. В первом случае говорят, что задача корректна относительно значения, во втором — относительно решения. Так как зависимость $f_0^*(\varepsilon)$ может быть легко получена по функции достижимости задачи (6.39) как

$$f_0^*(\varepsilon) = \max f_0^*(c)/|c| \le \varepsilon,$$

то непрерывность $f_0^*(\varepsilon)$ в точке $\varepsilon = 0$ соответствует непрерывности $f_0^*(c)$ в этой точке. Как уже упоминалось выше, эта непрерывность тесно связана с невырожденностью решения.

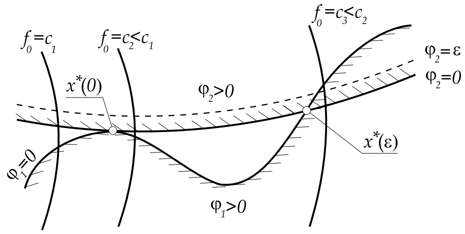


Рис. 40: Линии уровня функции φ_1, φ_2 и f_0 в задаче, некорректной по решению.

Некорректность по решению задачи также возникает в случае, когда решение вырождено. Так, на рис. 40 в точке $x^*(0)$ градиенты ограничений φ_1 и φ_2 коллинеарны и решение вырождено. Изменение любого из этих условий на ε приводит к тому, что решением оказывается точка $x^*(\varepsilon)$, «далекая» от $x^*(0)$, и значение задачи также изменится существенно.

Некорректность по решению может быть и в невырожденном случае, когда на некотором подмножестве множества V_x функция $f_0(x)$ практически постоянна. На рис. 41 показаны функция $f_0(x)$ и линия A на плоскости x_1, x_2, вдоль которой эта функция минимальна. Небольшое изменение функции $f(x)$ (пунктир на рис. 41) приводит к резкому перемещению точки x^*.

7 Усредненные и циклические расширения задачи НП

Целый ряд постановок экстремальных задач содержит наряду с векторными и функциональными переменными их средние значения или средние значения функций, зависящих от этих переменных. Задачу с усреднением можно рассматривать как расширение экстремальной задачи. Здесь мы сопоставим этот способ с другими способами расширения для задачи нелинейного программирования.

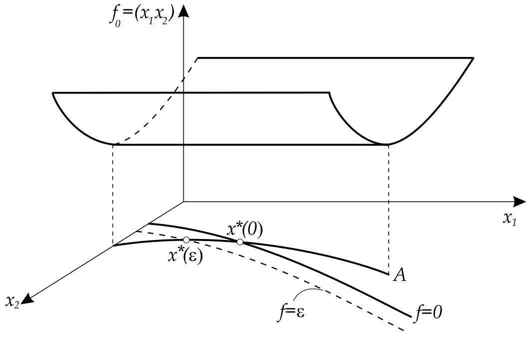


Рис. 41: Вид функции f_0 и проекции ее минимума в задаче некорректной по решению.

Рассмотрим в качестве исходной задачу

$$f(x) \to \max / x \in D, \tag{7.1}$$

искомым решением которой является вектор $x \in D \subset V \subset R^n$.

Пусть из элементов множества V может быть произведена выборка с использованием случайного механизма. Плотность распределения $P(x)$ этой выборки требуется найти. Оценка выбранной функции $P(x)$ (вероятностной меры) может быть произведена по некоторому критерию. В частности, $P(x)$ можно выбирать по условию максимума функции f от среднего по ансамблю значения x. В этом случае задача примет форму

$$f(\overline{x}) = f\left[\int\limits_V xP(x)dx\right] \to \max_{P(x)} \tag{7.2}$$

при условиях:

$$\int\limits_V P(x)dx = 1, \quad P(x) \geq 0. \tag{7.3}$$

Другой способ оценки плотности распределения — среднее значение функции f на множестве решений

$$\overline{f(x)} = \int\limits_V f(x)P(x)dx \to \max_{P(x)} \tag{7.4}$$

при тех же условиях (7.3).

В некоторых задачах не требуется, чтобы каждый элемент выбранных решений принадлежал D. Достаточно, чтобы, например, среднее значение принадлежало D.

$$\int\limits_V xP(x)dx \in D. \tag{7.5}$$

Если задача (7.1) выпукла и ее оптимальное решение равно x^*, то оптимальные распределения $P^*(x)$ в задачах (7.2), (7.4) совпадают. При этом

$$P^*(x) = \delta(x - x^*), \tag{7.6}$$

где δ — функция Дирака. Значения этих трех задач также одинаковы. В общем же случае значение задачи (7.1) не превосходит значения каждой из задач (7.2), (7.4).

Множество допустимых решений задач (7.2), (7.4) не принадлежат пространству R^n, тем не менее согласно определению расширения, приведенному выше, каждая из задач (7.2), (7.4) является расширением для задачи (7.1).

Действительно, в соответствии с этим определением можно установить взаимно–однозначное соответствие между элементами $\tilde{x}$ множества D задачи (7.1) и множеством плотностей распределения D_1 вида

$$P_{\tilde{x}}(x) = \delta(x - \tilde{x}). \tag{7.7}$$

Каждому вектору $\tilde{x}_0 \in D$ соответствует распределение вида $P_{\tilde{x}_0}(x)$ (7.7) и обратно, причем значения $f(x)$ в (7.1), $f(\overline{x})$ в (7.2) и $\overline{f(x)}$ в (7.4) на соответствующих элементах решений совпадают, так что задача (7.1) изоморфна задачам (7.2), (7.4), в которых множество допустимых решений ограничено решениями, имеющими вид (7.7), а x берётся из множества D.

Задачи (7.2) и (7.4), в которых $P(x)$ удовлетворяет только условиям (7.3), (7.5), являются расширением для задач с решениями вида (7.7), а значит и для задачи (7.1).

7.1 Структура оптимального решения усредненных задач

В качестве задачи A рассмотрим задачу нелинейного программирования (НП), в которой для простоты ограничения имеют форму равенств

$$f_0(x) \to \max_x \Big/ f(x) = 0, \quad x \in V_x \subset R^n, \tag{7.8}$$

где $x \in R^n$, f_0 — скалярная, полунепрерывная сверху и ограниченная на V_x, а f — вектор–функция размерности $m < n$; множество V_x замкнуто и ограничено. Сопоставим задаче (7.8) задачу вида

$$\overline{f}_0 = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f_0(x(t))dt \to \max_{x(t)} \Big/ \overline{f} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(x(t))dt = 0, \tag{7.9}$$

$$x(t) \in V_x \in R^n \ \forall t \in [0, \tau].$$

Решение $x(t)$ ищется в классе измеримых функций.

Задача (7.9) является расширением для (7.8), так как из множества ее допустимых решений можно выделить подмножество функций постоянных для почти всех $t \in [0, \tau]$ и каждому вектору $x_0 \in V_x$ в задаче (7.8) сопоставить $x(t) = x_0$.

Каждой функции $x(t)$ можно поставить в соответствие распределение $P(x)$ ее значений, определяющееся долей времени, в течение которой функция пребывает в сколь угодно малой окрестности каждого из принимаемых ею значений. Так, линейной функции, меняющейся за время T от нуля до единицы, соответствует распределение равное единице на отрезке [0,1] и равное нулю за его пределами. Функции, постоянной на $[0, T]$ и равной x_0 соответствует $P(x) = \delta(x - x_0)$ и т.д. Переход от усреднения по времени к усреднению по множеству значений x позволяет переписать задачу (7.9) в форме

$$\overline{f}_0 = \int\limits_{V_x} f_0(x)P(x)dx \to \max_{P(x)} \Big/ \overline{f} = \int\limits_{V_x} f(x)P(x)dx = 0. \tag{7.10}$$

Задача (7.10) представляет собой расширение для задачи (7.8). Ее обозначают как $\overline{\text{НП}}$. Оптимальному решению задачи (7.10) $P^*(x)$ соответствуют сколь угодно много функций $x^*(t)$ в задаче (7.8), для каждой из которых $P(x) =$

$P^*(x)$. Связано это с тем, что $P^*(x)$ зависит от того, какую долю времени функция $x^*(t)$ изменяется в окрестности некоторого значения x^0, но совершенно не зависит от того, когда она мало отлична от x^0, в начале , в конце или в середине отрезка $[0, \tau]$. Исключение составляет случай, когда $P^*(x) = \delta(x - x^0)$. В этом случае функция $x^*(t) = x^0$ постоянна и единственна.

Справедливо следующее **Утверждение:**

1. Оптимальное решение $P^*(x)$ задачи $\overline{НП}$ имеет вид

$$P^*(x) = \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu \delta(x - x^\nu), \tag{7.11}$$

где

$$\gamma_\nu \geq 0, \quad \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu = 1. \tag{7.12}$$

2. Если $P^*(x)$ — искомое решение, то найдется такой ненулевой вектор множителей Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, ...\lambda_m)$ (λ_0 равно нулю или единице), что в точках x^ν функция

$$R = \sum_{\nu=0}^{m} \lambda_j f_j(x) \tag{7.13}$$

достигает абсолютного максимума по $x \in V_x$.

Значения x^ν называют базовыми значениями x. Если оптимальное решение задачи реализуется во времени, то функция $x(t)$ скачкообразно изменяется между базовыми значениями, принимая ν-е из них в течение доли γ_ν от общего интервала времени T. При этом порядок, в котором решение принимает то или иное из базовых значений, роли не играет.

Таким образом, условия оптимальности усредненного расширения $\overline{\text{НП}}$ задачи нелинейного программирования имеют форму «принципа максимума Лагранжа». При этом функция Лагранжа соответствует исходной задаче.

Справедлива **Теорема**: *Необходимые условия оптимальности в форме требования максимума функции Лагранжа справедливы для тех задач НП, для которых усредненное расширение эквивалентно, т.е. значение усредненной задачи совпадает со значением исходной.*

И обратно, расширение (7.9) *эквивалентно задаче* (7.8) *тогда, когда расширение Лагранжа для этой задачи эквивалентно.*

Доказательство этих утверждений приведено в [19]. Здесь отметим только, что число базовых решений зависит только от размерности функции f и не зависит от размерности вектора x, а функция Лагранжа в базовых точках не стационарна, а максимальна. Поясним, с чем это связано.

Пусть на базовом решении x^ν вектор-функция f равна c^ν, тогда можно утверждать, что значение функции f_0 на этом решении больше или равно ее значению на любом допустимом x, для которого $f(x) = c^\nu$. Так что в базовых точках x^ν значение f_0 равно значению функции достижимости $f_0^*(c^\nu)$. Действительно, если бы максимум f_0 при условии, что $f(x) = c^\nu$ достигался в другой точке, то и среднее значение f_0 не было бы максимально-возможным. Таким образом усредненная задача становится задачей о максимуме среднего значения функции достижимости $f_0^*(c)$ при условии, что среднее значение c равно нулю, т.е. о построении выпуклой оболочки функции достижимости задачи НП в нуле. Не удивительно, что число базовых решений зависит только от размерности m вектора c.

В свою очередь, задача о построении выпуклой оболочки функции достижимости в нуле

$$\sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu f_0^*(c_\nu) \to \max \Big/ \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu c_\nu = 0$$

эквивалентна задаче

$$\sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu f_0(x_\nu) \to \max \Big/ \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu f(x_\nu) = 0 \quad x_\nu \in V_x \subset R^n. \tag{7.14}$$

В той и другой задаче выполнены условия (7.12).

Как у всякой задачи нелинейного программирования необходимые условия оптимальности решения утверждают, что найдется ненулевой вектор множителей Лагранжа, для которого на оптимальном решении задачи (7.14), (7.12) ее функция Лагранжа локально неулучшаема по переменным γ_ν. С учетом того, что вариации этих переменных неотрицательны, когда их значение равно нулю, и имеют любой знак, когда их значение положительно, условия локальной неулучшаемости функции Лагранжа задачи (7.14), (7.12) по γ_ν, как читатель может убедиться, приводят к требованию, чтобы функция Лагранжа неусредненной задачи

$$R = \sum_{\nu=0}^{m} \lambda_j f_j(x)$$

в точках x_ν была максимальна, а значит одинакова.

Усреднение в задаче НП может производиться не по всем, а по части переменных. Разобьем переменные в задаче (7.8) на две группы — *детерминированные* x и *рандомизированные* u. Усреднение проводится только по u. Задача $\overline{\text{НП}}^u$ имеет форму

$$\overline{f_0(x,u)}^u \to \max_{x,p(u)} \Big/ \overline{f(x,u)}^u = 0. \tag{7.15}$$

При этом

$$\overline{f_j(x,u)}^u = \frac{1}{T}\int_0^T f_j(x,u(t))dt = \int_{V_u} f_j(x,u)P(u)du, \tag{7.16}$$

$$P(u) \geq 0; \qquad \int_{V_u} P(u)du = 1.$$

Функции $f_j \quad j = 1, 2, ..., m$ непрерывны по u и непрерывно дифференцируемы по x. Условия оптимальности задачи (7.15) имеют следующую форму:

1. Оптимальное распределение рандомизированных переменных имеет вид.

$$P^*(u) = \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu \delta(u - u^\nu), \tag{7.17}$$

$$\gamma_\nu \geq 0, \qquad \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu = 1.$$

2. Если $(x^*, P^*(u))$ — искомое решение, то найдется такой ненулевой вектор $\lambda = (\lambda_0, ...\lambda_m)$, что образованная с его помощью функция Лагранжа $R = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j f_j(x,u)$ локально неулучшаема по детермированным переменным и достигает максимума на множестве V_u для каждого из базовых значений u^ν:

$$\frac{\delta}{\delta x}\left\{\sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu R(x,u^\nu)\right\}\delta x \leq 0,$$

$$u^\nu = \arg\max_{u\in V_u} R(\lambda, x^*, u), \quad \nu = \overline{0,m}. \tag{7.18}$$

Здесь δx — вариация допустимая по условиям $x \in V_x$.

Условия оптимальности для задачи с усреднением по части переменных вытекают из того, что при любом значении x она является усредненной задачей по u, а при любом распределении $P(u)$ она является задачей нелинейного программирования по x.

Вариантов усредненного расширения задачи нелинейного программирования может быть очень много, так как не все ограничения могут зависеть и от детерминированных и от рандомизированных переменных, наряду с усреднением функций могут быть условия в форме функций от средних значений переменных и пр. Доказывать условия оптимальности для каждого варианта постановки нет смысла. Целесообразно записать усредненное расширение задачи НП в канонической форме и получить для нее необходимые условия оптимальности, следствием из которых будут условия оптимальности, приведенные выше. Такие условия получены в [20].

7.2 Циклическое расширение задачи НП и оптимальные установившиеся режимы

Будем рассматривать динамические системы, характеризующиеся конечным числом переменных. *Установившимся* назовем режим системы, при котором для каждой из характеризующих ее переменных $y_\nu(t)$ можно подобрать такой период T_ν, что среднее за этот период значение $y_\nu(t)$ постоянно во времени.

Формально

$$\frac{1}{T_\nu}\int\limits_{t-T_\nu}^{t} y_\nu(\tau)\,d\tau = \overline{y_\nu}. \tag{7.19}$$

Этому определению отвечают статические режимы, в которых $y_\nu(t)$ для всех ν постоянны.

Следующий, более общий подкласс установившихся режимов образуют режимы, для которых можно найти такой период T, что каждый из периодов T_ν укладывается в нем целое число раз. Подобные режимы называют *циклическими*.

Данному выше определению удовлетворяют и режимы, для которых периода T, общего для всех переменных $y_\nu(t)$, не существует. Это соответствует случаю, когда отношение хотя бы двух периодов T_ν к T_μ иррационально. Такие режимы называют *квазициклическими* установившимися режимами.

Если система находится под влиянием внешних факторов, являющихся стационарными случайными процессами, и средние значения характеризующих ее переменных при достаточно большом периоде усреднения T стремятся к некоторому пределу, то установившийся режим называют *стохастическим*.

Переход к установившемуся режиму, отличающемуся от статического, может быть вызван тем, что допустимого по условиям функционирования системы статического режима не существует, либо тем, что показатели эффективности системы в статическом режиме хуже, чем в режимах другого типа.

Приведем некоторые примеры.

1. Человеческий организм в установившемся режиме характеризуется постоянной температурой тела, составом артериальной крови и т.д. Но такие факторы, как давление крови, объем легких и некоторые другие, меняются периодически.

2. Система, состоящая из насоса, емкости (водонапорной башни) и потребителей, даже при постоянном потреблении жидкости $\overline{G}$ работает так, что насос то полностью выключен и подача жидкости в емкость равна нулю, то включен и работает в режиме с производительностью, большей, чем $\overline{G}$. Так что средняя производительность насоса равна $\overline{G}$. Если зависимость производительности насоса g от затрачиваемой мощности S строго выпукла вниз то средняя производительность при той же средней затрачиваемой мощности увеличивается по сравнению со статическим режимом.

Ниже будут рассмотрены главным образом циклические установившиеся режимы, среди которых полезно выделить два предельных класса. Первый класс включает в себя режимы, в которых каждый из периодов T_ν значительно превышает время переходных процессов в системе. При этом каждое из статических состояний предполагается устойчивым. В этом случае можно пренебречь динамикой системы и считать, что при изменении режимных переменных переменные состояния изменяются в соответствии со статическими характеристиками. Такие режимы называют *квазистатическими*.

Второй класс образуют *скользящие* установившиеся режимы, в которых все или некоторые из управляющих переменных изменяются с такой высокой частотой, что за счет инерционности объекта переменные состояния остаются практически неизменными и их значения зависят лишь от осредненного влияния управляющих переменных.

Хотя статический режим и является частным случаем режима циклического, далее, говоря о циклическом режиме, будем подразумевать режим, при котором хотя бы одна из переменных процесса изменяется периодически во времени. Циклический режим будем называть *эффективным*, если переход к этому режиму позволяет получить более высокое, чем в статическом режиме, значение показателя эффективности процесса.

Циклические режимы характерны для систем, у которых допустимого статического режима не существует. Часто это связано с тем, что множество V допустимых значений переменных не выпукло, например, включает только дискретные значения переменных. Так, температура источника тепла, с которым контактирует рабочее тело в тепловой машине, может принимать лишь два значения: T_+ (горячий источник) и T_- (холодный источник). А средняя мощность за цикл должна быть максимальна при тех или иных ограничениях.

Циклические процессы могут быть организованы не только во времени. Переменные могут изменяться и вдоль пространственной координаты. В этом случае в каждом сечении аппарата параметры системы неизменны, а от сечения к сечению они меняются периодически.

Переход от статического режима к циклическому предполагает замену целевой функции ее средним значением за период цикла, замену всех или части ограничений, наложенных для каждого момента времени, усредненными ограничениями. Таким образом, этот переход связан с введением в задачу операции усреднения. При этом необходимо ответить на следующие вопросы:

а) существует ли циклический режим, удовлетворяющий условиям задачи?

б) эффективен ли переход от оптимального статического режима к циклическому?

в) каково возможное значение выигрыша в критерии оптимальности при таком переходе?

г) каковы оптимальные формы изменения управляющих переменных и переменных состояния, условия оптимальности, вычислительные алгоритмы решения?

Ответы на вопросы а) — в) желательно получить, не решая задачи г), что в большинстве случаев достаточно сложно.

Примеры расширений можно продолжить. Важно то, что различные типы расширений связаны друг с другом, а значения расширенных задач могут быть упорядочены. Так, как показано ниже, связь усредненного и циклического расширений во многих случаях позволяет оценить сверху и снизу эффективность перехода к циклическому режиму, решая существенно более простую усредненную задачу вместо задачи об оптимальном цикле.

8 Задача линейного программирования

В задаче линейного программирования (ЛП) все определяющие задачу функции линейны по искомым переменным, т.е.

$$f_\nu(x) = \sum_{i=1}^{n}(b_{\nu i}x_i - b_{\nu 0}), \quad \nu = 0, ..., m. \tag{8.1}$$

В целевой функции ($\nu = 0$) коэффициент b_{00} никак не повлияет на решение, так что его можно принять равным нулю. Если в задаче имеются условия в форме равенств, то из них нетрудно выразить одни переменные через другие, сократив тем самым размерность x. Поэтому задачу линейного программирования формализуют как

$$f_0(x) = \sum_{i=1}^{n} b_{0i}x_i \to \max \tag{8.2}$$

при условиях

$$f_\nu(x) = \sum_{i=1}^{n} b_{\nu i}x_i - b_{\nu 0} \le 0, \quad \nu = 1, ..., m \tag{8.3}$$

и односторонних ограничениях на x вида

$$x_i \ge 0, \quad i = 1, ..., n. \tag{8.4}$$

Нетрудно видеть, что задачу с двусторонними ограничениями на x введением соответствующих переменных можно привести к виду (8.2)–(8.4), так что эта форма записи является достаточно общей.

Изложенные выше методы решения задачи НП, основанные на переходе к безусловной оптимизации, пригодны и в задаче ЛП. Функция достижимости этой задачи выпуклая, кусочно-линейная (читатель может это доказать самостоятельно). Вместе с тем специфика задачи ЛП позволяет использовать и другие алгоритмы, с одним из которых мы познакомимся ниже.

Задаче ЛП посвящена ввиду ее большой практической значимости обширная литература, поэтому мы лишь кратко охарактеризуем ее особенности и учитывающий эти особенности алгоритм решения, предложенный Канторовичем и Данцигом.

8.1 Особенности искомого решения

Каждое из условий (8.3), (8.4) выделяет допустимое по этому условию полупространство. Множество D для задачи ЛП представляет собой пересечение полупространств, т.е. ограничено плоскими гранями.

Эта множество может быть пусто (ограничения противоречат друг другу). Например, для $n = 2$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1 + x_2 + 1 \leq 0.$$

Множество D может быть неограничено вдоль некоторого направления $l = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i$. Здесь γ_i — проекции вектора l на оси координат, а e_i — единичный вектор направленный вдоль i-ой оси. Если $f_0(l)$ не ограничена, то задача ЛП так же не имеет решения. Если же множество D ограничено (замкнуто оно в силу (8.3), (8.4)), а все коэффициенты b_{0i} конечны, то задача ЛП имеет решение. Множество D — выпуклый многогранник.

— Если решение единственно, то оно находится в одной из вершин многогранника D.

— Если решение не единственно, то их сколь-угодно много и они принадлежат либо одному из ребер, либо одной из граней D.

Рис. 42 поясняет эти свойства оптимального решения задачи ЛП.

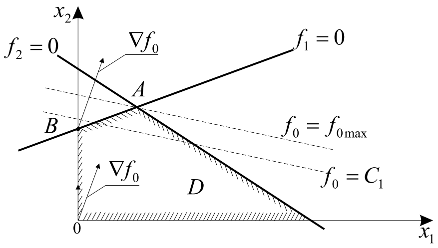


Рис. 42: Свойства решения задачи ЛП.

Условия неотрицательности переменных и функций f_1 и f_2 выделяют заштрихованный многогранник. Он выпуклый, т.к. каждая из его границ — прямая и отсекает все множество, которое лежит по одну ее сторону. Начало координат допустимо, это значит, что $b_{10} > 0$, $b_{20} > 0$. Пунктиром показаны линии уровня функции f_0. С ростом функции f_0 ее линии уровня смещаются, оставаясь параллельными. При некотором значении $f_0 > f_0^*$ пересечение линии уровня с D окажется пусто. Оптимальное решение на рис. 42 соответствует точке A. Если бы линии уровня f_0 были параллельны одной из граней D, то оптимальными могли бы оказаться все точки, лежащие на этой грани, в том числе и вершины D, к ней примыкающие.

8.2 Симплекс-алгоритм

Так как оптимальное решение (или одно из оптимальных решений) задачи ЛП лежит в вершине D, то можно заведомо не рассматривать внутренние точки этого многогранника, а передвигаться от вершины к вершине таким образом, чтобы на каждом шаге функции f_0 возрастала. Так как задача выпукла (хотя и нестрого), то такой алгоритм приведет к оптимальному решению. На этих соображениях и основан симплекс-алгоритм. Геометрически этот алгоритм состоит из следующих шагов:

1. Выбирают одну из вершин X^0 многогранника D.

2. Проверяют «перспективность» ребер, выходящих из X^0. Показателем «перспективности» ребра может быть, например, скорость роста f_0 вдоль ребра или прирост f_0 при переходе вдоль ребра в следующую вершину. Это не одно и то же, так f_0 может вдоль некоторого ребра быстро расти, но само ребро столь «короткое», что прирост целевой функции невелик.

3. По выбранному ребру переходят в следующую вершину X^1, где все повторяют.

Решение X^* найдено, если все ребра, выходящие из вершины X^* «бесперспективны», т.е. f_0 вдоль них не возрастает. Если она убывает вдоль всех ребер, найденное решение единственно, если скорость ее изменения вдоль одного или нескольких ребер, выходящих из X^*, равна нулю, то оптимальных решений сколь угодно много.

Несмотря на прозрачный геометрический смысл, реализация алгоритма требует пояснений.

Частный случай. Рассмотрим первоначально случай, когда для всех ν коэффициенты $b_{\nu 0}$ неотрицательны. Это означает, что начало координат $X^0 = 0$ — одна из вершин многогранника D. И эта вершина выбрана в качестве начальной X^0. В этом случае выбрать грань, вдоль которой функция f_0 растет быстрее, очень просто. Ведь грани в данном случае это оси координат и скорость роста $f_0(x)$ вдоль x равна величине b_{0i}. Поэтому для перехода в следующую вершину находим ту переменную X_j, для которой коэффициент b_{0j} максимален и увеличиваем эту переменную, оставляя все другие переменные равными нулю.

До каких пор можно увеличивать X_j ? До тех пор, пока не окажется нарушенным хотя бы одно из ограничений (8.3). Конечное значение X_j в вершине X^1 равно

$$X_j^1 = \min_{\nu} \frac{b_{\nu 0}}{b_{\nu j}}. \tag{8.1}$$

Прирост же функции f_0

$$\Delta f_0^{01} = b_{0j} X_j^1. \tag{8.2}$$

При этом мы можем считать, что $b_{\nu j}$ и b_{0j} положительны. Если $b_{0j} \leq 0$, то и остальные коэффициенты в функции f_0 неположительны. Это значит, что начало координат — оптимальное решение. Если $b_{\nu j} \leq$, для всех $\nu = 1, ..., m$, то при неограниченном возрастании X_j ни одно из условий (8.3) не нарушится и функцию f_0 можно увеличивать до бесконечности.

На рисунке —- «перспективной» переменной оказалась X_2, т.к. проекция b_{02} на ось ординат градиента f_0 больше, чем его проекция b_{01} на ось абсцисс. Переменная X_2 изменялась до точки B, в которой ограничение f_1 стало равно нулю.

Шаг улучшения (перехода от одной вершины к другой «лучшей») оказался так прост благодаря тому, что X^0 — начало координат. Поэтому возникает желание провести такую замену переменных, чтобы очередная вершина стала в пространстве новых переменных началом координат. Тогда изложенный алгоритм может быть применен на каждом шаге.

Переход к новым переменным. Обозначим значение ν, на котором достигается минимум в (8.1) через μ_2 и введем переменную y_μ как

$$y_\mu = b_{\mu 0} - \sum_{i=1}^{n} b_{\mu i} X_i, \tag{8.3}$$

из равенства (8.3) выразим X_j, которую мы изменяли на предыдущем шаге, через остальные переменные $(X_1, ..., X_{j-1}, X_{j+1}, ..., X_n, y_\mu)$ и подставим в соотношения (8.2), (8.3). Для новых переменных неравенства (8.4) должны быть выполнены, а вершина X^1 (точка B на рисунке ...) является началом координат. Таким образом алгоритм перехода не изменится.

Поиск решения продолжается пока при очередной замене координат все коэффициенты в f_0 окажутся неположительными.

В более общем случае когда начальная вершина X^0, является пересечением n граней многогранника D (n из неравенств (8.3), (8.4) обращаются в равенства) нужно ввести n новых переменных $y_j (j = 1, ..., n)$, так что, например,

$$y_j = b_{j0} - \sum_{i=1}^{n} b_{ji} x_{i1}$$

если j-ое условие (8.3) в X^0 обращается в равенство, и

$$y_j = X_j,$$

если j-ое неравенство (8.4) обращается в равенство. Затем перейти к новым переменным. При этом начальной вершиной окажется начало координат и может быть использован изложенный выше алгоритм.

9 Вариационные задачи условной оптимизации

Исследованию вариационных задач посвящена обширная литература, однако порой остается недостаточно ясной связь и различие этих задач с задачей нелинейного программирования. Использованный выше подход к изложению задачи НП позволяет в предельно-упрощенной и краткой форме наметить связь между конечномерными и вариационными задачами, показать, что схема получения условий оптимальности в задаче НП и ее усредненной постановке может быть перенесена на вариационные задачи с учетом их особенностей, т.к. основу этой схемы составляет единый принцип, восходящий к Лагранжу [1].

Постановка вариационной задачи. Задачи вариационного исчисления это задачи об экстремуме функционалов. Функционал ставит в соответствие каждой вектор-функции из некоторого множества D в функциональном пространстве число. Таким образом неизвестными в вариационных задачах или некоторыми из неизвестных являются функции. Множество допустимых решений D представляет собой подмножество пространства функций E и отвечает общим требованием, наложенным на элементы E (например, непрерывность, дифференцируемость, существование того или иного интеграла, ...), ограничениям и связям между искомыми функциями, вытекающим из постановки конкретной задачи.

Наряду с функциональными составляющими вариационные задачи могут содержать и вектор переменных, не изменяющихся с изменением t. Эти переменные называют искомыми параметрами.

9.1 Основные типы функционалов и связей

Примеры функционалов. Для определенности будем считать, что для каждого из функционалов ищется максимум по $y(t)$.

1. Интегральный

$$I_1 = \int\limits_0^T f_0(y(t), t)dt. \tag{9.1}$$

2. Функционал, зависящий от значения $y(t)$ в фиксированный момент $\tau \in [0, T]$:

$$I_2 = f_0(y(\tau), \tau). \tag{9.2}$$

3. Минимаксный

$$I_3 = \min_{t \in [0,T]} f_0(y(t), t). \tag{9.3}$$

Каждый из этих функционалов ставит в соответствие функции $y(t)$ число, если на множестве D значение функционала существует, т.е. в зависимости от типа функционала функция $f_0(y(t), t)$ для $y \in D$ интегрируема, ограничена при $t = \tau$ или ограничена сверху для всех $t \in [0, T]$.

В том частном случае, когда в функционале I_1 функция f_0 равна -1, он соответствует минимизации продолжительности процесса. Задачи с таким критерием оптимальности называют *задачами на быстродействие*.

Заметим, что каждый из функционалов может быть преобразован в другой с введением тех или иных условий в задачу. Например, функционалы I_2 и I_3 в предположении непрерывности входящих в них функций можно записать в интегральной форме с введением δ-функции

$$I_2 = \int\limits_0^T f_0(y(t), t)\delta(t - \tau)dt, \tag{9.4}$$

$$I_3 = \int\limits_0^T f_0(y(t), t)\delta(t - t^*)dt. \tag{9.5}$$

В отличие от функционала I_2 в I_3 экстремум ищется не только по $y(t) \in D$, но и по параметру $t^* \in [0, \tau]$, причем направление экстремума по t^* и $y(t)$ могут быть разными (min либо max).

Связи и ограничения. Связи между составляющими вектор – функции $y(t)$ и наложенные на них ограничения могут быть очень разнообразными. В этом отношении вариационные задачи существенно отличаются от задач НП. Приведем несколько примеров:

1. Конечное соотношение

$$f(y(t),t) = f(y_1(t), y_2(t), ..., t) = 0, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{9.6}$$

2. Интегральное ограничение

$$J = \int\limits_0^T f(y(t),t)dt = 0. \tag{9.7}$$

3. Интегральное ограничение с непрерывным параметром

$$J(\tau) = \int\limits_0^T f(y(t),t,\tau)dt = 0, \quad \forall \tau \in [0,\tau]. \tag{9.8}$$

4. Дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t). \tag{9.9}$$

Здесь и в следующем примере через x обозначены те составляющие искомой вектор-функции $y(t)$, которые входят в левую и правую часть уравнения, а через $u(t)$ те, которые вошли только в правую часть.

5. Интегральное уравнение

$$x(t) = \int\limits_0^T f(x(\tau), u(\tau), t, \tau)d\tau. \tag{9.10}$$

6. Ограничения, наложенные в фиксированный момент

$$f(y(t_0), t_0) = 0, \tag{9.11}$$

где t_0 — фиксировано, $t_0 \in [0,T]$.

7. Ограничения, наложенные при каждом значении t, на каждую из составляющих искомого решения

$$y_i^{\min}(t) \le y_i(t) \le y_i^{\max}(t), \quad i = 1, 2, ... \tag{9.12}$$

где границы изменения $y(t)$ фиксированы. Множество, выделяемое ограничениями (9.12), будем обозначать через $V_y(t)$.

Каждое из условий (9.6)–(9.10) может иметь форму неравенств, которые как и в задаче НП могут быть преобразованы к равенствам.

Как было сказано, в вариационных задачах могут кроме функций $y(t)$ присутствовать искомые параметры, вектор z которых не зависит от t и подлежит выбору. Примером такого параметра является значение t^* в функционале (9.5). Другой пример: в задачах управления кроме управляющих воздействий нужно бывает найти согласованные с ними конструктивные параметры обьекта, которые неизменны во времени.

9.2 Основные подходы к получению необходимых условий оптимальности решения

Логика получения условий оптимальности решения как правило предполагает вычисление изменения критерия на некотором множестве L вариаций решения в окрестности искомого. Требование, заключающееся в том, что для любых допустимых по условиям задачи вариаций значение критерия оптимальности не «улучшается», порождает расчетные соотношения, выделяющие все решения «подозрительные на оптимальность».

Для задачи НП эта схема приводит к условиям линейной зависимости градиентов целевой функции и ограничений в локально-неулучшаемой точке, которые эквивалентны требованию существования множителей Лагранжа. Чтобы воспользоваться такой схемой для вариационных задач, нужно задать конкретный вид критерия оптимальности и ограничений, определяющих данную задачу.

Например, для задачи оптимального управления связи между переменными имеют форму дифференциальных уравнений (9.9), а критерий может быть интегральным или зависеть от состояния системы в конечный момент времени.

В дифференциальных уравнениях часть переменных x входит как в правую часть так и в форме производных в левую. Управления же u входят только в правую часть. Если функции, определяющие задачу, удовлетворяют условиям гладкости, то можно варьировать управление на величину малую по модулю для всх значений t, вычислить с использованием линеаризованного в окрестности искомого решения дифференциального уравнения малое изменение x, после подстановки в критерий оптимальности найти его вариации и потребовать неположительности этой вариации. По такой схеме получены условия оптимальности целого ряда постановок вариационных задач в классическом вариационном исчислении (условия Эйлера, Эйлера-Лагранжа, Эйлера-Пуассона и др.). Каждая из них может быть сформулирована в форме задачи оптимального управления.

В 60-е годы прошлого столетия, возникла потребность решения задач управления с ограничениями на множество допустимых значений $u \in V_u$. Например, управления могут принимать, как в релейных системах, набор фиксированных значений. Правые части дифференциальных уравнений и функция, определяющая критерий оптимальности, могут быть непрерывны, но не дифференцируемы по управлениям.

В этом случае необходимые условия включают требование максимума некоторой функции по управляющим переменным. Их сформулировал Л.С. Понтрягин и они получили название «принципа максимума Понтрягина». В целом ряде задач оказалось, что оптимального решения, удовлетворяющего принципу максимума, не существует. И в принципе максимума потребовалась оговорка о том, что теорема справедлива при условии существования решения.

При доказательстве принципа максимума Л.И. Розоноэром ему пришлось внести в изложенную выше схему существенное изменение, а именно вариацию управления выбрать конечной по величине, но сколь угодно малой по площади. Такая вариация получила название «игольчатой». Через дифференциальное уравнение вычислялась соответствующая игольчатой вариации вариация δx, которая была мала по модулю, так как скорость x менялась на конечную величину, но в течении сколь угодно малого времени. Далее по обычной схеме эти вариации подставлялись в критерий оптимальности и требования неположительности его изменения приводили к условиям оптимальности, в которых по управлениям вместо требований стационарности некоторого выражения требовлся его максимум по управляющим переменным.

В задаче оптимального управления переменные состояния $x(t)$ ищут как правило в классе кусочно гладких, а $u(t)$ — в классе кусочно-непрерывных функций. Этой задаче как и задаче НП может быть сопоставлено ее усредненное расширение по управляющим переменным. При этом в любой момент времени $u(t)$ может принадлежать выпуклой оболочке множества V_u. Подобное расширение эквивалентно. Физически это связано с тем, что любое решение расширенной задачи $u_r \notin V_u$ может быть сколь угодно точно по величине критерия оптимальности приближено последовательностью таких решений исходной задачи, в которых управление принимает значения внутри V_u и изменяется со все большей скоростью так, что фазовые переменные и критерий оптимальности, сглаживающие эти изменения, сколь угодно близки к их значениям, соответствующим u_r. Такие обобщенные решения называют «скользящим режимом».

Упомянутая особенность вариационных задач позволяет наметить другую схему доказательства принципа максимума, а именно первоначально получить условия оптимальности расширенной, усредненной по управлениям задачи, а затем перенести их на исходную (в том случае, когда решение исходной задачи существует, оно удовлетворяет условиям оптимальности ее эквивалентного расширения (скользящего режима). Если же решение усредненной задачи не удовлетворяет ограничениям исходной, то последняя имеет обобщенное решение в форме максимизирующей последовательности.

Число различных постановок вариационных задач чрезвычайно велико, ведь возможны самые разные сочетания того или иного вида критерия оптимальности с разными типами ограничений и связей между переменными, одни из которых могут иметь форму равенств, другие неравенств ... Во многих работах, рассматривая каждую такую постановку, например, задачу с условиями в форме дифференциальных уравнений и конечных соотношений, интегральных уравнений и пр. проводили всю процедуру варьирования искомого решения и получали условия оптимальности для поставленной задачи.

Ниже условия оптимальности получены в такой формулировке, которая не требует проведения процедуры вычисления вариации функционала для каждой конкретной постановки. Чтобы получить условия оптимальности в таком виде, нужно было рассмотреть общую (каноническую) форму вариационной задачи со скалярным аргументом. Вид критерия и ограничений этой задачи таковы, что любые из приведенных выше и многих других типов условий могут быть записаны в этой форме. Для канонической формы записи получены условия оптимальности решения в форме принципа максимума, а затем как следствие записать эти условия для каждой конкретной постановки.

Все переменные задачи, входят при ее канонической записи «почти равноправно». Здесь нельзя, как в задаче оптимального управления, выделить переменные состояния и управляющие воздействия. Разница между переменными возникает чисто формальная. А именно, часть функций при приведении к канонической форме приходится умножать на функции Дирака. По переменным, которые ни в критерии и ни в одном из условий не оказались в этих функциях (рандомизированным), усредненное расширение канонической задачи эквивалентно исходной.

Поэтому при получении условий оптимальности первоначально рассмотрено усредненное расширение канонической задачи по рандомизированным переменным, показано, что такое расширение эквивалентно. Для расширенной задачи получены условия в форме требования максимума функции Лагранжа по этим переменным и ее стационарности по остальным (детерминированным). В том случае, когда решение исходной задачи существует (оно совпадает с решением усредненной), мы получим условие его оптимальности в форме принципа максимума. А если не совпадает, то, как и в задаче оптимального управления, можно построить только обобщенное решение в форме максимизирующей последовательности (скользящего режима).

9.3 Условия оптимальности для задачи с интегральными связями

Рассмотрим частный вид вариационной задачи с интегральным функционалом (9.1), связями в форме (9.7) и ограничениями (9.12). При этом кроме функции $y(t)$ задача содержит еще вектор искомых параметров $z \in V_z$. Функцию $y(t)$ будем искать среди таких кусочно-непрерывных функций, для которых интегралы, входящие в критерий и ограничения, существуют. Задача примет форму

$$I = \int\limits_0^T f_0(y(t), t, z)dt \to \max_{z, y(t)}, \tag{9.13}$$

при условиях

$$J_\nu = \int\limits_0^T f_\nu(y(t), t, z)dt = 0, \quad \nu = 1, ..., m, \tag{9.14}$$

$$y(t) \in V_y(t), \quad z \in V_z. \tag{9.15}$$

Ограничения на вектор z будем для простоты считать неравенствами, наложенными на каждую его составляющую, т.е. V_z — параллелепипед в векторном пространстве. Если это множество выделяется условиями в форме гладких функций типа $\varphi(z) \leq 0$, читатель без труда внесет изменения в записанные ниже условия оптимальности.

Чтобы сформулировать условия оптимальности задачи образуем функционал Лагранжа

$$S = \int\limits_0^T R(y(t), t, z, \lambda)dt, \tag{9.16}$$

в котором подинтегральное выражение

$$R(y, t, z, \lambda) = \sum_{\nu=0}^{m} \lambda_\nu f_\nu(y(t), t, z), \tag{9.17}$$

множитель λ_0 равен нулю для вырожденного и единице для невырожденного решения. Смысл вырожденного решения здесь тот же, что в задаче НП. Функции $f_\nu(\nu = 0, ..., m)$ непрерывны по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемы по z.

Справедлива следующая **Теорема** [21]: *Если решение $z^*, y^*(t)$ задачи* (9.13)–(9.15) *в классе кусочно-непрерывных функций существует, то найдется такой ненулевой вектор множителей Лагранжа λ, что на этом решении выполнены условия*

$$\frac{\partial S}{\partial z_i}\delta z_i = \left[\int\limits_0^T \left(\frac{\partial R}{\partial z_i}\right)_{y^*, z^*} dt\right] \delta z_i \leq 0, \quad i = 1, 2, ... \tag{9.18}$$

$$y^*(t) = \arg \max_{y(t) \in V_{y(t)}} R(y(t), z^*, t, \lambda). \tag{9.19}$$

Приведем соображения, показывающие естественность соотношений (9.32), (9.19).

Неравенства (9.32) представляют собой просто следствие того, что для каждой фиксированной функции $y(t)$ в том числе и для $y^*(t)$ задача (9.16), (9.17) представляет собой по отношению к z задачу НП, а функционал S — функцию Лагранжа этой задачи. Так что неравенства (9.32) вытекают из теоремы Куна-Таккера, как условие локальной неулучшаемости функции Лагранжа.

Условия в форме принципа максимума (9.19) так же следовали бы из условий оптимальности для усредненной задачи нелинейного программирования, если бы в функциях f_0 и $f_\nu(\nu = 1, ..., m)$ не входило явно t. Действительно в этом случае задача (9.13)–(9.15) представляла бы собой задачу нелинейного программирования с усреднением по части переменных вида

$$\overline{f_0(y,z)}^y \to \max \Big/ \begin{array}{c} \overline{f_\nu(y,z)}^y = 0, \quad \nu = 1, ..., m, \\ y \in V_y,\ z \in V_z. \end{array} \tag{9.20}$$

Условия (9.32), (9.19) совпадали бы с условиями (7.18) для задачи этого типа. Т.е. по тем переменным y, по которым производится осреднение, функция Лагранжа максимальна, а по остальным (детерминированным) переменным z она локально-неулучшаема.

В вариационных задачах t входит явно. Чтобы показать справедливость условий (9.19) проведем расширение множества допустимых решений задачи (9.13)–(9.15), за счет перехода от поиска кусочно-непрерывной функции $y(t)$ к поиску ее вероятностной меры $P(y,t)$ с заменой функций f_ν на их средние по y значение. При каждом t функция $P(y,t)$ аналогична плотности распределения случайной величины (она неотрицательна при любом допустимом значении y, а ее интеграл по множеству всех допустимых значений $y(t)$ равен единице).

$$\overline{f_\nu(t,z)}^y = \int\limits_{V_y(t)} f_\nu(y,t,z) P(y,t) dy, \tag{9.21}$$

причем

$$P(y,t) \geq 0, \qquad \int\limits_{V_y(t)} P(y,t) dy = 1, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{9.22}$$

Такой переход расширяет множество допустимых решений задачи, т.к. каждой кусочно-непрерывной функции $y^0(t)$ соответствует $P(y,t)$ вида

$$P(y,t) = \delta(y - y^0(t)). \tag{9.23}$$

При подстановке этой меры в расширенную задачу

$$\overline{I}(P(y,t),z) = \int\limits_0^T \overline{f_0}^y(t,z)dt \to \max_{z,P} \tag{9.24}$$

при условиях (9.22) и

$$\overline{J_\nu}(P(y,t),z) = \int\limits_0^T \overline{f_\nu}^y(t,z)dt = 0, \quad \nu = 1,...,m. \tag{9.25}$$

она совпадает с задачей (9.13), (9.15). Однако обратное неверно, т.е. не каждой $P(y,t)$ соответствует кусочно–непрерывная функция. Например, для меры вида

$$P(y,t) = \gamma(t)\delta(y - a(t)) + (1 - \gamma(t))\delta(y - b(t)), \tag{9.26}$$

где $\gamma(t) > 0$, не найдется соответствующей ей кусочно–непрерывной $y(t)$, так как значение y при каждом t с вероятностью γ должно быть равно $a(t)$ и с вероятностью $(1-\gamma)$ равно $b(t)$.

Требование существования решения в классе кусочно-непрерывных функций, фигурирующее в теореме 1, эквивалентно требованию, существования решения расширенной задачи (9.24), (9.25) в классе распределений вида (9.23).

Расширенная задача для каждого t и z^* представляет собой усредненую задачу $\overline{\text{НП}}^y$ и условия оптимальности этой задачи, как показано выше, имеют форму принципа максимума. Значит, если ее решение имеет вид (9.23), то соответствующая функция $y^0(t) = y^*(t)$ доставляет максимум R при каждом t. Чтобы гарантировать существование этого максимума нужно потребовать, чтобы $V_y(t)$ было замкнуто и ограничено, а функция R непрерывна по y и ограничена сверху.

Пусть расширенная задача (9.24), (9.25) имеет решение, отличное от (9.23). При каждом t, как для усредненной задачи $\overline{\text{НП}}$ с m условиями, ее решение $P^*(y,t)$ представляет собой сумму не более, чем $(m+1)$-ой δ-составляющих с неотрицательными весами, т.е. для каждого t решение y должно принимать базовые значения $y_j \in V_y(j = 0, ..., m)$ с вероятностями γ_j. Хотя это решение не соответствует никакой кусочно-непрерывной функции, но можно построить последовательность таких функций, каждый следующий член которой со все большей частотой переключался бы между значениями y_i. Критерий оптимальности (9.13) исходной задачи стремился бы на такой последовательности к максимальному значению $\overline{I}$, а функционалы (9.14) были бы сколь угодно близки к нулю вследствие усредненного влияния операции интегрирования. Таким образом в этом случае максимума в задаче (9.13)–(9.15) не существует, но существует точная верхняя грань, которая достигается при сколь угодно быстро переключающейся функции $y(t)$ (*в скользящем режиме*). Так что расширение (9.24), (9.25) эквивалентно исходной задаче (9.13)–(9.15).

Отметим, что эта эквивалентность не всегда имеет место. Если, например, критерий оптимальности имел бы форму (9.2) или в интегральной записи вид (9.4), то по тем составляющим $y(t)$, которые вошли в f_0, расширение для $t = \tau$ не было бы эквивалентно, так как отсутствует сглаживание скользящего режима при интегрировании.

9.4 Обобщение на задачи со связями разного типа

Поясним получение условий оптимальности для общей задачи со скалярным аргументом, доказательство которых приведено в [21].

Условие (9.8) представляет собой предельный случай интегральных ограничений вида (9.14), когда дискретный параметр ν в этих ограничениях заменен непрерывным параметром $\tau \ni V_\tau \subset R$. В задаче (9.13)–(9.15) нужно в этом случае условия (9.14) заменить на требование

$$J_j(z, \tau) = \int_0^T f_j(y(t), t, z, \tau) dt = 0, \quad j = 1, 2, ... \tag{9.27}$$

функционал Лагранжа S будет иметь вид (9.16), но его подинтегральное выражение изменится,

$$R(y, t, z, \lambda) = \lambda_0 f_0(y(t), t, z) + \sum_j \int_{V\tau} \lambda_j(\tau) f_j(y(t), t, z, \tau) d\tau = R_0 + \sum_j R_j \tag{9.28}$$

вместо суммы по ν здесь фигурирует интеграл по непрерывному параметру τ для каждого из условий (9.27).

Условия оптимальности задачи (9.13), (9.15), (9.27) по z не изменятся и будут иметь вид (9.32), что касается условий оптимальности по $y(t)$, то они окажутся различными в зависимости от того, как та или иная составляющая $y(t)$ входит в функцию R. Выделим и отнесем к группе рандомизированных переменных составляющие $y_r(t)$ решения, если сколь угодно быстрые переключения этих составляющих между фиксированными значениями $y_{rk}(t)$ сглаживаются всеми условиями, в которые они входят, так что расширение вида (9.24), (9.25) по этим составляющим решения эквивалентно.

Например, к первой группе в задаче (9.13)–(9.15) относятся все составляющие $y(t)$. Если же функционал в задаче имеет вид (9.4), то первое слагаемое в (9.28) примет форму

$$R_0 = \lambda_0 f_0(y(t), t)\delta(t - \tau) \tag{9.29}$$

и при $t = \tau$ изменения $y(t)$ не сглаживаются при переходе к интегрированию. Поэтому при $t = \tau$ по тем составляющим, которые вошли в f_0, расширение (9.24), (9.25) не эквивалентно, какими бы ни были остальные условия задачи.

Таким образом, в задаче с условиями (9.27) все составляющие $y(t)$ можно разбить на две группы. В первую из них включим те, по которым задача (9.13), (9.15), (9.27) и ее усредненное расширение эквивалентны. Обозначим вектор-функцию этих переменных через $u(t)$. Оставшиеся составляющие решения включим во вторую группу детерминированных переменных и обозначим их через $x(t)$. По переменным второй группы для каждого t задача (9.13), (9.15), (9.27) аналогична задаче нелинейного программирования и λ-множители существуют, если функция R на оптимальном решении по ним локально-неулучшаема (см. задачу НП с усреднением по части переменных).

Таким образом, *если существует оптимальное решение $z^*, u^*(t), x^*(t)$ задачи* (9.13), (9.15), (9.27), *то найдется такая отличная от нуля вектор-функции $\lambda(\tau) = \{\lambda_0, \lambda_1(\tau), ..., \lambda_j(\tau), ...\}$, что для составленной с ее использованием функ-*

ции R (см. (9.28)) *на этом решении выполнены условия*

$$u^*(t) = \arg\max_{u \in V_u} R(u(t), x^*(t), z^*, t, \lambda), \tag{9.30}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}[R(u^*(t)x^*(t), z^*(t), , \lambda)]\delta x_j \leq 0, \quad j = 1, 2, ... \tag{9.31}$$

$$\frac{\partial S}{\partial z_i}\delta z_i = \left[\int\limits_0^T \left(\frac{\partial R}{\partial z_i}\right)_{y^*, z^*} dt\right]\delta z_i \leq 0, \quad i = 1, 2, ... \tag{9.32}$$

которые определяют оптимальное решение. При этом по переменным $u(t)$ функции $f_j (j = 0, 1, ...)$, определяющие задачу, должны быть непрерывны, но не обязательно дифференцируемы (сравните с усредненной задачей НП), множество $V_u(t)$ может состоять из отдельных дискретных значений u. По переменным же второй группы, как по t и z функции f_j должны быть непрерывны и непрерывно диффиренцируемы, а множества V_x, V_z содержать внутренние точки.

Запись связей и критериев оптимальности в канонической форме

Связи в форме (9.8) являются в определенном смысле каноническими. В этой форме с использованием δ-функции и функции единичного скачка h (функции Хевисайда) могут быть записаны и другие виды условий. Покажем это и вычислим для этих условий соответствующие им слагаемые R_j в функционале Лагранжа, взяв интеграл по τ в выражении (9.28).

Условие (9.6) запишется как

$$J_j(\tau) = \int\limits_0^T f_j(y(t), t, z)\delta(t - \tau)dt = 0, \quad \forall\tau \in [0, T]. \tag{9.33}$$

В соответствии с (9.28) слагаемое R_j в функции R, соответствующее условию (9.33)

$$R_j = \int\limits_0^T \lambda_j(\tau) f_j(y(t), t, z)\delta(t - \tau)d\tau = \lambda_j(t) f_j(y(t), t, z). \tag{9.34}$$

Изменения любой из составляющих $y(t)$, не сглаживаются при интегрировании в (9.33) из-за наличии δ-функции значит независимо от других связей их нужно отнести ко второй группе и использовать условия оптимальности (9.31). То же касается условий (9.11) при $t = t_0$.

Дифференимальное уравнение (9.9) перепишем как

$$x_j(\tau) = x_j(0) + \int_0^T f_j(x(t), u(t), t, z) h(\tau - t) dt$$

или

$$J_j(\tau) = \int_0^T \left[x_j(t)\delta(t-\tau) - \frac{x_j(0)}{T} - f_j(x(t), u(t), t, z) h(\tau - t) \right] dt, \quad \forall \tau \in [0, \tau]. \tag{9.35}$$

Критерий оптимальности может быть функцией от приведенных в таблице критериев вида $I = F(I_1, \dots, I_k, \dots, I_u)$. В этом случае слагаемое, соответствующее критерию I, выражается через слагаемые R_k, соответствующие критериям I_k, как $R_0 = \sum_{k=1}^{n} \partial F/\partial I_k \cdot R_k$. При этом величина производной соответствует искомому оптимальному решению.

В том частном случае, когда $I = \sum_k a_k I_k$, функция $R_0 = \sum_k a_k R_k$.

Т а б л и ц а 9.1. **Критерии оптимальности и соответствующие им слагаемые в функции Лагранжа**

№	Функционал $I \to \max$	Слагаемые R_0	Тип слагаемого
1	$\int_0^T f_0(y(t), a, t) dt$	$\lambda_0 f_0(y(t), a, t)$	R_{0I}
2	$F_0(y(t_0), a, t_0)$	$\lambda_0 F_0(y(t), a, t)\delta(t - t_0)$	R_{0II}
3	$\min\limits_{t \in [0,T]} f_0(y(t), a, t) = z$	$\frac{\lambda_0 z}{T} + \lambda(t)[z - f_0(y(t), a, t)]$ $\lambda(t) \le 0$, $\lambda(t)[z^* - f_0(y(t), a, t)] = 0$.	R_{0II}

Так как правая часть дифференциального уравнения умножается на функцию h, которая равна единице при $t \le \tau$ и равна нулю при $t > \tau$, то те переменные, которые не входят в левую часть, т.е $u(t)$, относятся к первой группе (если они так же входят и в остальные условия задачи), $x_j(t)$ относятся ко второй группе. Слагаемое R_j равно интегралу по τ от подынтегрального выражения в

(9.35), умноженного на $\lambda_j(\tau)$. Получим

$$R_j = \lambda_j(t)x_j(t) - \frac{x_j(0)}{T}\int\limits_0^T \lambda_j(\tau)d\tau -$$

$$-f_j(x(t), u(t), t, z)\int\limits_0^T \lambda_j(\tau)h(\tau - t)d\tau.$$

Обозначим как

$$\psi_j(t) = -\int\limits_t^T \lambda_j(\tau)d\tau, \quad \psi(t) = 0 \quad \text{при} \quad t > T. \tag{9.36}$$

Тогда $\psi_j(0) = -\int\limits_0^T \lambda(\tau)d\tau$, а $\dot{\psi}_j(t) = \lambda_j(t)$. Слагаемое R_j в этих обозначениях запишется как

$$R_j = \frac{x_j(0)\psi_j(0)}{T} + \psi_j(t)f_j(x, u, t, z) + \dot{\psi}_j(t)x_j(t). \tag{9.37}$$

Аналогичным образом могут быть найдены слагаемые R_j для каждого вида связей и каждого типа функционалов.

В таблицах 9.1 и 9.2 приведены слагаемые R_0 функции Лагранжа для различных видов критериев оптимальности и R_j для различных типов связей. Там же указано, какие из переменных относятся к первой группе по отношению к данному условию. В конкретной вариационной задаче функция R состоит из слагаемого R_0 и суммы слагаемых, соответствующих каждому из ограничений.

Т а б л и ц а 9.2. **Основные типы связей и соответствующие им слагаемые в функции Лагранжа**

№	Вид связи	Слагаемые R_{CB}	Тип слагаемого
1	$\int\limits_0^T f(y(t),a,t)dt = 0$	$\lambda f(y(t),a,t), \quad t \in (0,T),$ $0, \qquad t \notin (0,T)$	R_I
2	$f(y(t),a,t) = 0$ $\forall t \in (0,T)$	$\lambda(t) f(y(t),a,t), \quad t \in (0,T),$ $0, \qquad t \notin (0,T)$	R_{II}
3	$f(y(t_0),a,t_0) = 0$	$\lambda f(y(t),a,t)\delta(t-t_0)$	R_{II}
4	$f(x(t),u(t),a,t) - \dot{x} = 0$ $\forall_t \in [0,T]$	$\psi(t) f(x(t),u(t),a,t),$ $\psi(t) = 0, \quad t \notin [0,T],$ $\dot{\psi}(t)x(t) + (x(0)/T)\psi(0)$	R_I R_{II}
5	$\int\limits_0^T f(x(t),u(t),a,t,\tau)dt-$ $-x(\tau) = 0$	$\int\limits_0^T \lambda(\tau) f(x(t),u(t),a,t,\tau)d\tau-$ $-\lambda(t)x(t)$	R_I R_{II}

Последовательность получения расчетных соотношений для задачи с конкретным набором условий:

1. Критерию оптимальности и каждой из связей ставим в соответствие слагаемое R_j в обобщенной функции Лагранжа R, используя либо приведенные ниже таблицы, либо, записав соответсвующее условие к канонической форме.

2. Выделяем переменные первой группы в каждом условии и переменные первой группы по отношению к задаче в целом (те, которые оказались в первой группе по отношению к каждому из условий задачи).

3. Записываем функцию R и функционал S для конкретной задачи и подставляем их в условия (9.30), (9.31), (9.32).

Эта последовательность проиллюстрирована ниже на многочисленных примерах.

9.5 Принцип максимума для задач со связями в форме дифференциальных и в форме интегральных уравнений

Принцип максимума Понтрягина. Одним из важнейших видов вариационных задач является задача управнения объектом, характеризующимся обыкновенными дифференциальными уравнениями. Она имеет вид

$$I = \int_0^T f_0(x, u, t)dt \to \max \tag{9.38}$$

при условиях

$$\dot{x}_j = f_j(x, u, t), \quad j = 1, ..., m, \quad x_j(0) = x_{j0}, \tag{9.39}$$

$$F(x(T)) = 0, \quad u \in V_u. \tag{9.40}$$

Функции f_0, f_j, F непрерывны и непрерывно-дифференцируемы по x, множество V_u замкнуто и ограничено, f_0 и f_j непрерывны по u и ограничены на V_u для всех x, t.

Выпишем слагаемые подынтегрального выражения функционала Лагранжа

$$R_0 = \lambda_0 f_0(x, u, t).$$

Слагаемые R_j имеют вид (9.37) для $j = 1, ..., m$, а слагаемое, соответствующее условию (9.40)

$$R_{m+1} = \lambda_{m+1} F(x(t))\delta(t - T).$$

Так как вектор параметров z отсутствует, условия оптимальности вытекают из (9.30), (9.31) при подстановке туда функции

$$R = \lambda_0 f_0(x, u, t) + \sum_{j=1}^{m} \left[\psi_j f_j(x, u, t) + \dot{\psi}_j x_j + \frac{x_{j0}\psi_j(0)}{T} \right] + \lambda_{m+1} F(x)\delta(t - T). \tag{9.41}$$

К рандомизированным переменным относятся управляющие воздействия $u(t)$, так как они не вошли в условие (9.40) и ни в одну из левых частей уравнений (9.39). Максимум R по u эквивалентен требованию максимума суммы тех слагаемых в (9.41), в которые входят управления, так что условия (9.30) запишутся как

$$u^*(t) = \operatorname{argmax}_{u \in V_u} \sum_{j=0}^{m} \psi_j f_j(x, u, t). \tag{9.42}$$

Здесь для краткости записи константа λ_0 обозначена как ψ_0. Она равна нулю для вырожденных и единице для невырожденных решений. Сумму, стоящую в правой части условий максимума,

$$H = \sum_{j=0}^{m} \psi_j f_j(x, u, t)$$

называют функцией Гамильтона.

Условия локальной неулучшаемости R по x с учетом отсутствия ограничений на x примут форму условий стационарности

$$\frac{\partial R}{\partial x_j} = \frac{\partial H(x,u,t,\psi)}{\partial x_j} + \dot{\psi}_j + \lambda_{m+1}\frac{\partial F}{\partial x_j}\delta(t-T) = 0.$$

Или

$$\dot{\psi}_j = -\frac{\partial H(x,u,t,\psi)}{\partial x_j}, \quad 0 \le t < T, \tag{9.43}$$

$$\psi_j(T) = \lambda_{m+1}\frac{\partial F}{\partial x_j}, \quad j = 1,...,m. \tag{9.44}$$

Условия (9.44) следует из того, что за пределами интервала управления (при $t > T$) $\psi_j(t) = 0$, а в момент $t = T$ она меняется скачком и ее производная равна $-\lambda_{m+1}\dfrac{\partial F}{\partial x_j}\delta(t-T)$. Чтобы стать при $t > T$ равной нулю, функция ψ_j должна при $t = T$ удовлетворять условиям *трансверсальности* (9.44). При отсутствии условий (9.40) λ_{m+1}, а значит и $\psi_j(T)$ равны нулю.

Отметим, что слагаемое $\dfrac{1}{T}\sum\limits_j x_{j0}\psi_j(0)$ никак не повлияло на условия оптимальности задачи. Однако если в задаче x_{j0} или T не фиксированы, а являются искомыми параметрами, то потребуется использовать условия (9.32) и это слагаемое войдет в систему условий оптимальности.

В той же последовательности могут быть получены условия оптимальности для других сочетаний критерия и ограничений.

Принцип максимума для задачи со связями в форме интегральных уравнений. Для задачи

$$I = \int_0^{\bar{t}} f_0(x,u,t)dt \to \max_{u \in V_u} \Big/ \int_0^{\bar{t}} f(x(\tau),u(\tau),t,\tau)dt - x(t) = 0 \tag{9.45}$$

обобщенная функция Лагранжа, составленная с использованием табл. 9.1 и 9.2, имеет вид

$$R = \lambda_0 f_0(x,u,t) + \int_0^{\bar{t}} \lambda(\tau) f(x(t),u(t),\tau,t)d\tau - \lambda(t)x(t);$$

к переменным первой группы относятся $u(t)$. Условия оптимальности примут форму

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0 \Rightarrow \lambda(t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_0 f_0 + \int\limits_0^{\bar{t}} \lambda(\tau) f(x,u,\tau,t)d\tau\right],$$
$$u^* = \arg\max_{u\in V}\left[\lambda_0 f_0 + \int\limits_0^{\bar{t}} \lambda(\tau) f(x,u,\tau,t)d\tau\right]. \tag{9.46}$$

В частности, в задаче управления линейным объектом с импульсной переходной функцией $k(t)$ связь между управляющим воздействием и переменной состояния x запишется в виде

$$\int\limits_0^{\bar{t}} u(\tau)k(t-\tau)d\tau - x(t) = 0.$$

Условия оптимальности (9.46) перепишутся как

$$\lambda(t) = \lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial x},$$
$$u^* = \arg\max_{u\in V}\left[\lambda_0 f_0 + u(t)\int\limits_0^{\bar{t}} \lambda(\tau)k(\tau - t)d\tau\right]. \tag{9.47}$$

9.6 Задачи с условиями в форме неравенств и критерием типа максимина

Некоторые из условий задачи могут иметь форму неравенств. Для получения условий оптимальности по изложенной выше схеме эти неравенства могут быть переписаны в форме равенств с добавлением новых искусственно вводимых переменных. Например, неравенство

$$f(y(t),t) \geq 0 \tag{9.48}$$

с добавлением неотрицательной переменной $z(t)$ может быть переписано как равенство

$$f(y(t),t) - z(t) = 0.$$

Соответствующее слагаемое в функции R имеет вид

$$R_\nu = \lambda(t)f(y,t) - \lambda(t)z(t).$$

Переменная $z(t)$ относится ко второй группе и не входит в другие слагаемые функции R, кроме R_ν, поэтому условия локальной неулучшаемости R по z с учетом того, что допустимая вариация $\delta z \geq 0$, приводят к неравенствам

$$\frac{\partial R}{\partial z}\,\delta z \geq 0 \Rightarrow \frac{\partial R_\nu}{\partial z} \geq 0 \Rightarrow \lambda(t) \geq 0.$$

При этом $\lambda(t) = 0$, когда $z(t) > 0$, т.е. когда $f(y,t) > 0$ и $\lambda(t) > 0$, когда $f(y,t) = 0$. Мы имеем здесь полный аналог условий дополняющий нежесткости в математическом программировании.

Аналогичный прием позволяет получить условия оптимальности и для критерия типа максимина

$$I = \min_{t\in[0,\bar{t}]} f_0(y(t),t) \to \max, \tag{9.49}$$

который может быть при введении добавочного параметра a, не зависящего от t, переписан как

$$a \to \max \tag{9.50}$$

с добавлением к условиям задачи неравенства, справедливого при любом значении $t \in [0,\bar{t}]$,

$$f_0(y(t),t) - a \geq 0. \tag{9.51}$$

Критерию (9.50) и условию (9.51) в функции R соответствует слагаемое

$$\tilde{R} = \lambda_0\frac{a}{\bar{t}} + \lambda(t)f_0 - \lambda(t)a,$$

в котором, как и для неравенства (9.48), $\lambda(t) \geq 0$, а

$$\lambda(t)[f_0(t,y^*(t)) - a^*] = 0.$$

Здесь $\lambda_0 = 1$ для невырожденного и $\lambda_0 = 0$ для вырожденного решения. Так как параметр a не входит ни в какие другие слагаемые R, кроме $\tilde{R}$, и на этот параметр не наложено ограничений, то из условия стационарности по a функционала Лагранжа L следует

$$\frac{\partial L}{\partial a} = \int_0^{\bar{t}} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial a}\,dt = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \int_0^{\bar{t}} \lambda(t)\,dt. \tag{9.52}$$

Принятая здесь схема получения условий в форме принципа максимума следует с некоторыми упрощениями, подходу, изложенному в [21].

10 Методы преобразования задач оптимального управления, облегчающие их решение

В этом разделе дан обзор методов, позволяющих облегчить решение вариационных задач управления, за счет замены аргумента, перехода к новым фазовым переменным, замены дифференциальных уравнений интегральными, построения оценочной задачи.

Введение. Сложность решения задачи оптимального управления существенно изменяется при изменении ее формальной постановки. Как сказано в [1], «Одна и та же задача может быть формализована разными способами, и простота решения зачастую сильно зависит от того, насколько удачно она формализована».

Ниже рассмотрено несколько типовых приемов, позволяющих упростить решение задачи за счет перехода от исходной формализации к эквивалентной или почти эквивалентной. Как правило, такой переход связан с трансформацией пространства состояний, а его целью является сокращение размерности этого пространства или замена условий в форме дифференциальных уравнений более простыми.

Пусть исходная задача оптимального управления имеет форму

$$I = \int\limits_0^T f_0(x,u,t)dt \to \max, \tag{10.1}$$

при условиях

$$x_i = f_i(x,u,t), \quad i = 1,...,n, \tag{10.2}$$

$$x_i(0) = x_{i0}, \quad u \in V_u, \quad i = 1,...,n, \tag{10.3}$$

$$J_j = \int\limits_0^T \varphi_j(x,u,t)dt = 0, \quad j = 1,...,m. \tag{10.4}$$

Размерность вектор-функции $u(t)$ как правило не превосходит n, множество V_u — компакт, функции $u(t)$ — кусочно-непрерывные, а $x(t)$ — кусочно-гладкие, функции f и φ — непрерывны по u и непрерывно дифференцируемы по x и t.

Оптимальное решение будем обозначать как $x^*(t), u^*(t)$, а значение задачи, как $I^* = I(x^*, u^*)$. В том случае, когда условия, наложенные на искомое решение, и функции, его определяющие, отличны от указанных, мы будем это оговаривать.

Перечислим цели, которых стремятся достичь за счет преобразования исходной постановки:

1. Уменьшение размерности задачи n посредством: а) Замены исходного аргумента, например, времени одной из переменных состояния; б) Перевода части переменных состояния в разряд управлений; в) Перехода к новым фазовым переменным, при котором правая часть одного из дифференциальных уравнений тождественно равна нулю.

2. Переход к задаче, в которой некоторые из дифференциальных уравнений оказываются ляпуновскими [17], т.е. их правая часть не содержит фазовых координат.

3. Для линейного дифференциального уравнения переход к эквивалентному интегральному уравнению.

4. Переход к задаче, значение которой заведомо больше значения исходной задачи (получение оценки I^* сверху), с последующим приближением к полученному решению.

Подчеркнем, что лишь в редких случаях упрощающие преобразования позволяют получить аналитическое решение. Условия оптимальности задачи, в какой бы форме они не бьыли записаны, приводят к необходимости решения тех или иных уравнений. В подавляющем большинстве случаев эти уравнения приходится решать численно.

Рассмотрим подробнее и проиллюстрируем на примерах каждый из перечисленных приемов.

10.1 Исключение календарного времени

Пусть задача (10.1)–(10.4) автономна, т.е. $f_i (i = 0, ..., n)$ и $\varphi_j (j = 1, ..., m)$ не зависит явно от t, правая часть одного из уравнений (10.2) (для определенности f_1) не равна нулю для всех x, u, или для тех, которые могут претендовать на оптимальность. Тогда

$$dt = \frac{dx_1}{f_1(x,u)}, \tag{10.5}$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dx_i}{dx_1} f_1(x,u) = f_i(x,u), \tag{10.6}$$

$x(T)$ обозначим как $\overline{x}$. Получим преобразованную задачу в форме

$$I = \int\limits_{x_{10}}^{\overline{x}_1} \frac{f_0(x,u)}{f_1(x,u)} dx_1 \to \max, \tag{10.7}$$

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{f_i(x,u)}{f_1(x,u)}, \quad x_i(x_{10}) = x_{i0}, \quad i = 2,...,n \tag{10.8}$$

$$\int\limits_{x_{10}}^{\overline{x}_1} \frac{1}{f_1(x,u)} dx_1 = T, \quad J_j = \int\limits_{x_{10}}^{\overline{x}_1} \frac{\varphi_j(x,u)}{f_1(x,u)} dx_1 = 0, \quad j = 1,...,m. \tag{10.9}$$

Задача (10.7)–(10.9) имеет размерность фазовых переменных $(n-1)$ вместо n, а правые части уравнений (10.8) могут оказаться проще, чем уравнений (10.2).

В ряде случаев в исходной задаче среди уравнений (10.2) отсутствует такое, для которого правая часть знакоопределенная. Переход к новым переменным состояния $y(x)$, где преобразование взаимно однозначно, приводит уравнения (10.2) к виду

$$\dot{y}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} f_i(x(y),u), \quad y_\nu(0) = y(x_0), \quad \nu = 1,...,n. \tag{10.10}$$

Правая часть одного из уравнений (10.10) должна быть при таком преобразовании не обращаться в нуль.

Пример 1. Оптимальный теплообмен

$$I = \int\limits_0^\tau q(x_1,x_2,u)\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) dt \to \min \tag{10.11}$$

$$\mathrm{Sign}\, q = \mathrm{Sign}(x_1 - x_2) \quad \forall u \in V_u \tag{10.12}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{-q(x_1,x_2,u)}{c_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{+q(x_1,x_2,u)}{c_2} \tag{10.13}$$

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad x_{10} > x_{20} > 0. \tag{10.14}$$

Здесь x_i — температуры по Кельвину, c_i — теплоемкости контактирующих тел $(i = 1,2)$, q — поток теплоты.

В силу (10.12), (10.14) знак q не изменяется и любую из переменных состояния можно использовать в качестве аргумента. Приходим к эквивалентной задаче

$$I = \int\limits_{x_1(\tau)}^{x_{10}} c_1 \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) dx_1 \to \min \tag{10.15}$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{c_1}{c_2}; \quad x_2(x_{10}) = x_{20} \to x_2(x_1) = x_{20} + \frac{c_1}{c_2}(x_{10} - x_1), \tag{10.16}$$

$$\int\limits_{x_1(\tau)}^{x_{10}} \frac{c_1 dx_1}{q(x_1, x_2, u)} = \tau. \tag{10.17}$$

Условия (10.15), (10.16) позволяют выразить I, как функцию $x_1(\tau)$, задача сводится к форме

$$I(x_1(\tau)) \to \min_{u(x_1) \in V_u} \Big/ (10.17). \tag{10.18}$$

Нужно найти такое допустимое управление, при котором $x_1(\tau)$ доставляет минимум I с учетом условия (10.17). Эта задача вместо двух дифференциальных уравнений содержит одно интегральное ограничение.

Пример 2. Управление периодическим процессом биосинтеза.

При оптимизации микробиологических процессов, протекающих в аппаратах периодического действия, переменными состояния являются концентрации питательного сустрата, биомассы и продуктов жизнедеятельности бактерий (продуктов метаболизма), т.е. $n = 3$. Так как время в уравнения процесса явно не входит, а концентрация субстрата при отсутствии подпиток монотонно уменьшается, то ее можно принять за новую переменную вместо t и сократить число параметров состояния до двух. Оптимальные управления оказываются в результате решения функциями концентрации субстрата и могут быть реализованы с помощью управляющих устройств, измеряющих эту концентрацию.

Например, кинетику процесса биосинтеза пенициллина характеризуют моделью следующего вида:

$$\dot{x} = k_1 \frac{sx}{k_2 + s} - k_3 px; \quad \dot{s} = -k_4 \frac{sx}{k_2 + s}; \quad \dot{p} = k_5 \frac{sx}{k_2 + s} - k_6 px.$$

Здесь x, s и p - концентрации биомассы, питательного субстрата и продуктов метаболизма соответственно; $k_1, ..., k_6$- неотрицательные коэффициенты, зависящие от управляющих воздействий (кислотности среды, температуры и пр.).

Скорость роста биомассы $\dot{x}$ при $p = 0$ пропорциональна потреблению субстрата $\dot{s}$, наличие же продуктов метаболизма тормозит рост микроорганизмов. Пусть критерием оптимальности является минимальное время процесса T при заданных для $t = T$ концентрациях $s(T) = s_T$ и $p(T) = p_T$. В начальный момент заданы $s(0) = s_0$ и $x(0) = x_0$. Таким образом,

$$I = \int\limits_0^T -dt \to \max .$$

Правая часть второго из уравнений, определяющих процесс биосинтеза, заведомо меньше нуля, поэтому можно принять s в качестве нового аргумента

$$dt = -\frac{ds(k_2 + s)}{k_4 sx}.$$

Приходим к задаче с двумя дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{ds} = -\frac{k_1}{k_4} + \frac{k_3}{k_4} p(k_2 + s); \quad \frac{dp}{ds} = -\frac{k_5}{k_4} + \frac{k_6}{k_4} p(k_2 + s)$$

и критерием оптимальности

$$I = \int\limits_{s_0}^{s_T} \frac{k_2 + s}{k_4 sx} ds \longrightarrow \max .$$

Если среди исходных переменных нет переменной, которая бы монотонно изменялась во времени, то можно попытаться сделать замену, введя $y(x)$ таким образом, чтобы скорость этой переменной в силу уравнений

$$\frac{dy}{dt} = \sum_i \frac{\partial y}{\partial x_i} f_i(x, u) \tag{10.19}$$

сохраняла свой знак на предполагаемом оптимальном решении.

Например, если две переменных состояния связаны между собой так, что первая из них является скоростью изменения второй, то для любых управлений изображающая точка на фазовой плоскости, по осям которой отложены эти переменные, движется против часовой стрелки, а значит при переходе к полярным координатам угол наклона фазового вектора меняется монотонно и может быть использован как переменная, заменяющая календарное время.

10.2 Перевод части переменных состояния в разряд управлений

Задачи линейные относительно скорости изменения переменных состояния

Рассмотрим первоначально простейшую задачу этого вида, а затем будем последовательно расширять класс задач, допускающих перевод переменных состояния в разряд управлений.

Простейшая задача и ее обобщения.

Пусть в критерии оптимальности рассматриваемой задачи фигурирует слагаемое

$$I_\nu = \int\limits_0^T N_0(x,t)\upsilon\, dt, \tag{10.20}$$

где $\dot{x} = \upsilon$, $x(t) \in V_x(t) \supset R$ — функция ограниченной вариации, $x(0) = x_0, x(T) = \overline{x}$, множество $V_x(t)$ — компакт, на υ ограничений не наложено. $N(x,t) : R\times[0,T] \to R$ непрерывна по x и непрерывно дифференцируема по t. Покажем, что справедливо равенство

$$I_\nu = -\int\limits_0^T \int\limits_0^x \frac{\partial}{\partial t} N_0(x,t)dxdt + \overline{k}(\overline{x}) - k_0(x_0), \tag{10.21}$$

где

$$\overline{k}(\overline{x}) = \int\limits_0^{\overline{x}} N_0(x,T)dx, \quad k_0(x_0) = \int\limits_0^{x_0} N_0(x_0,0)dx. \tag{10.22}$$

Для этого, следуя Кротову [14], прибавим к функционалу (10.20) слагаемое

$$\Delta_I = \int\limits_0^T \dot{y}(x,t)dt - y(\overline{x},T) + y(x_0,0),$$

которое для любой дифференцируемой функции $y(x,t)$ равно нулю, и выберем эту функцию так, чтобы

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -N_0(x,t). \tag{10.23}$$

Функция $y(x,t)$ имеет вид

$$y(x,t) = -\int\limits_{c_0}^x N_0(x,t)dx + c(t), \tag{10.24}$$

где c_0 и $c(t)$ произвольны. В частности, их можно принять равными нулю. В этом случае

$$I_\nu = -\int\limits_0^T \int\limits_0^x \frac{\partial}{\partial t} N_0(x,t)dx\,dt + \overline{k}(\overline{x}) - k_0(x_0),$$

что совпадает с (10.21).

Если критерий оптимальности рассматриваемой задачи имеет вид

$$I = \int\limits_0^T [M_0(x,t) + N_0(x,t)v]dt \to \max. \tag{10.25}$$

M_0 непрерывна по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируема по t, то его можно привести к эквивалентной форме

$$I = \int\limits_0^T \left[M_0(x,t) - \int\limits_0^x \frac{\partial}{\partial t} N_0(x,t)dx \right] dt + \overline{k}(\overline{x}) - k_0(x_0) \tag{10.26}$$

Задачу (10.25) назовем *простейшей задачей* с неограниченным линейно входящим управлением.

Подынтегральное выражение в (10.26)

$$R(x,t) = M_0(x,t) - \int\limits_0^x \frac{\partial}{\partial t} N_0(x,t)dx. \tag{10.27}$$

На оптимальном решении $x^*(t)$ для любого $t \in (0,T)$

$$\left.\begin{aligned} x^*(t) &= \arg\max_{x \in V_x(t)} R(x,t), \\ x_0^* &= \arg\min_{x_0 \in V_x(0)} k_0(x_0), \\ \overline{x}^* &= \arg\max_{x \in V_x(T)} \overline{k}(\overline{x}). \end{aligned}\right\} \tag{10.28}$$

Это решение может содержать скачки первого рода, которым соответствует $v(t)$, имеющая форму δ-функции. Если в задаче (10.25) на $v(t)$ наложены некоторые ограничения, то решение (10.28) и соответствующее ему значение $I(x^*)$ дают оценку сверху значения задачи (10.25).

Простейшая задача с интегральными ограничениями. Рассмотрим задачу (10.25) с добавочными условиями вида

$$J_i = \int\limits_0^T [M_i(x,t) + N_i(x,t)v]dt = 0, \quad i = 1, ..., n. \tag{10.29}$$

Аналогично тому, как это было сделано выше с функционалом I, каждое из условий (10.29) может быть преобразовано к форме

$$J_i = \left\{ \int_0^T \left[M_i(x,t) - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x N_i(x,t)dx \right] dt + \overline{k}_i(\overline{x}) - k_{0i}(x_0) \right\} = 0, \quad i = 1, ..., n. \tag{10.30}$$

Условия оптимальности решения задачи (10.26), (10.30) имеют форму принципа максимума, а именно: *если оптимальное решение задачи* (10.29), (10.30) $x^*(t), x_0, \bar{x}$ *существует, то найдется такой ненулевой вектор* $\lambda = (\lambda_0, ..., \lambda_n)$, *для которого функция Лагранжа*

$$L = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \left(M_i(x,t) - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x N_i(x,t)dx \right)$$

максимальна по $x \in V_x$, *а функции*

$$\left. \begin{aligned} \overline{L} &= \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \int_0^{\overline{x}} N_i(x,T)dx, \\ L_0 &= \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \int_0^{x_0} N_i(x,0)dx, \quad i = 0, ...n \end{aligned} \right\} \tag{10.31}$$

локально неулучшаемы по $\overline{x}$ *и* x_0 *соответственно, что приводит к соотношениям*

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i N_i(\overline{x},T)\delta\overline{x} \le 0, \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i N_i(x_0,0)\delta x_0 \ge 0, \tag{10.32}$$

где $\delta\overline{x}$ и δx_0 –допустимые вариации этих переменных.

Особо отметим случай, когда в задаче (10.26), (10.30) функции $N_i = r_i(x)t$ линейны по t , а M_i не зависят явно от t для $i = 0, ..., n$. В этом случае она превращается в усредненную задачу нелинейного программирования и справедливы условия оптимальности этой задачи [19]: *Если оптимальное решение* $x^*(t)$ *существует, то найдется такой ненулевой вектор* $\lambda = (\lambda_0, ..., \lambda_n)$, *что функция Лагранжа* $L = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i [M_i(x) + \int_0^x r_i(x)dx]$ *на оптимальном решении* x^* *удовлетворяет условиям*

$$\max_{x \in V_x} L \to \min_{\lambda}. \tag{10.33}$$

Максимум по x может быть достигнут не в одной, а в нескольких базовых точках, x_b^*. Их число не превосходит $(n+1)$.

Оптимальное решение на интервале продолжительностью $\gamma_b T$ равно x_b^*,

$$\gamma_b \geq 0; \quad \sum_{b=0}^{n} \gamma_b = 1, \tag{10.34}$$

последовательность, в которой $x^*(t)$ принимает базовые значения, роли не играет, поэтому оптимальное решение не единственно. x_0 и $\overline{x}$ определены условиями (10.32). Для расчета γ_b имеем условия

$$\sum_{b=0}^{n} \gamma_b \left[M_i(x_b^*) + \int_0^{x_b} r_i(x)dx \right] + \overline{k_i}(\overline{x}) - k_{i0}(x_0) = 0, \quad i = 1, ..., n, \tag{10.35}$$

которые вместе с условиями (10.34) составляют систему линейных уравнений относительно γ_b.

Задачи, приводимые к простейшей

Скалярный случай. Пусть задача оптимизации имеет форму

$$I = \int_0^T f_0(x, u, t)dt \to \max \tag{10.36}$$

с условием

$$\dot{x} = v(x, u, t), \quad x \in V_x \subset R^1, \tag{10.37}$$

$x(t), u(t)$ — скалярные, функции f_0 и f непрерывны и дифференцируемы по u, на управление нет ограничений.

Выясним, при каких условиях задача (10.36), (10.37) может быть приведена к виду (10.20), (10.25), и как следствие фазовая координата может быть переведена в разряд управлений.

Ограничим класс функций v такими, значение которых при любых допустимых фиксированных значениях x и t взаимно-однозначно связано с u. Это для дифференцируемой по u функции означает, что

$$\frac{\partial v}{\partial u} \neq 0 \quad \forall x, t. \tag{10.38}$$

Управление в этом случае может быть выражено через v, x, t как $u(v, x, t)$. Задача приводима к простейшей, если

$$f_0(x, u(v, x, t), t) = M_0(x, t) + N_0(x, t)v.$$

Выразим M_0 и N_0 через f_0, для чего запишем условия

$$\frac{\partial f_0}{\partial v} = \frac{\partial f_0}{\partial u} : \frac{\partial v}{\partial u} = N_0(x, t), \tag{10.39}$$

$$f_0(x, u_{\text{ст}}(x, t), t) = M_0(x, t). \tag{10.40}$$

Здесь зависимость $u_{\text{ст}}(x, t)$ (статическое управление) находится из условия

$$v(x, u_{\text{ст}}, t) = 0. \tag{10.41}$$

Выражения (10.39)–(10.41) не только представляют собой условия приводимости, но и определяют N_0 и M_0, которые после подстановки в условия (10.29)–(10.33) позволяют найти оптимальное решение.

Заведомо приводимы задачи с неограниченным управлением афинные по u

$$I = \int\limits_0^T [l_0(x, t) + r_0(x, t)u]dt \to \max \tag{10.42}$$

при условии

$$\dot{x} = l(x, t) + r(x, t)u, \quad r \neq 0. \tag{10.43}$$

Из условий (10.39)–(10.41) получим

$$\left.\begin{aligned}
&N_0(x, t) = \frac{r_0(x, t)}{r(x, t)}, \quad u_{\text{ст}}(x, t) = -\frac{l(x, t)}{r(x, t)},\\
&M_0(x, t) = l_0(x, t) - \frac{r_0(x, t)l(x, t)}{r(x, t)},\\
&\overline{k}(\overline{x}) = \int\limits_0^{\overline{x}} \frac{r_0(x, T)}{r(x, T)}dx, \quad k_0(x_0) = \int\limits_0^{x_0} \frac{r_0(x, 0)}{r(x, 0)}dx.
\end{aligned}\right\} \tag{10.44}$$

Подстановка этих выражений в условия (10.28) определяет $x^*(t), \overline{x}$ и x_0.

Пример 3.

$$\left.\begin{aligned}
&I = \int\limits_0^T \frac{xt}{cu - Q}dt \to \max, \quad x(T) = \overline{x}, x(0) = x_0\\
&\dot{x} = -\frac{xu}{cu - Q}.
\end{aligned}\right\} \tag{10.45}$$

Здесь $Q = Q(x,t)$ — заданная функция.

По условиям приводимости (10.39), (10.40)

$$N_0(x,t) = -\frac{xtc}{(cu-Q)^2} : \frac{x(cu-Q)-cxu}{(cu-Q)^2} = \frac{ct}{Q}, \tag{10.46}$$

$u_{\text{ст}}(x,t) = 0$,

$$M_0(x,t) = -\frac{xt}{Q}. \tag{10.47}$$

Если задано $V_x(t)$, множество допустимых значений x, то оптимальное решение $x^*(t)$ доставляет максимум функции

$$R = \left[-\frac{xt}{Q} + \int\limits_0^x \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{ct}{Q}\right)dx\right] \to \max_{x\in V_x(t)} \tag{10.48}$$

$$\overline{k} - k_0 = -\frac{cT}{Q}x(T). \tag{10.49}$$

Граница множества $V_x(t)$ может определяться и ограничениями на u, если они заданы. В этом случае решение приведенной задачи дает верхнюю оценку для решения исходной.

Отметим, что внутри множества V_x условия стационарности R по x приводит к уравнению Миеле [3], полученному другим способом

$$Q(c-t) + t\left(c\frac{\partial Q}{\partial t} - x\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0. \tag{10.50}$$

Оно является более слабым, чем (10.48), (10.49) условием оптимальности и может иметь не единственное решение.

Векторный случай. Пусть в задаче (10.20), (10.25) $x(t)$ — вектор- функция

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t)),$$

где $x_1(t)$ — векторная, а $x_2(t)$ — скалярная функции. Условия, наложенные на фазовые координаты,

$$\dot{x_1} = f_1(x,u,t), \quad u \in V_u, \quad x_1(0) = x_1(0) \tag{10.51}$$

$$\dot{x_2} = \upsilon, \quad x_2 \in V_{x_2}. \tag{10.52}$$

Функция f_1 непрерывно-дифференцируема по x_1, t и непрерывна по x_2, u, V_u и V_{x_2} — замкнуты и ограниченны. Критерий оптимальности

$$I = \int_0^T [f_0(x,u,t) + N_0(x_2,t)\upsilon]dt \to \max\,. \tag{10.53}$$

Аналогично простейшей задаче функционал (10.53) может быть приведен к эквивалентной форме

$$I = \int_0^T \left[f_0(x,u,t) - \int_0^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} N_0(x_2,t)dx_2 \right] dt + \overline{k}(\overline{x_2}) - k_0(x_{20}) \to \max, \tag{10.54}$$

где $\overline{k}$ и k_0 соответствуют выражениям (10.22).

Задача (10.54), (10.51) представляет собой стандартную задачу оптимального управления, с управляющими воздействиями $u(t)$ и $x_2(t)$.

Задачи, приводимые к простейшей на части интервала управления. Пусть интервал $[0,T]$ может быть разбит на три подинтервала $[0,t_1)$, $[t_1,t_2]$, $(t_2,T]$, а функционал I может быть представлен как

$$\begin{gathered} I = I_1 + I_0 + I_2 = \int_0^{t_{1-}} f_{01}(x,u,t)dt + \\ + \int_{t_1}^{t_2} (l_0(x,t) + r_0(x,t)u)dt + \int_{t_{2+}}^T f_{02}(x,u,t)dt \to \max \end{gathered} \tag{10.55}$$

при условии

$$\dot{x} = l(x,t) + r(x,t)u, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = \overline{x}, \quad r(x,t) \neq 0. \tag{10.56}$$

В этой задаче на подинтервале $[t_1,t_2]$ оптимальное решение определяется условиями (10.44) и не зависит от решения на остальной части интервала управления.

Интересен случай, когда отрезок $[t_1,t_2]$ стягивается в точку $t = t_\nu$. В этом случае слагаемое I_0 в (10.55) равно

$$I_0 = \int_{x(t_{\nu-})}^{x(t_{\nu+})} \frac{r_0(x_1,t_\nu)}{r(x,t_\nu)} dx. \tag{10.57}$$

Если $r_0(x,t_\nu) = 0\,\forall x$, то значения $x(t_{\nu-})$ и $x(t_{\nu+})$ находят по условию максимума функционалов I_1 и I_2 со свободными правым и левым концами траектории соответственно.

10.3 Оценочные задачи

Пусть задача оптимального управления имеет форму

$$I = \int\limits_0^T f_0(x, z, u_2, t)dt \to \max \tag{10.58}$$

при условиях

$$\dot{z} = f_1(x, z, u_1, t), \tag{10.59}$$

$$\dot{x} = f_2(x, z, u_2, t). \tag{10.60}$$

Функции $f_i, i = 0, 1, 2$ непрерывны по z, u и непрерывно дифференцируемы по x, t. Для простоты будем считать $z(t)$ и $u_1(t)$ скалярными.

Простейший способ построения задачи, решение которой проще, чем решение исходной (10.58)–(10.60), и позволяет оценить ее значение I^* сверху (оценочной), состоит в том, чтобы отбросить уравнение (10.59) и считать переменную z наряду с u_2 управлением в задаче (10.58)–(10.60).

Ограничения на z могут быть наложены непосредственно или получены с учетом граничных условий на z и ограничений на u_1, как множество достижимых из заданных граничных точек значений z в силу уравнения (10.59). Для некоторых задач такое «внешнее множество достижимости» $V_z(x, t)$ может быть легко построено.

Пусть решение оценочной задачи $\overline{x(t)}, \overline{u_2(t)} \in V_u, \overline{z(t)} \in V_z$ найдено, ему соответствует значение критерия оптимальности $\overline{I} \geq I^*$. Управление $\overline{u_1(t)}$ находят по условию

$$\dot{\overline{z}} = f_1(\overline{x}, \overline{u}_1, \overline{z}, t). \tag{10.61}$$

Если найденное таким образом управление допустимо, то решение оценочной задачи оптимально для исходной задачи. Если же оно не допустимо, то строят такую последовательность допустимых решений исходной задачи, которая стремилась бы к решению оценочной. Если при этом значение критерия оптимальности исходной задачи стремится к $\overline{I}$, то она имеет «обобщенное решение» в классе последовательностей, а ее критерий оптимальности на множестве допустимых решений не достигает максимума, а достигает точной верхней грани.

Любое допустимое решение реализует оценку значения задачи снизу $I^0 \le I^*$. Выбрав допустимое решение, в том или ином смысле близкое к решению оценочной задачи, или по принципу «близоруко-оптимального» решения, когда управление выбирают по условию максимума подынтегрального выражения I, а переменные состояния рассчитывают из уравнений связи, можно рассчитывать, что разность $\overline{I} - I^0$ окажется достаточно малой. В этом случае найденное допустимое решение можно принять в качестве приближенного решения исходной задачи.

Пример 4. Рассмотрим в качестве иллюстрации задачу с критерием

$$I = -\int\limits_0^9 (x(t) - \sqrt{t})^2 dt \to \max\,. \tag{10.62}$$

Функция $x(t)$ подчиняется дифференциальному уравнению и ограничениям

$$\dot{x} = u; \quad |u| \le 1; \quad x(0) = 1; \quad x(9) = 2.$$

Оценочную задачу получим, отбросив ограничение на управление, а вместе с ним и дифференциальное уравнение. Будем искать $x(t)$ в классе кусочно-непрерывных функций по условию максимума функционала I. Ее решение, очевидно

$$\overline{x}(t) = \sqrt{t}; \quad \overline{u}(t) = -\delta(t) + \frac{1}{2\sqrt{t}} - \delta(t-9).$$

значение же критерия $\overline{I} = 0$.

Чтобы найти допустимое решение, приближающее $\overline{x}$, построим на плоскости x, t множество M, в точки которого можно попасть с помощью ограниченного по модулю управления из точек $x(0) = 1$ и $x(9) = 2$. В области M построим реализуемую траектортю, минимально по модулю отличающуюся от $\overline{x}(t)$ в каждый момент времени. Эта траектория $x^0(t)$ проходит по границе M до ее пересечения с $\overline{x}(t) = \sqrt{t}$, затем совпадает с этой линией и, наконец, сходит с нее в точке пересечения с другой границей M. Соответствующее управление $u^0(t)$ принимает значения, равные -1 в начале и в конце интервала $[0, 9]$, а для промежуточных значений $0,38 \le t \le 8.1$ оно совпадает с $\overline{u}(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$.

Решение той же задачи с использованием необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума совпадает с найденным решением, но его получение куда более трудоемко, так как оно содержит участок особого управления.

Переход к новым переменным состояния

Пусть в задаче (10.58)–(10.60) уравнение (10.59) имеет форму

$$\dot{z} = F(x, z)v, z \in V_z, F(x, z) \neq 0, \tag{10.63}$$

управление v не ограничено.

Изложенная выше процедура при этом упрощается. В оценочной задаче z переводят в разряд управлений, функции f_0 и f_2 могут быть не дифференцируемы, а непрерывны по z, соответствующее решению оценочной задачи управление

$$\overline{v(t)} = \frac{\dot{\overline{z(t)}}}{F(\overline{z(t)}, \overline{x(t)})}.$$

За счет замены переменных рассмотренный класс задач можно расширить на задачи, в которых уравнения (10.60) имеют вид

$$\dot{x} = f_1(x, z, u, t) + f_2(x, z)v. \tag{10.64}$$

Для приведения задачи (10.58), (10.63), (10.64) к форме (10.58), (10.59), (10.63) нужно сделать замену переменных $y(x, z)$, так чтобы скорость изменения переменной y не зависела от v [10]. Скорость изменения y

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial x}(f_1(x, z, u, t) + f_2(x, z)v) + \frac{\partial y}{\partial z}F(x, z)v. \tag{10.65}$$

Она не зависит от v, если выполнено условие

$$\frac{\partial y}{\partial x}f_2(x, z) + \frac{\partial y}{\partial z}F(x, z) = 0, \tag{10.66}$$

которое представляет собой линейное однородное уравнение в частных производных относительно $y(x, z)$. Одним из решений этого уравнения является первый интеграл $y_0(x, z)$ уравнения в обыкновенных производных вида

$$\frac{dx}{f_2(x, z)} = \frac{dz}{F(x, z)}. \tag{10.67}$$

Любая непрерывно-дифференцируемая функция от y_0 является решением уравнения
(10.66).

Когда $y(x, z)$ найдена, можно исключить из условий задачи x через y и z и переписать задачу в форме

$$I = \int_0^T \tilde{f}_0(y, u, z, t)dt \to \max \tag{10.68}$$

при условиях

$$\dot{y} = \tilde{f}_1(y, u, z, t), \tag{10.69}$$

$$\dot{z} = \tilde{F}(y, z)v, \quad z \in V_z, u \in V_u, x(y_0, z_0) = x_0. \tag{10.70}$$

В этой задаче переменная z может быть переведена в разряд управлений.

Пусть x — вектор и неограниченное управление v линейно входит в правую часть не одного, а нескольких дифференциальных уравнений. В этом случае можно перейти от исходных фазовых координат $x(t)$ к новым переменным состояния $y(x, t)$ так, чтобы скорость одной из составляющих $y_1(x, t)$ линейно зависела от v, а скорости остальных не зависели от v, а зависели бы от y_1. Например,

$$I = \int_0^T [l_0(x, t) + r_0(x, t)v]dt \to \max \tag{10.71}$$

$$\begin{gathered} x(t) = (x_1(t), x_2(t)), \\ \dot{x_1} = l_1(x, t) + r_1(x)v, \\ \dot{x_2} = l_2(x, t) + r_2(x)v, \\ x(t) \in V_x(t) \subset R, \quad r_1(x) \neq 0, r_2(x) \neq 0. \end{gathered} \tag{10.72}$$

Выберем новые переменные $y_1(x)$ и $y_2(x)$ так, чтобы

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \frac{1}{r_1(x)}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = +\frac{1}{r_2(x)}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{r_2(x)}. \tag{10.73}$$

Такая замена найдется, если

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial y_i}{\partial x_2 \partial x_1}, \quad i = 1, 2.$$

В этом случае

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \frac{l_1(x,t)}{r_1(x)} + \frac{l_2(x,t)}{r_2(x)} + 2\upsilon, \\ \dot{y}_2 &= \frac{l_1(x,t)}{r_1(x)} - \frac{l_2(x,t)}{r_2(x)}. \end{aligned}\right\} \tag{10.74}$$

После того как в выражениях (10.71), (10.74) вектор x выражен через y, получим задачу, в которой переменная y_1 может быть переведена в разряд управлений. Наложенные на $y(x)$ ограничения нужно выразить через ограничения на $x(t)$.

Пример 5.

$$I = \int\limits_0^T x_1^2 dt \to \min,$$

при условии

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2 + \upsilon, \quad \dot{x}_2 = -\upsilon, \\ &x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \\ &x_1(T) = x_2(T) = 0, \quad x \in V_x. \end{aligned}\right\} \tag{10.75}$$

Сделаем замену

$$y_1 = (x_1 - x_2)/2, \quad y_2 = (x_1 + x_2)/2,$$

при этом

$$x_1 = y_1 + y_2, \quad x_2 = y_2 - y_1,$$

$$\dot{y}_1 = \frac{x_2}{2} + \upsilon = \frac{y_2 - y_1}{2} + \upsilon, \tag{10.76}$$

$$\dot{y}_2 = \frac{x_2}{2} = (y_2 - y_1)/2, \tag{10.77}$$

$$I = \int\limits_0^T (y_1 + y_2)^2 dt \to \min\,. \tag{10.78}$$

Переменная y_1 может быть переведена в разряд управлений в задаче (10.77), (10.78), в которой ограничения на x определяют множество допустимых значений y.

Пример 6. Задача оптимального управления реактором периодического действия с использованием подпитки имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &I = \int\limits_0^T zxp\ (x, s, u)\ dt \to \max; \\ &\dot{x} = x\mu\ (x, s, u) - v\frac{x}{z}; \\ &\dot{s} = -x\eta\ (x, s, u) + v\ \frac{s_0 - s}{z}; \\ &\dot{z} = v. \end{aligned}\right\} \tag{10.79}$$

Здесь z — объем аппарата; v — расход подпитки; x и s — концентрации реагентов; s_0 — концентрация одного из них в подпитке; u — вектор режимных управлений (температура, pH и др.), фиксированы начальные значения всех переменных состояния, подынтегральное выражение в I представляет собой скорость образования целевого продукта.

Продемонстрируем на этой задаче последовательность использования метода замены переменных:

1-й шаг. Перейдем к переменным $y_1(x, z, s)$ и $y_2(x, z, s)$, скорость изменения которых не зависела бы от v. Условия независимости для каждой из этих переменных имеет одну и ту же форму

$$\frac{\partial y_i}{\partial x}\frac{x}{z} + \frac{\partial y_i}{\partial s}\frac{s_0 - s}{z} + \frac{\partial y_i}{\partial z} = 0; \qquad i = 1, 2. \tag{10.80}$$

Уравнению (10.80) соответствует система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-\frac{z}{x}dx = \frac{z}{(s_0 - s)}ds = dz,$$

которая имеет два независимых первых интеграла $C_1(z, x, s)$ и $C_2(z, x, s)$. Решением (10.80) является любая дифференцируемая функция от C_1, C_2. Проще всего принять $y_1 = C_1$ и $y_2 = C_2$, где C_1 и C_2 - первые интегралы уравнений

$$-\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}; \qquad \frac{ds}{s_0 - s} = \frac{dz}{z},$$

откуда

$$y_1 = C_1(x, z) = -\frac{1}{xz}; \qquad y_2 = C_2(s, z) = \frac{1}{(s_0 - s)z}.$$

2-й шаг. Заменяя в задаче (10.79) x и s как $x = -1/y_1 z, \quad s = s_0 - 1/y_2 z$ и расширяя задачу за счет отбрасывания уравнения для z, получаем оценочную задачу меньшей размерности

$$I = -\int\limits_0^T \frac{1}{y_1}\ \widetilde{p}\ (z, y_1, y_2, u)\ dt \to \max;$$

$$\dot{y}_1 = -\frac{1}{y_1 z^2}\ \widetilde{\mu}\ (z, y_1, y_2, u); \quad \dot{y}_2 = -\frac{y_2^2}{y_1}\ \widetilde{\eta}\ (z, y_1, y_2, u),$$

управлениями в которой являются z и u. Решение этой задачи, если оно реализуемо, определит решение исходной, а если не реализуемо, то позволит получить верхнюю оценку ее значения I^* и даст полезную информацию о характере решения исходной задачи.

Эффективность такого рода преобразований продемонстрирована на примерах многих реальных задач (см. [10] и др.).

10.4 Подбор «инварианта» и Ляпуновские уравнения

Пусть в задаче (10.1)–(10.4) найдется такая функция $y(x) : R^n \times [0, T] \to R$, что скорость ее изменения в силу уравнений (10.2) равна нулю:

$$y(x(t)) = y(x_0) = \text{Const}, \tag{10.81}$$

Значение этой инвариантной переменной определяется начальными значениями исходных переменных. Условие постоянства y вдоль траекторий системы приводит к равенству

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} f_i(x, u, t) = 0, \quad \forall x, t, u \in V_u. \tag{10.82}$$

Переменная $y(x)$, неизменная на искомом решении, заведомо существует в физических задачах, решение которых удовлетворяет законам сохранения вещества, энергии, энтропии (если оно ищется в классе обратимых процессов) и пр. Если y найдена, то размерность задачи можно снизить, найдя значение y по начальным условиям и выразив из (10.81) одну из переменных через остальные.

Ляпуновские уравнения. Уравнения

$$\dot{y} = f(x, u, t), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) = \overline{y}, \tag{10.83}$$

называют Ляпуновскими [17], если их правая часть не зависит от y.

Такие уравнения могут быть заменены интегральными условиями вида

$$\int_0^T f(x(t),u(t),t)dt = \overline{y} - y_0, \tag{10.84}$$

если переменная y не входит в правые части уравнений для x.

В исходной постановке задача (10.1)–(10.4) может не содержать Ляпуновских уравнений, но существует замена $y_1(x,t)$ такая, что правая часть уравнения

$$\dot{y}_1 = \varphi(x,u,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} f_i(x,u,t) + \frac{\partial y_1}{\partial t} \tag{10.85}$$

после замены одной из фазовых переменных, например x_1, через y_1 не содержит y_1. Тогда уравнение (10.85) эквивалентно условию

$$\int_0^T \varphi(x,u,t)dt = y_1(T) - y_1(0) \tag{10.86}$$

и размерность задачи может быть уменьшена.

Пример 8. Пусть

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}_1 = f_1(x_2,u,t)x_1, \quad x_1(0) = x_{10}, \quad x_1(T) = \overline{x_1} \\ \dot{x}_2 = f(x_2,u,t). \end{array}\right\} \tag{10.87}$$

Замена $y(x_1) = \ln x_1$ приводит к уравнениям

$$\left.\begin{array}{l} \dot{y} = f_1(x_2,u,t), \quad y(0) = \ln x_{10}, \quad y(T) = \ln \overline{x_1}, \\ \dot{x}_2 = f(x_2,u,t). \end{array}\right\} \tag{10.88}$$

Первое из этих уравнений — Ляпуновское и его можно заменить интегральным ограничением

$$\int_0^T f_1(x_2,u,t)dt = y(T) - y(0), \tag{10.89}$$

что упрощает решение.

В задачах управления термодинамическими системами [17], состояние системы описывается значениями экстенсивных переменных (числа молей, внутренней энергии, объема, энтропии и пр.), а скорости их изменения зависят от интенсивных переменных (температур, давлений, химических потенциалов и пр.), так что уравнения часто оказываются ляпуновскими.

10.5 Переход от линейных дифференциальных уравнений к интегральным

Пусть задача (10.1)–(10.4) содержит дифференциальное уравнение вида

$$a_0 x^{(q)} + a_1 x^{(q-1)} + ... + a_{q-1}\dot{x} + a_q x = u(t), \tag{10.90}$$

где a_ν ($\nu = 0, ..., q$) — константы.

Ясно, что уравнение (10.90) эквивалентно системе уравнений вида (10.2). При нулевых начальных значениях производных оно может быть переписано в интегральной форме

$$x(t) = \int_0^t k(t-\tau)u(\tau)d\tau + x(0), \tag{10.91}$$

где импульсная переходная функция

$$k(\tau) = L^{-1}\left[\frac{1}{a_0 s^{q+} + a_1 s^{q-1} + ... + a_q}\right] \tag{10.92}$$

— обратное преобразование Лапласа от функции, стоящей в квадратных скобках, s — оператор Лапласа [11].

Часто в реальных задачах дифференциальные уравнения системы вообще не известны, а импульсная переходная функция или ее интеграл (кривая разгона) получены экспериментально. В этих случаях переход к дифференциальным уравнениям представляет собой самостоятельную задачу, не всегда имеющую решение, и условия оптимальности рационально выражать через импульсную переходную функцию.

Уравнение (10.90) может быть уравнением с запаздывающим аргументом, отражающим распределенный характер управляемого объекта. Это практически не осложняет интегральную форму (10.91) представления для $x(t)$.

Пример 9. Обобщенная задача Булгакова.

Найти оптимальное скалярное ограниченное по модулю управление $u(t)$, для которого функционал

$$I = \int_0^T f_0(u,t)dt + F_0(x(T)) \to \max_{|u(t)| \le 1} \tag{10.93}$$

при условиях

$$x_i(T) = x_{i0} + \int\limits_0^T k_i(T-\tau)u(\tau)d\tau, \quad i = 1, ..., n. \tag{10.94}$$

Функция f_0 непрерывна по u и непрерывно–дифференцируема по t.

Обобщенный функционал Лагранжа для задачи (10.93), (10.94) примет вид (см. п.п. 9.4, 9.5, а так же [21], [23])

$$\begin{aligned} &S = I + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i[(x_i(T) - x_{i0}) - \int\limits_0^T k_i(T-t)u(t)dt] = \\ &= \int\limits_0^T [f_0(u,t) - u(t)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i k_i(T-t)]dt + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i[(x_i(T) - x_{i0})] + \\ &+F_0(x(T)) = \int\limits_0^T R(u,t,\lambda)dt + S_1(\lambda, x(T)). \end{aligned} \tag{10.95}$$

Условия оптимальности приводят к требованию стационарности S по $x(T)$ и максимума R по $u(t)$. Из этих условий получим:

$$\lambda_i = -\frac{\partial F_0}{\partial x_i}, \quad i = 1, ..., n, \tag{10.96}$$

$$u^*(t) = \arg\max_{|u|\le 1}[f_0(u,t) + u\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_0}{\partial x_i}k_i(T-t)]. \tag{10.97}$$

Решение задачи сильно упрощается, когда $F_0(x(T)) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i(T)$. В этом случае $\lambda_i = -a_i$ и оптимальное управление определено условиями (10.97) для тех значений t, для которых максимум по u выражения $\left[f_0(u,t)+u\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\, k_i(T-t)\right]$ единственный. В задаче Булгакова x — скаляр, а $I = -x(T)$.

В том случае, когда F — нелинейная функция, ее производные зависят от $x(T)$ и требование максимума (10.97) нужно решать совместно с уравнениями (10.96) численно, например, методом итераций. То же относится и к рассмотренной ниже задаче с квадратичным функционалом.

Пример 10. Рассмотрим первоначально задачу

$$I = \int\limits_0^\infty x^2(t)dt \to \min \Big/ \ \dot{x} = u, \ |u| \leq 1, x(0) = 1. \tag{10.98}$$

Эквивалентное дифференциальному уравнению условие в интегральной форме имеет вид

$$x(t) - x(0) = \int\limits_0^\infty h(t-\tau)u(\tau)d\tau. \tag{10.99}$$

Здесь $h(t)$ — функция Хевисайда, равная нулю при $t < 0$ и единице при $t \geq 0$.

Для невырожденного решения ($\lambda_0 = -1$) запишем условия оптимальности задачи (10.98), (10.99) через обобщенную функцию Лагранжа [23]

$$R = -x^2(t) + \int\limits_0^\infty \lambda(\tau)h(\tau - t)u(t)d\tau - \lambda(t)(x(t) - x(0)). \tag{10.100}$$

Условия оптимальности сводятся к требованию стационарности R по x и максимума по u.

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0 \to \quad \lambda(t) = -2x(t). \tag{10.101}$$

Условие максимума с учетом (10.101) приводит к равенству

$$u^*(t) = \arg\max_{|u|\leq 1} R(x^*, \lambda^*, u) \to u^*(t) = -\mathrm{Sign} \int\limits_t^\infty x(\tau)h(\tau - t)d\tau. \tag{10.102}$$

Так как $h(\tau - t)$ при $\tau \geq t$ равно единице, то после подстановки (10.102) в (10.99) получим для оптимальной траектории

$$x(t) = x(0) - \int\limits_0^t \left\{ \mathrm{Sign} \int\limits_\tau^\infty x(t)dt \right\} d\tau. \tag{10.103}$$

Эта задача легко обобщается на случай, когда $x(t)$ представляет собой решение линейного дифференциального уравнения вида

$$a_0 x^{(q)}(t) + a_1 x^{(q-1)}(t) + ... + a_0 x(t) = u(t) \tag{10.104}$$

при тех же ограничениях на u, что в задаче (10.98), и при нулевых начальных значениях производных.

Действительно, при переходе к интегральному уравнению связь между x и u примет форму уравнения свертки

$$x(t) - x(0) = \int\limits_0^\infty k(t-\tau)u(\tau)d\tau, \tag{10.105}$$

где $k(t) = 0$ при $t < 0$, а при $t \geq 0$ представляет собой обратное преобразование Лапласа от выражения (10.92).

Обобщенная функция Лагранжа

$$R = -x^2(t) + u(t)\int\limits_t^\infty \lambda(\tau)k(\tau - t)d\tau - \lambda(t)(x(t) - x_0).$$

Условия стационарности этой функции по x и максимума по u приводят к соотношениям

$$\lambda(t) = -2x(t), \quad u^*(t) = -\mathrm{Sign}\int\limits_t^\infty x(\tau)k(\tau - t)d\tau. \tag{10.106}$$

На оптимальном решении

$$x(t) = x(0) - \int\limits_0^t [k(t-\tau)\mathrm{Sign}\int\limits_\tau^\infty k(t-\tau)x(t)dt]d\tau. \tag{10.107}$$

Если уравнение (10.104) является уравнением с запаздывающим аргументом с величиной запаздывания θ, то в условии (10.107) функцию $k(t)$ нужно заменить на функцию $k(t-\theta)$. Соответственно пределы интегрирования изменятся с t на $t-\theta$ и с τ на $\tau+\theta$.

Для линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами импульсная переходная функция $k(t)$ в уравнении свертки заменяется функцией Грина $k\ (t,\tau)$. Во многих случаях численное решение одного интегрального уравнения оказывается проще, чем решение краевой задачи для системы дифференциальных уравнений.

Пример 11. В качестве примера остановимся на задаче, подробно исследованной в [12]. В этой задаче в уравнении (10.90) $a_0 = 1, a_\nu = 0$ $(\nu = 1, ..., q)$. Импульсная переходная функция представляет собой взятый q раз интеграл от δ-функции

$$k(t) = \frac{t^{q-1}}{(q-1)!}\text{при} t \geq 0 \tag{10.108}$$

и равна нулю при $t > 0$. Интегральное уравнение для оптимального решения при нулевых начальных условиях по всем производным получается из (10.107)

$$x(t) = x_0 - \int\limits_0^t \left[\frac{(t-\tau)^{q-1}}{(q-1)!} \text{Sign} \int\limits_\tau^\infty x(t)(t-\tau)^{q-1} dt \right] d\tau. \tag{10.109}$$

Когда начальные условия для производных не нулевые: $x_0^{(\nu)} = x_{\nu 0}, \nu = 0, 1, ..., q-1$, получим вместо (10.113) равенство

$$x(t) = x_0 + \sum_{\nu=1}^{q-1} x_{\nu 0} \frac{t^\nu}{\nu!} + \int\limits_0^t \left[\frac{(t-\tau)^{q-1}}{(q-1)!} u(\tau) \right] d\tau. \tag{10.110}$$

Функция R аналогично (10.100) равна

$$R = -x^2(t) + u(t) \int\limits_0^\infty \lambda(\tau) \frac{(\tau - t)^{q-1}}{(q-1)!} d\tau - \lambda(t) \left(x(t) - \sum_{\nu=0}^{q-1} x_{\nu 0} \frac{t^\nu}{\nu!} \right). \tag{10.111}$$

Условия оптимальности (стационарности этой функции по x и максимума по u) приводят к соотношениям:

$$\lambda(t) = -2x(t), \quad u^*(t) = -\text{Sign} \int\limits_t^\infty x(\tau) \frac{(\tau - t)^{q-1}}{(q-1)!} d\tau. \tag{10.112}$$

Задачи на быстродействие. Пусть $x(t)$ и $u(t)$ скалярные функции, связанные друг с другом уравнением свертки (10.113). Требуется выбрать ограниченное по модулю кусочно – непрерывное управление, которое бы переводило состояние $x(t)$ из заданного начального x_0 в заданное конечное x_T за минимальное время T. Обозначим разность $x_T - x_0$ через Δ.

Обобщенная функция Лагранжа для этой задачи, очевидно, равна

$$R = -1 + \lambda \left[\int\limits_0^T k(T-t) u(t) dt - \Delta \right].$$

Так что $u^*(t) = \text{Sign} k(T-t)$, а минимальное значение T определяется условием

$$\int\limits_0^T |k(T-t)| dt = \Delta.$$

Обобщим задачу быстродействия на случай, когда функции $x(t)$ и $u(t)$ векторные, размерности n и r соответственно, причем все управления по модулю не превосходят единицы и r<n. Уравнения связи примут форму

$$x_i(t) - x_i(0) = \Delta_i = \sum_j \int\limits_0^\infty k_{ij}(t-\tau)u_j(\tau)d\tau, \quad i = 1, 2, ...n. \tag{10.113}$$

Обобщенная функция Лагранжа примет форму

$$R = -1 + \sum_i \lambda_i \left[\sum_j \int\limits_0^T k_{ij}(T-t)u_j(t)dt - \Delta_i \right].$$

Оптимальное управление

$$u_j^*(t) = \text{Sign} \sum_i \lambda_i k_{ij}(T-t), \quad j = 1, 2, ...r.$$

Для расчета неопределенных множителей λ требуется решить систему уравнений

$$\sum_j \int\limits_0^T k_{ij}(T-t)\text{Sign} \sum_i \lambda_i k_{ij}(T-t)dt - \Delta_i = 0, \quad i = 1, 2, ...n.$$

11 Прикладные задачи оптимального управления

В этом разделе рассмотрены реальные задачи оптимизации и управления и показано, как использованы для них изложенные выше условия оптимальности и приемы преобразования.

11.1 Условия оптимальности и оценки эффективности циклических режимов

Постановка задачи.

Пусть динамика системы характеризуется дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_\nu = f_\nu(x, u, a), \qquad \nu = \overline{1, m}, \tag{11.1}$$

правые части которых явно не зависят от t. Здесь x — переменные состояния, u — управления, a — параметры, подлежащие оптимальному выбору. Краевые условия для уравнений (11.1), как правило, не фиксированы, но на переменные состояния наложены условия цикличности

$$x_\nu(\tau) = x_\nu(0) \Rightarrow \int\limits_0^\tau f_\nu(x,u,a)dt = 0, \quad \nu = \overline{1,m}. \tag{11.2}$$

Критерий оптимальности циклического процесса имеет смысл средней за цикл эффективности и может быть записан в форме

$$I = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau f_0(x,u,a)dt \to \max. \tag{11.3}$$

Продолжительность цикла τ является одной из составляющих вектора a и в общем случае не фиксирована. На параметры и управляющие воздействия наложены ограничения $a \in V_a,\ u \in V_u$; кроме интегральных ограничений (11.1), определяющихся требованием цикличности, в задаче обычно имеются интегральные ограничения, связанные с заданной средней интенсивностью потребления того или иного ресурса (ресурсные ограничения)

$$J_j = \int\limits_0^\tau \varphi_j(x,u,a)dt = 0, \qquad j = \overline{1,r}. \tag{11.4}$$

Предполагают, что функции, определяющие задачу, непрерывны по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемы по x и a.

Условия оптимальности. Условия оптимальности задачи (11.1)–(11.4) могут быть получены с использованием принципа максимума Понтрягина. А именно, если оптимальное решение x^*, a^*, u^* существует и не вырождено, то найдутся ненулевой вектор λ и дифференцируемая вектор-функция $\psi(t)$ такие, что функция

$$R = \frac{1}{\tau}f_0 + \sum_\nu [\dot\psi_\nu x_\nu + (\psi_\nu + \lambda_\nu)f_\nu] + \sum_j \lambda_j\varphi_j$$

стационарна по x, достигает максимума по u, а интеграл S от этой функции удовлетворяет условиям локальной неулучшаемости по a.

Получим:

$$\frac{\partial R}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \dot\psi_i = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{1}{\tau}f_0 + \sum_\nu (\psi_\nu + \lambda_\nu)f_\nu + \sum_j \lambda_j\varphi_j\right\}. \tag{11.5}$$

Так как значения $x_\nu(\tau)$ и $x_\nu(0)$ не фиксированы, то $\psi_\nu(\tau)$ и $\psi_\nu(0)$ равны нулю. Введя обозначения $\tilde{\psi}_\nu = \psi_\nu + \lambda_\nu$ и учитывая, что $\dot{\tilde{\psi}}_\nu = \dot{\psi}_\nu$, можно переписать условия (11.5) в форме

$$\dot{\tilde{\psi}}_i = -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big\{\frac{1}{\tau}f_0 + \sum_\nu \psi_\nu f_\nu + \sum_j \lambda_j \varphi_j\Big\} = -\frac{\partial}{\partial x_i}H. \qquad (11.6)$$

Причем для этих уравнений из равенства нулю $\psi(0)$ и $\psi(\tau)$ вытекают условия цикличности по сопряженным переменным

$$\tilde{\psi}_\nu(0) = \tilde{\psi}_\nu(\tau) \Rightarrow \int\limits_0^\tau \frac{\partial H}{\partial x_\nu}dt = 0, \qquad \nu = \overline{1,m}. \qquad (11.7)$$

Условия максимума R по u имеют вид

$$u^*(t) = \arg\max_{u\in V_u}\left\{\frac{f_0}{\tau} + \sum_\nu \tilde{\psi}_\nu f_\nu + \sum_j \lambda_j\varphi_j\right\}. \qquad (11.8)$$

Наконец, условия оптимальности по каждой из составляющих a_k вектора a, к числу которых принадлежит и продолжительность цикла τ, приводят к неравенствам

$$\frac{\partial S}{\partial a_k}\delta a_k \le 0, \qquad k = 1, 2, \ldots \qquad (11.9)$$

Здесь δa — конус допустимых по отношению к включению $a \in V_a$ вариаций вектора a.

Отметим, что фазовая траектория, соответствующая оптимальному циклическому процессу, если решение единственно, не имеет самопересечений. В противном случае каждый ее замкнутый участок соответствовал бы оптимальному циклу.

Оценка эффективности перехода к циклическому процессу

Условия эквивалентности и эффективности циклического расширения. Задача (11.1)–(11.4) об оптимальном циклическом режиме (назовем ее задачей Ц) представляет собой расширение задачи нелинейного программирования. Действительно, в том случае, когда на решение этой задачи наложены дополнительные условия $x =$const, $u =$const, получим задачу об оптимальном статическом режиме (задачу С):

$$I_C = f_0(x,u,a) \to \max \Big/ \begin{array}{l} f_\nu(x,u,a) = 0, \\ \varphi_j(x,u,a) = 0, \\ u \in V_u, \quad a \in V_a, \quad \nu = \overline{1,m}, \quad j = 1,2. \end{array} \tag{11.10}$$

Так как множество допустимых решений задачи (11.1)–(11.4) шире, чем множество допустимых решений задачи С, то

$$I_C^* \leq I_{\text{Ц}}^*, \tag{11.11}$$

где через $I_{\text{Ц}}^*$ обозначено значение задачи об оптимальном циклическом процессе.

Одной из проблем проектирования циклических процессов является получение условий, позволяющих выявить класс задач, для которых неравенство (11.11) превращается в равенство, т.е. циклическое расширение эквивалентно. Важную роль при решении этой задачи играет функция Лагранжа задачи С

$$R_C = f_0(x,u,a) + \sum_\nu \lambda_\nu f_\nu(x,u,a) + \sum_j \xi_j \varphi_j(x,u,a). \tag{11.12}$$

Для ответа на вопрос об эквивалентности или эффективности циклического процесса без решения задачи (11.1)–(11.4) образуем усредненные задачи, являющиеся в свою очередь расширениями для задачи С или Ц или для той и другой. Сравнение значений этих задач с величиной $I_{\text{Ц}}^*$ позволяет найти условия эквивалентности циклического расширения.

А. Оценка величины $I_{\text{Ц}}^*$ сверху и достаточные условия эквивалентности циклического расширения. Расширим множество допустимых решений задачи Ц, отбросив дифференциальные уравнения (11.1). В этом случае мы получим задачу $\overline{C}$, которую будем называть *оценочной:*

$$I_{\overline{C}} = \overline{f_0(x,u,a)}^{x,u} \to \max \Big/ \begin{array}{l} \overline{f_\nu(x,u,a)}^{x,u} = 0, \quad \nu = \overline{1,m}, \\ \overline{\varphi_j(x,u,a)}^{x,u} = 0, \\ u \in V_u, \quad a \in V_a, \quad j = \overline{1,r}. \end{array} \tag{11.13}$$

Ясно, что

$$I_{\overline{C}}^* \geq I_{\text{Ц}}^*, \tag{11.14}$$

а задача $\overline{C}$ представляет собой усредненное расширение для задачи C, содержащее переменные x, u и параметры a. При этом x и u входят в условия задачи $\overline{C}$ равноправно, и их можно объединить, обозначив как $y = (x, u)$. В сокращенной записи эта задача примет форму

$$I_{\overline{C}} = \overline{f_0(y,a)}^{y} \to \max \Bigg/ \begin{array}{l} \overline{f_\nu(y,a)}^{y} = 0, \\ \overline{\varphi_j(y,a)}^{y} = 0, \\ \nu = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,r}. \end{array} \tag{11.15}$$

Значение задачи (11.15), как расширения задачи об оптимальном статическом режиме, может быть выражено через функцию R_C как

$$I^*_{\overline{C}} = \inf_{\lambda,\xi} \sup_{y} R_C(y, a^*, \lambda, \xi). \tag{11.16}$$

Для определения вектора параметров имеем условие

$$\left[\frac{\partial}{\partial a} \overline{R_C(y,a,\lambda,\xi)}^{y}\right]_{a=a^*} \delta a \le 0. \tag{11.17}$$

В том случае, когда a^* лежит внутри V_a, условие (11.17) сводится к условию стационарности R_C по a.

Если найденное по формуле (11.16) значение $I^*_{\overline{C}}$ равно I^*_C, а этому соответствует случай, когда задача $\overline{C}$ имеет единственное базовое решение, то из неравенств (11.11) и (11.14) следует, что $I^*_{\text{Ц}} = I^*_C$, т.е. статический режим нельзя улучшить за счет перехода к циклическому режиму. Если же $I^*_{\overline{C}} > I^*_C$, то разница между ними $\Delta_{\overline{C}}$ дает верхнюю оценку того выигрыша, который возможен при переходе к циклическому режиму.

Б. Оценка величины $I^*_{\text{Ц}}$ снизу. Квазистатические и скользящие режимы. Рассмотрим случай, когда изменения $x(t)$ и $u(t)$ таковы, что производными $x(t)$ по времени можно пренебречь, так что связи x и u определяются так же, как и в статике, — зависимостями $f(x(t), u(t), a) = 0 \quad \forall t$. Соответствующий режим называют *квазистатическим.* Задача об оптимальном выборе $x(t), u(t)$ при условиях квазистатики (задача КС) имеет форму

$$I_{\text{КС}} = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau f_0(x,u,a)dt \to \max \Bigg/ \begin{array}{l} f(x,u,a)=0, \\ \int\limits_0^\tau \varphi(x,u,a)dt = 0, \\ u\in V_u, \quad a \in V_a, \end{array}$$

или в сокращенной записи

$$I_{\text{КС}} = \overline{f_0(y,a)}^y \to \max \Bigg/ \begin{array}{l} \overline{\varphi(y,a)}^y = 0, \\ y\in V_y, \quad a\in V_a. \end{array} \tag{11.18}$$

Здесь $y=(x,u)$, а множество V_y определяется включениями $u\in V_u$, $a\in V_a$ и условиями $f(x,u,a)=0$.

Так как любое решение задачи КС допустимо в задаче Ц, то справедливо неравенство

$$I^*_{\text{КС}} \le I^*_{\text{Ц}}. \tag{11.19}$$

В то же время значение $I^*_{\text{КС}}$ задачи КС, как значение усредненной задачи, определяется выражением

$$I^*_{\text{КС}} = \inf_\xi \left\{ \sup_y [f_0(y,a^*) + \xi\varphi(y,a^*)] \Bigg/ \begin{array}{l} f(y,a^*)=0, \\ u\in V_u. \end{array} \right\} \tag{11.20}$$

Здесь a^* — оптимальное значение вектора a, удовлетворяющее условию

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[\overline{f_0(y,a)}^y + (\xi, \overline{\varphi(y,a)}^y) + \sum_{i=0}^r \lambda^i f(y^i,a)\right]_{a^*} \delta a \le 0, \tag{11.21}$$

в котором δa — множество вариаций, допустимых по включению $a\in V_a$.

Множители Лагранжа λ^i в (11.21) выбирают так, чтобы для любого базового значения y^i вектора y были выполнены условия $f(y^i,a)=0$. Число базовых значений y определяется размерностью r вектор-функции φ, так что задача принимает форму

$$\overline{f}_0 = \sum_{i=0}^r \gamma_i f_0(y^i,a), \qquad \overline{\varphi} = \sum_{i=0}^r \gamma_i \varphi(y^i,a), \quad \sum_{i=0}^r \gamma_i = 1,\ \gamma_i \ge 0.$$

Рассмотрим случай, когда изменения вектора управления происходят со столь большой частотой, что вектор состояния x практически постоянен. Подобный режим называют *скользящим* установившимся режимом. Сформулируем задачу оптимизации такого режима как

$$I = \overline{f_0(b,u)}^u \to \sup \Bigg/ \begin{array}{l} \overline{f(b,u)}^u = 0, \quad u \in V_u, \\ \overline{\varphi(b,u)}^u = 0, \quad b \in V_b. \end{array} \tag{11.22}$$

Эту задачу называют задачей СК. Через b в (11.22) обозначен вектор с составляющими x и a. Этот режим является предельным случаем циклического, так что справедливо неравенство

$$I^*_{\text{СК}} \leq I^*_{\text{Ц}}.$$

Задача (11.22) представляет собой усредненное расширение задачи С с двумя типами переменных; ее значение:

$$I^*_{\text{СК}} = \min_{\lambda,\xi} \max_u R(u, b^*, \lambda, \xi) = \min_{\lambda,\xi} \max_{u \in V_u} \left[f_0(u, b^*) + \lambda f(u, b^*) + \xi \varphi(u, b^*) \right], \tag{11.23}$$

при этом вектор b^* удовлетворяет условию

$$\frac{\partial}{\partial b} \overline{R(u, b^*, \lambda, \xi)}^u \delta b \leq 0. \tag{11.24}$$

Число базовых значений вектор-функции u в задаче не превосходит $m + r + 1$.

Необходимое условие целесообразности перехода к циклическому режиму может быть сформулировано через $I^*_{\text{КС}}$ и $I^*_{\text{СК}}$. Для этого введем величину

$$I_{\text{К}} = \max \left[I^*_{\text{КС}}, I^*_{\text{СК}} \right].$$

Если величина $I_{\text{К}}$ больше, чем I^*_C, то переход к циклическому режиму эффективен, а разность $\Delta_{\text{К}} = I_{\text{К}} - I^*_C$ оценивает эту эффективность снизу.

Частотный критерий целесообразности перехода к циклическому режиму. Будем предполагать, что оптимальный статический режим x^0, u^0 в задаче С найден. Требуется, как и выше, определить эффективно ли циклическое расширение задачи С. В [24] предложен частотный критерий целесообразности циклического режима. Этот критерий основан на исследовании приращения критерия оптимальности I по отношению к его максимальному статическому значению I^0 при малых гармонических колебаниях управления относительно u^0.

Пусть λ^0 и μ^0 — значения множителей Лагранжа λ и μ, соответствующих оптимальному статическому режиму, в функции Лагранжа для задачи С

$$R = f_0(x,u) + \sum_i \lambda_i f_i(x,u) + \sum_j \mu_j \varphi_j(x,u).$$

В окрестности оптимального статического режима и соответствующих ему множителей Лагранжа вычислим первые и вторые производные по x и u функций, определяющих задачу (эти производные для случая, когда x и u — векторы, представляют собой матрицы):

$$\begin{aligned}&A = \partial f/\partial x, \quad B = \partial f/\partial u, \quad P = \partial^2 R/\partial x^2,\\ &Q = \partial^2 R/\partial x \partial u, \quad H = \partial^2 R/\partial u^2, \quad K = \partial \varphi/\partial x, \quad M = \partial \varphi/\partial u.\end{aligned}$$

В окрестности оптимального статического режима приращение функционала I при малых вариациях $\delta x(t)$ и $\delta u(t)$ можно выразить, как

$$\Delta I = \frac{1}{2T}\int_0^T (\delta x' P \delta x + \delta x' Q \delta u + \delta u' Q' \delta x + \delta u' H \delta u) dt.$$

Вопрос о целесообразности перехода к циклическому режиму сводится к определению такой вариации δu, для которой величина ΔI была бы положительна при линеаризованных условиях (11.1)

$$\delta \dot{x} = A\delta x + B\delta u, \quad \delta x(T) = \delta x(0). \tag{11.25}$$

Чтобы освободиться от этих связей, сузим класс вариаций до гармонических:

$$\delta u(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} u_\nu e^{i\nu\frac{2\pi}{T}t}.$$

Преобразовав по Фурье линейные дифференциальные связи (11.25), получим

$$\delta x(i\omega) = \delta u(i\omega)\frac{B}{i\omega E - A} = \delta u(i\omega) W(i\omega).$$

Здесь E — единичная матрица (если x — скаляр, то $E = 1$). Кроме того, предполагают, что матрица A не имеет собственных значений с нулевой действительной частью, иначе малым отклонениям $\delta u(t)$ могли бы соответствовать большие отклонения $\delta x(t)$ и проведенная линеаризация не была бы правомерна.

Если величину ΔI выразить по формуле Парсеваля в частотной области, подставив вместо $\delta x(i\omega)$ его выражение через δu, то приращение критерия при гармонических колебаниях управления с частотами, кратными $2\pi/T$, примет вид

$$\Delta I = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta u'(-i\omega)\Pi(\omega)\delta u(i\omega)d\omega.$$

Здесь $\Pi(\omega)$ определяется матрицами P, Q, H и связью между δu и δx и, как нетрудно показать, имеет форму

$$\Pi(\omega) = W'(-i\omega)PW(i\omega) + Q'W(i\omega) + W'(-i\omega)Q + H,$$

где штрих обозначает транспонирование.

Для скалярной задачи

$$\Pi(\omega) = P|W(i\omega)|^2 + 2QReW(i\omega) + H.$$

Критерий целесообразности перехода к циклическому режиму утверждает, что если для некоторого значения ω матрица $\Pi(\omega)$ такова, что подынтегральное выражение в функционале ΔI положительно хотя бы для одного вектора δu, то статический режим может быть улучшен.

Для скалярной задачи

$$\Delta I = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\delta u(i\omega)|^2 \Pi(\omega)d\omega$$

и статический режим улучшается, если для некоторого ω величина $\Pi(\omega)$ больше нуля.

Ляпуновские и приводящиеся к ним задачи. Для важного класса задач неравенство (11.14) превращается в равенство. В этих задачах функции f_0, f и φ в соотношениях (11.1)–(11.4) зависят только от u и a, так что уравнения (11.1) примут вид

$$\dot{x} = f(u, a). \tag{11.26}$$

Такие уравнения называют *уравнениями ляпуновского типа*, а соответствующие задачи — ляпуновскими. Отбрасывая в задаче уравнения (11.1), имеющие вид (11.26), и переходя тем самым к задаче $\overline{C}$, можно найти ее решение $u^*(t),\ a^*$. Подстановка этого решения в уравнения (11.26) определяет оптимальную траекторию. Ясно, что для этой задачи $I^*_{\overline{C}} = I^*_{\text{Ц}}$, при этом оптимальное управление $u^*(t)$ принимает не более $m+r+1$ базовых значений, а функция $x^*(t)$ представляет собой ломаную, имеющую не более $m+r$ точек излома.

К ляпуновским могут быть приведены задачи, в которых наряду с уравнениями ляпуновского типа могут присутствовать уравнения вида

$$\dot{x}_\nu = f_\nu(u, a) F_\nu(x_\nu),$$

которые приводятся к форме (11.26) посредством замены переменной

$$y_\nu(x_\nu) = \int \frac{dx_\nu}{F_\nu(x_\nu)}, \tag{11.27}$$

так что $\dot{y}_\nu = f_\nu(u, a)$. Оптимальное решение $y^*_\nu(t)$ кусочно линейное, а $x_\nu(t)$ определяют из (11.27) как решение уравнения

$$\frac{dx_\nu}{F_\nu(x_\nu)} = y^*\nu(t)dt.$$

11.2 Параметрическое торможение осциллятора

Рассмотрим задачу оптимального быстродействия для управляемой системы вида

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -uq, \quad 0 < u_1 \le u \le u_2, \tag{11.28}$$

Здесь q — отклонение маятника, p — его скорость; коэффициент u соответствует квадрату частоты собственных колебаний маятника, он зависит от массы и расстояния от точки подвеса до центра тяжести. Последнее можно изменять.

Задано начальное состояние системы p_0, q_0, значение полной энергии в конечный момент τ и ограничения на управление

$$p^2(\tau) + u_0 q^2(\tau) = \overline{E}, \quad 0 < u_1 < u_0 < u_2. \tag{11.29}$$

Величина u_0 фиксирована и ее без ограничения общности можно принять равной единице. Требуется найти такой закон управления $u^*(t)$, для которого

$$\tau \to \min_u . \tag{11.30}$$

Ограничение (11.29) может быть переписано в интегральной форме

$$\int_0^\tau \frac{d}{dt}(p^2 + u_0 q^2)dt = \int_0^\tau pq(u_0 - u)dt = \frac{E_0 - \overline{E}}{2}. \qquad (11.31)$$

На фазовой плоскости при постоянном значении u траектории образуют фазовый портрет типа центр (систему эллипсов), изменение фазового состояния во времени соответствует движению по часовой стрелке, при котором

$$e(t) = p^2(t) + uq^2(t) = \mathrm{const}.$$

Время явно не входит в правые части уравнений (11.28), однако знак правых частей меняется, поэтому в исходной постановке нельзя сократить размерность задачи за счет замены времени одной из переменных состояния.

Решение задачи (11.28), (11.30), (11.31) с использованием принципа максимума достаточно сложно, оно требует решения краевой задачи для системы из четырех уравнений (два из них соответствуют сопряженным переменным). К этим уравнениям нужно добавить условия трансверсальности, найти особое решение или доказать его отсутствие.

Переход к новым переменным состояния позволяет существенно упростить решение. Введем новые переменные $z(p,q)$ и $e(p,q)$ так, чтобы в силу уравнений (11.28) скорость изменения первой из них не меняла знака, а вторая не входила в правые части дифференциальных уравнений преобразованной задачи. Это позволит уменьшить размерность задачи за счет замены аргумента t на аргумент z, а так же позволит заменить условие в форме дифференциального уравнения для $\dot{e}$ интегральным равенством.

Скорость изменения $z(p,q)$

$$\dot{z} = \frac{\partial z}{\partial p}(-uq) + \frac{\partial z}{\partial q}p > 0.$$

Так как управление положительно, достаточно, чтобы знак частной производной по p был противоположен знаку q, а знак производной по q совпадал со знаком p. Если $z(p,q) = z_1(p)z_2(q)$, причем производная z_1 по p положительна, а знак z_1 совпадает со знаком p, то нужно, чтобы знак второго сомножителя был противоположен знаку q, а производная z_2 по q была положительна. Этим условиям удовлетворяет, например, замена, при которой

$$z_1(p) = p, \quad z_2(q) = -\frac{1}{q}, \quad z(p,q) = -\frac{p}{q}.$$

Скорость изменения z в силу уравнений (11.28)

$$\dot{z} = \frac{\dot{q}p - \dot{p}q}{q^2} = \frac{p^2 + uq^2}{q^2} = z^2 + u, \quad z_0 = -\frac{p_0}{q_0}, \tag{11.32}$$

Скорость изменения энергии осциллятора $E = p^2 + q^2 = q^2(1 + z^2)$

$$\dot{E} = 2pq(1-u) = 2\frac{zE(u-1)}{1+z^2}. \tag{11.33}$$

Значение энергии входит в правую часть дифференциального уравнения (11.33) в форме множителя, а в уравнение (11.32) оно совсем не входит. Чтобы найти преобразованную переменную, которая не входила бы в правые части дифференциальных уравнений, воспользуемся тем, что производная логарифма E равна $\dfrac{\dot{E}}{E}$ и выберем в качестве второй переменной состояния в преобразованной задаче $e = \ln E = \ln(p^2 + q^2)$. Получим

$$\dot{e} = \frac{2(p\dot{p} + q\dot{q})}{p^2 + q^2} = 2\frac{-pqu + qp}{q^2(1+z^2)} = 2\frac{z(u-1)}{1+z^2}, \tag{11.34}$$

$$e_0 = \ln(E_0), \quad \overline{e} = \ln \overline{E}.$$

Правая часть уравнения (11.32) положительна для всех допустимых z, u, а значит переменную z можно использовать в качестве аргумента вместо t , уменьшив размерность задачи на единицу. Переменная e не входит в правые части уравнений (11.32), (11.34), значения этой переменной заданы в начальный и в конечный моменты времени, что позволяет заменить уравнение (11.34) интегральным ограничением.

Из условий (11.32), (11.34) следует

$$dt = \frac{dz}{z^2 + u}, \quad de = \frac{2z(u-1)dz}{(z^2+u)(1+z^2)},$$

так что задача примет форму

$$\tau = \int\limits_{z_0}^{\overline{z}} \frac{dz}{z^2 + u} \to \min_{u, \overline{z}} \tag{11.35}$$

при условии

$$J = \int\limits_{z_0}^{\overline{z}} \frac{z(u-1)dz}{(z^2+u)(1+z^2)} = \frac{1}{2}(\overline{e} - e_0) = \frac{1}{2}\ln\frac{\overline{E}}{E_0} < 0 \qquad (11.36)$$

и ограничениях на управление.

Таким образом, задача оказалась преобразованной в существенно более простую, содержащую вместо двух дифференциальных уравнений одно интегральное ограничение. Условия ее оптимальности выражаются через функционал Лагранжа

$$S = \tau + \Lambda J \qquad (11.37)$$

и его подынтегральное выражение

$$R = \frac{1}{z^2+u} + \Lambda\frac{z(u-1)}{(z^2+u)(1+z^2)}. \qquad (11.38)$$

Справедлива следующая **Теорема** [22]:

а)оптимальное управление имеет переключательный характер; линиями переключения на плоскости p, q *являются ось ординат и линия с наклоном* $z_r = -\dfrac{1}{\Lambda}$, *проходящая через второй и четвертый квадранты этой плоскости;*

(б) особого решения не существует;

(в) множитель Лагранжа Λ *в выражениях* (11.37),(11.38) *положителен.*

Зоны, в которых оптимальное управление постоянно, показаны на рис. 43.

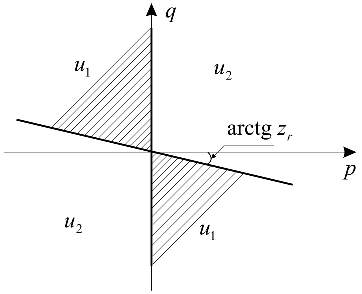


Рис. 43: Линии переключения оптимального управления.

11.3 Управление ансамблем квантовых осцилляторов

Молекулы, находящиеся в узлах кристаллической решетки, испытывают колебания и образуют ансамбль квантовых осцилляторов. Энергия этих колебаний зависит от температуры тела, а на их собственную частоту можно влиять, изменяя характеристики поля, в котором находится ансамбль осцилляторов. В частности, таким управлением, влияющим на частоту колебаний, может служить лазерное облучение.

Так как нас интересует возможности облегчения решения, связанные с заменой переменных, не будем останавливаться подробно на физическом смысле задачи (см. [25]).

Исходная постановка: За минимальное время перевести систему, характеризующуюся уравнениями

$$\begin{cases} \dot{E} = u(E-L), \\ \dot{L} = -u(E-L) - 2\omega C, \\ \dot{C} = uC + 2\omega L, \\ \dot{\omega} = u\omega, \quad \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2, \\ E(\tau) = \overline{E} \end{cases} \tag{11.39}$$

из заданного начального в заданное конечное состояние.

Здесь E, L, C, ω — переменные состояния, имеющие смысл усредненных по ансамблю гамильтониана, лагранжиана, корреляции момента отклонения и частоты колебаний осцилляторов, при этом $\overline{E} = E(\tau) < E_0$.

Переменные E, L, C зависят от частоты колебаний ω, отклонений от состояния равновесия q_i и скоростей p_i осцилляторов как

$$\begin{cases} P^2 = \sum\limits_i p_i^2; \quad Q^2 = \sum\limits_i q_i^2, \\ E = P^2 + 0,5\omega^2 Q^2, \\ L = P^2 - 0,5\omega^2 Q^2, \\ C = 0,5\omega(QP + PQ). \end{cases}$$

Так как L и C связаны с энергией колебаний осцилляторов, а E — с энергией хаотичесткого движения молекул, то уменьшению E соответствует извлечение энергии за счет охлаждения тела.

Система (11.39) имеет первый интеграл X, не изменяющийся во времени вдоль ее траекторий:

$$X = \frac{E^2 - (L^2 + C^2)}{\omega^2} = \text{Const} = \frac{E_0^2 - (L_0^2 + C_0^2)}{\omega_0^2}. \tag{11.40}$$

Нетрудно проверить непосредственным дифференцированием, что скорость изменения этой функции в силу уравнений (11.39) равна нулю. Физически величина X определяет фон Неймановскую энтропию S_N, которая монотонно от нее зависит:

$$S_N = \ln\left(\sqrt{X - \frac{1}{4}}\right) + \sqrt{X}\,\text{arg}\sinh\left(\frac{\sqrt{X}}{X - \frac{1}{4}}\right).$$

Постоянство X говорит о том, что процесс извлечения из системы энергии за счет изменения частоты колебаний является адиабатическим обратимым процессом. Существование минимального времени, соответствующего обратимому переходу с одного на другой энергетический уровень, равносильно утверждению о том, что за время, меньшее этого минимума, данная энергия может быть извлечена только в необратимом процессе, сопровождающемся так называемым «квантовым трением».

Отметим, что в обратимой термодинамике адиабатическому процессу изменения температуры газа соответствует изменение его объема и давления либо в условиях полной тепловой изоляции, либо мгновенно, что так же обеспечивает отсутствие теплообмена с окружением.

Пусть начальные значения всех переменных состояния, а значит и величина X, заданы. Исходная задача содержит неограниченное линейно входящее управление u, а ее переменные состояния связаны друг с другом условием (11.40), так что для решения не может быть непосредственно использован принцип максимума.

Чтобы исключить зависимость скоростей фазовых переменных от неограниченного управления u, трансформируем пространство состояний, перейдя к новым переменным

$$z_1 = E + L, \quad z_2 = \frac{E - L}{\omega^2}, \quad z_3 = \frac{C}{\omega}. \tag{11.41}$$

Выбор этих переменных сделан таким образом, чтобы в выражениях для скорости их изменения сумма слагаемых, зависящих от u, в силу уравнений (11.39) обращалась в ноль.

Исходные переменные и значение X связаны с переменными состояния в преобразованной задаче как

$$\begin{cases} C = \omega z_3, \quad E = 0,5(z_1 + \omega^2 z_2), \\ L = 0,5(z_1 - \omega^2 z_2), \quad X = z_1 z_2 - z_3^2. \end{cases} \tag{11.42}$$

Так как значение X задано, то только две переменные являются независимыми.

Обозначим через S начальное состояние системы на плоскости z_1, z_2. Оно заведомо лежит выше гиперболы $z_1, z_2 = X$. Исключим переменную z_3, выразив ее через X, z_1, z_2, и перепишем уравнения для z_1 и z_2 в силу системы (11.39) с учетом (11.41), (11.42). Получим

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -2\omega^2 z_3 = \mp 2\omega^2 \sqrt{z_1 z_2 - X}, \\ \dot{z}_2 = 2z_3 = \pm 2\sqrt{z_1 z_2 - X}. \end{cases} \tag{11.43}$$

Так как u не входит в эти уравнения, то будем считать управлением $\omega^2 > 0$, сократив число переменных состояния до двух, а число управлений до одного.

Время явно не входит в правые части уравнений (11.43), что позволяет упростить систему, приняв в качестве аргумента переменную z_2. При этом вдоль траекторий системы

$$\frac{dz_1}{dz_2} = -\omega^2. \tag{11.44}$$

При постоянном значении ω траектории на плоскости z_1, z_2 представляют собой прямые линии с отрицательным наклоном.

Изменения частоты ω могут происходить мгновенно, поэтому минимальная продолжительность процесса от значения начальной частоты не зависит. Будем считать, что начальная частота равна ω_0, но ее можно мгновенно изменить до ω_1 с уменьшением энергии. То же касается и конечного значения частоты, здесь минимуму энергии всегда соответствует частота, равная ω_1.

Начальные условия для переменных z_1 и z_2 заданы и равны

$$z_{10} = E_0 + L_0, \quad z_{20} = \frac{E_0 - L_0}{\omega_0^2}.$$

Конечные значения удовлетворяют равенству

$$\overline{z_1} + \omega_1^2 \overline{z_2} = 2\overline{E}. \tag{11.45}$$

Величина $\overline{E}$ ограничена снизу в силу неравенства $z_1 z_2 \geq X$. Нижний предел достигается в точке касания гиперболы $z_1 z_2 = X$ и прямой, определяющейся равенством (11.45). Для любого фиксированного значения z_3, а знчит произведения $z_1 z_2$, точки, соответствующие минимуму энергии, лежат на прямой $z_1 = \omega_1^2 z_2$. Нижняя граница достижимой энергии достигается при $z_3 = 0$ и равна

$$\overline{E}_{\min} = \omega_1 \sqrt{X}.$$

Значения энергии, меньшие $\overline{E}_{\min}$, из любого начального состояния недостижимы. Т.е. существует минимальная температура, которая может быть достигнута в обратимом процессе.

Продолжительность перехода из начального в конечное состояние

$$\tau = \int_{z_{20}}^{\overline{z}_2} \left| \frac{dz_2}{2\sqrt{z_1 z_2 - X}} \right| \to \min\,. \tag{11.46}$$

Ее можно вычислить, задав траекторию $z_1(z_2)$.

Запишем условия принципа максимума для преобразованной задачи (11.46), (11.44), (11.45) в предположении невырожденности решения ($\psi_0 = -1$):

функция Гамильтона

$$H = -\frac{1}{2\sqrt{z_1 z_2 - X}} - \psi(z_2)\omega^2.$$

условия оптимальности

$$\frac{d\psi}{dz_2} = -\frac{dH}{dz_1} = -\frac{z_2}{4(z_1 z_2 - X)^{3/2}} < 0,$$

$$\omega^{2*}(z_2) = \arg\max H = \begin{cases} \omega_2^2 & \text{при} \quad \psi < 0, \\ \omega_1^2 & \text{при} \quad \psi > 0. \end{cases}$$

Так как функция $\psi(z_2)$ монотонно уменьшается и в силу условия, наложенного на конечное значение z_1, не обращается в нуль в конце процесса, то в ходе оптимального процесса частота может измениться только один раз с ω_1 на ω_2 для любой конечной энергии, меньшей E_0. Обозначим точку переключения через R.

Таким образом, доказано, что на оптимальном решении зависимость z_1 от z_2 линейна до точки переключения R с минимальным, а после точки переключения с максимальным наклоном. Для каждого из участков интеграл (11.46) может быть вычислен (представляет собой arcsin некоторого выражения).

Координаты точки переключения R определены уравнениями

$$z_{1R} = z_{10} - \omega_1^2(z_{2R} - z_{20}),\ z_{1R} = \overline{z_1} + \omega_2^2(\overline{z_2} - z_{2R}).$$

Получим для координаты z_{2R}:

$$z_{2R}(\overline{z}_2) = \frac{\omega_2^2\overline{z}_2 - \omega_1^2 z_{20} - z_{10} + \overline{z}_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} = \overline{z}_2 - \frac{2(E_0 - \overline{E})}{\omega_2^2 - \omega_1^2}.$$

Минимальную продолжительность τ охлаждения тела до $E = \overline{E}$ найдем после подстановки оптимального решения в (11.46):

$$\tau^* = 0,5\left[\int\limits_{z_{20}}^{z_{2R}(\overline{z}_2)} \frac{dz_2}{\sqrt{(2E_0 - \omega_1^2 z_2)z_2 - X}} + \int\limits_{z_{2R}}^{\overline{z}_2} \frac{dz_2}{\sqrt{(2\overline{E} - \omega_2^2 z_2)z_2 - X}}\right].$$

Значение τ^* зависит от $\overline{z}_2$ и заданных значений энергии E в начале и в конце процесса.

11.4 Математические модели и управление системами с сегрегацией

Рассмотрим математические модели и задачи оптимального управления системами, состоящими из большого числа неуправляемых агрегатов и взаимодействующей с ними среды. Эволюция каждого из агрегатов характеризуется обыкновенным дифференциальным уравнением со случайным параметром. Эволюция среды определена усредненным взаимодействием с агрегатами и величиной управляющих воздействий. В этих задачах связи между переменными имеют форму не только дифференциальных, но и интегральных уравнений.

Введение

В простейшей модели термодинамической системы, модели идеального газа, элементы системы, молекулы газа, предполагают упругими шарами в вакууме, взаимодействующими друг с другом. Системы, в которых элементы не взаимодействуют друг с другом непосредственно, а влияют друг на друга только через среду, в которой происходит эволюция каждого из таких элементов (агрегатов), называют системами с полной сегрегацией. Ниже мы будем называть их для краткости сегрегированными.

К таким системам близки процессы роста и растворения кристаллов, процессы биосинтеза, сушки и грануляции, выращивания рыбы и пр.

Сегрегированные модели адекватны простейшим системам социально-экономической природы, в которых множество элементарных экономических агентов, в экономике их называют домашними хозяйствами, формируют общую нормативно-законодательную и ценовую среду. Состояние среды усреднено зависит от взаимодействия с агрегатами.

Математической особенностью моделей сегрегированных систем является наличие усреднения в правых частях дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию состояния среды, а так же то обстоятельство, что управляющие воздействия могут быть приложены только к среде, изменяя условия общие для всех агрегатов. Как для всех макросистем, каждым из агрегатов в сегрегированных системах нельзя управлять и нет возможности измерять его состояние.

Эволюция состояния агрегата зависит от его взаимодействия со средой и параметра, характеризующего индивидуальность агрегата. Этот параметр является случайным и известна плотность распределения его вероятности. Как правило, случайным параметром агрегата является вектор, одной из составляющих которого является начальное значение состояния агрегата, а другой — время его пребывания в системе.

Системы изолированные по агрегатам

Рассмотрим системы, которые не обмениваются с окружением потоком агрегатов. Процессы в таких системах протекают с изменением состояния среды и агрегатов на интервале $[0, T]$.

Модель системы

Обозначим через x и y векторы состояния агрегата и среды соответственно. Эволюция состояния агрегата определяется уравнением кинетики, в котором начальное состояние каждого из агрегатов является случайной величиной с плотностью распределения вероятностей $P(\gamma)$

$$\dot{x}(t,\gamma) = f(x(t,\gamma), y(t)), \quad x(0) = \gamma. \tag{11.47}$$

Здесь t — время пребывания агрегата в системе. Таким образом, состояние $x(t,\gamma)$ случайно для любого момента t.

Состояние среды в каждый момент времени изменяется в соответствии с уравнением

$$\dot{y} = \overline{\varphi(y, x(t,\gamma))}^{\gamma} + g(y,t) = \int \varphi(y, x(t,\gamma))P(\gamma)d\gamma + g(y,t), \ y(0) = y_0. \tag{11.48}$$

Если система содержит управляющие воздействия $u(t)$, то они входят только в правые части уравнений (11.48). Эти уравнения примут форму

$$\dot{y} = \overline{\varphi(y,u,x)}^{\gamma} + g(y,u,t), \quad y(0) = y_0, \quad u \in V_u, \tag{11.49}$$

где множество V_u допустимых управлений, определено ограничениями, наложенными на них в каждый момент времени на интервале управления $\Delta = [0,T]$. Первое слагаемое в правой части (11.49) характеризует кинетику взаимодействия с агрегатами, а второе — внешние воздействия на состояние среды. Здесь интеграл берется по области определения плотности распределения $P(\gamma)$.

Ниже будем предполагать, что $x(t) \in C^1(\Delta, R*n), y(t) \in C^1(\Delta, R^m)u(t) \in C(\Delta, R^r)$, V_u — компакт, функция $f: R^n \to R*n$ непрерывно дифференцируема по x, а $\varphi: R^n \times R^m \to R^m$ — по x и y.

Задачи управления и условия оптимальности

Запишем критерий оптимальности как

$$y_0(T) = \int_0^T [\overline{\varphi_0(y,u,x)}^{\gamma} + g_0(y,u,t)]dt \to \max, \quad y_0(0) = 0. \tag{11.50}$$

К такой форме может быть приведен широкий класс критериев оптимальности введением соответствующих переменных.

Необходимые условия оптимальности задачи (11.50), (11.49), (11.47) вытекают как следствие из принципа максимума для канонической формы вариационной задачи со скалярным аргументом:

Пусть $(x^*(t,\gamma), y^*(t), u^*(t))$ *— оптимальное решение, тогда найдутся множители* $\lambda_0, \xi(t) \in C^1(\delta, R^m)$ *и* $\psi(\gamma, t) \in C^1(\delta, R^n)$*, не равные нулю одновременно, (множитель* λ_0 *равен нулю или 1), такие, что для функции Лагранжа*

$$R = \int \{[\lambda_0\varphi_0(y,u,x(t,\gamma)) + \xi\varphi(y,u,x(t,\gamma))] +$$
$$+\psi(\gamma,t)f(x(t,\gamma),y) + \dot{\psi}(\gamma,t)x(t,\gamma)\}P(\gamma)d\gamma + \lambda_0 g_0(y,u,t) + \xi g(y,u,t) + \dot{\xi}y \tag{11.51}$$

выполнены условия:

а) стационарности по $x(t,\gamma)\forall\gamma$ *и по* $y(t)$*,*

б) оптимальности по $u(t)$*.*

Формально
$$\frac{\partial R}{\partial x(t,\gamma)} = 0 \quad \forall\gamma, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = 0, \tag{11.52}$$

$$u^*(t) = \arg\max_{u\in V_u} R(u, y^*(t), x^*(t,\gamma)). \tag{11.53}$$

Для сокращения записи введем обозначение

$$H = \overline{\varphi_0(y,u,x) + \xi\varphi(y,u,x)}^{\gamma} + g_0(y,u,t) + \xi g(y,u,t) \tag{11.54}$$

и с учетом выражения (11.51) для невырожденного решения ($\lambda_0 = 1$), перепишем условия (11.52), (11.53) в форме

$$u^*(t) = \arg\max_{u\in V_u} H(y,u,x), \tag{11.55}$$

$$\dot{\xi} = -\frac{\partial}{\partial y}\left[H(y,u,x(t,\gamma)) + \overline{\psi(t,\gamma)f(x(t,\gamma),y)}^{\gamma}\right], \tag{11.56}$$

$$\dot{\psi}(\gamma,t) = -\frac{\partial[\varphi_0(y,u,x) + \xi\varphi(y,u,x) + f(x(t,\gamma),y)]}{\partial x(t,\gamma)}, \tag{11.57}$$

$$\xi(\tau) = \psi(\gamma,\tau) = 0 \quad \forall\gamma. \tag{11.58}$$

Здесь
$$\overline{\psi, f(x(t,\gamma),y)}^{\gamma} = \int \psi(\gamma,t)f(x(t,\gamma),y)P(\gamma)d\gamma. \tag{11.59}$$

Системы, открытые по агрегатам. Стационарный режим

В открытой системе происходит обмен с окружением не только потоками, влияющими на состояние среды, но и потоками агрегатов. Мы будем рассматривать только стационарный режим таких систем, в котором состояние среды и распределения случайных величин, влияющих на состояние агрегатов, не зависят от календарного времени.

Математическая модель. В статическом режиме состояние среды y постоянно и равно состоянию на выходе из системы, так как среда однородна. Состояние агрегата изменяется с его возрастом τ (временем, прошедшим от попадания агрегата в систему до текущего момента времени), так, что

$$\frac{dx}{d\tau} = f(x(\gamma,\tau),y), \quad x(0)=\gamma. \tag{11.60}$$

В ряде случаев удается получить решение уравнений (11.60) в форме

$$x = x(\gamma,\tau,y), \tag{11.61}$$

что позволяет существенно упростить задачу оптимизации системы. Решение (11.61) называют кинетической кривой.

Возраст агрегата — случайная величина. Будем предполагать, что он не зависит от вектора γ, а его плотность распределения обозначим как $P_1(\tau)$. Другим случайным параметром агрегата является время пребывания в системе τ_f, его иногда называют временем жизни агрегата. Время пребывания случайно, его плотность распределения обозначим через $P_2(\tau_f)$. Плотности распределения возраста и времени пребывания связаны друг с другом [23] как:

$$P_1(\tau) = \frac{1}{\Theta}\left(1 - \int\limits_0^{\tau} P_2(\tau_f)d\tau_f\right). \tag{11.62}$$

где

$$\Theta = \int\limits_0^{\tau} \tau_f P_2(\tau_f)d\tau_f$$

— среднее время пребывания агрегатов, равное отношению их объема к расходу.

Состояние среды определяется усредненными условиями вида

$$\overline{\varphi(y,u,x(\gamma,\tau))}^{\gamma,\tau} = g(y,u), \tag{11.63}$$

где u — вектор управляющих воздействий, а черта означает усреднение по τ, γ в соответствии с плотностями распределения $P_1(\tau)$ и $P_3(\gamma)$. В частности, правая часть равенства (11.63) может быть равна $\frac{g}{V}(y-y_0)$, где V — объем системы, g — расход среды, являющийся одним из управлений.

Размерность вектор-функции φ совпадает с размерностью вектора y, функции f и φ непрерывные и непрерывно дифференцируемые по совокупности своих аргументов, как и функция, определяющая критерий оптимальности

$$\overline{\varphi_0(y, u, x(\tau_f))}^{\gamma,\tau_f} \to \max_{u\in V_u}. \tag{11.64}$$

В число управлений могут входить и параметры, определяющие форму функций распределения возраста и времени пребывания агрегатов.

Оптимизация статического режима систем с сегрегацией

Необходимые условия оптимальности статического режима сегрегированной системы следуют из условий принципа максимума для вариационной задачи со скалярным аргументом: *Пусть* $(x^*(\gamma,\tau), y^*), u^*)$ *— оптимальное решение, тогда найдутся множители* λ_0, λ_i *и* $\psi(\gamma,\tau) \in C^1$*, не равные нулю одновременно, (множитель* λ_0 *равен нулю или 1), такие, что для функционала Лагранжа*

$$\begin{gathered} S = \lambda_0\overline{\varphi_0(y, u, x(\gamma, \tau_f))}^{\gamma,\tau_f} + \lambda[\overline{\varphi(y, u, x(\gamma,\tau))}^{\gamma,\tau} - g(y,u)] + \\ +\overline{[\frac{d\psi(\gamma,\tau)}{d\tau}x(\gamma,\tau) + \psi(\gamma,\tau)f(x(\gamma,\tau), y)]}^{\gamma,\tau}. \end{gathered} \tag{11.65}$$

выполнены условия:

а)стационарности по $x(\tau,\gamma) \quad \forall\gamma$ *и по* y,

б)локальной неулучшаемости по $u(t)$.

Здесь $P_1(\tau)$ и $P_2(\tau_f)$ связаны друг с другом равенством (11.62).

Формально необходимые условия оптимальности запишутся как

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial u}\delta u \le 0, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = 0, \tag{11.66}$$

где δu — допустимая вариация управлений с учетом наложенных на них ограничений $u \in V_u$.

Для функционала S, имеющего форму (11.65), условия (11.66) примут вид

$$\begin{gathered}\frac{d\psi}{d\tau} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\psi(\gamma,\tau)f(x,y) + \lambda\varphi(y,u,x)\right],\\ \psi(\gamma,\tau_f) = \frac{\partial}{\partial x(\gamma,\tau_f)}\varphi_0(y,u,x),\end{gathered} \tag{11.67}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\overline{\varphi_0(y,u,x(\gamma,\tau))}^{\gamma,\tau_f} + \lambda\overline{\varphi(y,u,x(\gamma,\tau))}^{\gamma,\tau}\right]\delta u \le 0, \tag{11.68}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial y}[\overline{\varphi_0(y,u,x(\gamma,\tau_f))}^{\gamma,\tau_f} +\\ +\overline{[\lambda\varphi(y,u,x(\gamma,\tau)) + \psi(\gamma,\tau)f(x(\gamma,\tau),y)]}^{\gamma,\tau}] = 0.\end{gathered} \tag{11.69}$$

Эти условия совместно с уравнениями (11.60) и усредненными условиями (11.63) определяют вектора u, y, λ, функции $x(\gamma,\tau)$ и $\psi(\gamma,\tau)$.

Условия оптимальности существенно упрощаются, если удается получить кинетическую кривую $x(\gamma,\tau,y)$. В этом случае задача приводится к виду

$$I = \overline{\varphi_0(x(\gamma,\tau_f,y),u,y)}^{\gamma,\tau_f} \to \max \tag{11.70}$$

$$J = \overline{\varphi(x(\gamma,\tau,y),u,y)}^{\gamma,\tau} - g(y,u) = 0. \tag{11.71}$$

Здесь усреднение производится по τ, но для функции φ_0 с распределением P_2 времени пребывания агрегатов, а для функции φ с распределением P_1 возраста агрегатов.

Задача (11.70), (11.71) представляет собой задачу нелинейного программирования. Необходимые условия оптимальности ее решения для непрерывно-дифференцируемых по y, u функций φ_0 и φ сводится к тому, что найдется такой ненулевой вектор $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ...)$, для которого на оптимальном решении функция Лагранжа $S = \lambda_0 I + \lambda J$ стационарна по y и локально неулучшаема по $u \in V_u$:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\overline{\varphi_0(x(\gamma,\tau_f,y),u,y)}^{\gamma,\tau_f} + \lambda(\overline{\varphi(x(\gamma,\tau,y),u,y)}^{\gamma,\tau} - g(y,u))\right]\delta u \le 0, \tag{11.72}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\left[\overline{\varphi_0(x(\gamma,\tau_f,y),u,y)}^{\gamma,\tau_f} + \lambda(\overline{\varphi(x(\gamma,\tau,y),u,y)}^{\gamma,\tau} - g(y,u))\right] = 0. \tag{11.73}$$

Пример. Оптимальный выбор среднего времени пребывания агрегатов в системе.

Пусть система однородна как по среде, так и по агрегатам. Кинетическая кривая

$$x(\tau, y) = \tau^2 e^{-y\tau}, \tag{11.74}$$

плотности распределения

$$P_1(\tau, \Theta) = P_2(\tau, \Theta) = \frac{1}{\Theta} e^{-\tau/\Theta}. \tag{11.75}$$

Критерий оптимальности

$$I = \frac{1}{\Theta} \int\limits_0^\infty P_2(\tau, \Theta) x(\tau, y) d\tau \to \max, \tag{11.76}$$

$$J = \int\limits_0^\infty P_1(\tau, \Theta)[y - x(\tau, y)] d\tau = 0, \quad \Theta \geq 0. \tag{11.77}$$

Выбору подлежит среднее время $\Theta = \dfrac{V}{g}$ пребывания агрегатов в системе.

Условия оптимальности (11.72), (11.73) для невырожденного решения после очевидных выкладок примут форму уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial \Theta} = 0 \to \int\limits_0^\infty \tau^2 e^{-\tau} \left(y + \frac{1}{\Theta} \right) \left[\left(\frac{\tau}{\Theta} - 2 \right) \frac{1}{\Theta^2} + \lambda (y - \tau^2 e^{-y\tau}) \right] d\tau = 0, \tag{11.78}$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = 0 \to \int\limits_0^\infty e^{-\tau/\Theta} \left[\frac{1}{\Theta} (1 + \tau^3 e^{-y\tau}) + \lambda (1 + \tau^2 e^{-y\tau}) \right] d\tau = 0, \tag{11.79}$$

которые совместно с условием (11.77) определяют λ, y и Θ.

11.5 Оптимальная организация и предельные возможности теплообменных систем

Важной характеристикой совершенства теплообменных систем является производство энтропии, характеризующее необратимые потери работоспособной энергии. Ниже получены оценка минимального производства энтропии, соответствующие ей распределения поверхностей теплообмена и температур контакта для систем теплообмена с заданной суммарной тепловой нагрузкой и коэффициентом теплопереноса. Показано, что для теплового потока, пропорционального разности температур, отношения температур контактирующих потоков в любой точке системы должны быть одинаковы, как и температуры греющих потоков на ее выходе.

Предельные возможности технологических систем (тепловых и холодильных машин, систем разделения, химических реакторов и пр.), основанные на соотношениях термодинамики обратимых процессов (КПД Карно, обратимая работа разделения), очень важны, но как правило сильно завышены. Они не учитывают интенсивности потоков, поверхностей контакта и других факторов, связанных с заданной производительностью и конечными размерами аппаратов. В некоторых же случаях обратимые оценки вообще становятся бессмысленными. В частности, это относится к стационарным неравновесным системам, в которых имеется несколько резервуаров или поступают извне потоки вещества и энергии. Примером таких систем являются теплообменники, оценка термодинамического совершенства которых требует учета ограниченной поверхности контакта (интегрального коэффициента теплообмена) и тепловой нагрузки - количества теплоты, передаваемой в единицу времени от горячих к холодным потокам. Для оценки совершенства таких систем используют эксергитический подход (см. [5, 4] и др.), сравнивая системы по потерям эксергии в каждой из них. Последние пропорциональны производству энтропии и температуре окружающей среды T_0. Минимуму потерь эксергии при заданных температурах горячих потоков на входе в теплообменник и фиксированной тепловой нагрузке соответствует максимум средней температуры холодных потоков на выходе теплообменника.

Предельные возможности теплообменной системы определены решением задачи о минимально-возможном производстве энтропии (диссипации), а значит потерях эксергии. Такая оценка

- подобно обратимым оценкам показывает, как влияют на возможности системы те или иные факторы (температура и водяной эквивалент потоков, тепловая нагрузка, коэффициент теплообмена и пр.);

- позволяет оценить термодинамическую эффективность теплообменной системы путем сравнения фактического производства энтропии с минимально возможным;

- при проектировании новых систем воспользоваться условиями оптимальности теплообмена, с тем чтобы приблизить конфигурацию проектируемой системы к идеальной.

Для получения термодинамической оценки эффективности многопоточного теплообмена воспользуемся оценкой, найденной для двухпоточного теплообменника - теплообменной ячейки. Затем рассмотрим задачу о минимальной диссипации для совокупности таких ячеек, связанных общими ограничениями на поверхность контакта и тепловую нагрузку. Наконец, приведем пример использования полученной оценки.

Двухпоточный теплообмен

Производство энтропии в термодинамической системе можно найти двумя способами. Если система функционирует, то его можно вычислить, зная параметры входящих потоков и потоков, покидающих систему. Если же решают задачу проектирования, то производство энтропии можно выразить через кинетические закономерности, коэффициенты тепло и массопереноса и пр. как произведение потоков на движущие силы. Первоначально воспользуемся первым подходом и найдем, как связано производство энтропии в двухпоточном теплообменнике с параметрами входных и выходных потоков.

Известно (см. [4]), что дифференциал молярной энтропии может быть выражен через теплоемкость вещества, прирост температуры и давления как

$$ds = \frac{c_p}{T}dT - \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p dp. \tag{11.80}$$

Здесь c_p-молярная теплоемкость при постоянном давлении, а v – молярный объем. Интегрирование этого выражения от начальных до конечных значений температуры и давления позволяет найти прирост молярной энтропии. Если известен молярный расход потока, то, умножив этот прирост на расход, получим производство энтропии, связанное с изменением параметров данного потока.

Просуммировав эти величины по всем потокам, найдем производство энтропии в выделенной технологической системе.

В частности, для идеального газа, теплоемкость которого зависит только от температуры, а $(\partial v/\partial T)_p = R/p$, прирост молярной энтропии равен

$$s - s_0 = \int\limits_{T_0}^{T} \frac{c_p}{T} dT - R \ln \frac{p}{p_0}, \tag{11.81}$$

где R– универсальная газовая постоянная.

Для жидкостей с постоянной теплоемкостъю при постоянном давлении

$$s - s_0 = c_p \ln \left(\frac{T}{T_0} \right), \tag{11.82}$$

а прирост энтропии σ_i за счет изменения состояния i-го потока равен произведению его водяного эквивалента (произведения расхода на теплоемкость) на логарифм отношения абсолютных температур на выходе и на входе системы.

$$\sigma_i = W_i \ln \left(\frac{T}{T_0} \right), \quad i = 1, 2. \tag{11.83}$$

Производство энтропии $\sigma = \sum \sigma_i$ –суммарной разнице потоков энтропии на выходе и на входе системы.

Запишем связь производства энтропии в двухпоточном теплообменнике с водяными эквивалентами потоков W_1 и W_2, их температурами на входе T_{10}, T_{20} и выходе $\overline{T}_1, \overline{T}_2$ при заданной тепловой нагрузке $\overline{q}$:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = W_1 \ln \left(\frac{T_{10} - \overline{q}/W_1}{T_{10}} \right) + W_2 \ln \left(\frac{\overline{T}_2}{\overline{T}_2 - \overline{q}/W_2} \right). \tag{11.84}$$

Пусть для определенности параметры первого (горячего) потока и тепловая нагрузка фиксированы, а значит фиксировано и значение σ_1. Тогда из (11.84) следует связь выходной температуры нагреваемого потока с производством энтропии σ

$$\overline{T}_2 = \frac{\overline{q}}{W_2(1 - exp[-\frac{\sigma - \sigma_1}{W_2}])}. \tag{11.85}$$

Выходная температура нагреваемого потока монотонно увеличивается с уменьшением производства энтропии. Аналогичные выкладки для многопоточных теплообменников приводят к подобной связи между производством энтропии и средневзвешенной с учетом водяных эквивалентов температурой нагреваемых потоков.

Рассмотрим теплообменник с двумя потоками и найдем минимальное производство энтропии σ в нем, при заданной входной температуре T_0 греющего потока, его водяном эквиваленте W, тепловой нагрузке $\overline{q}$ и интегральном коэффициенте теплообмена $\overline{\alpha}$. Через l обозначим текущую координату контакта элемента греющего потока, которая изменяется от нуля до L, а через $q(u,T)$ — поток теплоты в сечении l. Температуру нагреваемого потока обозначим через $u(l)$.

Формальная постановка задачи примет вид:

$$\sigma = \int\limits_0^L q(u,T)\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{T}\right) dl \to \min_{u(l)} \tag{11.86}$$

при условиях

$$\frac{dT}{dl} = -\frac{q(u,T)}{W}, \quad T(0) = T_0, \tag{11.87}$$

$$\int\limits_0^L q(u,T)dl = \overline{q}. \tag{11.88}$$

Для получения оценок мы предполагаем закон изменения $u(l)$ и связанный с ним закон теплоотвода $q(u,T)$ подлежащими оптимальному выбору с тем, чтобы после получения оптимального решения выяснить возможности их реализации.

Воспользовавшись тем, что правая часть в (11.87) сохраняет знак, упростим задачу, сделав замену аргумента

$$dl = -\frac{dTW}{q(u,T)}. \tag{11.89}$$

Приходим к постановке

$$\sigma = W \int\limits_{T(L)}^{T_0} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{T}\right) dT \to \min_{u(T)}, \tag{11.90}$$

$$W \int\limits_{T(L)}^{T_0} dT = \overline{q}, \tag{11.91}$$

$$W\int\limits_{T(L)}^{T_0} \frac{\overline{dT}}{q(u,T)} = L. \tag{11.92}$$

Из условия (11.91)

$$T(L) = T_0 - \frac{\overline{q}}{W}. \tag{11.93}$$

Если водяной эквивалент W (теплоемкость потока) зависит от T, то функцию $W(T)$ следует внести внутрь интегралов в (11.91)–(11.93). Для простоты далее считаем водяной эквивалент константой.

Запишем функцию Лагранжа и условия оптимальности задачи (11.90), (11.92) в предположении невырожденности решения

$$L = \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{T}\right) + \frac{\lambda}{q}, \tag{11.94}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0 \to -\frac{1}{u^2} - \frac{\lambda}{q^2}\,\frac{\partial q}{\partial u} = 0$$

или

$$\left(\frac{q(u,T)}{u}\right)^2 : \frac{\partial q}{\partial u} = -\lambda. \tag{11.95}$$

Равенства (11.95), (11.92) позволяют найти $u^*(T)$ и λ.

Конкретизируем их для закона теплообмена

$$q = \alpha(T-u). \tag{11.96}$$

Получим

$$\alpha\left(\frac{T}{u} - 1\right)^2 = \lambda, \quad \forall l. \tag{11.97}$$

Условие (11.92) примет форму

$$\int\limits_{T(L)}^{T_0} \frac{dT}{\alpha(T-u)} = \frac{L}{W}. \tag{11.98}$$

Соотношения (11.97), (11.98) определяют $u^*(T,\alpha,\lambda)$ и множитель Лагранжа λ. В том случае, когда коэффициент теплопередачи постоянен, введем его интегральное значение $\overline{\alpha} = \alpha L$.

По условию (11.97) отношение $\dfrac{u}{T}$ постоянно. Обозначим

$$\frac{u}{T} = m < 1 \tag{11.99}$$

и перепишем (11.98) в форме

$$\int\limits_{T(L)}^{T_0} \frac{dT}{T(1-m)} = \frac{\overline{\alpha}}{W}.$$

Откуда

$$m = 1 - \frac{W}{\overline{\alpha}} \ln \frac{T_0}{T_0 - \overline{q}/W}. \tag{11.100}$$

Уравнение (11.87) примет форму

$$\frac{dT}{dl} = -\overline{\alpha} T(1-m) \to T^*(l) = T_0 e^{-\frac{\overline{\alpha}(1-m)}{LW} l}, \quad u^*(l) = mT^*(l). \tag{11.101}$$

Минимально достижимое производство энтропии с учетом (11.100)

$$\sigma^* = W\left(\frac{1}{m} - 1\right) \int\limits_{T(L)}^{T_0} \frac{dT}{T} = \frac{W^2 \ln^2 \frac{T_0}{T_0 - \overline{q}/W}}{\overline{\alpha} - W \ln \frac{T_0}{T_0 - \overline{q}/W}} = \overline{\alpha}\frac{(1-m)^2}{m}. \tag{11.102}$$

Отметим, что выражения (11.100), (11.102) не содержат параметров нагреваемого потока, так как температура этого потока $u^*(l)$ связана с $T^*(l)$ условием оптимальности (11.97) и вытекающим из него равенством (11.101).

Условие $\sigma \geq \sigma^*$ при фиксированных значениях W и T_0 выделяет в пространстве с координатами $\sigma, \overline{q}, \overline{\alpha}$ область достижимых процессов теплообмена, лежащую выше границы, соответствующей оптимальной организации процесса (Рис.44). На этой границе достигается максимум тепловой нагрузки при фиксированном общем коэффициенте теплообмена и минимум поверхности теплообмена при заданной тепловой нагрузке.

Нетрудно показать (см. [23]), что закон изменения температуры нагреваемого потока (11.101), а значит и минимальное производство энтропии (11.102) может быть достигнуто в противоточном трубчатом теплообменнике с неизменным по длине коэффициентом теплообмена α, если водяной эквивалент нагреваемого потока

$$W_1 = \frac{W}{m}, \tag{11.103}$$

а температура этого потока на входе в теплообменник выбрана как (см.(11.84))

$$u(L) = T(L)m = \left(T_0 - \frac{\overline{q}}{W}\right) m. \tag{11.104}$$

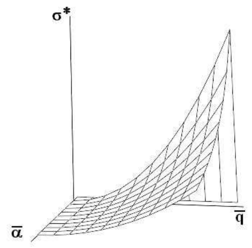


Рис. 44: Граница достижимости для двухпоточного теплообменника при $W = 1, T_0 = 370K$.

Выражение (11.102) позволяет, найдя производство энтропии для произвольного реального двухпоточного теплообменника как

$$\sigma = W \ln \frac{T_{0\text{вых}}}{T_{0\text{вх}}} + W_1 \ln \frac{T_{1\text{вых}}}{T_{1\text{вх}}}, \quad \overline{q} = W(T_{0\text{вх}} - T_{0\text{вых}}), \tag{11.105}$$

сравнить его с σ^*. При этом $\overline{\alpha}$ в (11.102) — общий коэффициент теплопередачи рассматриваемого теплообменника. Отношение $\eta = \dfrac{\sigma^*}{\sigma} \leq 1$ характеризует степень термодинамического совершенства теплообмена.

Пример. Найдем коэффициент термодинамического совершенства теплообменника, в котором гидродинамика каждого из потоков характеризуется режимом идеального смешения, температура греющего потока на входе $T_0 = 350K$, его водяной эквивалент $W = 10$вт/К, коэффициент теплообмена $\overline{\alpha} = 40$ вт/К и тепловая нагрузка $\overline{q} = 1000$ вт заданы. Минимально возможное производство энтропии σ^* при этих условиях равно в соответствии с (11.102) 0,31 вт/К. По формуле (11.108) имеем

$$\sigma = W \ln \frac{T_0 - \overline{q}/W}{T_0} + W_1 \ln \frac{T_0 - \overline{q}/W - \overline{q}/\overline{\alpha}}{T_0 - \overline{q}/W - \overline{q}/\overline{\alpha} - \overline{q}/W_1}. \tag{11.106}$$

По условию неотрицательности входной температуры нагреваемого потока $W_1 > \dfrac{\overline{q}}{T_0 - \overline{q}/\alpha - \overline{q}/W} = 4,44$ вт/К. Первое слагаемое в правой части этого равенства фиксировано и равно -3,36 вт/К. После раскрытия неопределенности по правилу Лопиталя можно показать, что второе слагаемое в правой части равенства (11.106), уменьшаясь, стремится к значению 4,44 вт/К при стремлении водяного эквивалента W_1 к бесконечности. Так что для рассматриваемого типа теплообменника показатель эффективности ρ не превосходит значения 0,31/1,08=0,29. На Рис.45 показана зависимость $\rho(W_1)$

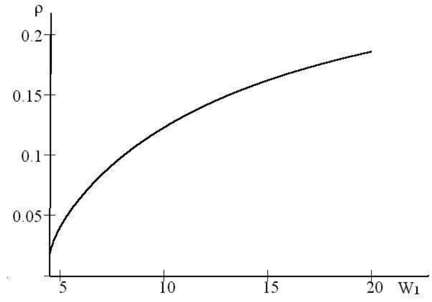


Рис. 45: Зависимость показателя термодинамического совершенства теплообменника смешения от водяного эквивалента W_1.

Многопоточный теплообмен

Расчет сложных систем теплообмена с несколькими охлаждаемыми и нагреваемыми потоками предполагает выбор температур контактирующих потоков, распределение поверхностей теплообмена и тепловых нагрузок. Для решения этой весьма непростой задачи как правило используют эвристические алгоритмы.

Получим оценку снизу для производства энтропии в многопоточной теплообменной системе и соответствующие этой оценке законы изменения температур контактирующих потоков, распределение коэффициентов теплообмена и тепловой нагрузки между теплообменниками. Такая оценка позволит найти показатель η термодинамической эффективности действующей системы, а проектирование системы проводить таким образом, чтобы в максимальной степени приблизить показатели к найденной оценке, а распределения температур и поверхностей контакта к тем, для которых эта оценка достигается.

Постановка задачи. Для определенности будем считать заданными параметры греющих потоков: температуры T_0 на входе в теплообменник и водяные эквиваленты $W(T_0)$. При этом предполагается, что все потоки, имеющие одну и ту же температуру T_0, объединены в один поток с суммарным водяным эквивалентом

$$W(T_0) = \sum_i g_i c_i,$$

где $g_i(T_0)$ и $c_i(T_0)$ — расход и теплоемкость i-го потока с температурой T_0.

Зависимость $W(T_0)$ будем считать известной и первоначально для простоты непрерывной. В том случае, когда множество входных температур дискретно, расчетные соотношения претерпят очевидные изменения, которые приведены в конце раздела.

Обозначим через T_{01} и T_{02} минимальное и максимальное значение температуры T_0 горячих потоков; тепловую нагрузку для потока, имеющего температуру T_0, как $q(T_0)$, а коэффициент теплопроводности — как $\alpha(T_0)$.

Распределение поверхности контакта между потоками эквивалентно распределению эффективных коэффициентов теплообмена, поэтому будем предполагать фиксированным

$$\overline{\alpha} = \int_{T_{01}}^{T_{02}} \alpha(T_0) dT_0, \quad \alpha(T_0) \geq 0, \tag{11.107}$$

как и суммарную тепловую нагрузку

$$\overline{q} = \int_{T_{01}}^{T_{02}} q(T_0) dT_0. \tag{11.108}$$

Когда T_0, $W(T_0)$ и $\overline{q}$ заданы, фиксирована и средняя энтальпия горячих потоков на выходе системы.

Температуры греющих потоков на выходе из системы теплообмена связаны с температурой на входе и тепловой нагрузкой как

$$T_{\text{вых}}(T_0) = T_0 - q(T_0)/W(T_0). \tag{11.109}$$

Потребуем минимума производства энтропии

$$\overline{\sigma} = \int_{T_{01}}^{T_{02}} \sigma(T_0) dT_0 \to \min_{u(T,T_0),\alpha(T_0),q(T_0)}, \tag{11.110}$$

где $u(T, T_0)$–температура холодного потока при контакте с горячим, имеющим входную температуру T_0 и текущую температуру T.

Получение расчетных соотношений. Проведем решение задачи (11.107)–(11.110) в два этапа, на первом из которых будем считать $q(T_0)$ и $\alpha(T_0)$ заданными при всех $T_0 \in [T_{01}, T_{02}]$ и при этих условиях найдем связь текущих температур нагреваемых и греющих потоков u и T, соответствующих минимуму производства энтропии $\sigma(T_0)$ для греющего потока, имеющего начальную температуру T_0. На втором этапе найдем такие распределения поверхности контакта и тепловой нагрузки, $\alpha(T_0)$ и $q(T_0)$, которые минимизируют $\overline{\sigma}$ при ограничениях (11.107) и (11.108).

Первая задача уже решена в разделе 2, ее решение приводит к соотношениям (см. (11.100),(11.102)) для каждого значения входной температуры горячего потока:

$$\frac{u(T, T_0)}{T(T_0)} = m(T_0) = 1 - \frac{W(T_0)}{\alpha(T_0)} \ln \frac{T_0}{T_0 - \frac{q(T_0)}{W(T_0)}}, \tag{11.111}$$

$$\sigma^*(T_0) = \alpha(T_0) \frac{(1 - m(T_0))^2}{m(T_0)}. \tag{11.112}$$

Второй этап решения сводится к задаче распределения α и q по условию

$$\overline{\sigma} = \int\limits_{T_{01}}^{T_{02}} \sigma^*[T_0, \alpha(T_0), W(T_0), q(T_0)] dT_0 \to \min_{\alpha \geq 0,\ q \geq 0} \tag{11.113}$$

при условиях (11.107) и (11.108). Функция Лагранжа этой задачи имеет вид

$$L = \sigma^*(T_0, \alpha, W, q) - \lambda_1 \alpha(T_0) - \lambda_2 q(T_0).$$

где λ_1 и λ_2 — некоторые константы, не зависящие от T_0.

Условия стационарности L по α и q приводит к равенствам

$$\frac{\partial \sigma^*}{\partial \alpha} = \lambda_1, \quad \frac{\partial \sigma^*}{\partial q} = \lambda_2. \tag{11.114}$$

Для вычисления производных в (11.114) предварительно выпишем производные

$$\frac{\partial m}{\partial \alpha} = \frac{W(T_0)}{\alpha^2(T_0)} ln \frac{T_0}{T_{\text{вых}}} = \frac{1 - m(T_0)}{\alpha(T_0)},$$

$$\frac{\partial m}{\partial q} = -\frac{1}{\alpha(T_0) T_{\text{вых}}(T_0)},$$

$$\frac{\partial\sigma^*}{\partial m} = \alpha(T_0)\frac{m^2-1}{m^2}.$$

С учетом этих выражений после несложных выкладок условия (11.114) примут вид

$$\frac{\partial\sigma^*}{\partial\alpha} = -\left(\frac{1-m(T_0)}{m(T_0)}\right)^2 = \lambda_1, \tag{11.115}$$

$$\frac{\partial\sigma^*}{\partial q} = -\frac{m^2(T_0)-1}{m^2(T_0)T_{\text{вых}}(T_0)} = \lambda_2, \tag{11.116}$$

или

$$T_{\text{вых}}(T_0) = \frac{1-m^2(T_0)}{m^2(T_0)\lambda_2}. \tag{11.117}$$

Из условия (11.115) следует, что при оптимальной организации теплообмена величина m не зависит от T_0, а значит как видно из (11.117) одинакова для всех потоков и температура на выходе $T_{\text{вых}}(T_0) = \overline{T}$.

Величина $\overline{T}$ однозначно определена условием (11.108), так как

$$\overline{q} = \int\limits_{T_{01}}^{T_{02}} W(T_0)(T_0-\overline{T})dT_0. \tag{11.118}$$

Введем обозначения

$$\overline{W} = \int\limits_{T_{01}}^{T_{02}} W(T_0)dT_0, \tag{11.119}$$

$$\overline{T_0W} = \int\limits_{T_{01}}^{T_{02}} T_0W(T_0)dT_0, \tag{11.120}$$

тогда

$$\overline{T} = \frac{\overline{T_0W}-\overline{q}}{\overline{W}}. \tag{11.121}$$

Таким образом при оптимальной организации многопоточного теплообмена отношение абсолютных температур горячих и холодных потоков в любой точке контакта и температуры потоков на выходе из системы должны быть одинаковы.

Чтобы выразить значение m через исходные данные перепишем условие (11.111) в форме

$$\alpha(T_0) = \frac{W(T_0)(\ln T_0 - \ln\overline{T})}{1-m}. \tag{11.122}$$

По условию неотрицательности $\alpha(T_0)$ должно быть выполнено неравенство $T_0 \geq \overline{T}$. Т.е. *в системе теплообмена должны быть использованы только те горячие потоки, температуры которых больше, чем* $\overline{T}$. Если $T_{01} < \overline{T}$, то во всех интегралах в качестве нижнего предела должна фигурировать вместо T_{01} температура $\overline{T}$.

Интегрируя левую и правую части равенства (11.122) и учитывая, что интегральный коэффициент теплообмена задан, найдем значение m

$$m = 1 - \frac{1}{\overline{\alpha}} \int\limits_{T_{01}}^{T_{02}} W(T_0)(\ln T_0 - \ln \overline{T}) dT_o. \tag{11.123}$$

Так что оптимальное распределение коэффициентов теплообмена

$$\alpha(T_0) = \overline{\alpha} \frac{W(T_0)(\ln T_0 - \ln \overline{T})}{\int\limits_{T_{01}}^{T_{02}} W(T_0)(\ln T_0 - \ln \overline{T}) dT_o}, \tag{11.124}$$

распределение тепловых нагрузок

$$q(T_0) = W(T_0)(T_0 - \overline{T}), \tag{11.125}$$

а минимально-возможное производство энтропии

$$\sigma^* = \overline{\alpha} \frac{(1-m)^2}{m}. \tag{11.126}$$

Выражение (11.126) при его сравнении с производством энтропии $\overline{\sigma}$ в действующей теплообменной системе, имеющей суммарный коэффициент теплообмена $\overline{\alpha}$, температуры горячих потоков на входе T_0 и соответствующие им водяные эквиваленты $W(T_0)$, энтальпию греющих потоков на выходе из системы, равную $\overline{W(T_0)T_{\text{вых}}(T_0)}$, или, что одно и то же, тепловую нагрузку $\overline{q}$, позволяет оценить степень термодинамического совершенства такой системы как отношение $\rho = \dfrac{\overline{\sigma}^*}{\overline{\sigma}}$.

Чтобы приблизить характеристики системы к идеальной, нужно распределять потоки отбираемого тепла и поверхности теплообмена по формулам (11.125), (11.124), а температуры контакта выбирать по условию постоянства отношения температур, равного m, (см.(11.123)). Для этого нужно уменьшать поверхность теплообмена для теплообменников, в которых отношение температур холодного и горячего потоков больше среднего значения по всей системе, и увеличивать для тех теплообменников, где оно меньше среднего. Аналогично, надо увеличивать отбор тепла от тех греющих потоков, температура которых на выходе выше средней выходной температуры по всем греющим потокам.

Учет дискретности температур греющих потоков. Как правило, число греющих потоков конечно, а значит множество значений T_0 дискретно. Обозначим их T_{i0}, а соответствующие водяные эквиваленты как W_i. Все полученные выше соотношения остаются справедливыми, так как при их выводе нигде не использовалась операция дифференцирования по T_0. Нужно лишь заменить интегралы суммами по i. Так,

$$\overline{W} = \sum_i W_i, \quad \overline{T_0 W} = \sum_i T_{i0} W_i, \quad \overline{\sigma} = \sum_i \sigma_i(T_{i0}, \alpha(T_{i0}), W_i, q(T_{i0}))$$

и т.д.

Итоговые формулы для оптимального выбора температуры нагреваемых потоков на выходе системы, тепловых нагрузок, коэффициентов теплообмена, отношения температур контактирующих потоков и минимально возможной диссипации примут вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{T} = \frac{\sum\limits_i T_{i0} W_i - \overline{q}}{\sum\limits_i W_i}, \\
&q^*(T_{i0}) = W_i(T_{i0} - \overline{T}), \\
&\alpha^*(T_{i0}) = \frac{\overline{\alpha} W_i(\ln T_{i0} - \ln \overline{T})}{\sum\limits_i W_i(\ln T_{i0} - \ln \overline{T})}, \\
&m = 1 - \frac{1}{\overline{\alpha}} \sum_i W_i(\ln T_{i0} - \ln \overline{T}), \\
&\overline{\sigma}^* = \overline{\alpha} \frac{(1-m)^2}{m}, \\
&\alpha^*(T_{i0}) = q^*(T_{i0}) = W_i = 0, \quad T_{i0} \le \overline{T}.
\end{aligned}\right\} \qquad (11.127)$$

Возможность уточнения оценки необратимости

Полученная ниже оценка термодинамического совершенства многопоточного теплообмена может оказаться неоправданно низкой. В ряде случаев она может быть повышена, а значит сделана более точной. Действительно, при получении оценки $\overline{\sigma}^*$ в качестве исходных данных были использованы температуры и водяные эквиваленты горячих потоков, а холодные потоки надо было выбирать таким образом, чтобы приблизиться к полученной оценке. В реальности же может оказаться, что расходы и температуры холодных потоков фиксированы. При оценке совершенства действующей системы фиксированы температуры и водяные эквиваленты всех потоков.

Введем для холодных потоков, их водяных эквивалентов и рассчитанных по ним показателей индекс $-$. Те рассуждения, которые были проведены выше, позволяют найти нижнюю границу для производства энтропии в системе, где заданы температуры холодных потоков $T_{1-} \geq T_{i-} \geq T_{2-}$ и их водяные эквиваленты W_{i-}. Приведем без вывода расчетные соотношения для этого случая:

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{T_-} = \frac{\sum\limits_i T_{i-}W_{i-} + \overline{q}}{\sum\limits_i W_{i-}},\\
&q^*(T_{i-}) = W_{i-}(\overline{T_-} - T_{i-}),\\
&\alpha^*(T_{i-}) = \frac{\overline{\alpha} W_{i-}(\ln \overline{T_-} - \ln T_{i-})}{\sum\limits_i W_{i-}(\ln \overline{T_-} - \ln T_{i-})},\\
&m_- = 1 - \frac{1}{\overline{\alpha}} \sum_i W_{i-}(\ln \overline{T_-} - \ln T_{i-}),\\
&\overline{\sigma}^*_- = \overline{\alpha}\frac{(1-m_-)^2}{m_-},\\
&\alpha^*_-(T_{i-}) = q^*(T_{i-}) = W_{i-} = 0, \quad T_{i-} \geq \overline{T_-}.
\end{aligned}\right\} \tag{11.128}$$

Если в системе фиксированы расходы и температуры как холодных так и горячих потоков, то большее из значений $\overline{\sigma}^*$ или $\overline{\sigma}^*_-$ - дает более точную оценку термодинамического совершенства этой системы.

Пример оценки термодинамического совершенства теплообменной системы

На рис.46 изображена система теплообмена, включающая три горячих и три холодных потока. Первым присвоен индекс i,а вторым – индекс j. Температуры потоков на входе и выходе каждого теплообменника в градусах Кельвина показаны на рисунке, там же внутри кружков даны коэффициенты теплопередачи в кДж/с.К и для каждого из входных потоков даны водяные эквиваленты W_i W_j, имеющие ту же размерность.

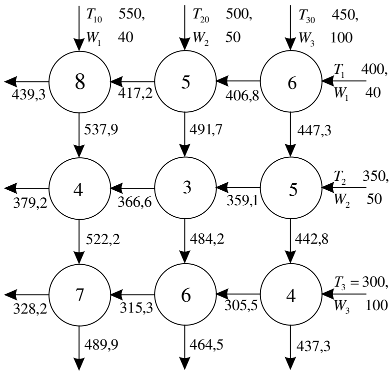


Рис. 46: Структура системы многопоточного теплообмена.

j\\i	1	2	3
1	885	416	271.5
2	628.6	375.3	452
3	1290	983.7	549.2

Таблица 1: Тепловые нагрузки теплообменников q_{ij}.

При этом принято, что эффективная температура контакта каждого из потоков равна средней из температур этого потока на входе и выходе из теплообменника. При этом условии получены тепловые нагрузки теплообменников q_{ij} в кДж/с, сведенные в табл. 1. Производство энтропии в такой системе аналогично (11.84) находят как сумму прироста энтропии по всем потокам

$$\sigma = \sum_{i=1}^{3} W_i \ln \frac{T_{i\text{вых}}}{T_{i0}} + \sum_{j=1}^{3} W_j \ln \frac{T_{j\text{вых}}}{T_{j\text{вх}}}. \tag{11.129}$$

Расчет по этой формуле приводит к значению $\sigma = 5,574$кДж/с.К.

Для термодинамически–оптимальной системы теплообмена с той же суммарной тепловой нагрузкой $\overline{q}$=5851 кДж/с и коэффициентом теплопередачи $\overline{\alpha}$=48кДж/с.К, воспользуемся формулами (11.127). Найдем оптимальную температуру на выходе для горячих потоков. Получим $\overline{T}$=453,4 К. Из сравнения этой температуры с температурами горячих потоков на входе следует, что третий поток с температурой 450К следует исключить из системы теплообмена, оптимально перераспределив поверхности теплообмена между первым и вторым горячими потоками. Пересчет $\overline{T}$ для двух горячих потоков при тех же значениях $\overline{q}$ и $\overline{\alpha}$ приводит к $\overline{T}$=457,2 К. Оптимальные значения тепловых нагрузок, для первого и второго потоков, равны $\overline{q}(T_{10)}$=3712 кДж/с, $\overline{q}(T_{20)}$=2140 кДж/с; оптимальное распределение поверхности теплообмена между этими потоками в соответствии с (11.127) приводит к коэффициентам теплообмена $\overline{\alpha}(T_{10})$=29,9 кДж/с.К, $\overline{\alpha}(T_{20})$=18,1 кДж/с.К. Отношение эффективных температур нагреваемого и греющего потоков в каждом из теплообменников должно быть одинаково и равно m=0,752. Минимально возможное производство энтропии в такой системе σ^*=3,93 кДж/с.К. Для рассматриваемой системы коэффициент термодинамического совершенства $\eta = \dfrac{\sigma^*}{\sigma} = 0,705$.

Сравнение оптимальной и реальной систем теплообмена позволяет наметить пути усовершенствования последней:

1. Исключить из системы поток с температурой на входе 450 К и за счет этого увеличить площади теплообменников для двух оставшихся потоков, так чтобы суммарный коэффициент теплообмена для первого потока увеличился с 19 до 30, а для второго с 14 до 18 кДж/сК.

2. Распределить площадь теплообмена для каждого из потоков таким образом, чтобы отношение эффективных температур контакта холодного и горячего потоков, измеренных в градусах Кельвина, было одинаково для каждого из них и близко к 0,75. Отметим, что в исходной системе оно различно для каждого из теплообменников и меняется от 0,63 до 0,88.

3. При этом температуры горячих потоков на выходе должны быть близки к 457,2 К.

11.6 Извлечение максимального капитала в экономических системах

Рассмотрим задачу извлечения каптала посредником за счет покупки и продажи ресурса в экономической системе, состоящей из m экономических агентов (ЭА). Для каждого из них заданы начальные запасы ресурсов $N_\nu(0)$ и капитала

$N_{0\nu}$, а также функция благосостояния $S_\nu(N_\nu)$ (см. [23]). Эта функция предполагается обычно однородной первой степени, непрерывной, выпуклой вверх и монотонно возрастающей по своим аргументам. Функция благосостояния определяет оценки ЭА каждого из ресурсов и капитала

$$p_{i\nu} = \frac{1}{p_{0\nu}} \frac{\partial S_\nu}{\partial N_{i\nu}}, i = 1, 2, ..., n \quad p_{0\nu} = \frac{\partial S_\nu}{\partial N_{0\nu}}.$$

Оценки ресурса представляют собой ту минимальную цену, по которой ЭА готов продавать ресурс или ту максимальную цену, по которой он согласен его покупать. Их называют иногда равновесными ценами. Так, если каждая из подсистем имеет функцию благосостояния в форме Кобба-Дугласа

$$S_\nu = A_\nu \prod_{i=0}^{n} N_{i\nu}^{\gamma_{i\nu}}, \quad \nu = 1, ..., m, \tag{11.130}$$

где сумма по i $\gamma_{i\nu} \geq 0$ равна единице, то оценки имеют вид

$$p_{0\nu} = S_\nu \frac{\gamma_{0\nu}}{N_{0\nu}}, \quad p_{i\nu} = \frac{\gamma_{i\nu} N_{0\nu}}{\gamma_{0\nu} N_{i\nu}} = S_\nu \frac{\gamma_{i\nu}}{p_{0\nu} N_{i\nu}}. \tag{11.131}$$

Разобъем решение задачи на два этапа:

1. Задача об оптимальной закупке/продаже заданного объема ресурса за фиксированное время у одного ЭА.

2. Задача об извлечении максимума капитала в системе ЭА за заданное время.

Извлечение капитала при ограниченном времени в замкнутой ЭС, диссипация

В том случае, когда продолжительность процесса ограничена, прирост функции благосостояния и обьемы извлеченного капитала зависят от функций спроса и предложения (зависимостей между интенсивностью потоков ресурсов и ценами их покупки или продажи). Посредник при закупке ресурса у ЭА за ограниченное время должен повысить цену по сравнению с оценкой ресурса. Это приведет к тому, что он затратит больше базисного ресурса. Аналогично при продаже за ограниченное время он должен сделать скидку по сравнению с оценкой. Полученный им капитал в результате окажется меньше. Произведение потока между двумя ЭА на разность цен продажи и покупки характеризует текущие потери базисного ресурса за счет необратимых факторов (диссипацию капитала)

$$\sigma(p,c) = g(p,c)(p-c). \tag{11.132}$$

Диссипация капитала служит показателем необратимости процессов, протекающих в системе.

Ниже будем предполагать, что поток закупаемого ресурса пропорционален разности между ценой посредника и оценкой ЭА.

Оптимальная закупка (продажа) ресурса для линейных законов ресурсообмена

Рассмотрим систему, состоящую из подсистемы конечной емкости (ЭА) и активной подсистемы (посредника). Пусть задано начальное и конечное состояния ЭА $N(0) = (N_0(0), N_1(0), \ldots, N_m(0))$, $\overline{N} = N(\tau)$. Посредник выбирает такой вектор цен $c(t) = (c_1(t), c_2(t), \ldots, c_m(t))$, чтобы в результате обмена ресурсами наличный капитал ЭА $N_0(\tau)$ оказался минимален.

$$g = A\Delta = A(c-p), \tag{11.133}$$

В равенстве (11.133) A положительно-определённая, симметрическая матрица с элементами a_{ij} размерности $m \times m$, а $(c-p)$ — вектор с элементами

$$\Delta_i = c_i - p_i(N).$$

Введем обозначение $\delta_i = N_i(\tau) - N_i(0)$ и запишем постановку задачи

$$\overline{N_0} = N_0(\tau) = N_0(0) + \int\limits_0^\tau \sum_{i=1}^m c_i(t) \sum_{j=1}^m a_{ij}(c_j - p_j)dt \longrightarrow \min_{c(t)}, \tag{11.134}$$

при условиях

$$\dot{N}_i = -g_i = -\sum_{j=1}^m a_{ij}(c_j - p_j); \quad N_i(0) - \text{fix}, \quad N_i(t) \geq 0, \tag{11.135}$$

$$\int\limits_0^\tau g_i(t)dt = -\delta, \quad i = \overline{1,m}. \tag{11.136}$$

Задача (11.134)–(11.136) соответствует максимуму извлеченного капитала, так как его величина $M = N_0(0) - N_0(\tau)$.

Выразим из (11.133) c через g как

$$c(g) = p + A^{-1}g = p + Bg. \tag{11.137}$$

Задача

$$\overline{N_0} = N_0(0) + \int\limits_0^\tau g^T(p - Bg)dt \longrightarrow \min_g \tag{11.138}$$

при условии (11.136) дает оценку снизу для значения задачи (11.134)–(11.136), так как условие (11.135) в ней отброшено. Если эта оценка реализуема, т.е. удовлетворяет условию (11.135), то решение задачи (11.138), (11.136) совпадает с решением задачи (11.134)–(11.136).

Так как матрица B — симметрическая, положительно определённая, то задача (11.138), (11.136) — выпуклая вниз усреднённая задача нелинейного программирования. Ее оптимальное решение постоянно и равно

$$g_i^* = -\frac{\delta_i}{\tau} = \frac{N_i(0) - N_i(\tau)}{\tau}; \quad i = \overline{1,m}. \tag{11.139}$$

Соответствующее ему решение уравнений (11.135) реализуемо ($N_i^*(t) \geq 0$)

$$N_i^*(t) = N_i(0) - \frac{N_i(0) - N_i(\tau)}{\tau}t, \quad i = \overline{1,m}. \tag{11.140}$$

Постановка этих зависимостей в $p_i(N)$ определит $p_i^*(t)$ и через равенство (11.137) оптимальное изменение цены $c^*(t)$.

Извлечение капитала из системы нескольких ЭА

В системе с n ЭА посредник закупает ресурс у одних ЭА и продаёт его другим. Максимуму извлечённого базисного ресурса соответствует его минимум в момент τ у всех ЭА, т.е. решение задачи

$$\sum_{\nu=1}^m N_{\nu 0}(\tau) = \sum_{\nu=1}^m \left(N_{\nu 0} - \int\limits_0^\tau \sum_{i=1}^n c_{i\nu}(t) g_{i\nu}(t,c)dt \right) \longrightarrow \min_c, \tag{11.141}$$

причём для каждого из ЭА выполнены условия (11.135), а вместо условий (11.136) имеем условия ненакопления ресурса посредником

$$\sum_{\nu=1}^m \int\limits_0^\tau g_{i\nu}(t)dt = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{11.142}$$

Значения $\overline{N_{i\nu}}$ в данной задаче свободны.

Воспользуемся тем обстоятельством, что процессы закупок и продаж должны протекать оптимально, а следовательно, потоки ресурса должны быть постоянны и связаны с его начальными и конечными запасами соотношениями (11.139)

$$g_{i\nu}^* = \frac{N_{i\nu - \overline{N}_{i\nu}}}{\tau}; \quad i = \overline{1,n}, \nu = \overline{1,m}. \tag{11.143}$$

В силу (11.143) критерий (11.141) определяется конечным состоянием подсистем

$$\overline{N}_0 = \sum_{\nu=1}^{n} \overline{N}_{\nu 0}(\overline{N}_\nu) \longrightarrow \min_{\overline{N}_\nu} \tag{11.144}$$

которые должны быть выбраны так, чтобы $\overline{N}_0$ было минимально при условии (11.142), которое примет форму

$$\sum_{\nu=1}^{n} \overline{N}_{\nu i} = \sum_{\nu=1}^{n} N_{\nu i}(0) = \overline{N}(0), \quad i = \overline{1,n}. \tag{11.145}$$

Условия оптимальности (11.144), (11.145) этой задачи по $\overline{N}_{\nu i}$ запишутся как

$$\frac{\partial \overline{N}_{\nu 0}}{\partial \overline{N}_{\nu i}} = -\lambda_i, \quad \nu = \overline{1,m}, i = \overline{1,n}. \tag{11.146}$$

Но $\partial \overline{N}_{\nu 0} / \partial \overline{N}_{\nu i} = -c_{\nu i}(\tau)$, так что условие (11.146) сводится к тому, что в момент τ цены закупок и продаж должны быть одинаковыми для всех ЭА на каждый из видов ресурса ($c_{\nu i}(\tau) = \lambda_i \quad \forall \nu$). Условия (11.145), (11.146) представляют собой $n(1+m)$ уравнений для неизвестных $\lambda_i (i = \overline{1,n})$ и $\overline{N}_{\nu i} (\nu = \overline{1,m}, i = \overline{1,n})$. При этом зависимости $\overline{N}_{\nu 0}$ от $\overline{N}_{\nu i}$, в свою очередь, определяются через $g_{i\nu}^*(\overline{N}_{\nu i}), p_\nu(N)$ и матрицу B равенством (11.137). Подстановка этих зависимостей в (11.144) позволяет найти минимум остаточного капитала, а значит максимум извлечённого базисного ресурса.

12 Формализация и решение экстремальных задач

Настоящий задачник содержит содержательные постановки экстремальных задач. Их нужно не только решить, но и формализовать. Последовательность формализации, приведенная во введении, облегчает эту задачу.

12.1 Примеры формализации задач

1. **Выбор основания наиболее экономичной системы счисления.** Под экономичностью системы счисления понимается запас чисел, которые можно записать в данной системе с помощью определенного количества знаков.

Словесная формулировка. Найти основание наиболее экономичной системы счисления.

Обозначения переменных. Обозначим число знаков через n, x — основание системы счисления; $N(x)$ — количество чисел, которое можно записать с помощью n знаков в системе счисления с основанием x.

Критерий оптимальности. С помощью n знаков в системе с основанием x можно реализовать $\dfrac{n}{x}$ разрядов, а количество чисел, которое можно при этом записать, равно $N(x) = x^{\frac{n}{x}}$.

Множество допустимых решений включает в себя все положительные числа $x > 0$.

Математическая формулировка. Найти

$$\max_x N(x)/ \quad x > 0.$$

Эта задача отыскания безусловного максимума функции одной переменной.

2. **Задача о выборе расположения транспортного узла**

Словесная формулировка. В n-угольнике найти точку A, сумма квадратов расстояний которой от вершин будет минимальной (рис. 47)

Обозначения. Пусть $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_i, y_i), \ldots, (x_n, y_n)$ — координаты вершин многоугольника; (x_0, y_0) — координаты точки A; l_i — расстояние от точки A до i-ой вершины

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}.$$

Критерий оптимальности

$$L(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^{n} l_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2].$$

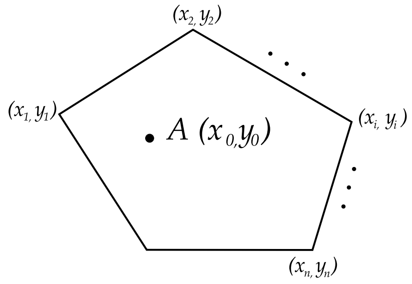


Рис. 47: К задаче выбора расположения узла.

Требуется найти

$$\min_{x_0, y_0} L(x_0, y_0)$$

Это задача поиска безусловного минимума функции двух переменных.

3. **Задача о консервной банке.**

Словесная формулировка. Спроектировать консервную банку цилиндричской формы заданного объема, требующую для ее изготовления минимального количества жести.

Обозначения: V — объем, $S(R, H)$ — полная поверхность, R, H — соответственно радиус и высота банки.

Критерий оптимальности. Требование минимизации количества жести на изготовление банки равносильно требованию минимизации полной ее поверхности

$$S(R, H) = 2\pi R^2 + 2\pi RH$$

Множество допустимых решений. Переменные R и H связаны между собой соотношением

$$V = \pi R^2 H = \text{const}.$$

Теперь можно оптимизационную задачу сформулировать как: Найти

$$\min_{R,H} S(R, H)$$

при условиях

$$V - \pi R^2 H = 0, \quad R \geq 0, H \geq 0.$$

4. *Словесная формулировка.* Найти минимум функции $y = x^2 - 4$, рассматривая решения, ограниченные кругом радиуса R с центром в начале координат.

Обозначения: x^* — координата точки минимума. Множество допустимых решений задается условием

$$x^2 + y^2 \leq R^2 \tag{12.1}$$

Математическая формулировка: Найти

$$\min_x y(x)$$

при связи (12.1).

Мы пришли к задаче поиска условного экстремума нелинейной функции при связи в форме неравенства.

5. *Транспортная задача*

Словесная формулировка. Однородный продукт производится в n пунктах отправления в количествах соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_n$; потребность каждого из m потребителей равна $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Стоимость доставки единицы продукта из пункта i в пункт j известна для всех комбинаций i и j.

Необходимо составить такую программу перевозок (определить количество продукта, доставляемое из i-го пункта в пункт j), чтобы общая сумма затрат на перевозки была минимальна. При этом предполагается, что произведенная продукция во всех пунктах отправления расходуется полностью, а потребности пунктов назначения полностью удовлетворяются. Обратные перевозки продукта запрещены.

Обозначения: x_{ij}, c_{ij} — количество перевозимой продукции из пункта i в пункт j и соответственно стоимость перевозки единицы продукции; $f(x)$ — стоимость затрат на перевозки.

Целевая функция. Транспортные расходы, соответствующие принятой программе перевозки, выражаются линейной формой

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}. \tag{12.2}$$

Множество допустимых решений:

Условия, запрещающие обратные перевозки, есть условия неотрицательности переменных

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{12.3}$$

Из пункта i продукт можно вывозить в пункт j, но его общее количество должно составить

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{12.4}$$

Из любого i-го пункта отправления продукт можно вывозить в пункт j, но его общее количество должно составить

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{12.5}$$

Математическая формулировка. Среди неотрицательных решений (12.3), удовлетворяющих ограничениям (12.4), (12.5), найти решение, минимизирующее целевую функцию (12.2).

12.2 Задачи

12.1. Определить максимальную площадь равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна l. Решить задачу для $l = 5$.

12.2. Найти прямоугольный параллелепипед данного объема V, имеющий наименьшую поверхность.

12.3. Транспортная задача. Некоторый однородный продукт сосредоточен у n поставщиков в количествах соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и предназначен m пунктам назначения, потребности которых составляют соответственно $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Из любого i-го пункта отправления можно попасть в любой j-й пункт назначения, причем стоимость перевозки единицы продукции по этому маршруту составит c_{ij}. Составить такую программу перевозок продукции, чтобы весь произведенный продукт из пунктов отправления был вывезен, потребности пунктов назначения были бы в точности удовлетворены, а общая стоимость перевозок была бы минимальной. Обратные перевозки запрещены.

а) Сделать общую постановку задачи.

б) Решить задачу с цифровыми данными, приведенными в таблице.

В потребности А ресурсы	$b_1 = 200$	$b_2 = 200$	$b_3 = 100$	$b_4 = 100$	$b_5 = 250$
стоимость перевозки единицы продукции					
$a_1 = 100$	10	7	4	1	4
$a_2 = 250$	2	7	10	6	11
$a_3 = 200$	8	5	3	2	2
$a_4 = 300$	11	8	12	16	13

12.4. В прямоугольнике найти точку А, сумма квадратов расстояний от которой до его вершин будет минимальной.

12.5. В полукруг вписана трапеция, основание которой есть диаметр полукруга. Определить угол трапеции при основании так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

12.6. Предприятие располагает n видами ресурсов в количестве $b_1, b_2, \ldots, b_n$, предназначенными для выпуска m типов товаров. Известно, что для производства единицы j-го вида товара расходуется a_{ij} единицы i-го ресурса. Доход, получаемый предприятием от реализации единицы получаемый предприятием от реализации единицы товара j-го вида состовляет c_j. Выпуск продукции j-го вида не должен быть меньше α_1 единиц.

Требуется при данных ресурсах выпустить такую комбинацию товаров $x_1, x_2, \ldots, x_m$, при которой доход предприятия будет максимальным.

а) Сформулировать задачу в общем виде.

б) Решить задачу с конкретными данными.

Ресурсы	Затраты рес. на ед. товара				Объем ресурсов
	1	2	3	4	
1. Сырье, кг	3	5	1	4	600
2. Рабочая сила,чел.-часы	210	10	12	30	4000
3. Оборудование, станко-часы	10	14	8	16	16000
Прибыль руб/ед.товара.	30	25	50	50	

12.7. По двум улицам движутся к перекрёстку две машины с постоянными скоростями v_1 и v_2. Считая, что улицы пересекаются под прямым углом, и зная, что в начальный момент времени автомобили находятся от перекрестка на расстояниях a_1 и a_2, определить, через какое время расстояние между ними станет наименьшим.

12.8. Из всех цилиндров, вписанных в куб с ребром a так, что ось каждого цилиндра совпадает с диагональю куба, а окружности основания касаются граней куба, найти цилиндр наибольшего объема.

12.9. Общую сумму капиталовложений K необходимо распределить между q объектами, потребности которых выражаются суммами $b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots, b_q$, а ожидаемые прибыли $c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots, c_q$. На каждый объект капиталовложения либо выделяются в необходимой сумме, либо совсем не выделяются. Поставить задачу оптимального распределения капиталовложений.

а) Осуществить постановку задачи в общем виде.

б) Решить задачу с конкретными данными

$$q = 5; \quad K = 1200; \quad b_1 = 420; \quad b_2 = 180; \quad b_3 = 240; \quad b_4 = 560;$$
$$b_5 = 300; \quad c_1 = 80; \quad c_2 = 65; \quad c_3 = 90; \quad c_4 = 210; \quad c_5 = 150.$$

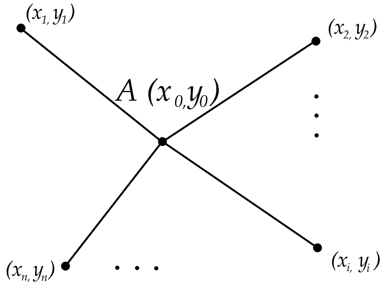


Рис. 48: К задаче 12.10.

12.10. Выбор расположения узла при прокладке трасс. Заданно расположение нескольких потребителей сырья, поступающего к ним по трубопроводам. Требуется так выбрать расположение промежуточной емкости, из которой снабжают всех потребителей, чтобы суммарная длина трубопроводов была минимальной.

12.11. Для доставки продукции завода N в город A строится шоссе NP, соединяющее завод с железной дорогой AB, проходящей через город A. Стоимость перевозок по шоссе вдвое больше, чем по железной дороге. К какому пункту P нужно провести шоссе, чтобы общая стоимость перевозок продукции завода N в город A по шоссе и железной дороге была бы наименьшей? Решить задачу при значениях $a = 100\,km$, $b = 500\,km$.

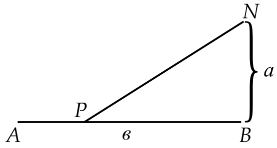


Рис. 49: К задаче 12.11.

12.12. При откорме каждое животное должно получить не менее b_i питательного вещества i-го вида $i = \overline{1,n}$. Для составления рациона используются m видов продуктов. Содержание количества единиц i-го питательного вещества в единице j-го корма составляет x_j. Необходимо подобрать такой рацион для животного, при котором удовлетворяются его потребности в питательных веществах при минимальной стоимости всего рациона.

а) Сформулировать задачу в общем виде.

б) Решить задачу с конкретными данными

Продукты	Питательные вещества			Стоимость, коп.
	Белки	Кальций	Витамины	
Сено	50	6	2	3
Силос	20	4	1	2
Концентраты	180	3	1	5
Нормы потребления	2000	120	40	

12.13. Результаты эксперимента представлены парами чисел (x_i, y_i) $i = \overline{1,n}$

Следует провести через эти точки прямую линию так, чтобы сумма квадратов отклонений эксперементальных точек от этой линии была минимальной.

12.14. Среди всех прямоугольников, имеющих данную площадь s, найти прямоугольник с наименьшей диагональю.

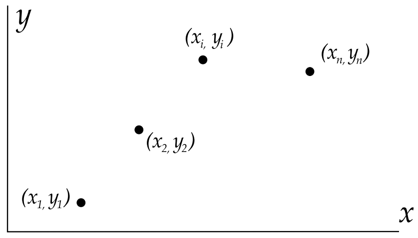


Рис. 50: К задаче 12.13.

12.15. Из углов прямоугольного листа $b \times a$ см нужно вырезать одинаковые квадраты так, чтобы согнув лист по пунктирам, получить коробку наибольшей вместимости. Какова должна быть сторона вырезанного квадрата? Решить задачу для $b = 8$; $a = 5$.

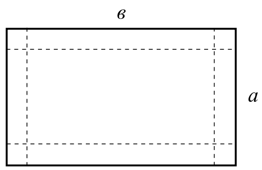


Рис. 51: К задаче 12.15.

12.16. Найти точку на поверхности $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, наименее удаленную от точки (-2,-1,2).

12.17. Какое положительное число, будучи сложено с обратным ему числом, дает наименьшую сумму?

12.18. Объем правильной треугольной призмы равен v. Какова должна быть сторона основания, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?

12.19. Картина повешена на стене. Нижний ее конец на b см, а верхний на a см выше глаза наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен встать наблюдатель, чтобы рассмотреть картину под наибольшим углом?

12.20. Открытый чан имеет форму цилиндра. При данном объеме v какие должны быть радиус основания и высота цилиндра, чтобы его поверхность была наименьшей?

12.21. Из трех досок одинаковой ширины сколачивается желоб для подачи воды. При какой величине угла α наклона боковых стенок к днищу желоба площадь поперечного сечения желоба будет наибольшей?

12.22. Сечение тонеля имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр сечения L м. При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей?

12.23. Имеется n почвенно-климатических зон, площадь которых соответственно равна $s_i \quad i = 1, 2, \ldots, n$ млн. га. Определить размеры посевных площадей озимых и яровых зерновых культур, необходимые для достижения максимального выхода продукции в стоимостном выражении. Урожайность культур по зонам составляет $c_{ij} \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2$ и стоимость 1 ц зерна равна $d_j \quad j = 1, 2$. Необходимо произвести озимых не менее b_1 млн. ц и яровых не менее b_2 млн. ц.

а) Осуществить постановку задачи в общем виде.

б) Поставить и решить задачу с конкретными данными

$$n = 2; \quad a_1 = 0,8; \quad a_2 = 0,6$$

Наименование	Урожайность, ц/га		Стоимость 1 ц (в руб.)
	1 зона	2 зона	
озимые	20	25	8
яровые	25	20	7

12.24. Даны точки $A(x_0; y_0)$ и $B(x_1; y_1)$ На оси $0X$ найти точку M так, чтобы расстояние $S = AM + MB$ было наименьшим.

а) Сформулировать задачу в общем виде.

б) Решить задачу при $A(0; 1); \quad B(4; 5)$.

12.25. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной l см. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

а) Сформулировать задачу в общем виде.

б) Решить ее для значения $l = 20$ см.

12.26. Для выращивания культуры применяется n видов удобрений, ресурс которых составляет соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_n$ центнеров. Вся посевная площадь разбита на m климатических зон площадью соответственно $s_1, s_2, \ldots, s_m$

га. Прирост урожайности 1 га составляет по зонам соответственно $c_1, c_2, \ldots, _m$. Нормы расхода удобрений i-го вида на ед. площади — j-й климатической зоны составляет $a_{ij}(i = \overline{1,n})$; $\quad (j = \overline{1,m})$. Составить такой план распределения удобрений между климатическими зонами, который обеспечивал бы максимальный суммарный прирост урожайности.

а) Сформулировать задачу в общем виде.

б) Сформулировать и решить задачу с конкретными данными: вносятся $n = 3$ типов удобрений (фосфатные, калийные, азотные). Ресурсы: $a_1 = 400000$, $a_2 = 300000$, $a_3 = 100000$ центнеров $m = 3$ (почвенно-климатические зоны). Матрица a_{ij} — затрат удобрений i-го вида на 1 га j-й зоны:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5/4 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Прирост урожайности: $c_1 = 12$; $\quad c_2 = 14$; $\quad c_3 = 10$.

12.27. Груз весом P, лежащий на горизонтальной плоскости, нужно сдвинуть приложенной к нему силой. Под каким углом α к горизонту нужно направить силу F, чтобы она была наименьшей. Коэффициент трения равен μ.

а) Сформулировать задачу в общем виде.

б) Решить задачу при $\mu = 0,25$.

12.28. Из круга вырезан сектор с центральным углом α. Из сектора свернута коническая поверхность. При каком значении угла α, объем полученного конуса будет наибольшим?

12.29. На рынок доставляется картофель из n колхозов по цене соответственно $c_1, c_2, \ldots, c_n$ коп. за кг. Всего на рынок необходимо доставить a тонн. На погрузку 1 т картофеля в колхозах соответственно затрачивается $t_1, t_2, \ldots, t_n$ минут. Для своевременной доставки картофеля необходимо, чтобы на погрузку a тонн картофеля затрачивалось не более T мин. Ресурсы колхозов составляют $b_1, b_2, \ldots, b_n$ тонн. Из каких колхозов и в каком количестве надо доставлять картофель, чтобы его стоимость была минимальной.

а) Сделать математическую постановку задачи в общем виде.

б) Сформулировать и решить задачу при конкретных данных:

$$n = 3; \quad a = 12; \quad T = 12; \quad b_1 = 10; \quad b_2 = 8; \quad b_3 = 6;$$

$$c_1 = 12; \quad c_2 = 10; \quad c_3 = 8; \quad t_1 = 1; \quad t_2 = 6; \quad t_3 = 5$$

12.30. Миноносец стоит на якоре в a км от берега (ближайшей точки). С миноносца нужно послать гонца в лагерь, расположенный в b км, считая по берегу от ближайшей к миноносцу точки берега (лагерь расположен на берегу). Если гонец может делать пешком v_1 км/ч, то в каком пункте берега он должен пристать, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время?

а) Сформулировать задачу в общем виде.

б) Сформулировать и решить задачу при $a = 9$; $b = 5$; $v_1 = 5$; $v_2 = 4$.

12.31. Периметр равнобедренного треугольника равен 2 р. Каковы должны быть его стороны, чтобы объем тела, образованного вращением этого треугольника вокруг основания, был наибольшим?

12.32. Предприятие имеет m видов ресурсов, количество которых соответственно равно $b_i(i = \overline{1,m})$ единиц, из которых производится n видов прдукции. Предприятие может обеспечить выпуск каждого вида продукции в количествене более $d_j\, j = \overline{1,n}$ единиц. Для производства единицы j-й продукции необходимо a_{ij} единиц i-го ресурса. При реализации единицы j-й продукции прибыль составляет c_j единиц. Необходимо составить план выпуска продукции, который обеспечивал бы получение максимальной прибыли при реализации всей выпущенной продукции.

а) Сформулировать задачу в общем виде.

б) Решить задачу с конкретными данными: $n = 3$; $m = 4$.

продукция ресурс	1	2	3	4	Объем ресурсов
Сырье, кг	3	5	2	4	60
Рабочая сила, ч	22	14	18	30	400
Оборудование, станко-ч	10	14	8	16	128
Прибыль на ед. продукции	30	25	56	48	
Ассортимент, d_j	5	8	1	2	

12.33. Расходы на топливо для топки парохода пропорциональны кубу его скорости. Известно, что при скорости v км/ч расходы на топливо составляют N руб. в час, остальные же расходы (не зависящие от скорости) составляют c руб. в час. При какой скорости парохода общая сумма расходов на 1 км пути будет наименьшей? Какова будет при этом общая сумма расходов в час?

а) Сформулировать задачу в общем виде.

б) Решить задачу при $v = 10$ км/ч; $N = 30$; $c = 480$.

12.34. Дневная диета должна содержать m видов различных питательных веществ соответственно в количестве не менее $b_i(i = \overline{1, m})$ единиц. Имеется n различных продуктов в количестве $d_j(j = \overline{1, n})$ единиц. Пусть a_{ij} — количество единиц i-го питательного вещества, содержащегося в в единице j-го продукта, c_j — стоимость единицы j-го продукта. Определить, какие продукты и в каком количестве необходимо включить в дневной рацион питания, чтобы он удовлетворял минимальной потребности в каждом питательном веществе при наименьшей общей стоимости используемых продуктов.

а) Сформулировать задачу в общем виде.

б) Сформулировать задачу и решить при конкретных данных: $n = 2$; $m = 3$; $b_1 = 9$; $b_2 = 8$; $b_3 = 12$.

Питательные вещества	Кол-во питательных вещ. в ед. продукта	
	продукт 1	продукт 2
S_1	3	1
S_2	1	2
S_3	1	6
Стоимость ед. продукта	4	6

12.35. Три пункта A, B и C расположены так, что угол $ABC = \alpha$. Из пункта A выходит автомобиль, одновременно из пункта B — поезд. Автомобиль движется по направлению к B со скоростью v_1 км/ч, поезд — по направлению к C со скоростью v_2 км/ч. В какой момент времени (от начала движения) расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим, если $AB = a$ км?

а) Сформулировать задачу в общем виде.

б) Решить задачу при $\alpha = 60$; $v_1 = 80$; $v_2 = 50$; $a = 200$.

12.36. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

12.37. Измеряется величина A. Ряд опытов по измерению A привел к значениям x_1, x_2, $\ldots, x_n$ исследуемой величины. Часто принимают в качестве среднего значения A такое значение x, что сумма квадратов отклонений его от логарифмов $x_1, x_2, \ldots, x$ имеет наименьшее значение. Найти x, удовлетворяющее этому требованию.

12.38 Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

12.39. Модель рационального использования посевных площадей. Имеется m земельных угодий площадей $s_1, s_2, \ldots, s_m$, предназначенных для засева той или иной сельскохозяйственной культурой. Эти участки отличаются либо положением, либо характером почвы. На каждом из угодий могут быть размещены одна или несколько из n сельскохозяйственных культур (пшеница, рожь, кукуруза и др.). Пусть урожайность j-й культуры на i-м поле составляет a_{ij} центнеров с га. Задан план производства b_j каждой с/х культуры. Известны закупочные цены c_j на каждый вид продукции. Требуется определить план засева посевных площадей с целью максимизации дохода от продажи с/х продукции.

а) Сформулировать задачу в общем виде.

б) Решить задачу с конкретными данными

Культуры	Урожайность		
Площадь участков	Рожь	Пшеница	Ячмень
30	12	16	16
50	10	12	20
20	15	16	24
План	500	200	400
Закупочные цены (условные ед.)	6	10	5

12.40. Рычаг второго рода имеет точку опоры в точке A. В точке B $(AB = a)$ подвешен груз P. Вес единицы длины рычага равен K. Какова должна быть длина рычага, чтобы груз P уравновешивался наименьшей силой (момент уравновешивания силы должен равняться сумме моментов груза P и рычага).

12.41. Согласно принципу Ферма свет, исходящий из точки A и попадающий в точку B, распространяется по той кривой, для прохождения которой требуется минимум времени. Предполагая, что точки A и B расположены в различных оптических средах, разделенных плоскостью, причем скорость распространения света в первой среде равна V_1 а во второй V_2, вывести закон преломления света, как решение, соответствующей этому принципу экстремальной задачи.

12.42. Предприятие имеет m видов ресурсов, количество которых соответсвенно равно $b_i\,(i = \overline{1,m})$ единиц, из которых производится n видов продукции. Предприятие должно обеспечить выпуск каждого вида продукции в количестве не менее $d_j\,(j = \overline{1,n})$ единиц. Для призводства единицы j-й продукции необходимо a_{ij} единиц i-го ресурса. При реализации единицы j-й продукции прибыль составляет c_j единиц. Необходимо составить план выпуска продукции, который обеспечивал бы получение максимальной прибыли при реализации всей выпущенной продукции.

а) Сформулировать задачу в общем виде.

б) Решить задачу с конкретными данными

Изделия	Затраты на одно изделие				Ресурсы
Ресурс	1	2	3	4	
1	5	1	9	12	1500
2	2	3	4	1	1000
3	3	2	5	10	800
Прибыль, руб/шт.	12	5	15	10	
Ассортимент	40	130	30	10	

12.43. На окружности дана точка A. Провести хорду BC параллельно касательной в точке A так, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей.

12.44. Имеется n взаимозаменяемых ресурсов в количестве соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_i,\ a_{i+1}, \ldots, a_n$, предназначенных для удовлетворения m различных потребностей в количествах $b_1, b_2, \ldots, b_j, \ldots, b_m$. Одна единица i-го ресурса удовлетворяет λ_{ij} единиц j-й потребности. Качество использования единицы i-го ресурса на удовлетворение j-потребности выражается числом c_{ij}. Найти распределение ресурсов, максимизирующее показатель качества.

а) Сформулировать задачу в общем виде.

б) Решить задачу с конкретными данными

$$n = 3; \quad a_1 = 200; \quad a_2 = 100; \quad a_3 = 300;$$

$$m = 4; \quad b_1 = 25; \quad b_2 = 45; \quad b_3 = 30; \quad b_4 = 70;$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2,4 & 3 \\ 3,5 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 40 & 30 & 20 & 35 \\ 30 & 25 & 45 & 40 \\ 20 & 45 & 30 & 35 \end{pmatrix}.$$

12.45. Колонна солдат длиной a км движется по шоссе со скоростью v_1 км/ч. Из конца колонны в голову выехал посыльный со скоростью v_2 км/ч. Он должен передать приказ и немедленно вернуться обратно. При какой скорости колонны v_1 посыльный выполнит задание за минимальное время?

12.46 На странице книги печатный текст должен занимать S см^2. Верхние и нижние поля должны быть по a см, правое и левое — по b см. Если принимать во внимание только экономию бумаги, то какими должны быть наиболее выгодные размеры страницы.

12.47. Требуется распределить n сортов топлива в количестве $a_1, a_2, \ldots, a_n$ между агрегатами, имеющими потребности $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Теплотворная работа i-го сорта топлива при использовании его в j-м агрегате составляет c_{ij}.

а) Поставить задачу в общем виде.

б) Сформулировать и решить задачу со следующими данными

$$n = 4; \quad m = 4; \quad a_1 = 70; \quad a_2 = 40; \quad a_3 = 50;$$

$$a_4 = 40; \quad b_1 = 30; \quad b_2 = 50; \quad b_3 = 30; \quad b_4 = 80;$$

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 9 \\ 4 & 7 & 2 & 6 \\ 6 & 5 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

12.48. Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны a см. Определить ее большее основание так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

а) Сформулировать задачу в общем виде.

б) Решить задачу при $a = 10$.

12.49. Задача о «смесях». Имеется n компонентов, при сочетании которых в различных пропорциях образуются различные смеси. В состав каждого компонента входят m веществ. Через a_i и a_j обозначено соответственно количества j-го вещества, входящее в единицу i-го компонента и в единицу смеси. предполагается, что a_j зависит от a_{ij} линейно, т.е. если смесь состоит из x_1 единиц первого компонента, x_2 единиц второго компонента и т.д., то

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i.$$

Заданы числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$, характеризующие цену единицы каждого компонента, и b_j $j = \overline{1, m}$, указывающие минимально необходимое содержание j-го вещества в смеси. Требуется определить состав смеси, для которой суммарная стоимость будет наименьшей.

а) Сформулировать задачу в общем виде.

б) Решить задачу с конкретными данными.

Нефтеперерабатывающий завод получает 4 полуфабриката: 400 тыс.л. алкилата, 250 тыс.л крекинг-бензина, 350 тыс.л бензина прямой перегонки и 100 тыс.л изопентана.

В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуются три сорта авиационного бензина: бензин А — 2:3:5:2; бензин В — 3:1:2:1 и бензин 2:2:1:3. Стоимость 1 тыс.л указанных сортов бензина составляет 120, 100 и 150 руб. Определить план смешения компонентов, при котором будет достигнута максимальная стоимость всей прдукции.

12.50. Измеряется объект А. Ряд опытов по его измерению привел к n значениям $x_1, x_2, \ldots, x_n$ исследуемой величины. Часто принимают в качестве среднего значения А такое значение x, что сумма квадратов относительных величин $\dfrac{x_i - x}{x}$ имеет минимальное значение. Найти x, удовлетворяющее этому требованию.

12.51. Около данного цилиндра описать конус наименьшего объема (плоскости оснований цилиндра и конуса должны совпадать).

12.52. Для обслуживания n авиалиний имеются m типов самолетов в количестве $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Количество пассажиров, которые отправляются по i-й линии, равно $b_i\, i = \overline{1, n}$. Эксплуатационные расходы на один самолет i-го типа на j-й линии составляют a_{ij}, а общее количество пассажиров составляет λ_{ij}. Определить распределение самолетов по авиалиниям, минимизирующее суммарные расходы.

а) Сформулировать задачу в общем виде.

б) Решить задачу при следующих данных:

$$n = 4; \quad m = 3; \quad a_1 = 15; \quad a_2 = 10; \quad a_3 = 25;$$

$$b_1 = 20000; \quad b_2 = 10000; \quad b_3 = 15000; \quad b_4 = 40000.$$

Значения $C\, c_{ij}$ и λ_{ij} приведены в таблице

5 500	7 1200	20 1000	12 2200
9 750	4 1800	8 1500	10 3300
6 1000	8 2450	4 2000	5 4350

12.53. Найти на гиперболе $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ точку, ближайшую к точке (0;2) и лежащую в левой полуплоскости.

12.54. На плоскости даны n материальных точек $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $\ldots$, $P_n(x_n, y_n)$ с массами, соответственно равными $m_1, m_2, \ldots, m_n$. При каком положении точки $P(x, y)$ момент инерции системы относительно этой точки будет наименьшим?

12.55. Каков должен быть угол при вершине равнобедренного треугольника заданной площади, чтобы радиус вписанного в этот треугольник круга был наибольшим?

12.56. Дождевая капля, начальная масса которой m_0, падает под действием силы тяжести, равномерно испаряясь, так что убыль массы пропорциональна времени (коэффициент пропорциональности равен K). Через сколько секунд после начала падения кинетическая энергия капли будет наибольшей и какова она (сопротивлением воздуха пренебрегаем)?

12.57. Доказать, что конический шатер данной вместимости требует наименьшего количества материи, когда его высота в $\sqrt{2}$ раз больше радиуса основания.

12.58. Телевизионная компания получает плату от рекламодателей пропорциональную длительности рекламы и рейтингу (т.е. числу зрителей) передачи. В свою очередь рейтинг уменьшается, если доля рекламы в составе передачи растет. Составить модель и сформулировать задачу о выборе доли рекламы, при которой доходы компании максимальны.

Список литературы

[1] *Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М.* Сборник задач по оптимизации. — М.:Наука, 1984.

[2] *Арутюнов А.В.* Условия экстремума, анормальные и вырожденные задачи. — М.: Факториал, 1997.

[3] *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. — М.: Мир, 1972, 426 с.

[4] *Бошнякович Ф.* Техническая термодинамика. М.: ГЭИ, 1955.

[5] *Бродянский В.М.,Фратшке В., Михалек К.* Эксергетический метод и его приложения. М.: Энергоатомиздат, 1988.

[6] *Булгаков Б.В.* Колебания. — М.: Гостехиздат, 1954.

[7] *Бутковский А.Г.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1965.

[8] *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1988.

[9] *Гилл Ф., Мюррей У.* Численные методы условной оптимизации. — М.: Мир, 1977.

[10] *Гурман В.И.* Принцип расширения в задачах управления. — М.: Наука, 1997.

[11] *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. — М. Физматлит, 1961, 524 с.

[12] *Зеликин М.И., Локоциевский Л.В., Хильдебранд Р.* Геометрия окрестностей особых экстремалей в задачах с многомерным управлением. // Труды матем. инст. им. В.А. Стеклова. 2012. т.277.

[13] *Иоффе А.Д., Тихомиров В.И.* Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974.

[14] *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1994.

[15] *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. — М.: Наука, 1983.

[16] *Розоноэр Л.И.* Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем. // Автоматика и Телемеханика. 1956. №10, №11, №12.

[17] *Розоноэр Л.И., Цирлин А.М.* Оптимальное управление термодинамическими системами. // Автоматика и Телемеханика. 1983. №1, №2 , №3.

[18] *Фельдбаум А.А.* О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства. // Автоматика и Телемеханика. 1955. №2.

[19] *Цирлин А.М.* Методы усредненной оптимизации и их приложения. — М.: Наука, Физматмет. 1997.

[20] *Цирлин А.М.* Задачи и методы усредненной оптимизации. // Труды Математического института им. Стеклова. 2008. т.261. с.1–17.

[21] *Цирлин А.М.* Условия оптимальности скользящих режимов и принцип максимума для задач управления со скалярным аргументом. // Автоматика и телемеханика. №5. 2009.

[22] *Цирлин А.М., Саламон П., Хоффман К-Х.* Замена переменных состояния в задачах параметрического управления осцилляторами. // Автоматика и телемеханика. №8. 2011.

[23] *Цирлин А.М.* Математические модели и оптимальные процессы в макросистемах. — М.: Наука, 2003.

[24] *Guardabassi G., Locatelli A, Rinaldi S.* Periodic Optimization of continuous systems. // *Proc. Int. Conf. Cubern and Soc., Washington, D.C.* 1972. p.261–263.

[25] *Salamon P., K-H. Hoffman K-H., Yair Rezek ...* Maximum work in minimum time from a conservative quantum sustem. // Chem.Phys. N 11. 2009. p.1027–1032.