

Ростовский государственный университет

На правах рукописи

Колесников Алексей Михайлович

БОЛЬШИЕ ДЕФОРМАЦИИ ВЫСОКОЭЛАСТИЧНЫХ ОБОЛОЧЕК

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Зубов Л. М.

Ростов-на-Дону – 2006

Содержание

Введение.....	3
Глава 1. Нелинейная теория безмоментных оболочек при больших деформациях.....	9
1.1. Модель безмоментной оболочки как двумерного материального континуума.....	9
1.2. Определяющие соотношения безмоментных оболочек.....	14
1.3. Об одном случае деформации безмоментной оболочки.....	18
1.4. Численный метод решения краевых задач деформирования безмоментных оболочек.....	21
Глава 2. Осесимметричная деформация оболочек вращения.....	24
2.1. Уравнения осесимметричной деформации.....	25
2.2. Раздувание замкнутой сферической оболочки.....	32
2.3. Нагружение плоской мембраны гидростатическим давлением.....	41
2.4. Раздувание замкнутой торообразной оболочки.....	48
2.5. Осесимметричная деформация круговой цилиндрической оболочки.....	55
Глава 3. Большие деформации чистого изгиба цилиндрической оболочки, нагруженной внутренним давлением.....	72
3.1. Сведение задачи чистого изгиба к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.....	74
3.2. Анализ напряженно-деформированного состояния оболочки при изгибе.....	81
Глава 4. Экспериментальные исследования торообразной оболочки при больших деформациях.....	100
Заключение.....	106
Литература.....	107

Введение

Нелинейная теория оболочек относительно новый и сложный раздел механики оболочек. Оболочка – создание природы: бамбук, скорлупа яиц, улитка, клеточная мембрана и т.д. Тонкостенные конструкции являются одним из самых распространенных конструктивных элементов в технической деятельности человека: разнообразные надувные сооружения, гибкие емкости, пневмоопалубка, мембранные плотины, горные пневмоконструкции, гибкие трубопроводы. Применение нетрадиционных резиноподобных материалов в технике, изучение биологических структур требует учета и исследования больших деформаций тонкостенных конструкций, что невозможно вне рамок нелинейной теории. Увеличение в XXI веке количества работ рассматривающих большие деформации тонкостенных конструкций свидетельствует об актуальности данной темы.

Исследованию нелинейной теории оболочек посвящен ряд монографий и публикаций в журналах. Значительный вклад в развитие нелинейной теории оболочек внесли И. И. Ворович [3], К. З. Галимов [4], П. А. Жилин, Л. М. Зубов [11], П. Е. Товстик, К. Ф. Черных [30], Л. И. Шкутин, J. E. Adkins [10], S. S. Antman [34], A. E. Green [10], W. T. Koiter [58], A. Libai [67], W. Pietraszkiewicz [74, 75], J. G. Simmonds [67] и другие.

Изучению больших деформаций оболочек также посвящены работы: [7, 8, 9, 13, 15, 20, 23, 25, 27, 29, 30, 31, 38, 40, 43, 44, 45, 50, 51, 52, 53, 54, 60, 61, 62, 63, 66, 68, 72, 73, 79, 80, 81, 85, 87, 91, 92, 94] и др. Большая часть исследований в нелинейной теории оболочек изучает деформацию осесимметричных оболочек. Часть публикаций посвящена исследованию деформаций цилиндрических оболочек, при которых напряжения и деформации одинаковы в любых сечениях оболочки. В ряде работ рассмотрены другие задачи о деформации оболочек, например, задача о раздувании прямоугольной мембраны.

Изгиб тонкостенной цилиндрической оболочки и влияние внутреннего давления на деформацию в рамках нелинейной теории упругости практически не исследованы. Ряд работ в рамках линейной теории упругости посвящёны изучению изгиба тонкостенных конструкций и влиянию на него давления [35, 42, 48, 49, 64, 69, 76, 77, 78, 86, 88, 90, 93] и др. Резиноподобные материалы рассматриваются в работе [57], где исследуется задача о наложении малых деформаций изгиба на конечные деформации раздувания круглой цилиндрической безмоментной оболочки. Впервые задача об изгибе цилиндрической оболочки в рамках нелинейной теории упругости рассмотрена Л. М. Зубовым в работе [95], где с помощью полуобратного метода предложен вид решения.

Содержание работы изложено в четырех главах.

Первая глава содержит основные соотношения нелинейной теории оболочек.

В п. 1.1 дается вывод нелинейных уравнений безмоментной оболочки при больших деформациях. Из вариационного принципа минимума потенциальной энергии получены уравнения равновесия для безмоментной оболочки, состоящей из несжимаемого изотропного материала.

В п. 1.2 формулируются определяющие соотношения теории оболочек с помощью трехмерной функции потенциальной энергии. Там же представлен список различных видов функций потенциальной энергии для изотропного несжимаемого материала.

В п. 1.3 рассматривается класс задач о деформации оболочек, характеризующийся независимостью первой квадратичной формы в отсчетной и текущей конфигурациях от одной из гауссовых координат поверхности оболочки. Такой вид деформации реализуется в задачах осесимметричной деформации оболочки вращения, в задачах деформации цилиндрических оболочек, для которых напряженно-деформированное состояние не зависит от сечения, и некоторых других случаях. В этом разделе выведены уравнения

равновесия для этого частного случая, и получены ограничения на внешнюю нагрузку, необходимые для реализации такого вида деформации. Показано, что если вторая квадратичная форма также не зависит от той же гауссовой координаты, то система дифференциальных уравнений равновесия является системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

В п. 1.4 описывается численный метод решения краевой задачи системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Вторая глава посвящена осесимметричной деформации оболочки вращения. Выведены уравнения равновесия для произвольной оболочки вращения. Рассмотрены частные случаи деформации осесимметричных оболочек.

В п. 2.1 показано, что осесимметричная деформация оболочки вращения удовлетворяет классу задач, рассмотренному в п. 1.3. Разрешающая система уравнений выводится относительно функций кратности удлинений и некоторой новой функции координат. Эта система является системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

В п. 2.2 рассматривается задача о деформации сферической оболочки. Задача может быть решена аналитически в постановках теории упругости и теории оболочек для некоторых видов функции потенциальной энергии. Это позволяет проверить точность численного метода решения краевой задачи, сформулированной в п. 2.1. Получены решения задачи для материала Муни в трех видах: 1) численное решение задачи, когда сфера рассматривается как оболочка вращения, 2) аналитическое решение теории оболочек и 3) аналитическое решение теории упругости. Сравнение результатов показывает высокую точность приближения теории оболочек и высокую точность численного решения уравнений равновесия.

В п. 2.3 решается задача о раздувании плоской круглой мембраны. Рассмотрены несколько видов потенциалов, описывающих высокоэластичные материалы. Представлены результаты исследования формы деформированной

оболочки, ее прогиба, утончения и величин напряжений в центре. Для неогуковского материала и материала Муни сравнение полученных результатов с теоретическими и экспериментальными данными исследований других авторов показывают достоверность полученного решения задачи.

В п. 2.4 рассматривается задача о деформации торообразной оболочки под действием внутреннего давления для различных материалов. Исследуется влияние геометрических размеров тора на деформацию и напряжения, возникающие в оболочке.

В п. 2.5 решается задача о деформации круговой цилиндрической оболочки. В гипотезах скользящей заделки, неучитывающей жесткое закрепление мембраны по краю, построены аналитические решения теории упругости и теории оболочек о раздувании и растягивании тонкостенной трубы, состоящей из неогуковского материала. Представлены численные решения задачи о раздувании цилиндрической оболочки, растягиваемой на некоторую заданную величину и закрепленной по краю так, чтобы радиус оставался постоянным. Аналитические и численные решения сравниваются в двух задачах. В первой задаче для растянутой на некоторую величину цилиндрической оболочки из неогуковского материала строится зависимость радиуса сечения от величины внутреннего давления. Полученные данные свидетельствуют, что при больших деформациях, даже вдали от краев, разница между решениями, учитывающими и неучитывающими условия закрепления, существенна. Учет граничных условий дает возможность исследовать убывающую часть диаграммы «давление–радиус». Во второй задаче рассматривается влияние условий закрепления цилиндрической оболочки (растягиваемой вдоль образующей, но не нагруженной внутренним давлением) на деформацию вдали от края. Показывается, что для безмоментных оболочек, у которых отношение длины к радиусу сечения более четырех, аналитическое решение, не учитывающее условий закрепления, может быть принято с погрешностью менее 10%. Результаты исследования растягиваемой

цилиндрической оболочки закрепленной по краю так, чтобы радиус оставался постоянным, сравниваются с исследованиями других авторов.

Задача изгиба цилиндрической оболочки нагруженной равномерно распределенной нагрузкой рассматривается в третьей главе.

В п. 3.1 излагается теория сильного изгиба замкнутой цилиндрической оболочки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой изнутри. Теория основана на сведении первоначально нелинейной двумерной задачи статики оболочки к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Аналогично задаче о деформации оболочки вращения, уравнения равновесия сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для функций кратностей удлинений и связывающей их новой функции.-

В п. 3.2 исследуется круговая цилиндрическая оболочка. Для случая оболочки, состоящей из неогукковского материала, вводятся безразмерные параметры, для которых выполняются условия подобия. Найдена безразмерная комбинация независимых параметров, для которой искомые величины деформации и напряжения в оболочке в безразмерном виде не зависят от геометрических размеров и постоянной материала. На основе численного моделирования показано влияние внутреннего давления на жесткость конструкции и существование критической изгибающей нагрузки. Для расчета критического изгибающего момента и некоторых величин деформированной оболочки предложены простые формулы расчета.

В четвертой главе описывается экспериментальное исследование раздувания торообразной оболочки. На основе экспериментальных данных выбран вид функции потенциальной энергии и постоянные материала, описывающие свойства материала автомобильной камеры.

В заключении дана сводка основных выводов, полученных в диссертации.

Основные результаты докладывались на III Всероссийской конференции по теории упругости (Ростов-на-Дону – Азов, 2003), Международной школе семинаре “Математическое моделирование и биомеханика в современном

университете” (пос. Абрау-Дюрсо, 2005), 8th Conference “Shell Structures: Theory and applications” (Gdańsk–Jurata (Poland), 2005), 16-ом симпозиуме “Проблемы шин и резинокордных композитов” (Москва, 2005).

По теме диссертации опубликованы статьи [12,16,17,18,19,59]. Работы [12] и [59] написаны в соавторстве с научным руководителем Л. М. Зубовым, которому принадлежат постановки задач и рекомендации по выбору метода решения. Вывод разрешающих систем уравнений, разработка и реализация численного метода, численные результаты принадлежат автору диссертационной работы.

Глава 1. Нелинейная теория безмоментных оболочек при больших деформациях.

1.1. Модель безмоментной оболочки как двумерного материального континуума.

Упругую безмоментную оболочку можно рассматривать как двумерный материальный континуум, то есть, как материальную поверхность, наделенную определенными свойствами [4, 10, 11, 34, 58, 67, 74, 75]. Пусть o и O – поверхности, соответствующие отсчетной и деформированной (текущей) конфигурации этого континуума. Положение точки на o определяется радиус-вектором $\mathbf{r}(q^1, q^2)$, где q^α ($\alpha=1,2$) – гауссовы координаты на o . Единичный вектор нормали к поверхности o обозначим \mathbf{n} , а основной и взаимный базисы на o обозначим \mathbf{r}_α и \mathbf{r}^β

$$\mathbf{r}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha}, \quad \mathbf{r}^\beta \cdot \mathbf{r}_\alpha = \delta_\alpha^\beta, \quad \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r}^\beta \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (1.1.1)$$

Здесь и ниже греческие индексы принимают значение 1, 2, а δ_α^β означает символ Кронекера. Коэффициенты первой квадратичной формы $g_{\alpha\beta}$ и первый фундаментальный тензор \mathbf{g} поверхности o вводятся соотношениями

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta, \quad \mathbf{g} = g_{\alpha\beta} \mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}^\beta = \mathbf{E} - \mathbf{n}\mathbf{n}, \quad (1.1.2)$$

где \mathbf{E} – единичный тензор в трехмерном евклидовом пространстве. Считая параметры q^α лагранжевыми координатами материальной поверхности, будем задавать положение точки поверхности O радиусом-вектором $\mathbf{R}(q^1, q^2)$. Таким образом, материальная точка поверхности, имевшая в отсчетной конфигурации положение $\mathbf{r}(q^1, q^2)$, после деформации имеет положение $\mathbf{R}(q^1, q^2)$. Нормаль к поверхности O обозначим \mathbf{N} , а основной и взаимный базисы на O – \mathbf{R}_α и \mathbf{R}^β . Имеют место формулы, аналогичные (1.1.1)

$$\mathbf{R}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^\alpha}, \quad \mathbf{R}^\beta \cdot \mathbf{R}_\alpha = \delta_\alpha^\beta, \quad \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{N} = \mathbf{R}^\beta \cdot \mathbf{N} = 0. \quad (1.1.3)$$

Коэффициенты первой квадратичной формы и первый фундаментальный тензор на O обозначаются по аналогии с (1.1.2) прописными буквами

$$G_{\alpha\beta} = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{R}_\beta, \quad \mathbf{G} = G_{\alpha\beta} \mathbf{R}^\alpha \mathbf{R}^\beta = \mathbf{E} - \mathbf{N}\mathbf{N}. \quad (1.1.4)$$

В дальнейшем будут использоваться двумерные операторы градиента (набла-операторы) на поверхностях o и O

$$\nabla_0 \Phi = \mathbf{r}^\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial q^\alpha}, \quad \nabla \Phi = \mathbf{R}^\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial q^\alpha}. \quad (1.1.5)$$

Следуя общему принципу локальности [26], предположим, что удельная (на единицу площади поверхности) потенциальная энергия деформации оболочки W в данной материальной частице поверхности определяется заданием положения \mathbf{R} этой частицы в текущей конфигурации и градиента деформации $\nabla_0 \mathbf{R}$:

$$W = W(\mathbf{R}, \nabla_0 \mathbf{R}). \quad (1.1.6)$$

Используя требование инвариантности энергии относительно поступательного движения, получим, что W не зависит от первого аргумента в (1.1.6), так что $W = W(\nabla_0 \mathbf{R})$. Последнюю функцию остается подчинить ограничениям, вытекающим из инвариантности энергии относительно произвольных поворотов оболочки как абсолютного твердого тела. Это условие инвариантности имеет вид

$$W(\nabla_0 \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}) = W(\nabla_0 \mathbf{R}). \quad (1.1.7)$$

где \mathbf{Q} – любой ортогональный тензор в трехмерном евклидовом пространстве. Чтобы решить функциональное уравнение (1.1.7), при помощи (1.1.3)–(1.1.4) введем в рассмотрение неособый тензор дисторсии деформирующейся поверхности [11]

$$\mathbf{C}_0 = \nabla_0 \mathbf{R} + \mathbf{n}\mathbf{N} = \mathbf{r}^\alpha \mathbf{R}_\alpha + \mathbf{n}\mathbf{N}$$

и запишем его полярное разложение

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_0 &= (\mathbf{U}_0 + \mathbf{nn}) \cdot \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{U}_0 + \mathbf{nn} = (\mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{C}_0^\top)^{1/2}, \\ \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{C}_0^\top &= \mathbf{G}^\times + \mathbf{nn}, \quad \mathbf{G}^\times = (\nabla_0 \mathbf{R}) \cdot (\nabla_0 \mathbf{R})^\top = G_{\alpha\beta} \mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}^\beta, \quad \mathbf{U}_0 = \mathbf{G}^{\times 1/2}. \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Здесь \mathbf{A}_0 – собственно ортогональный тензор поворота двумерного континуума, \mathbf{G}^\times – мера деформации Коши материальной поверхности [11]. Из (1.1.8) вытекают соотношения

$$\nabla_0 \mathbf{R} = \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{N} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_0. \quad (1.1.9)$$

Положив в (1.1.7) $\mathbf{Q} = \mathbf{A}_0$ и учтя (1.1.9) получим

$$W(\nabla_0 \mathbf{R}) = W(\mathbf{U}_0). \quad (1.1.10)$$

Легко видеть, что представление (1.1.10) не только необходимо, но и достаточно для инвариантности удельной энергии W относительно жестких движений. Кроме того, из взаимно однозначной зависимости между тензорами \mathbf{U}_0 и \mathbf{G}^\times следует представление удельной потенциальной энергии оболочки, эквивалентное (1.1.10), но более удобное в приложениях

$$W = W(\mathbf{G}^\times). \quad (1.1.11)$$

Соотношение (1.1.11) выведенное из (1.1.6), соответствует безмоментной упругой оболочке, которая не сопротивляется изгибам (т.е. изменениям кривизны) поверхности o . Для учета моментности напряженного состояния предположение (1.1.6) следует дополнить зависимостью удельной энергии также и от второго градиента деформации

$$W = W(\nabla_0 \mathbf{R}, \nabla_0 \nabla_0 \mathbf{R}).$$

Уравнения равновесия безмоментной упругой оболочки выводятся из вариационного принципа Лагранжа

$$\delta \Pi = 0, \quad \Pi = \iint_o W(\nabla_0 \mathbf{R} \cdot \nabla_0 \mathbf{R}^\top) do - \mathcal{E}. \quad (1.1.12)$$

Здесь \mathcal{E} – потенциал внешних сил, δ – символ вариации. В дальнейшем предполагается, что допустимые функции на всей границе оболочки удовлетворяют кинематическим краевым условиям (\mathbf{R}_0 – заданная функция)

$$\mathbf{R}|_{\partial o} = \mathbf{R}_0, \quad (1.1.13)$$

а вариация потенциала внешних сил имеет вид

$$\delta\mathfrak{E} = \iint_o \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \nabla_o \mathbf{R}) \cdot \delta \mathbf{R} d\mathbf{o}. \quad (1.1.14)$$

Варьирование функционала Π согласно (1.1.8), (1.1.12)–(1.1.14) приводит к уравнениям равновесия

$$\begin{aligned} \nabla_o \cdot \mathbf{D} + \tilde{\mathbf{q}} &= 0, \\ \mathbf{D} &= 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{G}^\times} \cdot \nabla_o \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

Введение тензора усилий Коши

$$\mathbf{L} = \sqrt{\frac{\mathfrak{g}}{\mathbf{G}}} (\nabla_o \mathbf{R})^\top \cdot \mathbf{D} = 2 \sqrt{\frac{\mathfrak{g}}{\mathbf{G}}} (\nabla_o \mathbf{R})^\top \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{G}^\times} \cdot \nabla_o \mathbf{R} = L^{\alpha\beta} \mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\beta, \quad (1.1.16)$$

$$\mathbf{G} = G_{11} G_{22} - G_{12}^2, \quad \mathfrak{g} = g_{11} g_{22} - g_{12}^2.$$

позволяет записать уравнения равновесия (1.1.15) в геометрии деформированной конфигурации оболочки

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{L} + \mathbf{q} &= 0, \\ \mathbf{q} &= \sqrt{\frac{\mathfrak{g}}{\mathbf{G}}} \tilde{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

Введенная в (1.1.14) функция нагрузки $\tilde{\mathbf{q}}$ отнесена к площади поверхности оболочки в отсчетной конфигурации. В дальнейшем удобнее пользоваться функцией \mathbf{q} выражающей нагрузку, отнесенную к площади оболочки в текущей конфигурации.

Уравнения (1.1.17) можно получить также путем осреднения по толщине оболочки трехмерных уравнений равновесия [11].

Из (1.1.16) вытекает, что тензор усилий Коши оболочки принадлежит поверхности O , то есть удовлетворяет условию $\mathbf{N} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{N} = 0$.

Для безмоментных оболочек с достаточной степенью точности можно принять, что элемент оболочки испытывает плоское напряженное состояние, однородное по толщине. Поэтому определяющие соотношения для заданного материала можно получить, рассмотрев задачу о плоском напряженном

состоянии упругого листа при однородной деформации. В случае изотропного несжимаемого материала будем исходить из уравнений состояния в форме Фингера [21]

$$\mathbf{T} = \kappa_1(I_1, I_2)\boldsymbol{\lambda}^{-1} - \kappa_2(I_1, I_2)\boldsymbol{\lambda} - P\mathbf{E},$$

$$\kappa_1(I_1, I_2) = 2\frac{\partial W^*(I_1, I_2)}{\partial I_1}, \quad \kappa_2(I_1, I_2) = 2\frac{\partial W^*(I_1, I_2)}{\partial I_2} \quad (1.1.18)$$

$$I_1 = \text{tr } \boldsymbol{\lambda}^{-1} = \text{tr } \boldsymbol{\Lambda}, \quad I_2 = \frac{1}{2}(\text{tr}^2 \boldsymbol{\lambda}^{-1} - \text{tr } \boldsymbol{\lambda}^{-2}) = \frac{1}{2}(\text{tr}^2 \boldsymbol{\Lambda} - \text{tr } \boldsymbol{\Lambda}^2).$$

Здесь $\boldsymbol{\lambda}^{-1}$ – мера деформации Фингера, $\boldsymbol{\lambda}$ – мера деформации Альманзи, P – функция гидростатического давления, $\boldsymbol{\Lambda}$ – мера деформации Коши, W^* – объемная плотность энергии деформации.

Для задачи о плоском напряженном состоянии имеем

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{g}^\times + \Lambda^{-2}\mathbf{N}\mathbf{N}, \quad \boldsymbol{\lambda}^{-1} = \mathbf{g}^\wedge + \Lambda^2\mathbf{N}\mathbf{N}, \quad \Lambda = H/h.$$

$$\mathbf{g}^\times = (\nabla \mathbf{r}) \cdot (\nabla \mathbf{r})^\top = g_{\alpha\beta} \mathbf{R}^\alpha \mathbf{R}^\beta, \quad \mathbf{g}^\wedge = g^{\alpha\beta} \mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\beta.$$

Здесь h и H – толщина слоя до и после деформации. Поперечная деформация Λ исключается из условия несжимаемости:

$$\Lambda = \sqrt{\mathbf{g}/\mathbf{G}}, \quad (1.1.19)$$

после чего выражения для инвариантов (1.1.18) примут вид

$$I_1 = j_1 + j_2^{-1}, \quad I_2 = j_1 j_2^{-1} + j_2. \quad (1.1.20)$$

Здесь j_1 и j_2 – инварианты меры деформации оболочки \mathbf{G}^\times :

$$j_1 = \text{tr } \mathbf{G}^\times, \quad j_2 = \det \mathbf{G}^\times = \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{g}}.$$

Давление P находится из условия отсутствия поперечного нормального напряжения:

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0. \quad (1.1.21)$$

В результате определяющее соотношение безмоментной упругой оболочки из произвольного изотропного несжимаемого материала записывается в виде

$$\mathbf{L} = H\mathbf{T} = h\Lambda\mathbf{T} = h\Lambda[(j_2\kappa_2 - j_2^{-1}(\kappa_1 + j_1\kappa_2))\mathbf{G} + (\kappa_1 + j_2^{-1}\kappa_2)\mathbf{g}^\wedge]. \quad (1.1.22)$$

Непосредственной проверкой при помощи (1.1.18) легко убедиться в том, что соотношение (1.1.22) можно записать в форме

$$\sqrt{j_2}\mathbf{L} = 2\left(j_2 \frac{\partial W}{\partial j_2} \mathbf{G} + \frac{\partial W}{\partial j_1} \mathbf{g}^\wedge\right), \quad W = hW^*. \quad (1.1.23)$$

В свою очередь соотношение (1.1.23) в случае изотропной оболочки эквивалентно следующему

$$\sqrt{j_2}\mathbf{L} = 2\mathbf{C}^\top \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{G}^\times} \cdot \mathbf{C}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{r}^\alpha \mathbf{R}_\alpha + \Lambda \mathbf{n} \mathbf{N}. \quad (1.1.24)$$

Выражение (1.1.24) с точностью до обозначений соответствует выражению (1.1.16) тензора \mathbf{L} , которое было выведено на основе представления о безмоментной оболочке, как двумерном материальном континууме.

С учетом (1.1.19) функция удельной энергии оболочки W из несжимаемого материала выражается через функцию удельной энергии трехмерной среды W^* по формуле

$$W(\mathbf{G}^\times) = hW^*(\mathbf{G}^\times + (g/G)\mathbf{nn}). \quad (1.1.25)$$

Толщина оболочки в отсчетной конфигурации h может быть переменной: $h=h(q^1, q^2)$. Толщина деформированной оболочки $H(q^1, q^2)$ определяется из (1.1.16) и (1.1.19) для несжимаемого материала. В случае сжимаемого материала для заданной функции энергии $W^*(\Lambda)$ сначала необходимо из условия (1.1.21) определить поперечную деформацию.

1.2. Определяющие соотношения безмоментных оболочек.

Удельная потенциальная энергия W^* задается как функция меры деформации Коши Λ . Для изотропного материала ее можно представить как функцию главных инвариантов I_1, I_2, I_3 тензора Λ или как функцию главных кратностей удлинений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$W^*(\Lambda) = W^*(I_1, I_2, I_3) = W^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Как было показано выше, мера деформации Коши Λ для оболочки полностью определяется деформацией поверхности оболочки (1.1.25), где поперечная деформация исключается с помощью условия несжимаемости соотношением (1.1.19). Это позволяет задавать удельную потенциальную энергию деформации как функцию только двух независимых величин

$$W^*(\Lambda) = W^*(I_1, I_2) = W^*(\lambda_1, \lambda_2). \quad (1.2.1)$$

Для несжимаемых материалов справедливы следующие соотношения:

$$I_3 = 1, \quad \lambda_3 = \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1}.$$

Первый и второй инварианты меры деформации Коши Λ выражаются через меру деформации оболочки \mathbf{G}^\times уравнениями (1.1.20).

В литературе представлено большое число упругих потенциалов для несжимаемых материалов:

неогуковский ($c_1 = \mu/2$)

$$W^* = c_1(I_1 - 3); \quad (1.2.2)$$

Муни-Ривлина [70] ($c_1 = \mu/2, c_2 > 0$)

$$W^* = c_1(I_1 - 3) + c_2(I_2 - 3); \quad (1.2.3)$$

или в другой форме ($1 < \beta \leq 1$)

$$W^* = \frac{\mu}{4}[(1 + \beta)(I_1 - 3) + (1 - \beta)(I_2 - 3)]; \quad (1.2.4)$$

Чоеглы [84] ($|\beta| \leq 1, \kappa \geq 0$)

$$W^* = \frac{\mu}{4}[(1 + \beta)(I_1 - 3) + (1 - \beta)(I_2 - 3) + \kappa(I_1 - 3)^2]; \quad (1.2.5)$$

Клоснера-Сегала [55] ($|\beta| \leq 1, \kappa \geq 0$)

$$W^* = \frac{\mu}{4}[(1 + \beta)(I_1 - 3) + (1 - \beta)(I_2 - 3) + \kappa(I_2 - 3)^2]; \quad (1.2.6)$$

Бидермана [2] ($c_0 \geq 0, c_1 \geq 0, c_3 \geq 0, c_1 + c_3 \geq 0, 3c_2 + \sqrt{15c_1c_3} > 0$)

$$W^* = c_0(I_2 - 3) + c_1(I_1 - 3) + c_2(I_1 - 3)^2 + c_3(I_1 - 3)^3; \quad (1.2.7)$$

Муни-Ривлина обобщенный [39] ($c_{00} = 0$)

$$W^* = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N c_{mn} (I_1 - 3)^m (I_2 - 3)^n; \quad (1.2.8)$$

Бартенева-Хазановича (в иностранной литературе Варга) [1]

$$W^* = 2\mu(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3); \quad (1.2.9)$$

Черныха [28] ($|\beta| \leq 1$)

$$W^* = \mu[(1 + \beta)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3) + (1 - \beta)(\lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} + \lambda_3^{-1} - 3)]; \quad (1.2.10)$$

степенной [30] ($n > 0, |\beta| \leq 1$)

$$W^* = \frac{\mu}{n^2} [(1 + \beta)(\lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n - 3) + (1 - \beta)(\lambda_1^{-n} + \lambda_2^{-n} + \lambda_3^{-n} - 3)]; \quad (1.2.11)$$

Огдена [71]

$$W^* = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3); \quad (1.2.12)$$

Джента [46] ($J_m = const$)

$$W^* = -\frac{\mu}{2} J_m \ln \left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right); \quad (1.2.13)$$

Джента и Томаса [47] ($0 \leq \beta \leq 1$)

$$W^* = \frac{\mu}{2} \left[\beta(I_1 - 3) + (1 - \beta) \ln \frac{I_2}{3} \right]; \quad (1.2.14)$$

Беккера-Трелоара [37]

$$W^* = 2\mu \sum_{i=1}^3 \lambda_i (\ln \lambda_i - 1); \quad (1.2.15)$$

Ноулса [56] ($n > 0, b > 0$)

$$W^* = \frac{\mu}{2b} \left[\left(1 + \frac{b}{n} (I_1 - 3) \right)^n - 1 \right]; \quad (1.2.16)$$

биологический материал, предложенный Фыном (Y. C. Fung) [36]

$$W^* = \frac{\mu}{2b} (e^{b(I_1 - 3)} - 1); \quad (1.2.17)$$

существенно нелинейный материал [14] ($d_1 \geq 0$, $d_2 \geq 0$, $d_1^2 + d_2^2 \neq 0$, $\nu_1 \geq 0.5$, $\nu_2 \geq 0.5$)

$$W^* = d_1(I_1 - 3)^{\nu_1} + d_2(I_2 - 3)^{\nu_2}. \quad (1.2.18)$$

Для всех представленных материалов μ – модуль сдвига, остальные величины – некоторые постоянные материала.

Определяющие соотношения (1.1.16) в компонентной форме представляются в виде

$$L^{\alpha\beta} = \frac{2h}{\eta} \sqrt{\frac{g}{G}} \frac{\partial W^*}{\partial G_{\alpha\beta}}, \quad \eta = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 2, & \alpha \neq \beta \end{cases}. \quad (1.2.19)$$

Если потенциальная энергия задана как функция главных инвариантов меры деформации, то с учетом соотношений 1.1.20 выражения (1.2.19) примут вид

$$L^{\alpha\beta} = \frac{2h}{\eta} \sqrt{\frac{g}{G}} \left(\frac{\partial W^*}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial G_{\alpha\beta}} + \frac{\partial W^*}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial G_{\alpha\beta}} \right). \quad (1.2.20)$$

Для изотропного материала главные оси деформации являются и главными осями напряжений. В главных осях не нулевыми остаются только диагональные компоненты тензора меры деформации оболочки \mathbf{G}^\times и тензора усилий \mathbf{L} . Главные кратности удлинений выражаются через компоненты меры деформации соотношениями

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{G_{11}}{g_{11}}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{G_{22}}{g_{22}}}. \quad (1.2.21)$$

В случае задания потенциальной энергии деформации как функции кратностей главных удлинений главные усилия согласно (1.2.19), (1.2.21), примут следующий вид

$$L^{\alpha\alpha} = \frac{h}{\sqrt{g_{\alpha\alpha} G_{\alpha\alpha}}} \sqrt{\frac{g}{G}} \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_\alpha} = \frac{h}{g_{\alpha\alpha} \lambda_\alpha \lambda_1 \lambda_2} \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_\alpha}. \quad (1.2.22)$$

Определяющие соотношения для тензора усилий \mathbf{D} легко получить из соотношений (1.2.20), (1.2.22) и уравнений (1.1.16), связывающего тензоры \mathbf{L} и \mathbf{D} .

1.3. Об одном случае деформации безмоментной оболочки.

Рассмотрим поверхность o и гауссовы координаты q^1 и q^2 такие, что компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ (1.1.2) не зависят от координаты q^2 и образуют диагональную матрицу

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^2} = 0, \quad g_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \quad (1.3.1)$$

Кроме того, положим, что толщина оболочки также не зависит от гауссовой координаты q^2

$$h = h(q^1). \quad (1.3.2)$$

На деформацию оболочки наложим ограничения, сходные с допущенными выше. Компоненты метрического тензора $G_{\alpha\beta}$ (1.1.4) не зависят от координаты q^2 и образуют диагональную матрицу

$$\frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial q^2} = 0, \quad G_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \quad (1.3.3)$$

Контравариантные компоненты метрических тензоров отсчетной и текущей конфигураций в этом случае выражаются через его ковариантные компоненты соотношениями

$$\begin{aligned} g^{11} &= g_{11}^{-1}, \quad g^{22} = g_{22}^{-1}, \quad g^{12} = g_{12} = 0, \\ G^{11} &= G_{11}^{-1}, \quad G^{22} = G_{22}^{-1}, \quad G^{12} = G_{12} = 0. \end{aligned}$$

При таких предположениях инварианты меры деформации Коши Λ (1.1.20) можно представить в виде

$$I_1 = \frac{G_{11}}{g_{11}} + \frac{G_{22}}{g_{22}} + \frac{g_{11}g_{22}}{G_{11}G_{22}},$$

$$I_2 = \frac{g_{11}}{G_{11}} + \frac{g_{22}}{G_{22}} + \frac{G_{11}G_{22}}{g_{11}g_{22}}.$$
(1.3.4)

Производные инвариантов I_1 и I_2 по компонентам меры деформации G_{11} и G_{22} представляются выражениями

$$\frac{\partial I_1}{\partial G_{11}} = \frac{1}{g_{11}} \left(1 - \frac{g_{22}g_{11}^2}{G_{22}G_{11}^2} \right), \quad \frac{\partial I_2}{\partial G_{11}} = \frac{G_{22}}{g_{11}g_{22}} \left(1 - \frac{g_{22}g_{11}^2}{G_{22}G_{11}^2} \right),$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial G_{22}} = \frac{1}{g_{22}} \left(1 - \frac{g_{11}g_{22}^2}{G_{11}G_{22}^2} \right), \quad \frac{\partial I_2}{\partial G_{22}} = \frac{G_{11}}{g_{11}g_{22}} \left(1 - \frac{g_{11}g_{22}^2}{G_{11}G_{22}^2} \right).$$
(1.3.5)

Подставляя уравнения (1.3.5) в (1.2.20), получим определяющие соотношения в форме

$$L^{11} = \frac{2h}{g_{11}} \sqrt{\frac{g}{G}} \left(1 - \frac{g_{22}g_{11}^2}{G_{22}G_{11}^2} \right) \left(\frac{\partial W^*}{\partial I_1} + \frac{G_{22}}{g_{22}} \frac{\partial W^*}{\partial I_2} \right),$$

$$L^{22} = \frac{2h}{g_{22}} \sqrt{\frac{g}{G}} \left(1 - \frac{g_{11}g_{22}^2}{G_{11}G_{22}^2} \right) \left(\frac{\partial W^*}{\partial I_1} + \frac{G_{11}}{g_{11}} \frac{\partial W^*}{\partial I_2} \right).$$
(1.3.6)

В силу сделанных предположений (1.3.1), (1.3.2) и (1.3.3) компоненты тензора усилий \mathbf{L} (1.3.6) не зависят от координаты q^2 . Это утверждение справедливо и для случая задания удельной потенциальной энергии W^* как функции главных кратностей удлинений (1.2.21), (1.2.22).

Векторы основного базиса в отсчетной и текущей конфигурациях являются функциями двух переменных q^1 и q^2 . В дальнейшем нам потребуются формулы для производных базисных векторов, которые задаются уравнениями

$$\frac{\partial \mathbf{R}_\alpha}{\partial q^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \mathbf{R}_\mu + B_{\alpha\beta} \mathbf{N}.$$
(1.3.7)

Здесь $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ – символ Кристоффеля второго рода, $B_{\alpha\beta}$ – компоненты второго фундаментального тензора \mathbf{B} поверхности O , \mathbf{N} – единичная нормаль к поверхности O . Представленные величины определяются соотношениями

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} G^{\mu\nu} \left(\frac{\partial G_{\alpha\nu}}{\partial q^{\beta}} + \frac{\partial G_{\beta\nu}}{\partial q^{\alpha}} - \frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial q^{\nu}} \right),$$

$$\mathbf{B} = -\nabla N, \quad B_{\alpha\beta} = N \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_{\alpha}}{\partial q^{\beta}}, \quad (1.3.8)$$

$$N = \frac{\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2|}.$$

Величины $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ (1.3.8) при ограничениях (1.3.1), (1.3.3) примут значения

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} G^{11} \frac{\partial G_{11}}{\partial q^1}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} G^{11} \frac{\partial G_{22}}{\partial q^1},$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} G^{22} \frac{\partial G_{22}}{\partial q^1}, \quad \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} G^{22} \frac{\partial G_{22}}{\partial q^1}, \quad (1.3.9)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0.$$

Учитывая определение поверхностного набла-оператора (1.1.5), преобразуем уравнения равновесия (1.1.17) к виду

$$\mathbf{R}^{\gamma} \cdot \frac{\partial L^{\alpha\beta}}{\partial q^{\gamma}} \mathbf{R}_{\alpha} \mathbf{R}_{\beta} + \mathbf{R}^{\gamma} \cdot L^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathbf{R}_{\alpha}}{\partial q^{\gamma}} \mathbf{R}_{\beta} + \mathbf{R}^{\gamma} \cdot L^{\alpha\beta} \mathbf{R}_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{R}_{\beta}}{\partial q^{\gamma}} + \mathbf{q} = 0.$$

Используя выражения производных базисных векторов (1.3.7), получим:

$$\mathbf{R}^{\gamma} \cdot \frac{\partial L^{\alpha\beta}}{\partial q^{\gamma}} \mathbf{R}_{\alpha} \mathbf{R}_{\beta} + \mathbf{R}^{\gamma} \cdot L^{\alpha\beta} \left(\Gamma_{\alpha\gamma}^{\nu} \mathbf{R}_{\nu} + B_{\alpha\gamma} N \right) \mathbf{R}_{\beta} +$$

$$+ \mathbf{R}^{\gamma} \cdot L^{\alpha\beta} \mathbf{R}_{\alpha} \left(\Gamma_{\beta\gamma}^{\nu} \mathbf{R}_{\nu} + B_{\beta\gamma} N \right) + \mathbf{q} = 0.$$

С помощью соотношений (1.1.3), придем к уравнению

$$\frac{\partial L^{\alpha\beta}}{\partial q^{\alpha}} \mathbf{R}_{\beta} + L^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\gamma} \mathbf{R}_{\beta} + L^{\alpha\mu} \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} \mathbf{R}_{\beta} + L^{\alpha\beta} B_{\beta\alpha} N + \mathbf{q} = 0. \quad (1.3.10)$$

Пока не было наложено никаких прямых ограничений на функцию интенсивности внешних сил \mathbf{q} . Представим ее в базисе связанном с деформированной поверхностью:

$$\mathbf{q} = \xi^{\beta} \mathbf{R}_{\beta} + \xi N. \quad (1.3.11)$$

Векторное уравнение (1.3.10) представим в виде трех скалярных уравнений, учитывая разложение (1.3.11) вектора \mathbf{q} и выражения для символов Кристоффеля (1.3.9)

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^1}{\partial q^1} + L^{11}(2\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2) + L^{22}\Gamma_{22}^1 + \xi^1 &= 0, \\ \xi^2 &= 0, \\ L^{11}B_{11} + L^{12}B_{21} + L^{21}B_{12} + L^{22}B_{22} + \xi &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Полученная система уравнений (1.3.12), основанная на допущениях (1.3.1), (1.3.2) и (1.3.3), приводит к ограничению на внешние нагрузки в виде отсутствия компонент направленных вдоль координаты q^2 . Кроме того, в случае, когда компоненты тензора кривизны $B_{\alpha\beta}$ не зависят от координаты q^2 , система уравнений (1.3.12) будет системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Примерами реализации такого случая являются: задача об осесимметричной деформации оболочки вращения, задача о деформации цилиндрической оболочки, для которой напряженно-деформированное состояние не зависит от сечения.

1.4. Численный метод решения краевых задач деформирования безмоментных оболочек.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.3.12) (случай, когда компоненты тензора кривизны не зависят от координаты q^2) вместе с кинематическими граничными условиями (1.1.13) образуют нелинейную краевую задачу. Аналитическое решение краевой задачи нелинейной безмоментной теории оболочек, как правило, построить не удастся. Поэтому при построении решения используются приближенные методы численного интегрирования. В качестве метода решения краевой задачи используется метод пристрелки.

Для простоты изложения численного метода рассмотрим частный вид краевой задачи:

$$\begin{aligned}
 F(q^1, \lambda_1(q^1), \lambda_2(q^1), \omega(q^1)) &= 0, \\
 \lambda_1(x_0) &= a, \quad \omega(x_0) = c, \quad \lambda_2(x_0) = \lambda_2(x_1).
 \end{aligned}
 \tag{1.4.1}$$

Здесь F – нелинейный дифференциальный оператор первого порядка, $\lambda_1(q^1)$, $\lambda_2(q^1)$, $\omega(q^1)$ – искомые неизвестные функции, $[x_0, x_1]$ – область изменения переменной q^1 , a и c – заданные значения неизвестных функций на границе области.

Решение краевой задачи (1.4.1) будет заключаться в отыскании некоторого значения параметра b , для которого решение задачи Коши:

$$\begin{aligned}
 F(q^1, \lambda_1(q^1), \lambda_2(q^1), \omega(q^1)) &= 0, \\
 \lambda_1(x_0) &= a, \quad \omega(x_0) = c, \quad \lambda_2(x_0) = b.
 \end{aligned}
 \tag{1.4.2}$$

приводит к удовлетворению условия

$$\lambda_2^*(b, x_1) = b.
 \tag{1.4.3}$$

Здесь символом « $*$ » обозначено найденное решение задачи Коши (1.4.2).

Решение алгебраического уравнения (1.4.3) можно осуществлять любым из известных численных методов, например, методом половинного деления или методом линейной интерполяции. На каждом из шагов решения уравнения (1.4.3) необходимо интегрировать нелинейную задачу Коши (1.4.2).

Интегрирование системы дифференциальных уравнений (1.4.2) осуществляется конечно-разностным методом. Отрезок $[x_0, x_1]$ разбивается на n отрезков, на каждом из которых решение отыскивается методом Рунге-Кутты с контролем погрешности на шаге.

В рассмотренном выше примере решается задача, в которой необходимо определить всего один параметр пристрелки. Более сложен случай, когда при переходе к задаче Коши таких неизвестных параметров два:

$$\begin{aligned}
 F(q^1, \lambda_1(q^1), \lambda_2(q^1), \omega(q^1)) &= 0, \\
 \lambda_1(x_0) &= \lambda_1(x_1), \quad \lambda_2(x_0) = \lambda_2(x_1), \quad \omega(x_0) = c.
 \end{aligned}
 \tag{1.4.4}$$

В краевой задаче (1.4.4) в качестве граничных условий выступает периодичность функций λ_1 , λ_2 . Решение такой краевой задачи можно свести к

предыдущему случаю, то есть, к отысканию значения параметра a , для которого решение краевой задачи:

$$\begin{aligned} F(q^1, \lambda_1(q^1), \lambda_2(q^1), \omega(q^1)) &= 0, \\ \lambda_1(x_0) &= a, \quad \omega(x_0) = c, \quad \lambda_2(x_0) = \lambda_2(x_1). \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

приводит к выполнению равенства

$$\lambda_1^*(a, x_1) = a. \tag{1.4.6}$$

Здесь символом « $*$ » обозначено найденное решение краевой задачи (1.4.5).

Уравнение (1.4.6) представляет собой нелинейное алгебраическое уравнение, корни которого находятся тем же методом, что и корни уравнения (1.4.3). На каждом шаге поиска решения необходимо интегрировать краевую задачу (1.4.5).

Глава 2. Осесимметричная деформация оболочек вращения.

В этой главе рассматриваются задачи деформирования оболочки вращения с сохранением ее осесимметричности. Этот класс задач наиболее часто встречается в работах по исследованию больших деформаций оболочек: [7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 23, 25, 30, 31, 38, 40, 43, 44, 45, 50, 51, 52, 53, 54, 60, 61, 62, 63, 68, 72, 73, 79, 80, 81, 85, 87, 91, 92, 94].

В первом параграфе из уравнений равновесия выводится разрешающая система уравнений для произвольной оболочки вращения, нагруженной равномерно распределенной нормальной нагрузкой. Уравнения равновесия сводятся к системе нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно функций главных кратностей удлинений и некоторой новой функции координат. Замыкая систему кинематическими граничными условиями, получаем краевую задачу, которая интегрируется численно.

Рассмотрены некоторые частные случаи оболочки вращения: сферическая оболочка, плоская мембрана, тороидальная и круговая цилиндрическая оболочка.

Задача о раздувании замкнутой сферической оболочки может быть решена аналитически, причем как в рамках теории оболочек [10], так и в трехмерной постановке нелинейной теории упругости [21, 22]. Во втором параграфе численное моделирование деформации сферической оболочки будет сравниваться с точными решениями, для проверки приближенного метода решения уравнений равновесия.

В третьем параграфе будет рассмотрена задача о раздувании плоской круглой мембраны. Задача не имеет аналитического решения, но широко представлена в литературе, как теоретическими исследованиями, так и экспериментальными данными: [10, 16, 20, 23, 40, 44, 45, 52, 53, 54, 79, 80, 85, 87, 91] и др.

Исследования тороидальной оболочки встречаются в литературе реже [12, 17, 18, 19, 60, 61, 62, 63, 73]. В четвертом разделе данной главы будет

рассматриваться задача о деформации тороидальной оболочки круглого поперечного сечения.

Задача о больших деформациях цилиндрической оболочки в гипотезах скользящей заделки имеет аналитическое решение в трехмерной постановке [21, 22] и в рамках теории оболочек. Для случая неоднородной деформации в литературе опубликованы некоторые варианты приближенного решения и экспериментальные данные [43, 51, 72]. В пятом параграфе представлены несколько вариантов решения задачи о растяжении тонкостенной трубы из неогуковского материала. Проведено сравнение полученных результатов.

2.1. Уравнения осесимметричной деформации.

Введем цилиндрические координаты r, φ, z так, чтобы ось z совпадала с осью симметрии оболочки, гауссова координата q^2 совпадала с угловой координатой φ . За гауссову координату q^1 примем некоторый параметр, отсчитываемый вдоль меридиана оболочки. Базисные векторы цилиндрических координат выражаются через базис декартовой системы координат следующим образом

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{i}_1 \cos \varphi + \mathbf{i}_2 \sin \varphi, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{i}_1 \sin \varphi + \mathbf{i}_2 \cos \varphi, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{i}_3.$$

В выбранной системе координат положение точки поверхности оболочки вращения до деформации представится в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1) = r(q^1)\mathbf{e}_r + z(q^1)\mathbf{e}_z. \quad (2.1.1)$$

Считаем, что толщина недеформированной оболочки удовлетворяет условию (1.3.2), т. е. не зависит от угловой координаты φ .

Под действием осесимметричной нагрузки оболочка сохранит симметрию. Срединная поверхность после деформации будет задаваться с помощью неизвестных функций $R(q^1)$ и $Z(q^1)$ уравнениями

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(q^1) = R(q^1)\mathbf{e}_r + Z(q^1)\mathbf{e}_z. \quad (2.1.2)$$

Основной и взаимный базисы, связанные со срединной поверхностью до и после деформации (1.1.1), (1.1.3), примут вид

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= r'(q^1)\mathbf{e}_r + z'(q^1)\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{r}_2 = r(q^1)\mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{R}_1 &= R'(q^1)\mathbf{e}_r + Z'(q^1)\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{R}_2 = R(q^1)\mathbf{e}_\varphi. \end{aligned}$$

Вектор нормали к срединной деформированной поверхности (1.3.8) определяется соотношением

$$\mathbf{N} = \frac{R'\mathbf{e}_z - Z'\mathbf{e}_r}{\sqrt{R'^2 + Z'^2}}.$$

Для оболочки вращения компоненты первого фундаментального тензора срединной поверхности до и после деформации (1.1.2), (1.1.4) выражаются по формулам

$$\begin{aligned} g_{11} &= r'^2 + z'^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = r^2, \\ G_{11} &= R'^2 + Z'^2, \quad G_{12} = 0, \quad G_{22} = R^2. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Таким образом, требования (1.3.1) и (1.3.3) удовлетворяются.

Представим первое уравнение системы (1.3.12) относительно функций главных кратностей удлинений λ_1, λ_2 . По определению (1.2.19) с учетом (1.3.1) и (1.3.3) они являются функциями только переменной q^1 .

В случае задания удельной потенциальной энергии W^* как функции λ_1, λ_2 (1.2.1), производная L^{11} (1.2.22) по переменной q^1 представится в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^{11}}{\partial q^1} &= \frac{1}{g_{11}\lambda_1^2\lambda_2} \frac{\partial h}{\partial q^1} \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_1} - \frac{h}{g_{11}^2\lambda_1^2\lambda_2} \frac{\partial g_{11}}{\partial q^1} \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_1} + \\ &+ \frac{h}{g_{11}\lambda_1^2\lambda_2} \left(\frac{\partial^2 W^*}{\partial \lambda_1^2} - \frac{2}{\lambda_1} \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_1} \right) \frac{\partial \lambda_1}{\partial q^1} + \frac{h}{g_{11}\lambda_1^2\lambda_2} \left(\frac{\partial^2 W^*}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} - \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_1} \right) \frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1}. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Символы Кристоффеля (1.3.9) выразятся через главные кратности удлинений (1.2.21) с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial q^1} + \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial q^1}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{g_{22}\lambda_2}{g_{11}\lambda_1^2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} - \frac{\lambda_2^2}{2g_{11}\lambda_1^2} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} + \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Подставив выражения (2.1.4) и (2.1.5) в первое уравнение системы (1.3.12), получим следующее выражение

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{g_{11}\lambda_1^2\lambda_2} \frac{\partial h}{\partial q^1} \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_1} - \frac{h}{g_{11}^2\lambda_1^2\lambda_2} \frac{\partial g_{11}}{\partial q^1} \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_1} + \\
& + \frac{h}{g_{11}\lambda_1^2\lambda_2} \left(\frac{\partial^2 W^*}{\partial \lambda_1^2} - \frac{2}{\lambda_1} \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_1} \right) \frac{\partial \lambda_1}{\partial q^1} + \\
& + \frac{h}{g_{11}\lambda_1^2\lambda_2} \left(\frac{\partial^2 W^*}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} - \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_1} \right) \frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} + \\
& + \frac{h}{g_{11}\lambda_1^2\lambda_2} \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_1} \left(2 \left(\frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial q^1} + \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial q^1} \right) + \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} + \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1} \right) + \\
& + \frac{h}{g_{22}\lambda_1\lambda_2^2} \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_2} \left(-\frac{g_{22}\lambda_2}{g_{11}\lambda_1^2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} - \frac{\lambda_2^2}{2g_{11}\lambda_1^2} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1} \right) + \xi^1 = 0.
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Уравнение (2.1.6) представим в виде

$$F_1^\lambda \frac{\partial \lambda_1}{\partial q^1} + F_2^\lambda \frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} + F_3^\lambda + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial q^1} F_4^\lambda + \frac{\xi^1}{h} F_5^\lambda = 0. \tag{2.1.7}$$

Здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned}
F_1^\lambda &= \frac{\partial^2 W^*}{\partial \lambda_1^2}, \quad F_2^\lambda = \frac{\partial^2 W^*}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_2}, \\
F_3^\lambda &= \frac{1}{2g_{22}} \left(\frac{\partial W^*}{\partial \lambda_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_2} \right) \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1}, \\
F_4^\lambda &= \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_1}, \quad F_5^\lambda = g_{11}\lambda_1^2\lambda_2.
\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Если функция энергии W^* (1.2.1) зависит от инвариантов I_1, I_2 меры деформации Коши $\mathbf{\Lambda}$, то выражение для производной L^{11} компоненты тензора усилий \mathbf{L} получим из уравнения (1.3.6). Введем обозначения

$$P_1 = 1 - \frac{1}{\lambda_1^4 \lambda_2^2}, \quad Q_1 = \frac{\partial W^*}{\partial I_1} + \lambda_2^2 \frac{\partial W^*}{\partial I_2}, \tag{2.1.9}$$

$$P_2 = 1 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^4}, \quad Q_2 = \frac{\partial W^*}{\partial I_1} + \lambda_1^2 \frac{\partial W^*}{\partial I_2}.$$

Тогда компоненты тензора усилий выразятся соотношениями

$$L^{11} = \frac{2h}{g_{11} \lambda_1 \lambda_2} P_1 Q_1, \quad L^{22} = \frac{2h}{g_{22} \lambda_1 \lambda_2} P_2 Q_2. \quad (2.1.10)$$

Откуда выражение для производной компоненты L^{11} по координате q^1 примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^{11}}{\partial q^1} = & \frac{2}{g_{11} \lambda_1 \lambda_2} \frac{\partial h}{\partial q^1} P_1 Q_1 - \frac{2h}{g_{11}^2 \lambda_1 \lambda_2} \frac{\partial g_{11}}{\partial q^1} P_1 Q_1 - \\ & - \frac{2h}{g_{11} \lambda_1^2 \lambda_2^2} \left(\lambda_2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial q^1} + \lambda_1 \frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} \right) P_1 Q_1 + \frac{2h}{g_{11} \lambda_1 \lambda_2} \frac{\partial P_1}{\partial q^1} Q_1 + \frac{2h}{g_{11} \lambda_1 \lambda_2} P_1 \frac{\partial Q_1}{\partial q^1}. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Из уравнения (2.1.9), используя соотношения (1.3.3), (1.3.4) и учитывая (1.2.21), получим выражения для производных от величин P_1 и Q_1 в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial q^1} = & \frac{4}{\lambda_1^5 \lambda_2^2} \frac{\partial \lambda_1}{\partial q^1} + \frac{2}{\lambda_1^4 \lambda_2^3} \frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1}, \\ \frac{\partial Q_1}{\partial q^1} = & 2\lambda_1 P_1 Q_3 \frac{\partial \lambda_1}{\partial q^1} + 2\lambda_2 P_2 Q_4 \frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} + 2\lambda_2 \frac{\partial W^*}{\partial I_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1}. \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Здесь используются обозначения

$$\begin{aligned} Q_3 = & \frac{\partial^2 W^*}{\partial I_1^2} + 2\lambda_2^2 \frac{\partial^2 W^*}{\partial I_1 \partial I_2} + \lambda_2^4 \frac{\partial^2 W^*}{\partial I_2^2}, \\ Q_4 = & \frac{\partial^2 W^*}{\partial I_1^2} + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \frac{\partial^2 W^*}{\partial I_1 \partial I_2} + \lambda_1^2 \lambda_2^2 \frac{\partial^2 W^*}{\partial I_2^2}. \end{aligned}$$

Подставив соотношения (2.1.5), (2.1.11) и (2.1.12) в первое уравнение системы (1.3.12) получим

$$\begin{aligned}
& \left(P_1 Q_1 + \frac{4Q_1}{\lambda_1^4 \lambda_2^2} + 2\lambda_1^2 P_1^2 Q_3 \right) \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial q^1} + \\
& + \left(\frac{2Q_1}{\lambda_1^4 \lambda_2^2} + 2\lambda_2^2 P_1 \left(P_2 Q_4 + \frac{\partial W^*}{\partial I_2} \right) - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} P_2 Q_2 \right) \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} + \\
& + \frac{\lambda_1}{2g_{22}} \left(P_1 Q_1 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} P_2 Q_2 \right) \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1} + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial q^1} P_1 Q_1 + \frac{\xi^1}{h} \frac{1}{2} g_{11} \lambda_1 \lambda_2 = 0.
\end{aligned} \tag{2.1.13}$$

Или введя обозначения

$$\begin{aligned}
F_1^I &= \left(P_1 Q_1 + \frac{4Q_1}{\lambda_1^4 \lambda_2^2} + 2\lambda_1^2 P_1^2 Q_3 \right) \frac{1}{\lambda_1}, \\
F_2^I &= \left(\frac{2Q_1}{\lambda_1^4 \lambda_2^2} + 2\lambda_2^2 P_1 \left(P_2 Q_4 + \frac{\partial W^*}{\partial I_2} \right) - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} P_2 Q_2 \right) \frac{1}{\lambda_2}, \\
F_3^I &= \frac{\lambda_1}{2g_{22}} \left(P_1 Q_1 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} P_2 Q_2 \right) \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1}, \\
F_4^I &= P_1 Q_1, \quad F_5^I = \frac{1}{2} g_{11} \lambda_1 \lambda_2.
\end{aligned} \tag{2.1.14}$$

уравнение (2.1.13) представим в виде

$$F_1^I \frac{\partial \lambda_1}{\partial q^1} + F_2^I \frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} + F_3^I + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial q^1} F_4^I + \frac{\xi^1}{h} F_5^I = 0. \tag{2.1.15}$$

Компоненты тензора кривизны поверхности **B** (1.3.8) задаются в форме

$$B_{11} = \frac{R'Z'' - Z'R''}{\sqrt{R'^2 + Z'^2}}, \quad B_{12} = 0, \quad B_{22} = \frac{RZ'}{\sqrt{R'^2 + Z'^2}}. \tag{2.1.16}$$

Очевидно, что компоненты тензора кривизны (2.1.16) не зависят от гауссовой координаты q^2 , таким образом, система уравнений (1.3.12) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Введем в рассмотрение функции

$$\omega(q^1) = \frac{Z'(q^1)}{R'(q^1)}, \quad \Omega(q^1) = \frac{R'(q^1)}{Z'(q^1)} = \frac{1}{\omega(q^1)}. \tag{2.1.17}$$

Полагаем, что функции $R'(q^1)$ и $Z'(q^1)$ не обращаются в ноль одновременно. Для простоты в дальнейших выкладках будем пользоваться только функцией $\omega(q^1)$.

Главные кратности удлинений (1.2.21), учитывая выражения для компонент метрических тензоров поверхности в отсчетной и текущей конфигурациях (2.1.3) для случая осесимметричной деформации, примут вид

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{R'^2 + Z'^2}{r'^2 + z'^2}}, \quad \lambda_2 = \frac{R}{r}. \quad (2.1.18)$$

Компоненты кривизны (2.1.16) с учетом соотношений (2.1.17), (2.1.18) и (2.1.3) можно представить в форме

$$B_{11} = \frac{\partial \omega}{\partial q^1} \left(\sqrt{g_{22}} \frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} + \frac{\lambda_2}{2\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{g_{11}} \lambda_1}, \quad (2.1.19)$$

$$B_{22} = \left(\sqrt{g_{22}} \frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} + \frac{\lambda_2}{2\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1} \right) \frac{\sqrt{g_{22}} \lambda_2 \omega}{\sqrt{g_{11}} \lambda_1}.$$

Третье уравнение системы (1.3.12) с помощью соотношений (1.2.22) и (2.1.19), преобразуем к системе уравнений относительно функций главных кратностей удлинений λ_1, λ_2 и функции ω

$$E_1^\lambda \frac{\partial \omega}{\partial q^1} + E_2^\lambda \omega + \frac{\xi}{h} E_3^\lambda = 0. \quad (2.1.20)$$

Здесь использованы обозначения

$$E_1^\lambda = \frac{1}{\sqrt{g_{11}} \lambda_1} \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_1} \left(\sqrt{g_{22}} \frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} + \frac{\lambda_2}{2\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1} \right)^2,$$

$$E_2^\lambda = \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_2} \left(\sqrt{g_{22}} \frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} + \frac{\lambda_2}{2\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1} \right), \quad (2.1.21)$$

$$E_3^\lambda = g_{11} \lambda_1^2 \lambda_2.$$

В случае задания определяющих соотношений в виде (1.3.6), дифференцируя потенциальную энергию $W^*(I_1(\lambda_1, \lambda_2), I_2(\lambda_1, \lambda_2))$ как сложную функцию, уравнение (2.1.20), (2.1.21) можно представить в виде

$$E_1^I \frac{\partial \omega}{\partial q^1} + E_2^I \omega + \frac{\xi}{h} E_3^I = 0, \quad (2.1.22)$$

где

$$E_1^I = P_1 Q_1 \left(2g_{22} \frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} + \lambda_2 \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1} \right)^2,$$

$$E_2^I = 2g_{11} \lambda_2 P_2 Q_2 \left(2g_{22} \frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} + \lambda_2 \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1} \right),$$

$$E_3^I = 2\sqrt{g_{11}^3} g_{22} \lambda_1^2 \lambda_2.$$

Функции λ_1 , λ_2 и ω не являются полностью независимыми между собой. Из соотношений (2.1.17) и (2.1.18) можно получить следующую дифференциальную зависимость

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} = s \lambda_1 \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}(1+\omega^2)}} - \frac{\lambda_2}{2\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1}, \quad s = \text{sgn}(R'(q^1)).$$

Таким образом, система уравнений (1.3.12) преобразуется к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно трех неизвестных функций λ_1 , λ_2 , ω и представляется в виде

$$F_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial q^1} + F_2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} + F_3 + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial q^1} F_4 + \frac{\xi^1}{h} F_5 = 0,$$

$$E_1 \frac{\partial \omega}{\partial q^1} + E_2 \omega + \frac{\xi}{h} E_3 = 0, \quad (2.1.23)$$

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} = s \lambda_1 \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}(1+\omega^2)}} - \frac{\lambda_2}{2\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1}.$$

Слагаемые F_k и E_l задаются соотношениями (2.1.7), (2.1.20) в случае задания потенциальной энергии деформации W^* как функции главных кратностей удлинений λ_1 , λ_2 или определяются из (2.1.15), (2.1.22), если функция энергии зависит от инвариантов I_1 , I_2 тензора меры деформации Λ .

Система (1.3.12) относительно функций $R(q^1)$ и $Z(q^1)$ (2.1.2), является системой дифференциальных уравнений второго порядка. Можно показать, что

функция $Z(q^1)$ входит в уравнения только своими производными, поэтому в большинстве случаев решение может быть определено до произвольного жесткого смещения по оси z . Решение системы уравнений (2.1.23) полностью определяется заданием граничных условий. Но переход от функций $\lambda_1(q^1)$, $\lambda_2(q^1)$ и $\omega(q^1)$ к функциям $R(q^1)$ и $Z(q^1)$ задает функцию $Z(q^1)$ с точностью до произвольной постоянной, соответствующей жесткому смещению. В некоторых случаях из условий задачи можно наложить ограничения на функцию $Z(q^1)$ для ее однозначного определения.

Решение исходной задачи о деформации высокоэластичной оболочки происходит в два этапа. Сначала интегрируется дифференциальная система (2.1.23), затем с помощью соотношений (2.1.17) и (2.1.18) находятся функции $R(q^1)$ и $Z(q^1)$.

2.2. Раздувание замкнутой сферической оболочки.

Сферическую оболочку постоянной толщины можно рассматривать как оболочку вращения относительно любой оси, проходящей через ее центр. За гауссову координату q^1 примем угол θ , начальный радиус оболочки через r_0 . В отсчетной конфигурации положение точки оболочки задается уравнениями (2.1.1), где функции формы $r(\theta)$ и $z(\theta)$ задаются соотношениями

$$r = r_0 \sin \theta, \quad z = r_0 \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Внешняя нагрузка (1.3.11), соответствующая равномерно распределенному нормальному давлению интенсивности p , задается с помощью уравнений

$$\xi = p, \quad \xi^1 = \xi^2 = 0. \quad (2.2.1)$$

Граничными условиями будет неразрывность решения в точках $\theta = 0$ и $\theta = \pi$:

$$\begin{aligned} R(0) &= 0, \quad Z'(0) = 0, \\ R(\pi) &= 0, \quad Z'(\pi) = 0. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

При переходе к функциям λ_1 , λ_2 и ω граничные условия (2.2.2) с помощью некоторого параметра $a = R'(0)/r_0$ выразятся соотношениями

$$\begin{aligned} \lambda_1(0) &= a, & \lambda_2(0) &= a, & \omega(0) &= 0, \\ \lambda_1(\pi) &= a, & \lambda_2(\pi) &= a, & \omega(\pi) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Система уравнений (2.1.23) с граничными условиями (2.2.3) и заданных нагрузкой (2.2.1) и функцией потенциальной энергии W^* образует краевую задачу, которая решается численным методом пристрелки.

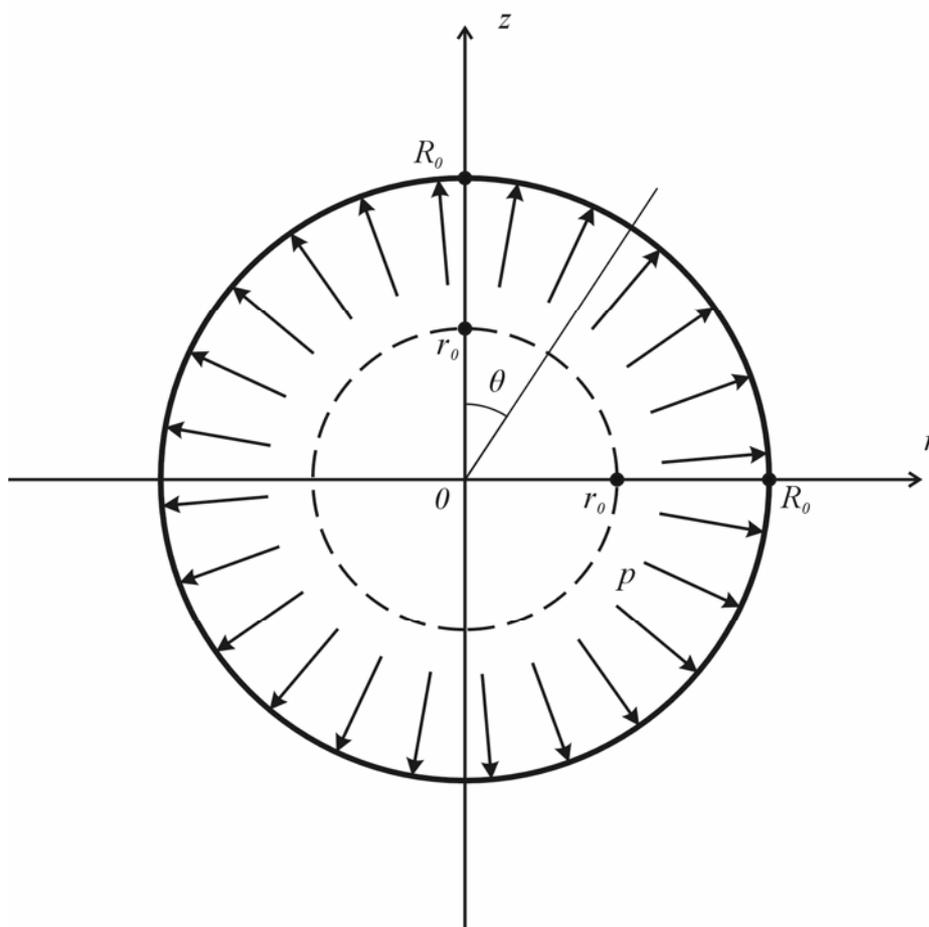


Рис. 2.2.1. Раздувание замкнутой сферической оболочки.

Аналитическое решение теории оболочек [10]

Рассмотрим сферическую оболочку радиуса r_0 и постоянной толщины h , нагруженную внутренним давлением интенсивности p . За гауссовы координаты

примем координаты $q^1 = \theta$, $q^2 = \lambda$. В силу симметрии положение точки на поверхности задается только величиной радиуса оболочки:

$$\mathbf{r} = r_0 \mathbf{e}_r.$$

При равномерно распределенной нормальной нагрузке оболочка сохраняет свою симметрию в процессе деформации, и единственной характеристикой деформации будет радиус оболочки R_0 в текущей конфигурации

$$\mathbf{R} = R_0 \mathbf{e}_r.$$

Векторы основного базиса в отсчетной и текущей конфигурациях и вектор нормали к деформированной поверхности выразятся уравнениями

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= r_0 \mathbf{e}_\theta, & \mathbf{r}_2 &= r_0 \sin \theta \mathbf{e}_\lambda, \\ \mathbf{R}_1 &= R_0 \mathbf{e}_\theta, & \mathbf{R}_2 &= R_0 \sin \theta \mathbf{e}_\lambda, \\ \mathbf{N} &= \mathbf{e}_r. \end{aligned}$$

Компоненты фундаментальных тензоров начальной и деформированной поверхности примут вид

$$\begin{aligned} g_{11} &= r_0^2, & g_{12} &= 0, & g_{22} &= r_0^2 \sin^2 \theta, \\ G_{11} &= R_0^2, & G_{12} &= 0, & G_{22} &= R_0^2 \sin^2 \theta, \\ B_{11} &= -R_0, & B_{12} &= 0, & B_{22} &= -R_0 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Из соотношений (2.2.4) видно, что выполняются условия (1.3.1), (1.3.3) и главные кратности удлинений (1.2.21) равны между собой. Внешняя нагрузка задается уравнениями (2.2.1). Система уравнений (1.3.12) сводится к одному уравнению

$$\frac{2h}{r_0 \lambda_1^2} \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_1} = p. \quad (2.2.5)$$

Если потенциальная энергия W^* задана как функция инвариантов меры деформации, уравнение (2.2.5) представится в форме [10]

$$\frac{4h}{R_0} \left(1 - \frac{r_0^6}{R_0^6} \right) \left(\frac{\partial W^*}{\partial I_1} + \frac{R_0^2}{r_0^2} \frac{\partial W^*}{\partial I_2} \right) = p.$$

Задача Ляме для шара [21, 22].

Рассмотрим деформацию полого шара толщины h , нагруженного равномерно распределенными нормальными нагрузками интенсивностей p_1 и p_2 на внутренней и внешней поверхностях. За материальные координаты точки начального объема примем сферические координаты $q^1 = r$, $q^2 = \theta$, $q^3 = \lambda$. Предполагаем, что деформация происходит с сохранением симметрии, тогда деформированное состояние может быть задано в той же сферической системе величинами

$$R = R(r), \quad \theta = \theta, \quad \lambda = \lambda, \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad r_1 = r_0 - \frac{h}{2}, \quad r_2 = r_0 + \frac{h}{2},$$

где r_0 – средний радиус.

Радиус-векторы точки сферы в отсчетной и текущей конфигурациях представляются в виде

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{R} = R(r)\mathbf{e}_r.$$

Векторы базиса недеформированной и деформированной среды выразятся уравнениями

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{r}_2 = r\mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{r}_3 = r \sin \theta \mathbf{e}_\lambda.$$

$$\mathbf{R}_1 = R'\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{R}_2 = R\mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{R}_3 = R \sin \theta \mathbf{e}_\lambda.$$

Коэффициенты квадратичных форм отсчетной и текущей конфигурации задаются соотношениями

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta, \quad g_{ij} = 0 \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, 3),$$

$$G_{11} = R'^2, \quad G_{22} = R^2, \quad G_{33} = R^2 \sin^2 \theta, \quad G_{ij} = 0 \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, 3).$$

Мера деформации Коши и ее инварианты примут вид

$$\mathbf{\Lambda} = R'^2 \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{R^2}{r^2} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta + \frac{R^2}{r^2} \mathbf{e}_\lambda \mathbf{e}_\lambda,$$

$$I_1 = R'^2 + 2\frac{R^2}{r^2}, \quad I_2 = 2R'^2\frac{R^2}{r^2} + \frac{R^4}{r^4}, \quad I_3 = R'^2\frac{R^4}{r^4}.$$

В случае несжимаемого материала выполняется равенство $I_3 = 1$ и справедливо уравнение

$$R' = \frac{r^2}{R^2}, \quad (2.2.6)$$

откуда можно получить выражение для функции $R(r)$

$$R^3 = R_2^3 + (r^3 - r_2^3), \quad R_2 = R(r_2). \quad (2.2.7)$$

Тензор напряжений Коши для несжимаемого материала можно представить в виде

$$\mathbf{T} = 2\left(\frac{\partial W^*}{\partial I_1}\boldsymbol{\lambda}^{-1} - \frac{\partial W^*}{\partial I_2}\boldsymbol{\lambda}\right) - P\mathbf{E}.$$

Здесь $W^* = W^*(I_1, I_2)$ – функция потенциальной энергии деформации, P – функция гидростатического давления. Мера деформации Фингера $\boldsymbol{\lambda}^{-1}$ и мера деформации Альманзи $\boldsymbol{\lambda}$ задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}^{-1} &= R'^2\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + \frac{R^2}{r^2}\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\theta + \frac{R^2}{r^2}\mathbf{e}_\lambda\mathbf{e}_\lambda, \\ \boldsymbol{\lambda} &= \frac{1}{R'^2}\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + \frac{r^2}{R^2}\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\theta + \frac{r^2}{R^2}\mathbf{e}_\lambda\mathbf{e}_\lambda. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Введем в рассмотрение тензор \mathbf{T}^* такой, что справедливо выражение

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^* - P\mathbf{E}.$$

С учетом уравнения (2.2.6) и (2.2.8), компоненты тензора напряжений \mathbf{T}^* выразятся соотношениями

$$T_{rr}^* = 2\left(\frac{\partial W^*}{\partial I_1}\frac{r^4}{R^4} - \frac{\partial W^*}{\partial I_2}\frac{R^4}{r^4}\right),$$

$$T_{\theta\theta}^* = 2 \left(\frac{\partial W^*}{\partial I_1} \frac{R^2}{r^2} - \frac{\partial W^*}{\partial I_2} \frac{r^2}{R^2} \right),$$

$$T_{\lambda\lambda}^* = 2 \left(\frac{\partial W^*}{\partial I_1} \frac{R^2}{r^2} - \frac{\partial W^*}{\partial I_2} \frac{r^2}{R^2} \right).$$

Из уравнений равновесия [21, 22] получим систему уравнений

$$\frac{1}{R'} \frac{\partial T_{rr}^*}{\partial r} + 2 \frac{T_{rr}^* - T_{\theta\theta}^*}{R} - \frac{1}{R'} \frac{\partial P}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0,$$

$$\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \lambda} = 0.$$

Следствием уравнений равновесия является независимость функции гидростатического давления P от координат θ и λ . Из первого уравнения равновесия получим уравнение для нахождения неизвестной функции $P(r)$:

$$P(r) = P_0 + T_{rr}^* + 2 \int \frac{R'}{R} (T_{rr}^* - T_{\theta\theta}^*) dr. \quad (2.2.9)$$

Здесь P_0 – постоянная интегрирования.

Введем в рассмотрение функцию

$$u(r) = \frac{r}{R(r)}.$$

Преобразуем подинтегральное выражение (2.2.9):

$$\frac{R'}{R} dr = \frac{r^2}{R^3} dr = u^3 \frac{dr}{r},$$

$$dr = d(Ru) = uR' dr + Rdu = u^3 dr + \frac{r}{u} du = u^3 dr + \frac{r}{u} du.$$

Откуда получим следующее соотношение

$$\frac{dr}{r} = \frac{u^2}{(1-u^3)} du.$$

Теперь уравнение для функции гидростатического давления можно представить следующим образом

$$P(u) = P_0 + T_{rr}^*(u) + 2 \int \frac{(T_{rr}^*(u) - T_{\theta\theta}^*(u))u^2}{(u^3 - 1)} du. \quad (2.2.10)$$

Рассмотрим случай, когда потенциальная энергия деформации задается потенциалом Муни (1.2.3). Интегрируя уравнение (2.2.10) и возвращаясь к исходным обозначениям, получим выражение для функции гидростатического давления $P(r)$ в явном виде

$$P(r) = P_0 + c_1 \left(\frac{r^4}{R^4} - 4 \frac{r}{R} \right) + c_2 \left(4 \frac{R}{r} - 2 \frac{r^2}{R^2} - 2 \frac{R^4}{r^4} \right),$$

$$R^3 = R_2^3 + (r^3 - r_2^3).$$

Уравнение содержит две неизвестные постоянные P_0 и R_2 , которые определяются из граничных условий:

$$T_{rr}(r_1) = -p_1, \quad T_{rr}(r_2) = -p_2, \quad (2.2.11)$$

где p_1 и p_2 – интенсивности давлений на внутренней и внешней поверхностях сферы.

Рассмотрим случай, когда отсутствует внешнее давление:

$$p_1 = p, \quad p_2 = 0.$$

Из второго граничного условия (2.2.11) получим выражение постоянной интегрирования P_0 через значение внешнего радиуса деформированной сферы R_2 в виде

$$P_0 = c_1 \left(\frac{r_2^4}{R_2^4} + 4 \frac{r_2}{R_2} \right) + c_2 \left(2 \frac{r_2^2}{R_2^2} - 4 \frac{R_2}{r_2} \right). \quad (2.2.12)$$

Подставляя (2.2.12) в первое граничное условие (2.2.11) получим нелинейное уравнение, связывающее неизвестную постоянную R_2 с величиной внутреннего давления p

$$c_1 \left(\left(\frac{r_1^4}{R_1^4} - \frac{r_2^4}{R_2^4} \right) + 4 \left(\frac{r_1}{R_1} - \frac{r_2}{R_2} \right) \right) + c_2 \left(2 \left(\frac{r_1^2}{R_1^2} - \frac{r_2^2}{R_2^2} \right) - 4 \left(\frac{R_1}{r_1} - \frac{R_2}{r_2} \right) \right) = -p, \quad (2.2.13)$$

$$R_1 = \sqrt[3]{R_2^3 + (r_1^3 - r_2^3)}.$$

Решение уравнения (2.2.13) позволяет из уравнения (2.2.7) получить зависимость деформации срединной поверхности $R_0 = R(r_0)$ от интенсивности давления p :

$$R_0 = \sqrt[3]{R_2^3 + (r_0^3 - r_2^3)}.$$

Результаты

Раздувание шара – одна из немногих задач нелинейной теории упругости, имеющая аналитическое решение. Это позволяет оценить точность численного метода решения системы дифференциальных уравнений (2.1.23).

Таблица 2.2.1. Сравнение результатов численного и аналитического исследования деформации сферической оболочки.

$R=R_0/r_0$	q расчет	q теория оболочек	q теория упругости
1.010895564	0.300000	0.300000	0.300000
1.018746770	0.500000	0.500000	0.500001
1.040923192	1.000000	1.000000	1.000000
1.067992000	1.500000	1.499999	1.500001
1.102602281	2.000000	2.000000	2.000001
1.150373456	2.500000	2.500000	2.500000
1.227291251	3.000000	3.000000	3.000000
1.314125364	3.300000	3.299999	3.300001
1.454021888	3.500000	3.499999	3.500000
1.571088888	3.550000	3.550000	3.549999
2.247551920	3.550000	3.550000	3.550000
2.570524175	3.600000	3.600000	3.600000
2.920337021	3.700000	3.699999	3.699999
3.184410250	3.800000	3.800000	3.799999
3.621618100	4.000000	3.999999	4.000000
4.519292431	4.500000	4.500000	4.500001
5.308370750	5.000000	5.000000	5.000001

Результаты представлены для потенциала Муни (1.2.3) с заданными константами материала $c_1 = 1$, $c_2 = 0.2$. На рисунке 2.2.2 представлена

зависимость радиуса срединной поверхности деформированной сферической оболочки отнесенного к начальному радиусу $R=R_0/r_0$ от величины обезразмеренного внутреннего давления $q = pr_0/c_1/h$. Сплошной линией на рисунке представлены аналитические решения задачи. Точками обозначены результаты решения задачи о раздувании сферы как оболочки вращения, полученные численным методом. Эта же зависимость представлена в таблице 2.2.1. Как видно из графика и таблицы все три решения полностью совпадают.

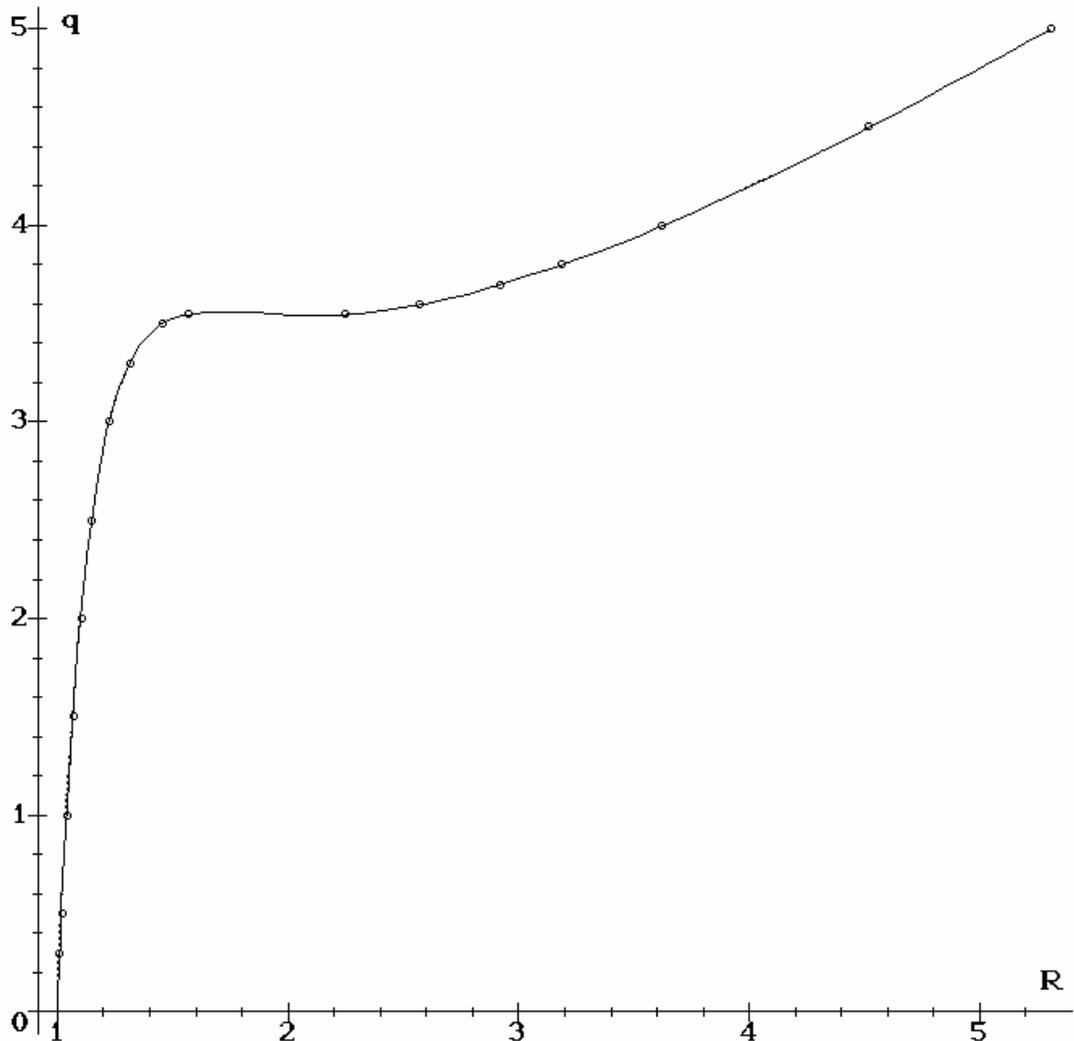


Рис. 2.2.2. Зависимость давления от радиуса деформированной сферической оболочки.

2.3. Нагружение плоской мембраны гидростатическим давлением.

Рассмотрим задачу о нагружении нормальным давлением плоской круглой мембраны, закрепленной по контуру. Положение точки оболочки (2.1.1) определяется с помощью функций формы мембраны, представляющихся в виде

$$r(q^1) = q^1, \quad z(q^1) = 0, \quad 0 \leq q^1 \leq r_0.$$

Внешняя нагрузка (1.3.11), соответствующая равномерно распределенному нормальному давлению интенсивности p , задается с помощью уравнений

$$\xi = p, \quad \xi^1 = \xi^2 = 0.$$

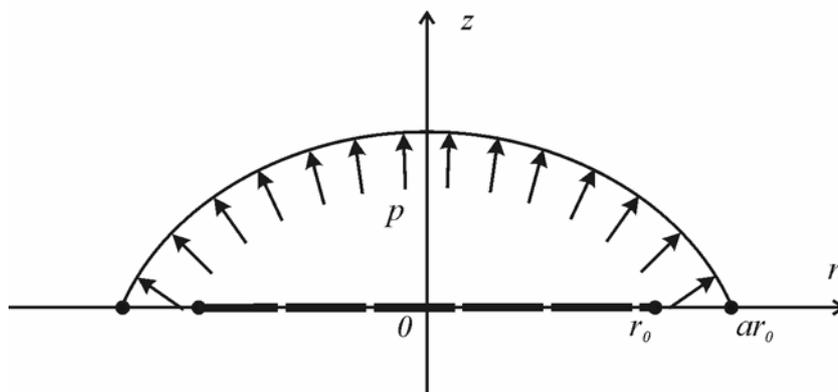


Рис. 2.3.1. Плоская круглая мембрана.

Граничные условия: закрепление мембраны по краю, непрерывность и гладкость решения в центре, задаются в форме

$$R(r_0) = ar_0, \quad Z(r_0) = 0,$$

$$R(0) = 0, \quad Z'(0) = 0.$$

Здесь $a = const$ – коэффициент растяжения края мембраны.

В терминах функций λ_1 , λ_2 и ω граничные условия примут вид:

$$\lambda_1(0) = \lambda_2(0), \quad \omega(0) = 0, \quad \lambda_2(r_0) = a.$$

Результаты

На рисунке 2.3.2 представлена зависимость прогиба в центре мембраны от величины внешнего давления. Рассмотрены материал Муни (1.2.3) и биологический материал Фына (1.2.17) (величины констант материала даны в таблице 2.3.1). Параметры мембраны: $r_0 = 1$, $a = 1$, $h = 0.001$. По вертикальной оси отложено обезразмеренное давление $q = pr_0/\mu h$, по горизонтальной оси – обезразмеренный прогиб $w = z(0)/r_0$.

Таблица 2.3.1. Постоянные материалов, представленных на графиках и таблицах.

материал	№ графика	μ	β (b)
Муни (1.2.3)	1	2	1.00
	2	2	0.95
	3	2	0.75
	4	2	0.50
	5	2	0.35
	6	2	0.00
Фына (1.2.17)	7	2	0.10
	8	2	0.25
	9	2	0.50
	10	2	1.00
	11	2	1.50

Максимальное утончение мембраны будет происходить в ее центре. На рисунке 2.3.3 изображена зависимость между безразмерным давлением q и деформированной толщиной мембраны в центре, обезразмеренной относительно ее начальной толщины $N = H(0)/h$.

Максимальное напряжение, так же как и минимальная толщина деформированной мембраны, будет находиться в её центре. Обе компоненты напряжения равны между собой, их зависимость от давления приведена на рисунке 2.3.4. По вертикальной оси отложено безразмерное давление q ,

горизонтальная ось соответствует напряжению $L = L^{11}r_0/\mu/h = L^{22}r_0/\mu/h$ в центре мембраны.

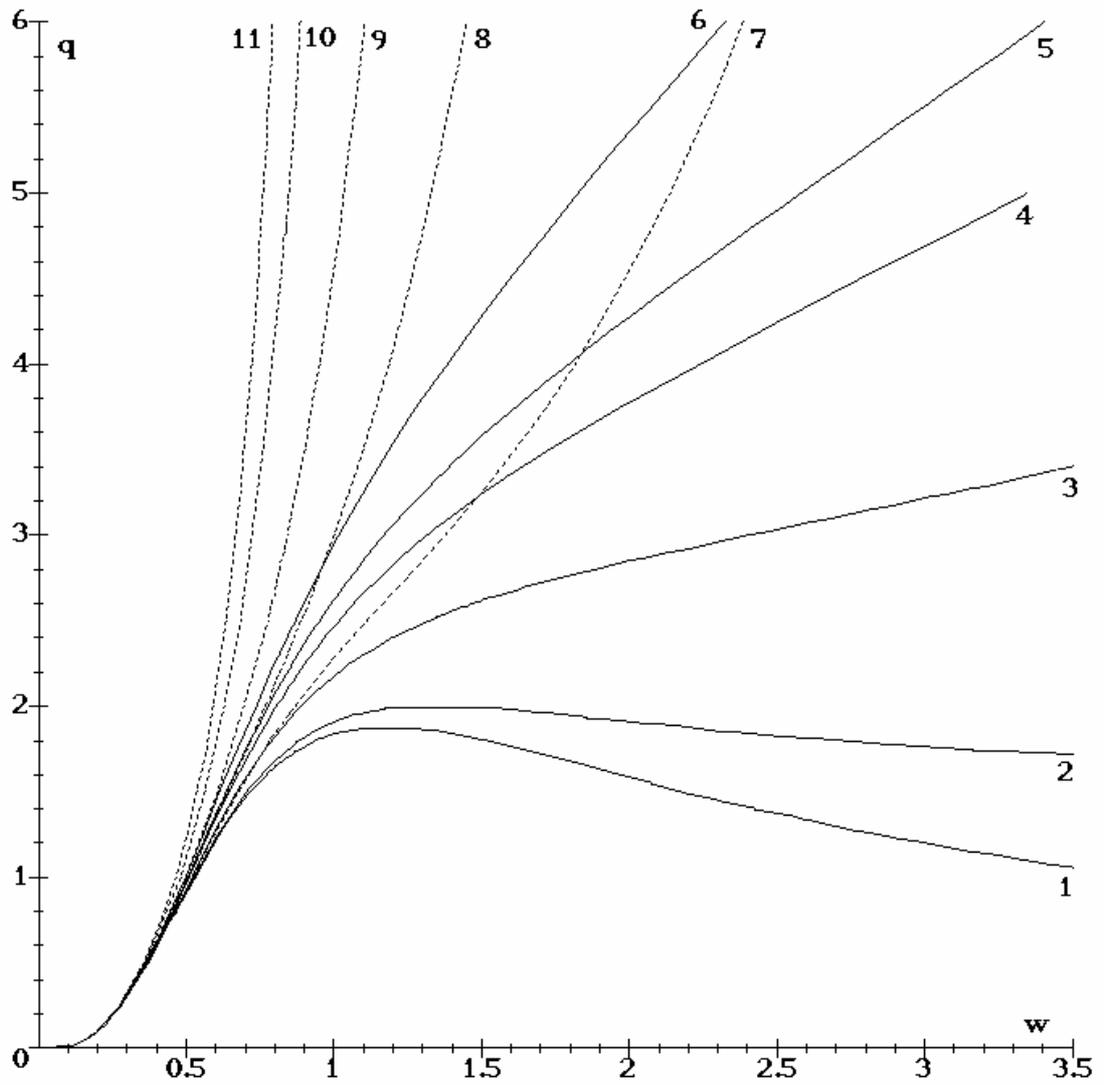


Рис. 2.3.2. Зависимость прогиба в центре мембраны ($w=z(0)/r_0$) от давления ($q=pr_0/\mu/h$).

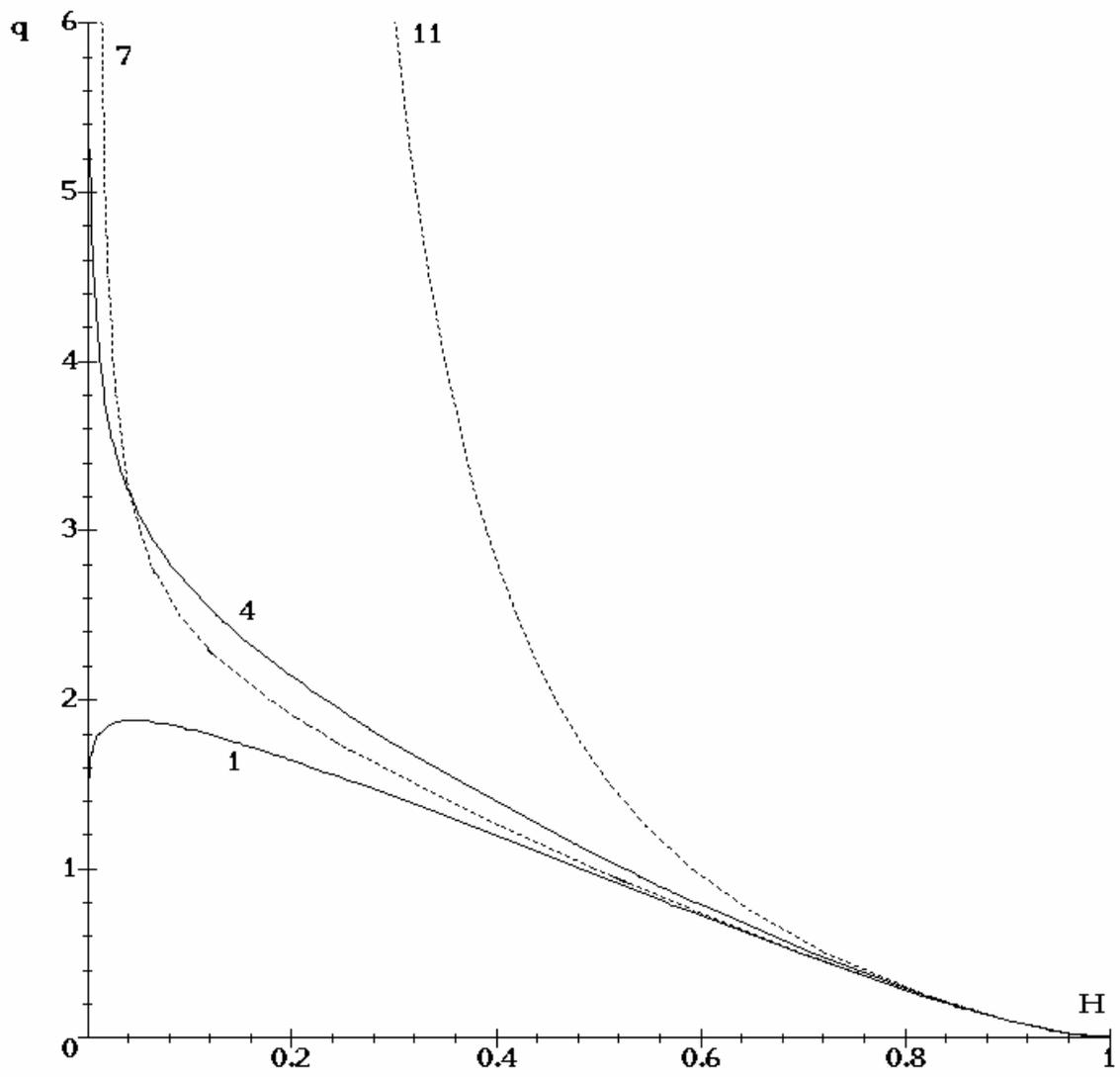


Рис. 2.3.3. Зависимость толщины мембраны в её центре ($H=H(0)/h$) от давления ($q=pr_0/\mu/h$).

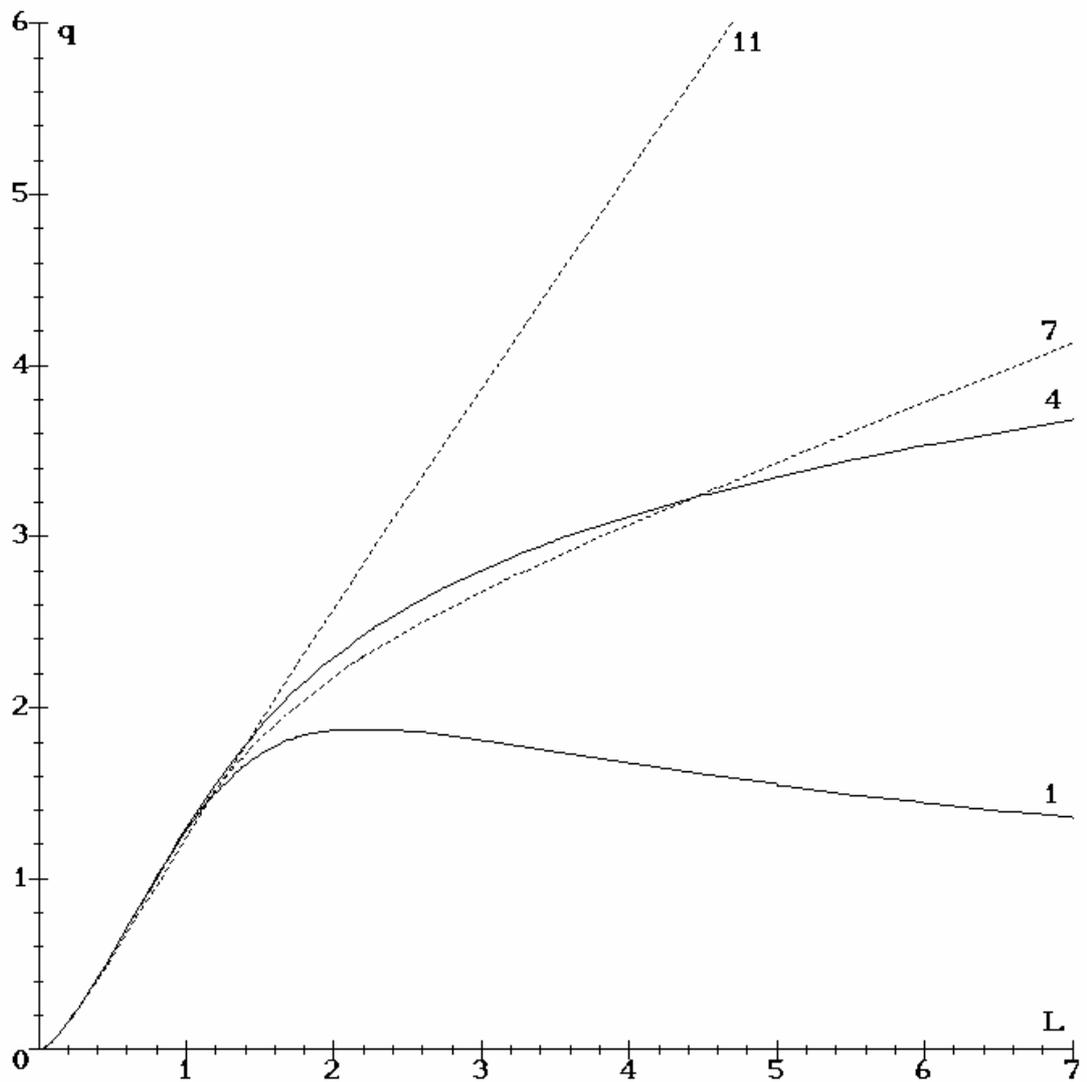


Рис. 2.3.4. Зависимость напряжения в центре мембраны ($L^{11}r_0/\mu/h$) от давления ($q=pr_0/\mu/h$).

Форма сечения деформированной мембраны для материала 4 из таблицы 2.3.1 представлена на рисунке 2.3.5. Величины давлений равны 0.05, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5 и 5, начиная с нижнего графика.

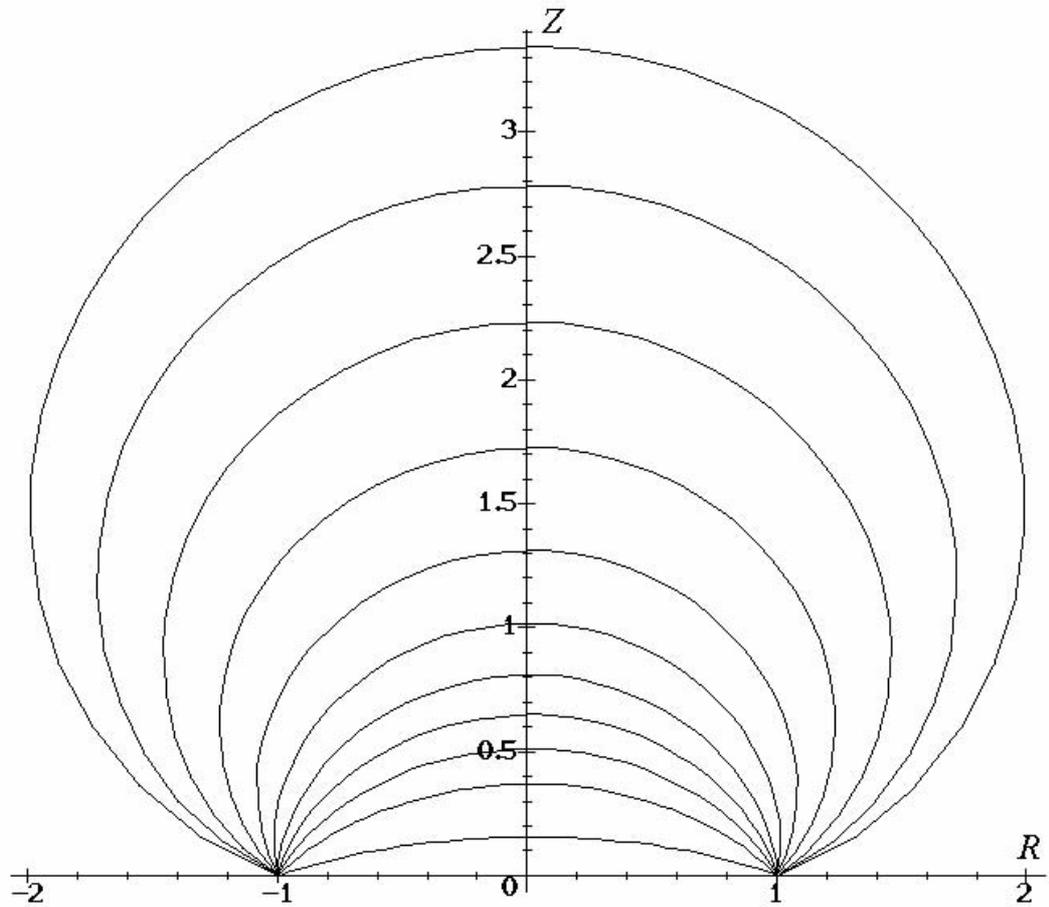


Рис. 2.3.5. Сечения деформированной мембраны из материала 4.

В таблице 2.3.2 приведены численные данные для некоторых материалов. Для величин прогиба w в центре мембраны представлены значения следующих безразмерных величин: давления q , кратности удлинений λ , толщины H и напряжения L в центре мембраны.

Таблица 2.3.2. Численные результаты.

w	Материал											
	1				4				7			
	q	λ	H	L	q	λ	H	L	q	λ	H	L
0.10	0.014	1.0066	0.9741	0.039	0.014	1.0066	0.9741	0.039	0.014	1.0066	0.9741	0.039
0.15	0.045	1.0148	0.9430	0.086	0.045	1.0148	0.9423	0.086	0.045	1.0148	0.9430	0.086
0.25	0.185	1.0415	0.8500	0.226	0.187	1.0410	0.8515	0.228	0.185	1.0414	0.8501	0.226
0.50	0.901	1.1757	0.5235	0.731	0.957	1.1667	0.5397	0.768	0.919	1.1737	0.5269	0.746
0.75	1.561	1.4330	0.2372	1.268	1.827	1.3795	0.2761	1.446	1.702	1.4054	0.2564	1.380
1.00	1.840	1.8359	0.0880	1.788	2.464	1.6565	0.1328	2.264	2.278	1.6943	0.1214	2.161
1.25	1.874	2.3755	0.0314	2.363	2.909	1.9548	0.0685	3.274	2.754	1.9773	0.0654	3.169
1.50	1.803	3.0409	0.0117	3.037	3.247	2.2510	0.0389	4.505	3.285	2.2509	0.0390	4.576
1.75	1.697	3.8090	0.0475	3.808	3.528	2.5358	0.0242	5.956	3.818	2.4583	0.0274	6.088
2.00	1.583	4.7074	0.0204	4.707	3.780	2.8133	0.0160	7.661	4.530	2.6612	0.0199	8.119
2.50	1.371	6.8580	0.0045	6.858	4.247	3.3477	0.0079	11.88	6.520	3.0098	0.0122	13.65
3.00	1.195	9.4636	0.0012	9.464	4.697	3.8641	0.0045	17.32	9.547	3.2978	0.0085	21.51
3.50	1.053	12.560	0.0004	12.56	5.142	4.3699	0.0027	24.14	14.11	3.5427	0.0063	32.30

Сравнение с результатами других исследователей

В таблице 2.3.3 полученные результаты сравниваются с расчетами других исследований [20] и экспериментальными данными [23, 52, 85]. Различие между численными расчетами, полученными в этой работе, и данными, представленными в книге [20], составляет менее 10% для неогуковского материала и практически отсутствует для материала Муни-Ривлина ($\beta = 0.95$).

Таблица 2.3.3. Сравнение результатов расчета с данными других исследователей.

$\lambda_1(0)$	давление $pr_0/\mu/(2h)$						
	потенциал Муни $\beta = 0.95$		неогуковский потенциал		эксперимент		
		[20]		[20]	[52]	[23]	[85]
1.15	0.40	0.38	0.39	0.39	–	0.49	0.51
1.20	0.50	0.50	0.50	0.53	0.60	–	0.62
1.40	0.78	0.77	0.76	0.88	0.89	–	0.88
1.50	0.85	0.84	0.82	0.87	–	0.85	0.94
1.60	0.90	0.89	0.87	0.91	0.95	–	0.97
1.80	0.96	0.95	0.91	0.97	1.00	–	1.00
2.00	0.98	0.98	0.93	0.99	1.00	1.00	1.00
2.50	1.00	1.00	0.93	0.99	0.96	–	0.97
3.00	0.99	0.99	0.90	0.97	0.91	0.96	0.91
3.50	0.97	0.97	0.87	0.94	0.85	0.93	0.88
4.00	0.95	0.95	0.84	0.90	0.79	0.85	0.85
4.50	0.93	0.93	0.80	0.87	0.73	0.83	0.81
5.00	0.91	0.91	0.77	0.83	0.69	0.79	–
5.50	0.89	0.89	0.75	0.81	0.67	0.81	–
6.00	0.87	0.87	0.72	0.78	0.72	0.94	–
6.50	0.86	0.86	0.70	0.75	0.89	–	–

2.4. Раздувание замкнутой торообразной оболочки.

Уравнение поверхности оболочки до деформации представляется в форме (2.1.1) с помощью функций r и z , заданных в виде

$$r(\theta) = r_0 + r_1 \sin \theta, \quad z(\theta) = r_1 \cos \theta, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2.$$

Здесь за координату q^1 взят угол θ , отсчитываемый по меридиану оболочки, r_0 , r_1 – постоянные величины.

Внешняя нагрузка задается с помощью уравнений

$$\xi = p, \quad \xi^1 = \xi^2 = 0.$$

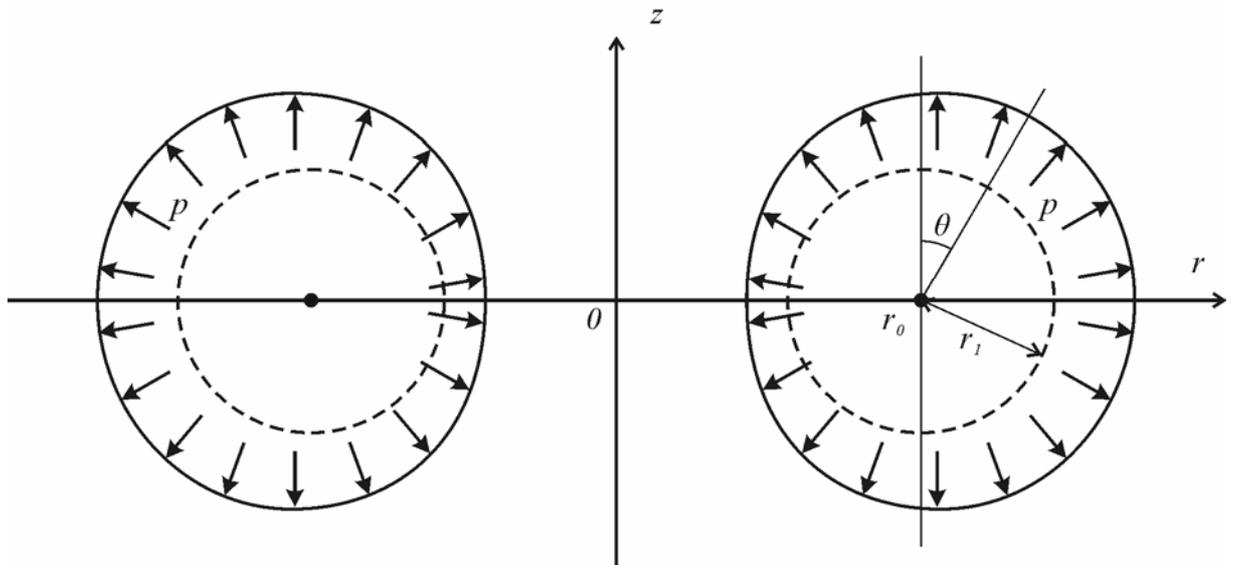


Рис. 2.4.1. Раздувание замкнутой торообразной оболочки.

Граничными условиями будут условия периодичности функций $R(\theta)$, $Z(\theta)$ и их производных с периодом 2π . Кроме оси симметрии тороидальная оболочка обладает плоскостью симметрии $z = 0$. Это позволяет наложить дополнительные ограничения на искомые функции: $R'(-\pi/2) = R'(3\pi/2) = 0$, уменьшив количество подбираемых параметров в методе пристрелки. Граничными условиями для функций λ_1 , λ_2 и ω будут равенства

$$\lambda_1(-\pi/2) = \lambda_1(3\pi/2), \quad \lambda_2(-\pi/2) = \lambda_2(3\pi/2),$$

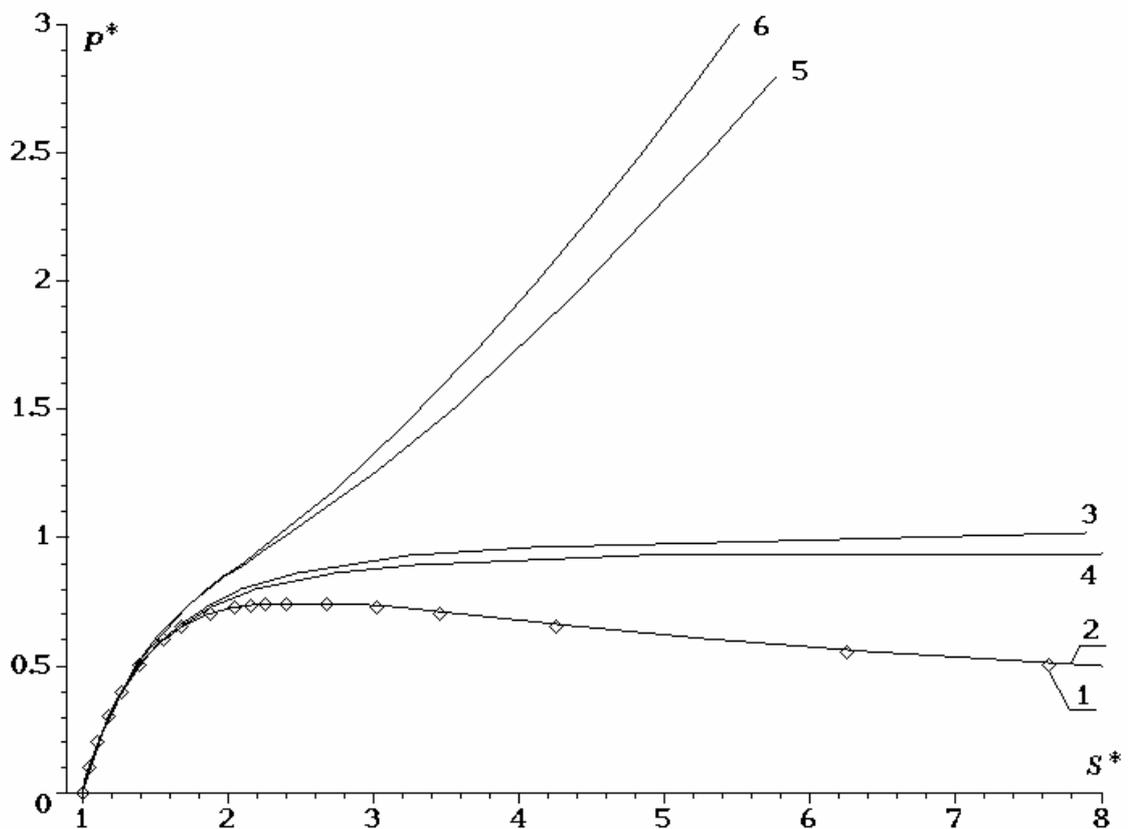
$$\omega(-\pi/2) = \omega(3\pi/2) = 0.$$

Результаты

На рисунке 2.4.2 представлены зависимости безразмерных величин внешнего давления ($p^* = pr_0/\mu/h$) и площади сечения деформированной оболочки ($S^* = S/s$). Обозначения графиков на рисунках 1–5 соответствуют геометрическим размерам и упругим постоянным приведенным в таблице 2.4.1.

Таблица 2.4.1. Значения упругих постоянных и геометрических параметров.

1	Неогуковский	$c_1 = 1, r_0 = 2, r_1 = 1$
2	Неогуковский	$c_1 = 1, r_0 = 10, r_1 = 1$
3	Муни	$c_1 = 1, c_2 = 0.5, r_0 = 2, r_1 = 1$
4	Муни	$c_1 = 1, c_2 = 0.5, r_0 = 10, r_1 = 1$
5	Клоснера-Сегала	$\mu = 2, \beta = 1, \kappa = 0.25, r_0 = 2, r_1 = 1$
6	Клоснера-Сегала	$\mu = 2, \beta = 1, \kappa = 0.25, r_0 = 10, r_1 = 1$

Рис. 2.4.2. Зависимость давления ($p^* = pr_0/\mu/h$) от площади сечения оболочки ($S^* = S/s$).

Для малых значений нагрузки ($p^* < 0.6$) вид потенциала и геометрические характеристики тороидальной оболочки незначительно влияют на деформацию. При увеличении объема в два и более раза жесткостные характеристики существенно отличаются для различных потенциалов и значений упругих постоянных. Для материалов неогуковского (1.2.2), Муни (1.2.3) и Клоснера-Сегала (1.2.6) изменение размеров оболочки оказывает менее существенное

влияние, чем изменение величин упругих постоянных. В частности, для неогуковского потенциала зависимость от параметра r_0 отсутствует. Зависимости «давление–площадь сечения» в рассмотренных материалах дают два типа жесткостных характеристик: возрастающие и характеристики с максимумом.

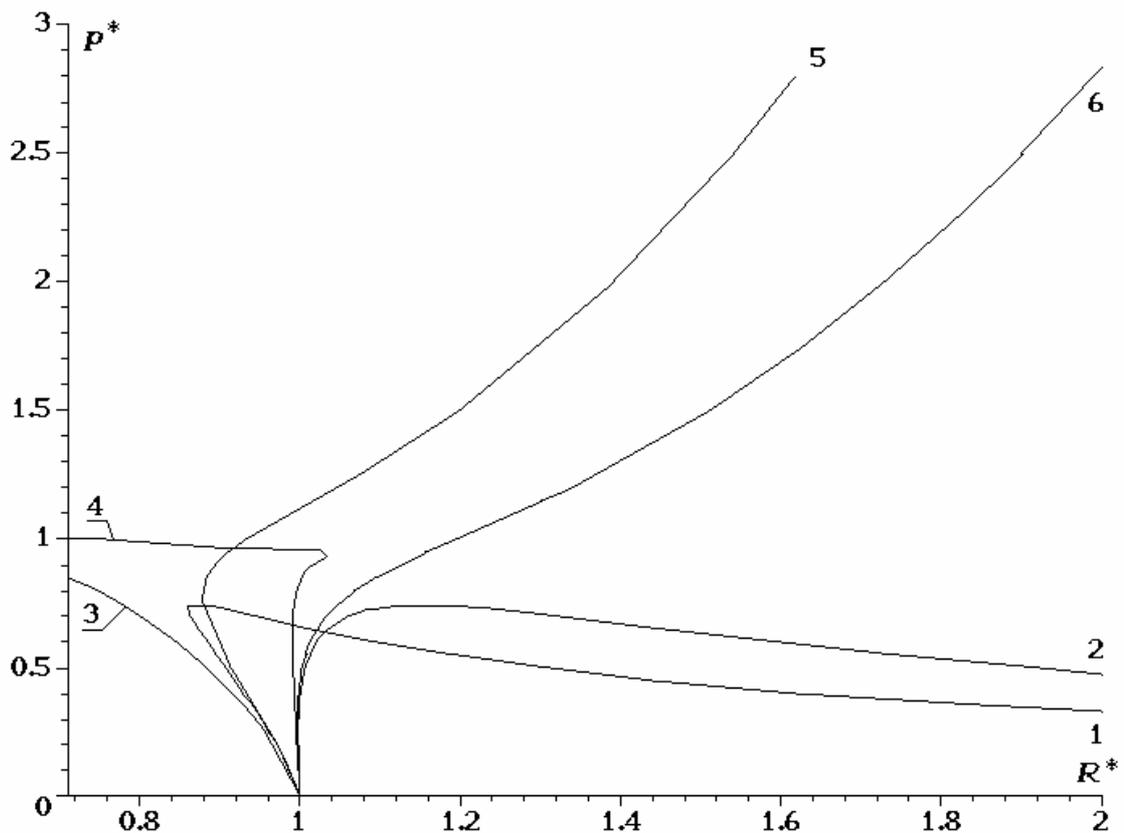


Рис. 2.4.3. Зависимость давления от внутреннего радиуса тора R^* .

Различные типы поведения демонстрирует зависимость давления от минимальной радиальной координаты тора $R^* = R(-\pi/2)/r(-\pi/2)$ (рисунок 2.4.3). На характер кривых оказывают влияние тип потенциала, упругие постоянные и геометрические параметры оболочки. При малых нагрузках ($p^* < 0.4$) отношение параметров r_0 к r_1 определяет характер поведения. Влияние свойств материала для этого диапазона нагрузок выражено слабее. Для больших нагрузок на

деформацию оболочки существенно влияют также тип потенциала и упругие постоянные.

На рисунке 2.4.4 представлены толщины деформированного тора, отнесенные к начальной толщине ($H(\theta)/h$). Для графиков 1,2 величина безразмерного давления p^* равна 0,725; для 3,4 $p^*=0,66$; для 5,6 $p^*=1$. На характер деформации оказывает влияние отношение r_0/r_1 : чем оно больше, тем равномернее по координате θ происходит уменьшение толщины оболочки.

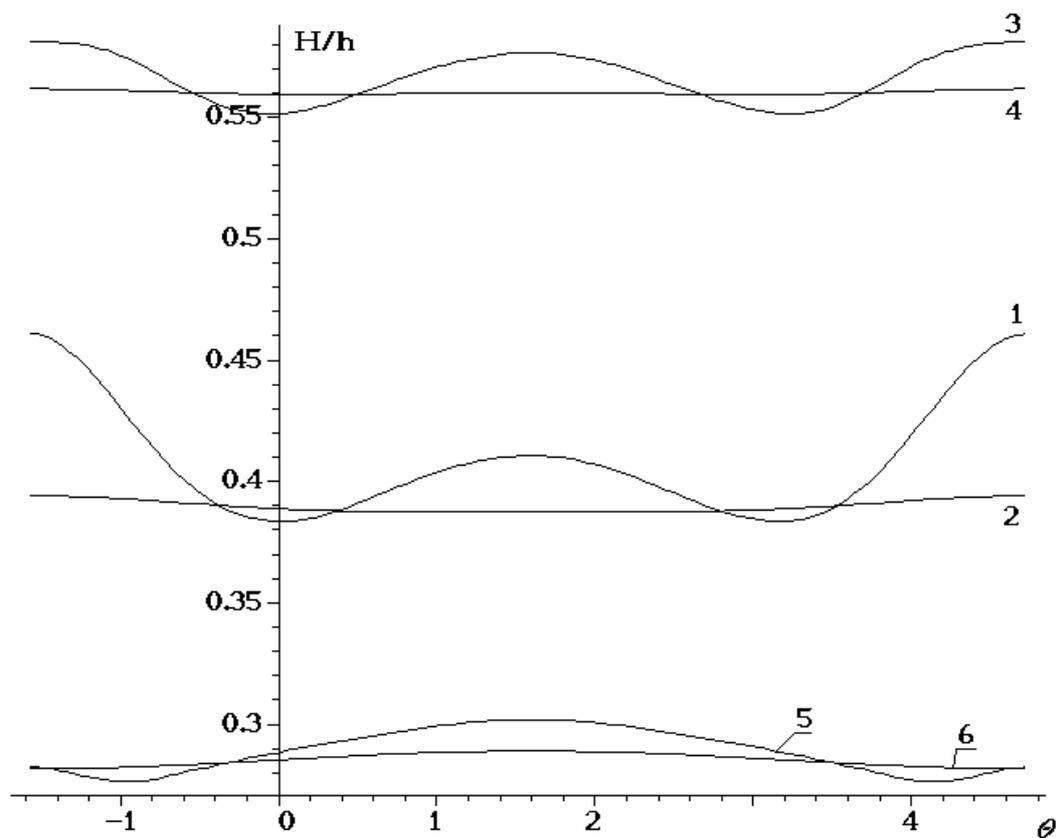


Рис. 2.4.4. Толщина оболочки ($H(\theta)/h$).

Графики напряжений представлены на рисунках 2.4.5 и 2.4.6. Для представленных зависимостей величины давления p^* такие же, что и для рисунка 2.4.4.

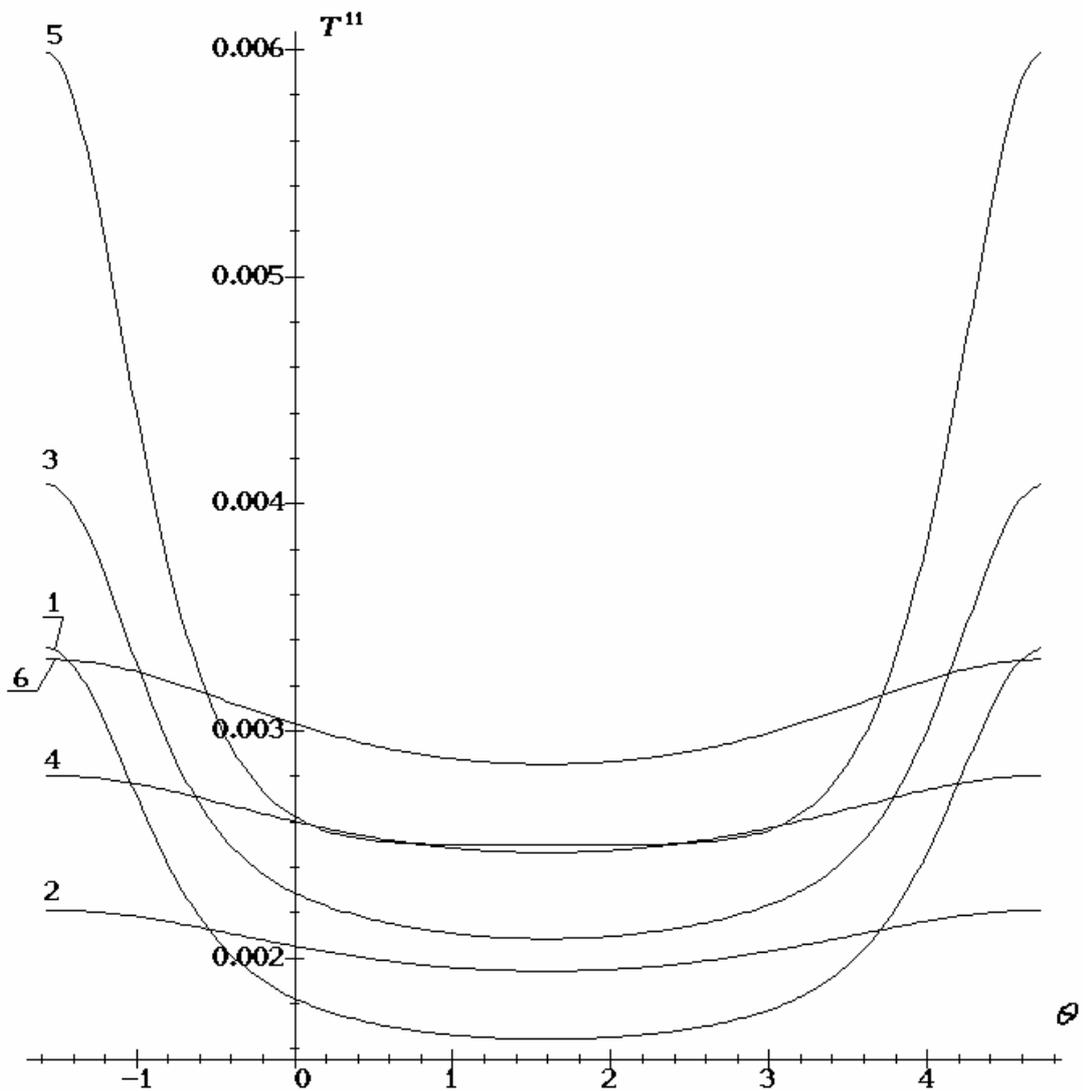


Рис. 2.4.5. Напряжения T^{11} .

Для всех рассмотренных случаев в оболочке отсутствовали сжимающие напряжения. Обе компоненты напряжений $T^{11} = L^{11}G_{11}$ и $T^{22} = L^{22}G_{22}$ положительные, причем компонента T^{11} всегда больше T^{22} . Максимум напряжений T^{11} находится на внутреннем радиусе тора ($\theta = -\pi/2$), минимум достигается на внешнем радиусе тор ($\theta = \pi/2$). Для компоненты напряжений T^{22} минимум достигается на внутреннем радиусе тора, положение максимума напряжений T^{22} зависит от геометрических размеров оболочки и упругих

постоянных. Для случаев 2, 4, 6 (таблица 2.4.1), когда $r_0/r_1 = 10$, максимальная величина напряжений достигалась на внешнем радиусе. При $r_0/r_1 = 2$ (случаи 1, 3, 5) максимум напряжений T^{22} достигался в интервале $0 < \theta < \pi/2$.

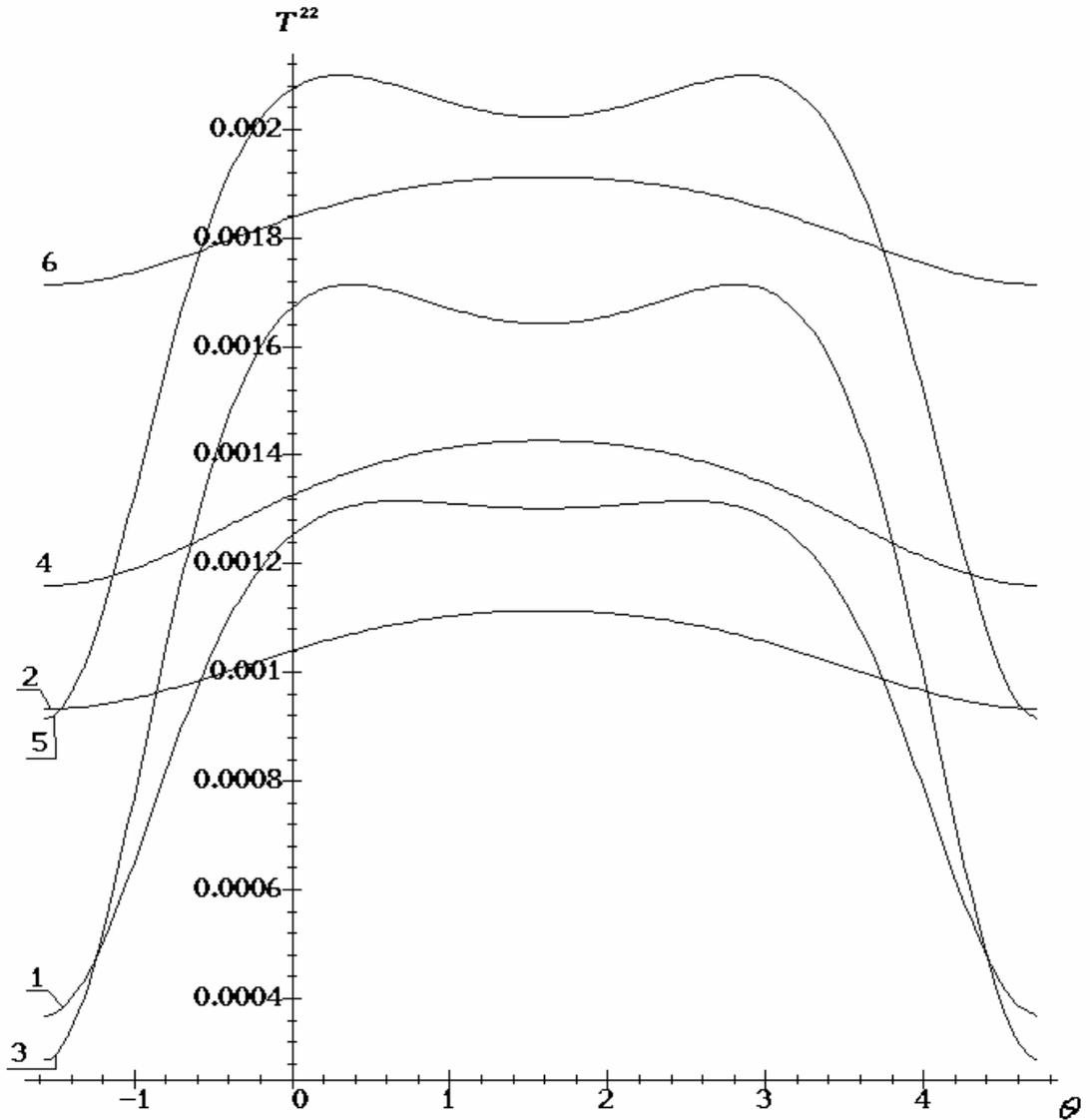


Рис. 2.4.6. Напряжения T^{22} .

Кроме того, соотношение радиусов r_0/r_1 влияет на равномерность распределения напряжений по координате θ , чем оно больше, тем равномерней распределены напряжения.

2.5. Осесимметричная деформация круговой цилиндрической оболочки.

Рассмотрим цилиндр круглого сечения, закрепленный по краям и нагруженный равномерно распределенным нормальным давлением по поверхности оболочки. В отсчетной конфигурации поверхность оболочки задается уравнениями (2.1.1) с помощью функций

$$r(q^1) = r_0 = \text{const}, \quad z(q^1) = q^1, \quad 0 \leq q^1 \leq l.$$

Равномерно распределенное по поверхности оболочки давление задается соотношениями (1.3.11), (2.2.1).

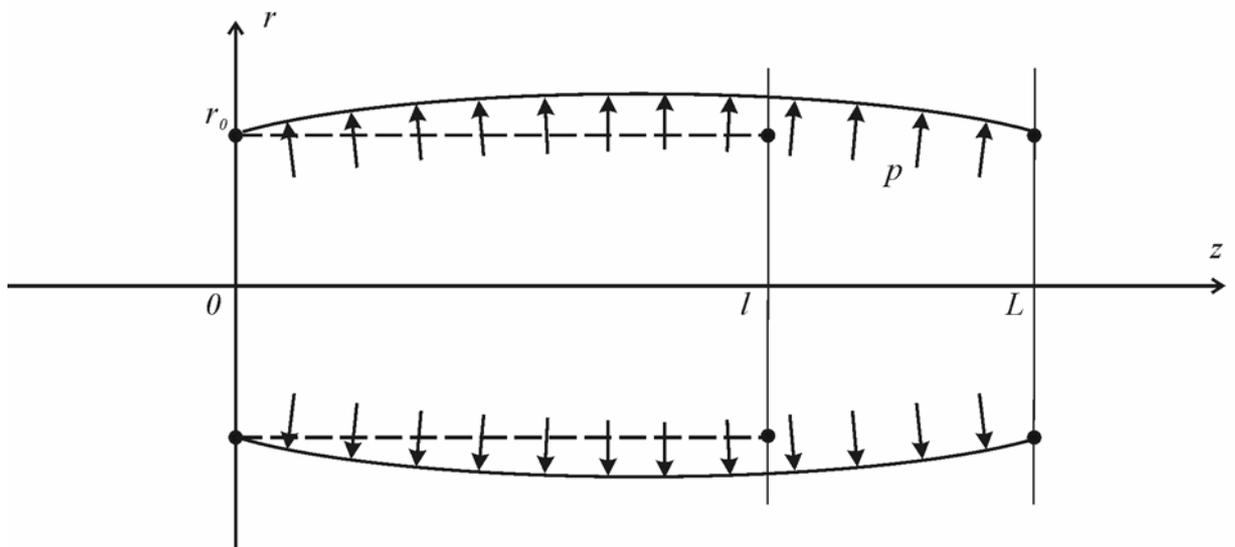


Рис. 2.5.1. Осесимметричная деформация круговой цилиндрической оболочки.

Граничными условиями является задание перемещений краев цилиндра в виде

$$R(0) = r_0, \quad R(l) = r_0, \quad Z(0) = 0, \quad Z(l) = L. \quad (2.5.1)$$

Если толщина оболочки симметрична относительно центрального сечения $r = l/2$, то решение можно искать только на половине интервала, и в качестве граничных условий рассматривать условия

$$R(0) = r_0, \quad R'(l/2) = 0, \quad Z(0) = 0, \quad Z(l/2) = L/2. \quad (2.5.2)$$

Для функций λ_1 , λ_2 и ω краевые условия примут вид

$$\lambda_1(0) = \lambda_1(l) = 1, \quad \omega(0) = \omega(l), \quad \lambda_2(0) = \lambda_2(l). \quad (2.5.3)$$

Или в случае симметричной относительно центрального сечения толщины:

$$\lambda_1(0) = 1, \quad \omega(l/2) = 0, \quad \lambda_2(0) = a. \quad (2.5.4)$$

Условий (2.5.3) или (2.5.4) недостаточно для однозначного решения системы (2.1.23). Еще одно граничное условие получаем из ограничений на функцию $Z(q^1)$ в виде (2.5.1) или (2.5.2).

В дальнейшем эту будем называть задачей 1. Зададим некоторые величины, которые будут использоваться при описании результатов. Растягивающая сила определяется соотношением

$$Q_1^* = 2\pi r_0 G_{11} L^{11} \Big|_{q^1=l}. \quad (2.5.5)$$

Удлинение цилиндрической оболочки будем характеризовать величиной α_1 , задаваемой уравнением

$$\alpha_1 = \frac{Z(l)}{l}.$$

Радиус оболочки будем характеризовать величиной радиуса деформированного срединного сечения оболочки отнесенного к его величине недеформированного

$$R_1^* = \frac{R(l/2)}{r_0}. \quad (2.5.6)$$

Если не рассматривать условия закрепления цилиндрической оболочки на ее концах, то аналитическое решение задачи деформации цилиндрической трубы можно получить в рамках приближений теории плоской деформации. Эти решения представлены ниже.

Аналитическое решение теории оболочек (задача 2)

Рассмотрим деформацию одноосного растяжения цилиндрической оболочки круглого сечения и постоянной толщины, под действием равномерно распределенной нормальной нагрузки. Гауссовыми координатами будут цилиндрические координаты $q^1 = z$, $q^2 = \varphi$. В отсчетной конфигурации поверхность оболочки задается уравнениями

$$\mathbf{r} = r_0 \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z, \quad r_0 = \text{const.}$$

Базисные векторы на поверхности σ примут вид

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{r}_2 = r_0 \mathbf{e}_\varphi.$$

Пусть в текущей конфигурации радиус-вектор оболочки определяется уравнениями:

$$\mathbf{R} = R_0 \mathbf{e}_r + \alpha z \mathbf{e}_z, \quad R_0 = \text{const}, \quad \alpha = \text{const.}$$

Такой вид деформации будет соответствовать одноосному растяжению оболочки, нагруженной равномерно распределенным давлением интенсивности p . Базисные векторы на поверхности деформированной оболочки и вектор нормали к ней примут вид

$$\mathbf{R}_1 = \alpha \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{R}_2 = R_0 \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{N} = -\mathbf{e}_r.$$

Компоненты квадратичных форм отсчетной и текущей конфигурации будут задаваться соотношениями

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = r_0^2, \\ G_{11} &= \alpha^2, \quad G_{12} = G_{21} = 0, \quad G_{22} = R_0^2, \\ B_{11} &= B_{12} = B_{21} = 0, \quad B_{22} = R_0. \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Из (2.5.7) видно, что условия (1.3.1) и (1.3.3) удовлетворяются. Система (1.3.12) преобразуется к виду

$$B_{22} L^2 - p = 0. \quad (2.5.8)$$

Здесь p – интенсивность равномерно распределенного давления.

Рассмотрим упругий потенциал Муни (1.2.3). Уравнение равновесия (2.5.8) запишется в форме

$$2h \frac{1}{\alpha r_0} \left(1 - \frac{r_0^4}{\alpha^2 R_0^4} \right) (c_1 + \alpha^2 c_2) = p.$$

При отсутствии давления величина радиуса деформированной оболочки выразится уравнением:

$$R_0 = \frac{r_0}{\sqrt{\alpha}}.$$

Растягивающая сила определяется соотношением

$$Q_2^* = 2\pi R_0 \alpha^2 L^{11}. \quad (2.5.9)$$

Величину относительного изменения радиуса обозначим

$$R_2^* = \frac{R_0}{r_0}. \quad (2.5.10)$$

Цилиндрическая труба под давлением (задача 3) [21, 22]

Рассмотрим задачу растяжения и раздувания цилиндрической трубы с точки зрения трехмерной нелинейной теории упругости. За материальные координаты примем цилиндрические координаты отсчетной конфигурации $q^1 = r$, $q^2 = \varphi$, $q^3 = z$. Предполагаем, что деформация происходит с сохранением осевой симметрии, тогда деформированное состояние может быть задано в той же цилиндрической системе величинами

$$R = R(r), \quad \varphi = \varphi, \quad Z = \alpha z, \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad r_1 = r_0 - \frac{h}{2}, \quad r_2 = r_0 + \frac{h}{2},$$

причем $\alpha = const$, r_0 – средний радиус трубы, h – толщина трубы.

Радиус-векторы точки трубы в отсчетной и текущей конфигурациях представляются в следующем виде

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z, \\ \mathbf{R} &= R(r)\mathbf{e}_r + \alpha z\mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

Векторы базиса недеформированной и деформированной среды выразятся уравнениями

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{r}_2 = r\mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{e}_z. \\ \mathbf{R}_1 &= R'\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{R}_2 = R\mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{R}_3 = \alpha\mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Коэффициенты квадратичных форм отсчетной и текущей конфигурации будут задаваться соотношениями

$$\begin{aligned} g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = 1, \quad g_{ij} = 0 \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, 3), \\ G_{11} = R'^2, \quad G_{22} = R^2, \quad G_{33} = \alpha^2, \quad G_{ij} = 0 \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

Мера деформации Коши и ее инварианты примут вид

$$\Lambda = R'^2 \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{R^2}{r^2} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \alpha^2 \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z,$$

$$I_1 = R'^2 + \frac{R^2}{r^2} + \alpha^2,$$

$$I_2 = R'^2 \frac{R^2}{r^2} + R'^2 \alpha^2 + \frac{R^2}{r^2} \alpha^2,$$

$$I_3 = R'^2 \frac{R^2}{r^2} \alpha^2.$$

В случае несжимаемого материала выполняется равенство $I_3 = 1$ и справедливо уравнение

$$R' = \frac{r}{\alpha R}, \quad (2.5.13)$$

откуда можно получить выражение для функции $R(r)$

$$R^2 = R_2^2 + \frac{1}{\alpha} (r^2 - r_2^2), \quad R_2 = R(r_2). \quad (2.5.14)$$

Тензор напряжений Коши для несжимаемого материала можно представить в виде

$$\mathbf{T} = 2 \left(\frac{\partial W^*}{\partial I_1} \boldsymbol{\lambda}^{-1} - \frac{\partial W^*}{\partial I_2} \boldsymbol{\lambda} \right) - P \mathbf{E}. \quad (2.5.15)$$

Здесь $W^* = W^*(I_1, I_2)$ – функция потенциальной энергии деформации, P – функция гидростатического давления. Мера деформации Фингера $\boldsymbol{\lambda}^{-1}$ и мера деформации Альманзи $\boldsymbol{\lambda}$ задаются соотношениями

$$\boldsymbol{\lambda}^{-1} = R'^2 \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{R^2}{r^2} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta + \alpha^2 \mathbf{e}_\lambda \mathbf{e}_\lambda,$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{R'^2} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{r^2}{R^2} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\alpha^2} \mathbf{e}_\lambda \mathbf{e}_\lambda.$$

Учитывая (2.5.12) и (2.2.8), уравнение (2.5.15) примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} R'^2 - \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{1}{R'^2} - P \right) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \\ & + 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{R^2}{r^2} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{r^2}{R^2} - P \right) \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \\ & + 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} \alpha^2 - \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{1}{\alpha^2} - P \right) \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

Введем в рассмотрение тензор \mathbf{T}^* такой, что справедливо выражение

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^* - P \mathbf{E}. \quad (2.5.17)$$

Компоненты тензора напряжений \mathbf{T}^* с учетом (2.5.13) выразятся соотношениями

$$\begin{aligned} T_{rr}^* &= 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{r^2}{\alpha^2 R^2} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\alpha^2 R^2}{r^2} \right), \\ T_{\varphi\varphi}^* &= 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{R^2}{r^2} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{r^2}{R^2} \right), \\ T_{zz}^* &= 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} \alpha^2 - \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{1}{\alpha^2} \right). \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

Из уравнений равновесия получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1}{R'} \frac{\partial T_{rr}^*}{\partial r} + \frac{T_{rr}^* - T_{\varphi\varphi}^*}{R} - \frac{1}{R'} \frac{\partial P}{\partial r} &= 0, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{1}{\alpha} \frac{\partial P}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Следствием уравнений равновесия является независимость функции гидростатического давления P от координат φ и z . Из первого уравнения равновесия, учитывая (2.5.16) и (2.5.13), получим

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} = -\frac{r}{\alpha R^2} (T_{rr}^* - T_{\varphi\varphi}^*). \quad (2.5.19)$$

Граничными условиями будут заданные величины давлений на внутренней и внешней сторонах трубы

$$T_{rr}(r_1) = -p_1, \quad T_{rr}(r_2) = -p_2, \quad (2.5.20)$$

Рассмотрим правую часть уравнения (2.5.19). Из представления компонент тензора напряжений \mathbf{T}^* (2.5.18) имеем

$$\begin{aligned} \frac{r}{\alpha R^2} (T_{rr}^* - T_{\varphi\varphi}^*) &= 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \alpha^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \left(\frac{r^2}{\alpha^2 R^2} - \frac{R^2}{r^2} \right) \frac{r}{\alpha R^2} = \\ &= 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \alpha^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \frac{r^4 - \alpha^2 R^4}{\alpha^2 R^4 \alpha r}. \end{aligned} \quad (2.5.21)$$

Соотношение (2.5.14) можно представить в виде

$$\alpha R^2 = r^2 + c, \quad c = \alpha R_2^2 - r_2^2. \quad (2.5.22)$$

Подставляя полученные выражения (2.5.21) и (2.5.22) в уравнение (2.5.19) получим уравнение

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} = -2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \alpha^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \frac{r^4 - (r^2 + c)^2}{\alpha r (r^2 + c)^2}. \quad (2.5.23)$$

В случае, когда производные функции потенциальной энергии W относительно инвариантов меры деформации Коши I_1 , I_2 являются постоянными величинами (материал Муни (1.2.3)), решение уравнение (2.5.23) можно получить в явном виде. Интегрируя уравнение (2.5.23) на интервале $[r_1; r_2]$ и учитывая граничные условия (2.5.20), получим зависимость между параметрами задачи: давлениями p_1 и p_2 и геометрическими характеристиками деформированной трубы R_2 и α . Для материала Муни справедливы выражения

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = c_1, \quad \frac{\partial W}{\partial I_2} = c_2. \quad (2.5.23)$$

Уравнение (2.5.23) примет вид

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} = \frac{2c}{\alpha} (c_1 + \alpha^2 c_2) \frac{2r^2 + c}{r(r^2 + c)^2}. \quad (2.5.24)$$

Откуда с учетом граничных условий получаем искомую зависимость

$$p_1 - p_2 = \frac{2c}{\alpha} (c_1 + \alpha^2 c_2) \int_{r_1}^{r_2} \frac{2r^2 + c}{r(r^2 + c)^2} dr.$$

Или в явном виде

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{\alpha} (c_1 + \alpha^2 c_2) \left(\ln \left(\frac{r_2^2 R_1^2}{R_2^2 r_1^2} \right) + \left(\frac{r_2^2}{\alpha R_2^2} - \frac{r_1^2}{\alpha R_1^2} \right) \right). \quad (2.5.25)$$

$$R_1 = R(r_1), \quad R^2 = R_2^2 + \frac{1}{\alpha} (r^2 - r_2^2).$$

Из уравнения (2.5.24) можно получить выражение для функции гидростатического давления $P(r)$. С помощью соотношений (2.5.17) и (2.5.18) получим уравнение, которое можно проинтегрировать в квадратурах

$$P = T_{rr}^* - \frac{2c}{\alpha} (c_1 + \alpha^2 c_2) \int \frac{2r^2 + c}{r(r^2 + c)^2} dr.$$

В дальнейшем будет рассматриваться случай отсутствия внешнего давления:

$$p_1 = p, \quad p_2 = 0.$$

Из (2.5.25) выводится зависимость радиуса срединной поверхности $R(r_0)$ деформированной цилиндрической трубы от внутреннего давления p и коэффициента растяжения α .

Радиальную деформацию будем описывать радиусом срединной поверхности, отнесенным к начальному значению

$$R_3^* = \frac{R(r_0)}{r_0}. \quad (2.5.26)$$

Сравнение решения задачи 1 с результатами других исследователей

Рассмотрим цилиндрическую оболочку круглого сечения постоянной толщины, состоящую из неогуковского материала (1.2.2) ($c_1 = 1$). Длина

цилиндра в недеформированном состоянии $l = 4$, радиус сечения $r_0 = 1$. Равномерно распределенная нормальная нагрузка отсутствует. Оболочка растягивается на некоторую заданную величину и закреплена по краю так, чтобы радиус оставался постоянным.

В таблице 2.5.1 сравниваются результаты расчетов решения задачи 1 с данными, представленными J. V. Haddow, L. Favre, R. W. Ogden в статье [51]. Решение, предложенное в работе [51], основывается на нахождении верхней и нижней границы функционала энергии из вариационных принципов минимума потенциальной и максимума дополнительной энергии. Решение ищется в виде полиномов для неизвестных функций. Функции формы деформированной оболочки задавались полиномом четвертой степени, компоненты напряжений представлялись полиномиальными выражениями седьмой степени.

В таблице 2.5.1 в первом столбце задано напряжение Био $t = \partial W^* / \partial \lambda_1$, соответствующее продольному направлению. Для данных величин напряжений построена оценка величин удлинения (второй и третий столбцы). Четвертый и пятый столбцы представляют величины напряжений, рассчитанные из решений задачи 1 для соответствующих удлинений, которые даны во втором и третьем столбцах. Погрешность между полученными напряжениями и данными в статье [51] указана в шестом столбце.

Таблица 2.5.1. Сравнение результатов расчета растяжения цилиндрической оболочки с данными опубликованными в статье [51].

$t = \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_1}$	l_{min}	l_{max}	t_{min}	t_{max}	Погрешность %
1.273	4.996	5.018	1.304	1.329	2.4 – 4.2
2.546	6.446	6.500	2.634	2.676	3.3 – 4.9
5.093	10.614	10.700	5.240	5.298	2.8 – 3.9

Результаты

Проведем сравнение результатов решения задач 1, 2 и 3.

Рассмотрим цилиндрическую оболочку из неогуковского материала (1.2.2) ($c_1 = 1$). Размеры оболочки: $l = 4$, $r_0 = 1$, $h = 0.0018$.

Пусть оболочка нагружена равномерно распределенной нагрузкой изнутри. Исследуем зависимость радиуса сечения срединной поверхности оболочки в центре цилиндра от величины давления, при постоянном растяжении (рисунок 2.5.2). Для задачи 2 и 3 удлинение будет характеризоваться величиной $\alpha = 1.262$ (2.5.11). Для задачи 1 удлинение будет определяться изменением длины всего цилиндра $Z(l) = \alpha l$, где l – начальная длина цилиндра. Пунктирная линия 2 соответствует решению задачи 2. Штрихпунктирная линия 3 соответствует расчетам для задачи 3. Сплошная линия 1 соответствует расчетам неоднородного напряженного состояния по теории оболочек задачи 1. Горизонтальная ось соответствует обезразмеренному давлению $p^* = p/c_1$. По вертикальной оси отложен обезразмеренный радиус деформированной оболочки R^* (для задач 1,2,3 это будут величины R_1^* (2.5.6), R_2^* (2.5.10), R_3^* (2.5.26) соответственно).

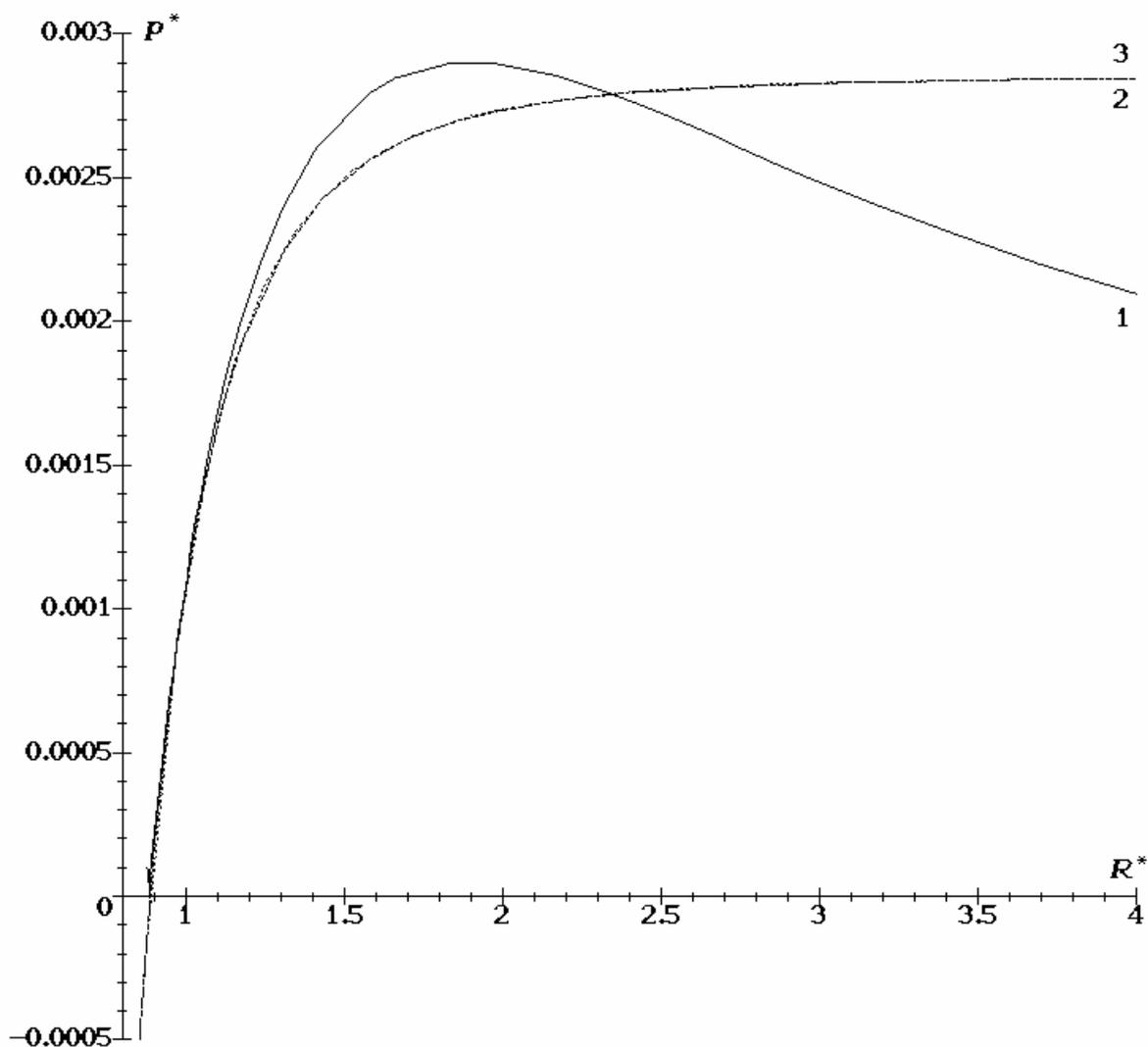


Рис. 2.5.2. Зависимость радиуса растянутой оболочки от величины внутреннего давления.

В дальнейшем рассматриваем задачу о растяжении цилиндрической оболочки без внутреннего давления. На рисунке 2.5.3 представлен график зависимостей радиуса сечения от удлинений цилиндра. Для задач 2 и 3 удлинение характеризуется параметром α . В случае задачи 1 удлинение рассматривается как изменение длины всего цилиндра, отнесенного к начальной длине. По горизонтальной оси отложен обезразмеренный радиус

деформированной оболочки R^* , по вертикальной оси кратность удлинения $A^* = \alpha = Z(l)/l$.

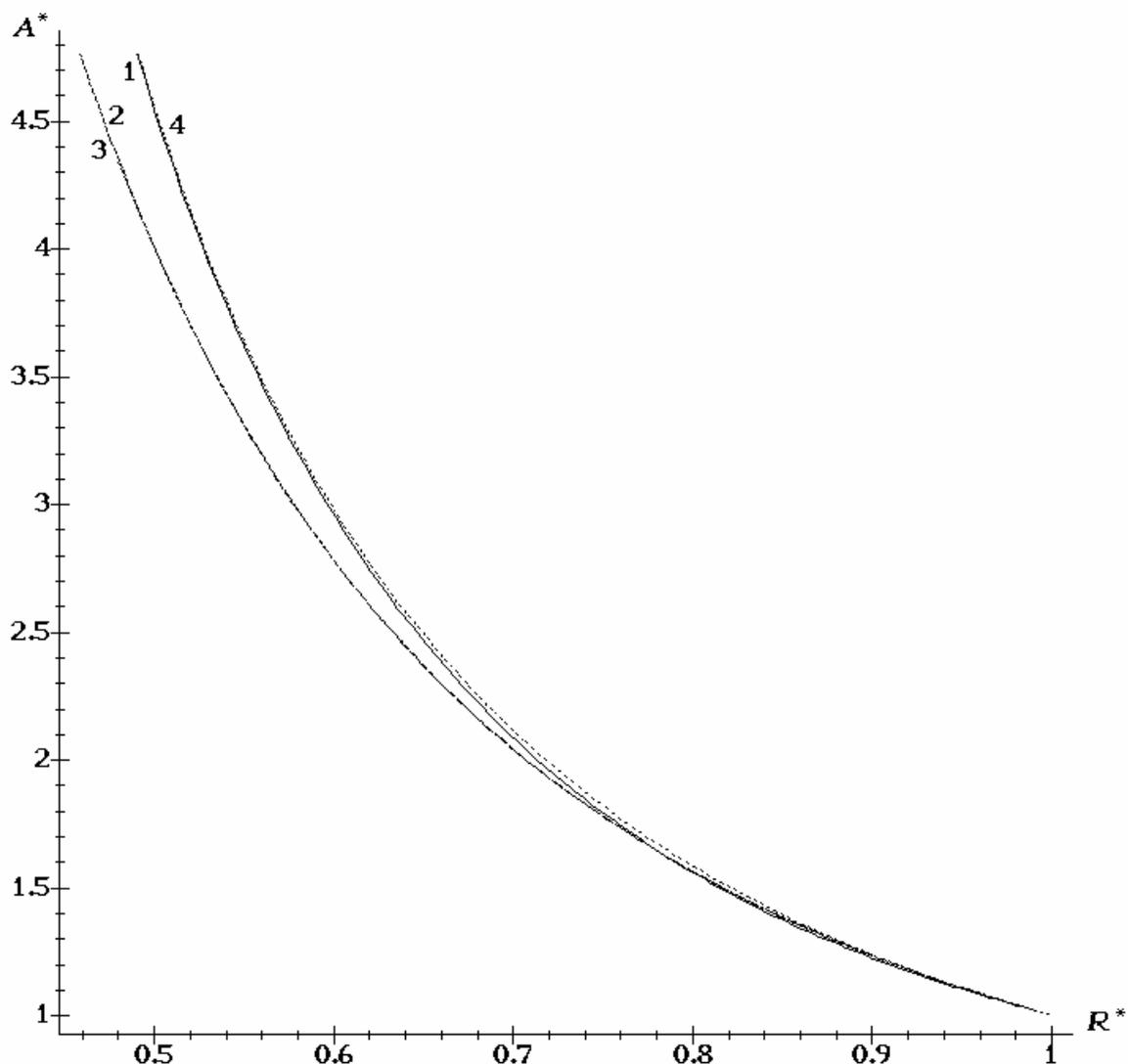


Рис. 2.5.3. Зависимость радиуса растянутой оболочки от коэффициента растяжения.

Сплошная линия 1 соответствует зависимости радиуса от удлинения цилиндра для задачи 1. Пунктирная линия 2 и штрихпунктирная линия 3 совпадают и соответствуют решению задач 2 и 3, т. е. для случаев одноосного растяжения рассчитанному по уравнениям равновесия теории оболочек и уравнениям равновесия трехмерной теории соответственно. Пунктирной

линией 4 представлена зависимость радиуса деформированной оболочки от кратности удлинения малого центрального элемента цилиндрической оболочки начальной длины $e = 0.03$ для задачи 1.

Из рисунка видно, что графики 1 и 4 близки между собой, а линии 2 и 3 совпадают. Графики 2 и 4 близки до величины удлинения цилиндра примерно в 2.5 раза, с дальнейшим ростом удлинения разница между графиками возрастает. Сравнение численных результатов, изображенных на рисунке 2.5.3, дано в таблице 2.5.2.

Таблица 2.5.2. Сравнение удлинения элемента цилиндра к полному его удлинению.

Радиус	Решение задачи 2	Решение задачи 3	Решение задачи 1		Разность Между столбцами 2 и 4 %	Разность между столбцами 4 и 5 %
			удлинение цилиндра	удлинение центрального элемента		
1.00	1.000	1.000	1.000	1.000	0.00	0.00
0.95	1.108	1.108	1.104	1.108	0.36	0.43
0.90	1.235	1.235	1.225	1.237	0.81	1.01
0.85	1.384	1.384	1.374	1.394	0.72	1.46
0.80	1.563	1.563	1.559	1.585	0.26	1.69
0.75	1.778	1.778	1.792	1.821	0.79	1.65
0.70	2.041	2.041	2.086	2.119	2.20	1.41
0.65	2.367	2.367	2.464	2.491	4.10	1.09
0.60	2.778	2.778	2.956	2.978	6.41	0.76
0.55	3.306	3.306	3.615	3.633	9.35	0.48
0.50	4.000	4.000	4.534	4.546	13.35	0.27

На рисунке 2.5.4 и в таблице 2.5.3 представлены зависимости растягивающей силы Q^* (Q_1^* (2.5.5) – сплошная линия 1, Q_2^* (2.5.9) – пунктирная линия 2) от величины растяжения $A^* = \alpha = Z(l)/l$.

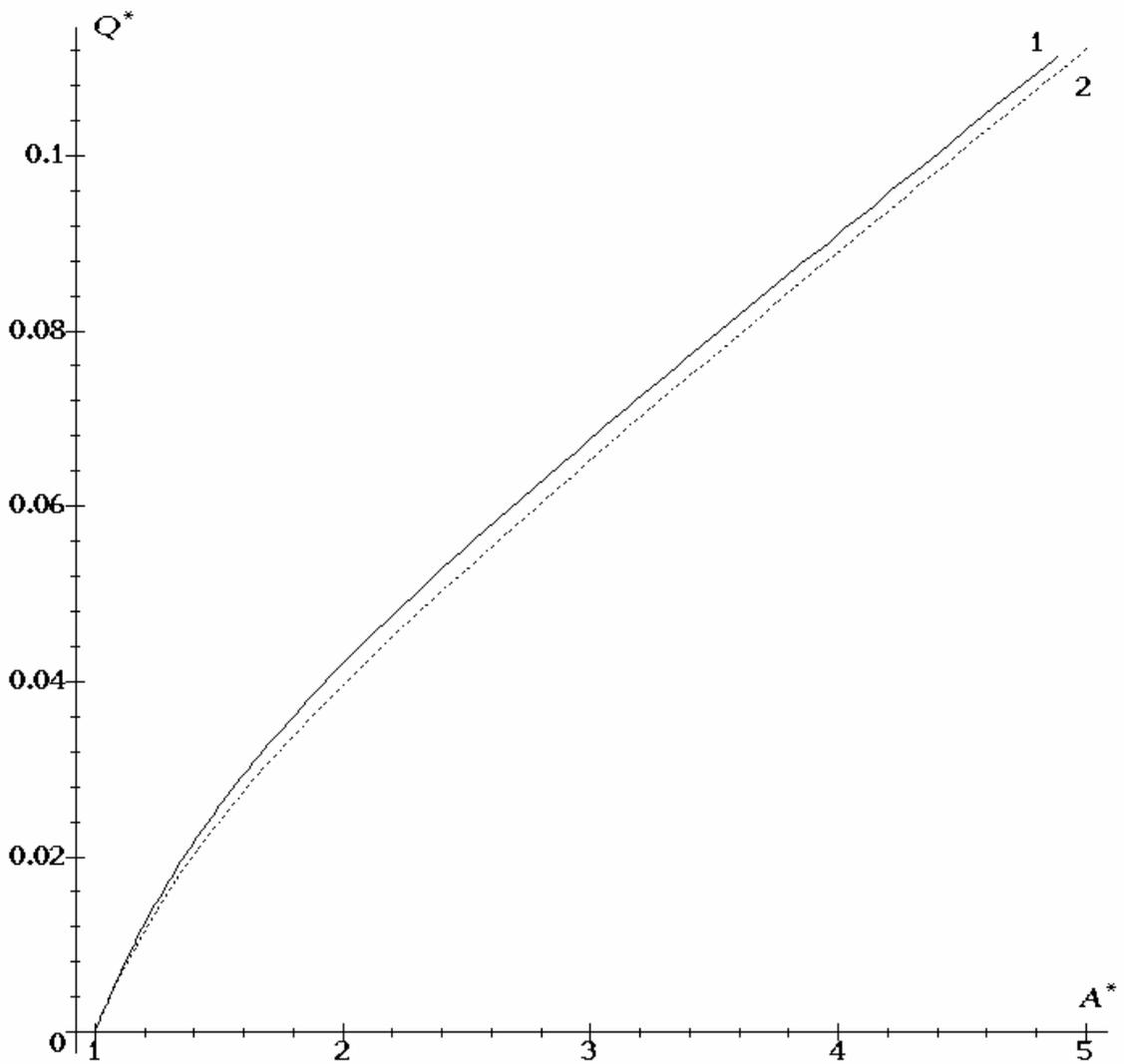


Рис. 2.5.4. Зависимость растягивающей нагрузки от удлинения цилиндра.

Сравнение результатов расчета усилий для задач 1 и 2 показывает, что их относительная разность не превышает 8% (таблица 2.5.3).

Таблица 2.5.3. Зависимость растягивающей нагрузки от удлинения цилиндра.

A^*	Q_2^*	Q_1^*	Относительная разность %
1.000	0.00000	0.00000	0
1.103	0.00638	0.00672	5.39
1.252	0.01390	0.01491	7.30
1.499	0.02383	0.02565	7.63
1.990	0.03931	0.04174	6.19
2.263	0.04677	0.04927	5.33
2.507	0.05311	0.05559	4.67
3.013	0.06567	0.06803	3.61
3.540	0.07827	0.08048	2.83
4.034	0.08986	0.09192	2.30
4.534	0.10146	0.10338	1.89

В тоже время, для больших деформаций для задачи 1 напряжения в оболочке вдоль образующей неоднородны (рисунок 2.5.5). Сплошной линией 1 представлено обезразмеренное напряжение на конце цилиндра, определяемое уравнением

$$T_1^* = \frac{G_{11}L^{11}}{c_1} \Big|_{q^1=l} .$$

Пунктирной линией 3 изображено обезразмеренное напряжение в центральном сечении цилиндра

$$T_2^* = \frac{G_{11}L^{11}}{c_1} \Big|_{q^1=l/2} .$$

Точечной линией 2 показано обезразмеренное напряжение, рассчитанное для задачи 2, по соотношению

$$T_3^* = \frac{G_{11}L^{11}}{c_1} \Big|_{q^1=l/2} .$$

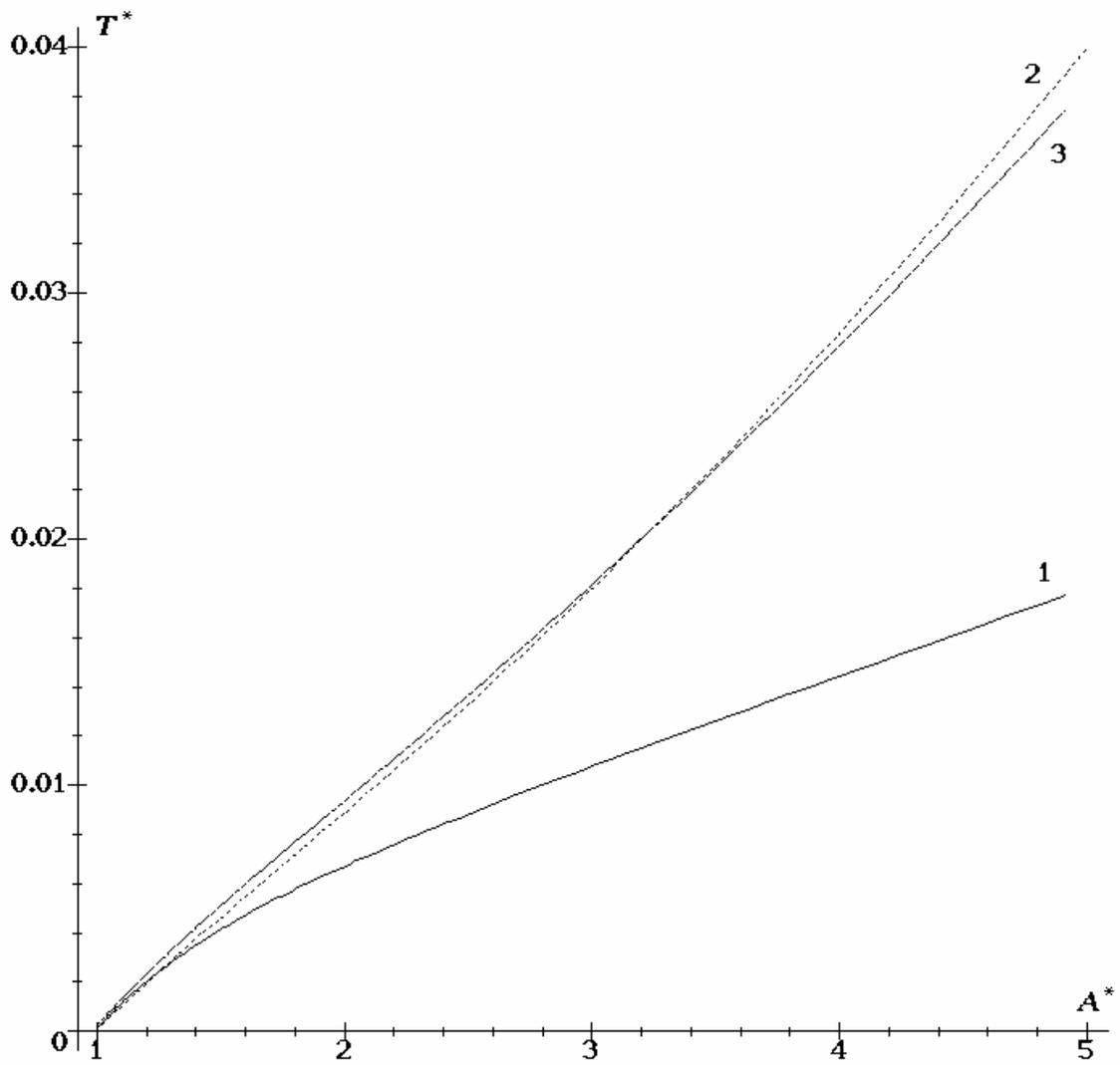


Рис. 2.5.4. Зависимость напряжения от удлинения цилиндра.

Графики 2 и 3 близки, относительная разность между полученными решениями составляет менее 6% (таблица 2.5.4).

Таблица 2.5.5. Зависимость напряжения от удлинения цилиндра.

A^*	T_3^*	T_2^*	Относительная разность %
1.000	0.00000	0.00000	0
1.103	0.00106	0.00112	4.45
1.252	0.00247	0.00261	5.26
1.499	0.00464	0.00485	4.42
1.990	0.00882	0.00898	1.70
2.263	0.01120	0.01125	0.45
2.507	0.01338	0.01332	0.51
3.013	0.01814	0.01775	2.14
3.540	0.02343	0.02261	3.52
4.034	0.02872	0.02739	4.65
4.534	0.03438	0.03243	5.68

Представленные результаты соответствуют цилиндру из неогуковского материала с начальными данными: длина $l = 4$, радиус $r_0 = 1$, толщина $h = 0.0018$. Численные расчеты показали, что увеличение длины оболочки приводит к уменьшению влияния условий закрепления и приближению интегральных характеристик напряженно-деформированного состояния оболочки из задачи 1 к характеристикам напряженно-деформированного состояния оболочки из задачи 2. Так уже при длине $l = 6$ зависимость между удлинением всего цилиндра и радиусом его центрального сечения для задачи 1 и зависимость удлинение–радиус, полученная из решения задачи 2, имеют относительную разность менее 2%.

Относительная разность между полным удлинением цилиндра и удлинением его малого центрального элемента не превышает 2% и с увеличением начальной длины оболочки уменьшается.

Для зависимости между удлинением и растягивающей нагрузкой относительная разность между решениями задачи 2 и задачи 1 сохраняется в пределах 8%. Уменьшение этой величины не наблюдалось с изменением длины оболочки.

Глава 3. Большие деформации чистого изгиба цилиндрической оболочки, нагруженной внутренним давлением.

Исследованию изгиба тонкостенных цилиндрических оболочек посвящены работы: [32, 33, 35, 41, 42, 48, 49, 57, 59, 64, 65, 69, 76, 77, 78, 82, 83, 86, 88, 89, 90, 93, 95] и др. Влияние внутреннего давления на деформацию оболочки рассматривается в следующих публикациях [35, 42, 48, 49, 57, 59, 64, 69, 76, 77, 78, 86, 88, 90, 93] и др.

В 1927 году Бразье [41] исследовал неустойчивость тонкостенных труб при изгибе. Он показал, что когда начально несогнутая труба постепенно изгибается, то поперечное сечение трубы принимает овальную форму. Овальзация сечения увеличивается с увеличением кривизны. Это в свою очередь уменьшает момент инерции сечения, а, следовательно, изгибную жесткость мембраны, и приводит к нелинейной зависимости между нагрузкой и деформацией. Более того, Бразье показал, что при строго возрастающей кривизне изгибающий момент имеет точку максимума, которая характеризуется как критический момент потери устойчивости. (В иностранной литературе этот эффект получил название эффект Бразье.) Позже полученные результаты были расширены на случай наличия внешнего или внутреннего давления в работе [93]. Рейсснер в ряде работ [76, 77, 78] исследовал проблему изгиба с помощью вариационных методов. Приближенное решение полученной нелинейной задачи сходилось с результатами исследований [41] и [93]. В дальнейшем было показано, что точное решение нелинейных уравнений Рейсснера имеет расхождение с решением Бразье [48], [35]. Теория, основанная на эффекте Бразье, была развита на анизотропные оболочки, цилиндры конечной длины, армированные оболочки [32, 33, 65, 82, 83] и др. В частности, в работе [82] показано, что для оболочки конечной длины локальное выпучивание почти всегда происходит до достижения предельного момента.

Другой подход к исследованию надувных цилиндрических оболочек был предложен в работе Fitcher [49]. Линеаризованные уравнения равновесия

надувных балок [49], полученные из принципа минимума потенциальной энергии в рамках линейной теории упругости, в общем, эквивалентны уравнениям равновесия теории балок Тимошенко. В дальнейших публикациях [64, 86, 88, 89, 90] развивается этот подход на анизотропные и армированные оболочки, теория расширяется на случай конечных поворотов.

В выше перечисленных работах используются гипотезы малых деформаций, а уравнения равновесия линейризуются. Проблеме нелинейного изгиба цилиндрической оболочки посвящены работы [57, 59, 95].

В работе [57] рассматривается изгиб круговой цилиндрической мембраны из резиноподобного материала, для которой деформация характеризуется малыми удлинениями, полученными от изгиба, наложенными на известное состояние конечной деформации, полученное в результате раздувания оболочки.

В рамках нелинейной теории упругости решение задачи об изгибе цилиндрической оболочки полуобратным методом предложено Л. М. Зубовым в работе [95].

В этой главе рассмотрена нелинейная задача об изгибе гибкой упругой конструкции, которая является своеобразным стержнем со сложным внутренним строением. Этот стержень представляет собой длинную тонкостенную высокоэластичную замкнутую цилиндрическую оболочку, нагруженную внутренним давлением.

В первом параграфе представлена теория сильного изгиба замкнутой цилиндрической оболочки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой изнутри [95]. Теория основана на сведении первоначально нелинейной двумерной задачи статики оболочки к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [95].

Во втором параграфе исследован случай круговой цилиндрической оболочки из неогуковского материала. Показано, что для неогуковского материала существуют безразмерные параметры, относительно которых

искомые безразмерные величины не зависят от геометрических размеров недеформированной оболочки и постоянной материала. Представлены численные результаты исследования напряженно-деформированного состояния изогнутой оболочки. Предложены приближенные формулы расчета зависимости изгибающего момента от давления и кривизны оси деформированной оболочки.

3.1. Сведение задачи чистого изгиба к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим замкнутую цилиндрическую оболочку и введём декартовы координаты x_1, x_2, x_3 так, чтобы образующая цилиндра была параллельна оси координат x_3 . В выбранной системе координат положение точки поверхности оболочки до деформации представится в виде

$$\mathbf{r} = x_1(q^1)\mathbf{i}_1 + x_2(q^1)\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3. \quad (3.1.1)$$

Здесь, как и ранее, за q^1 и $q^2 = x_3$ обозначаются гауссовы координаты оболочки.

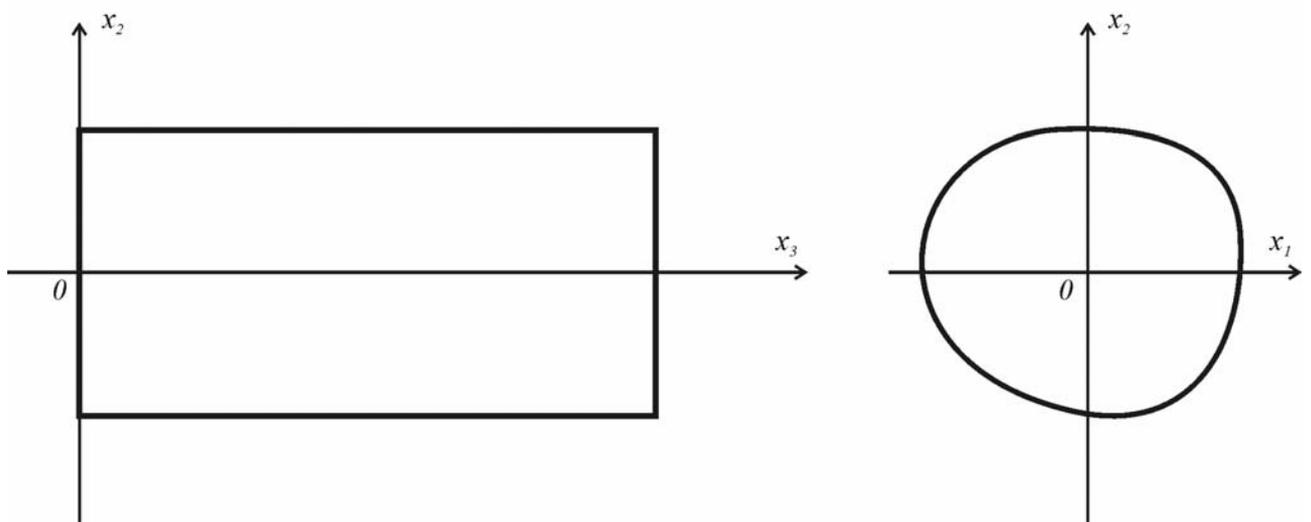


Рис. 3.1.1. Цилиндрическая оболочка.

Считаем, что толщина недеформированной цилиндрической оболочки постоянна вдоль образующей, т.е. удовлетворяет условию (1.3.2).

Поверхность оболочки после деформации будет задаваться уравнениями [95]

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \alpha(q^1)\mathbf{i}_1 + \gamma(q^1)\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_2 &= \cos(\beta x_3)\mathbf{i}_2 + \sin(\beta x_3)\mathbf{i}_3, \quad \beta = \text{const}. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Формулы (3.1.2) описывают изгиб цилиндрической оболочки, при котором она превращается в сектор тороидальной оболочки.

Основной и взаимный базисы, связанные с поверхностью оболочки до и после деформации (1.1.1), (1.1.3), примут вид

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= x'_1(q^1)\mathbf{i}_1 + x'_2(q^1)\mathbf{i}_2, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{R}_1 &= \alpha'(q^1)\mathbf{i}_1 + \gamma'(q^1)\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{R}_2 = \beta\gamma(q^1)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3 &= -\sin(\beta x_3)\mathbf{i}_2 + \cos(\beta x_3)\mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Вектор нормали к срединной деформированной поверхности (1.3.8) определяется соотношением

$$\mathbf{N} = \frac{\gamma'\mathbf{i}_1 - \alpha'\mathbf{e}_2}{\sqrt{\alpha'^2 + \gamma'^2}}. \quad (3.1.4)$$

Компоненты первого фундаментального тензора срединной поверхности до и после деформации (1.1.2), (1.1.4) удовлетворяют условиям (1.3.1) и (1.3.3) и выражаются уравнениями

$$\begin{aligned} g_{11} &= x_1'^2 + x_2'^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = 1, \\ G_{11} &= \alpha'^2 + \gamma'^2, \quad G_{12} = 0, \quad G_{22} = \beta^2\gamma^2. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

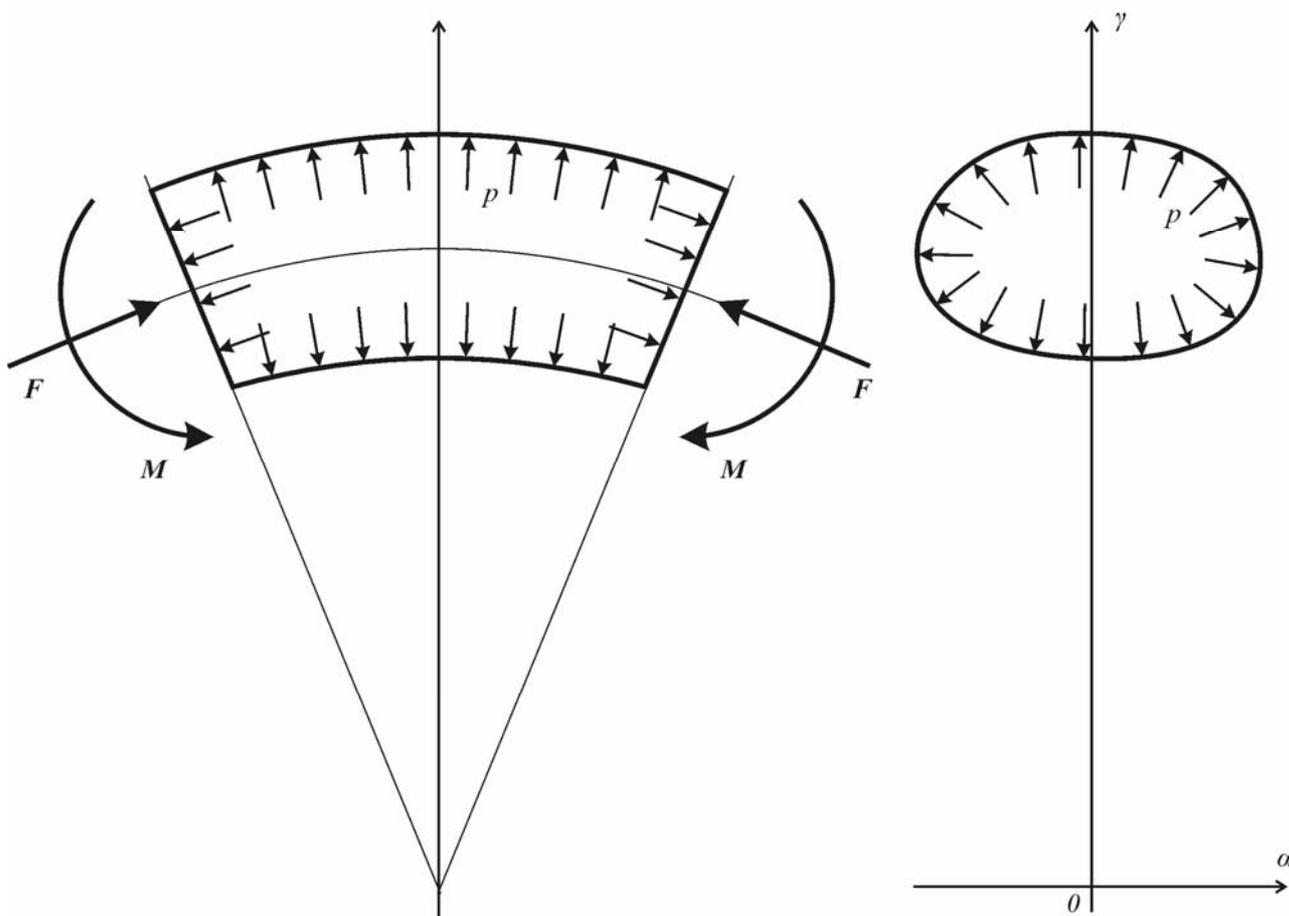


Рис. 3.1.2. Изгиб цилиндрической оболочки.

В первом разделе второй главы из первого уравнения системы (1.3.12), преобразованиями (2.1.4) – (2.1.6), (2.1.8) и (2.1.9) – (2.1.14) получены уравнения (2.1.7) и (2.1.15), для случаев задания функции потенциальной энергии W^* как функции кратностей удлинений λ_1, λ_2 или как функции инвариантов I_1, I_2 меры деформации $\mathbf{\Lambda}$, соответственно. Уравнения (2.1.7) и (2.1.15) получены в терминах кратностей удлинений и компонент метрического тензора недеформированной поверхности с ограничениями (1.3.1), (1.3.2) и (1.3.3). Поэтому легко видеть, что уравнения (2.1.7) и (2.1.15), выведенные из первого уравнения системы (1.3.12), справедливы и для рассматриваемой в данной главе задачи с заданными компонентами метрических тензоров (3.1.5).

Компоненты тензора кривизны \mathbf{B} (1.3.8) с помощью (3.1.3) и (3.1.4) выразятся соотношениями

$$B_{11} = \frac{\alpha''\gamma' - \gamma''\alpha'}{\sqrt{\alpha'^2 + \gamma'^2}}, \quad B_{12} = 0, \quad B_{22} = \frac{\beta^2\gamma\alpha'}{\sqrt{\alpha'^2 + \gamma'^2}}. \quad (3.1.6)$$

По аналогии с (2.1.17) введем в рассмотрение функции

$$\omega(q^1) = \frac{\alpha'(q^1)}{\gamma'(q^1)}, \quad \Omega(q^1) = \frac{\gamma'(q^1)}{\alpha'(q^1)}. \quad (3.1.7)$$

Полагаем, что $\alpha'(q^1)$ и $\gamma'(q^1)$ одновременно не обращаются в ноль, что имеет физический смысл. Тогда соотношения (3.1.6) с учетом (3.1.5) представляются в виде

$$B_{11} = \frac{\omega'\lambda_2'^2}{\beta^2\sqrt{g_{11}}\lambda_1}, \quad B_{12} = 0, \quad B_{22} = \frac{\omega\lambda_2\lambda_2'}{\sqrt{g_{11}}\lambda_1}. \quad (3.1.8)$$

Функции λ_1 , λ_2 и ω связаны дифференциальным соотношением, которое можно получить из уравнений (1.2.21), (3.1.5) и (3.1.7) в форме

$$\lambda_2' = s\beta\sqrt{\frac{g_{11}\lambda_1^2}{1+\omega^2}}, \quad s = \text{sgn}(\gamma'(q^1)).$$

Третье уравнение системы (1.3.12), с помощью соотношений (1.2.22) и (3.1.8), преобразуем к уравнению относительно функций главных кратностей удлинений λ_1 , λ_2 и функции ω

$$E_1^\lambda \omega' + E_2^\lambda \omega + \frac{\xi}{h} E_3^\lambda = 0. \quad (3.1.9)$$

Здесь использованы обозначения

$$E_1^\lambda = \frac{g_{22}\lambda_2'^2}{\lambda_1} \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_1},$$

$$E_2^\lambda = \beta^2 g_{11} \lambda_2' \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_2}, \quad (3.1.10)$$

$$E_3^\lambda = \beta^2 \sqrt{g_{11}^3} g_{22} \lambda_1^2 \lambda_2.$$

В случае задания определяющих соотношений в виде (1.3.6), дифференцируя потенциальную энергию $W^*(I_1(\lambda_1, \lambda_2), I_2(\lambda_1, \lambda_2))$ как сложную функцию, уравнение (3.1.9), (3.1.10) можно представить в виде

$$E_1^I \omega' + E_2^I \omega + \frac{\xi}{h} E_3^I = 0,$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} E_1^I &= g_{22} \lambda_2'^2 P_1 Q_1, \\ E_2^I &= \beta^2 g_{11} \lambda_2 \lambda_2' P_2 Q_2, \\ E_3^I &= \frac{1}{2} \beta^2 \sqrt{g_{11}^3} g_{22} \lambda_1^2 \lambda_2. \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Разрешающая система уравнений относительно функций λ_1 , λ_2 , ω , полученная из системы уравнений (1.3.12), примет вид

$$\begin{aligned} F_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial q^1} + F_2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} + F_3 + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial q^1} F_4 + \frac{\xi^1}{h} F_5 &= 0, \\ E_1 \frac{\partial \omega}{\partial q^1} + E_2 \omega + \frac{\xi}{h} E_3 &= 0, \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} &= s \beta \lambda_1 \sqrt{\frac{g_{11}}{1 + \omega^2}}. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Величины F_k и E_l задаются соотношениями (2.1.7), (3.1.10) в случае задания потенциальной энергии деформации W^* как функции главных кратностей удлинений λ_1 , λ_2 или определяются из (2.1.15), (3.1.11), если функция энергии зависит от инвариантов I_1 , I_2 тензора меры деформации Λ .

В задаче рассматриваются замкнутые цилиндрические оболочки, поэтому граничными условиями будут условия периодичности неизвестных функций. Решение системы уравнений (3.1.12) полностью определяется заданием граничных условий. Функция $\alpha(q^1)$ входит в соотношения для функций $\lambda_1(q^1)$, $\lambda_2(q^1)$ и $\omega(q^1)$ только своими производными. Следовательно, при однозначно определенных функциях $\lambda_1(q^1)$, $\lambda_2(q^1)$ и $\omega(q^1)$ функция $\alpha(q^1)$ задается с точностью до константы, соответствующей жесткому смещению по оси x_1 .

Определим главный вектор F и главный момент M сил, действующих в произвольном сечении цилиндрической оболочки, нагруженной равномерно распределенным давлением и испытывающей деформацию вида (3.1.2).

Главный вектор \mathbf{F} будет складываться из равнодействующей от напряжений в сечении оболочки и равнодействующей равномерно распределенного нормального давления на сечении внутри оболочки

$$\mathbf{F}(x_3) = \int_L \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{L} dL + \iint_{\Sigma} p \mathbf{e}_3 d\Sigma. \quad (3.1.13)$$

Здесь L – сечение оболочки, Σ – поверхность сечения, ограниченная контуром L . Равнодействующую от равномерно распределенной нагрузки легко вычислить, зная площадь деформированного сечения. Принимая во внимание выражения для компонент тензора усилий \mathbf{L} (1.2.22) и векторов основного базиса (3.1.3), равнодействующая сил (3.1.13) примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x_3) &= F^3 \mathbf{e}_3 + p S_{\Sigma} \mathbf{e}_3, \\ F^3 &= \int_L \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{L} dL = \mathbf{e}_3 \int_a^b G_{22} L^{22} \sqrt{G_{11}} dq^1. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Здесь S_{Σ} – площадь сечения в текущей конфигурации, a, b – пределы изменения гауссовой координаты q^1 .

Рассмотрим два сечения изогнутой цилиндрической оболочки $x_3 = A$ и $x_3 = B$ (рис. 3.1.3). Действие сил давления внутри оболочки и результирующей напряжений по контуру сечения уравновешиваются приложенными внешними моментами M_A, M_B и силами F_A, F_B . Очевидно, что при любом изгибе, в силу произвольности сечений, внешние силы F_A и F_B уравновесятся только при равенстве нулю каждой из них. Следовательно, внешние моменты M_A и M_B не зависят от выбора точки приложения и равны между собой.

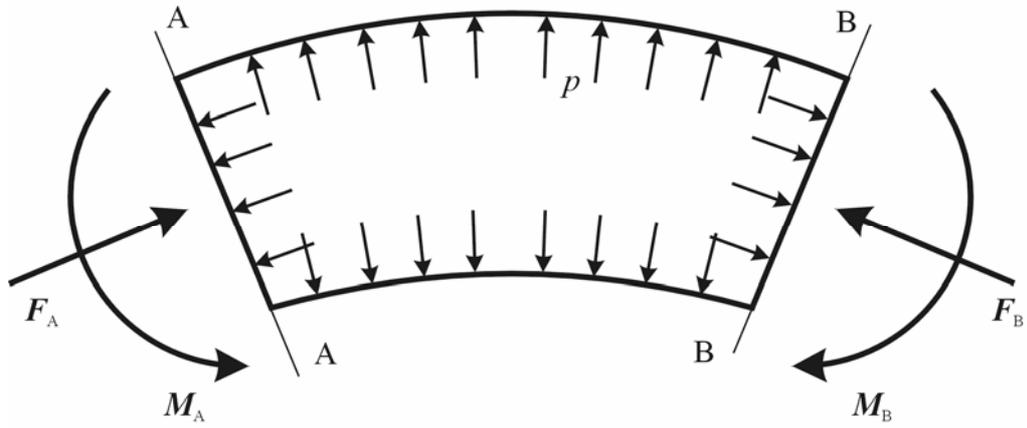


Рис. 3.1.3. Внешняя нагрузка на сечениях оболочки.

Главный момент M сил относительно начала координат определяется с помощью уравнения

$$M(x_3) = \int_L \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{L} \times \mathbf{R} dL + \iint_{\Sigma} p \mathbf{e}_3 \times \mathbf{P} d\Sigma, \quad (3.1.15)$$

$$\mathbf{P} = X^1 \mathbf{i}_1 + X^2 \mathbf{e}_2.$$

Здесь \mathbf{P} – радиус-вектор точки поверхности Σ .

Базис $\mathbf{i}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ постоянны на сечении оболочки. Давление p равномерно распределено по поверхности Σ . Тогда, зная координаты центра тяжести X^1_u, X^2_u фигуры Σ , ограниченной контуром L , второй интеграл уравнения (3.1.15) можно представить как момент равнодействующей силы в следующем виде

$$\iint_{\Sigma} p \mathbf{e}_3 \times \mathbf{P} d\Sigma = p \iint_{\Sigma} \mathbf{e}_3 \times (X^1 \mathbf{i}_1 + X^2 \mathbf{e}_2) d\Sigma = p S_{\Sigma} X^1_u \mathbf{e}_2 - p S_{\Sigma} X^2_u \mathbf{i}_1.$$

Момент сил от напряжений в оболочке представляется с помощью уравнения

$$\begin{aligned} \int_L \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{L} \times \mathbf{R} dL &= \int_a^b \sqrt{G_{11}} G_{22} L^{22} \mathbf{e}_3 (\alpha \mathbf{i}_1 + \gamma \mathbf{e}_2) dq^1 = \\ &= \mathbf{e}_2 \int_a^b \sqrt{G_{11}} G_{22} L^{22} \alpha dq^1 - \mathbf{i}_1 \int_a^b \sqrt{G_{11}} G_{22} L^{22} \gamma dq^1. \end{aligned}$$

Окончательно главный момент относительно начала координат запишется в виде

$$\mathbf{M}(x_3) = \mathbf{e}_2 \left(\int_a^b \sqrt{G_{11}} G_{22} L^{22} \alpha dq^1 + p S_{\Sigma} X_u^1 \right) - \mathbf{i}_1 \left(\int_a^b \sqrt{G_{11}} G_{22} L^{22} \gamma dq^1 + p S_{\Sigma} X_u^2 \right).$$

Легко видеть, что главный момент в сечении относительно центра тяжести фигуры Σ можно выразить соотношением

$$\mathbf{M}(x_3) = \mathbf{e}_2 \int_a^b \sqrt{G_{11}} G_{22} L^{22} (\alpha - X_u^1) dq^1 - \mathbf{i}_1 \int_a^b \sqrt{G_{11}} G_{22} L^{22} (\gamma - X_u^2) dq^1. \quad (3.1.16)$$

В этой главе была решена нелинейная задача о чистом изгибе гибкой упругой конструкции, которая является своеобразным стержнем со сложным внутренним строением. Стержень представляет собой длинную тонкостенную высокоэластичную замкнутую цилиндрическую оболочку, нагруженную внутренним давлением. Предложенная в работе теория сильного изгиба указанной конструкции основана на сведении первоначально нелинейной двумерной задачи статики оболочки к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

3.2. Анализ напряженно-деформированного состояния оболочки при изгибе.

Круговая цилиндрическая оболочка.

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку постоянной толщины h , для которой функции $x_1(q^1)$ и $x_2(q^1)$ из уравнений (3.1.1) заданы в форме

$$x_1(q^1) = r_0 \sin(q^1), \quad x_2(q^1) = r_0 \cos(q^1), \quad 0 \leq q^1 \leq 2\pi, \quad (3.2.1)$$

где $r_0 = \text{const}$ – радиус цилиндра.

Внешняя нагрузка (1.3.11), соответствующая равномерно распределенному нормальному давлению интенсивности p , задается с помощью уравнений

$$\xi = -p, \quad \xi^1 = \xi^2 = 0. \quad (3.2.2)$$

Граничные условия периодичности неизвестных функций задаются уравнениями

$$\lambda_1(0) = \lambda_1(2\pi), \lambda_2(0) = \lambda_2(2\pi), \omega(0) = \omega(2\pi). \quad (3.2.3)$$

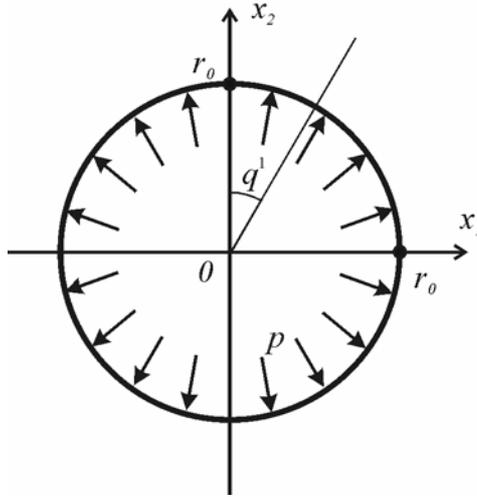


Рис. 3.2.1. Сечение круговой цилиндрической оболочки в отсчетной конфигурации.

Свойства материала будем описывать неогуковской функцией потенциальной энергии (1.2.3) с константой материала c_1 .

Пусть существует некоторое решение задачи об изгибе поверхности, сечение которой до деформации задается с помощью уравнений (3.2.1). Т. е. для заданного параметра β известны функции $\alpha(q^1)$, $\gamma(q^1)$ (3.1.2), удовлетворяющие уравнениям (1.3.12) и условиям периодичности. Построенные по этим функциям кратности удлинений $\lambda_1(q^1)$, $\lambda_2(q^1)$ и функция $\omega(q^1)$ соответственно удовлетворяют краевой задаче (3.1.12), (3.2.3).

Легко видеть, что в силу соотношений для компонент первого фундаментального тензора недеформированной поверхности оболочки (3.1.5), постоянства толщины и вида нагрузки (3.2.2) слагаемые F_3 , $\frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial q^1} F_4$ и $\frac{\xi^1}{h} F_5$ равны нулю. Первая производная функции потенциальной энергии W^* (1.2.3) по второму инварианту I_2 , и все вторые производные обнулятся. Таким образом, вычисляя оставшиеся коэффициенты F_1 , F_2 , E_1 , E_2 , E_3 и подставляя их в систему (3.1.12), получим следующие уравнения

$$\left(2 + \frac{6}{\lambda_1^4 \lambda_2^2}\right) \frac{\partial \lambda_1}{\partial q^1} + 2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left(\frac{5}{\lambda_1^4 \lambda_2^2} - 2 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}\right) \frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} = 0,$$

$$\frac{2\lambda_2'^2}{\beta^2 \sqrt{g_{11}}} \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^4 \lambda_2^2}\right) \frac{\partial \omega}{\partial q^1} + 2\sqrt{g_{11}} \omega \lambda_2 \lambda_2' \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^4}\right) \omega + \frac{p}{hc_1} g_{11} \lambda_1^2 \lambda_2 = 0, \quad (3.2.4)$$

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} = s\beta \sqrt{\frac{\lambda_1^2 g_{11}}{1 + \omega^2}}.$$

Краевая задача (3.2.4), (3.2.3) удовлетворяется тождественно, т. к. функции $\lambda_1(q^1)$, $\lambda_2(q^1)$ и $\omega(q^1)$ являются ее решением по определению.

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку радиуса $k_1 r_0$, для которой функции $\tilde{x}_1(q^1)$ и $\tilde{x}_2(q^1)$ задаются в виде

$$\tilde{x}_1(q^1) = k_1 r_0 \sin(q^1), \quad \tilde{x}_2(q^1) = k_1 r_0 \cos(q^1), \quad 0 \leq q^1 \leq 2\pi. \quad (3.2.5)$$

Начальную толщину оболочки считаем постоянной и равной $\tilde{h} = k_2 h$.

Внешняя нагрузка (1.3.11) задается с помощью уравнений

$$\tilde{\xi} = -k_3 p, \quad \xi^1 = \xi^2 = 0. \quad (3.2.6)$$

Значение параметра изгиба определим равенством $\tilde{\beta} = k_4 \beta$. Материал, из которого состоит оболочка, считаем неогуксовским с константой равной $\tilde{c}_1 = k_5 c_1$.

Решение задачи $\tilde{\alpha}(q^1)$ и $\tilde{\gamma}(q^1)$ будем искать в виде

$$\tilde{\alpha}(q^1) = k_1 \alpha(q^1), \quad \tilde{\gamma}(q^1) = k_1 \gamma(q^1). \quad (3.2.7)$$

Здесь k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 – некоторые постоянные коэффициенты.

Из (3.2.5), (3.1.5), (3.2.7) и (1.2.21) следует, что справедливы соотношения

$$\tilde{\lambda}_1(q^1) = \lambda_1(q^1), \quad \tilde{\lambda}_2(q^1) = k_1 k_4 \lambda_2(q^1), \quad \tilde{\omega}(q^1) = \omega(q^1). \quad (3.2.8)$$

Функции $\tilde{\alpha}(q^1)$ и $\tilde{\gamma}(q^1)$ удовлетворяют краевым условиям периодичности в силу (3.2.7). Для того чтобы они были решением задачи об изгибе (1.3.12), необходимо, чтобы функции $\tilde{\lambda}_1(q^1)$, $\tilde{\lambda}_2(q^1)$ и $\tilde{\omega}(q^1)$ удовлетворяли системе уравнений (3.2.4). Краевые условия (3.2.3)

удовлетворяются в силу соотношений (3.2.8). Из (3.2.5) следует, что компоненты первого фундаментального тензора недеформированной поверхности задаются уравнениями

$$\tilde{g}_{11} = k_1^2 g_{11}, \quad \tilde{g}_{12} = 0, \quad \tilde{g}_{22} = 1. \quad (3.2.9)$$

Подставим полученные соотношения в уравнения (3.2.4), получим систему

$$\begin{aligned} & \left(2 + \frac{6}{\lambda_1^4 (k_1 k_4 \lambda_2)^2} \right) \frac{\partial \lambda_1}{\partial q^1} + \\ & + 2 \frac{\lambda_1}{k_1 k_4 \lambda_2} \left(\frac{5}{\lambda_1^4 (k_1 k_4 \lambda_2)^2} - 2 - \frac{\lambda_1^2}{(k_1 k_4 \lambda_2)^2} \right) (k_1 k_4) \frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} = 0, \\ & \frac{2\lambda_2'^2}{\beta^2 \sqrt{g_{11}}} \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^4 (k_1 k_4 \lambda_2)^2} \right) \frac{\partial \omega}{\partial q^1} + \\ & + 2\sqrt{g_{11}} \omega (k_1 k_4)^2 \lambda_2 \lambda_2' \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^2 (k_1 k_4 \lambda_2)^4} \right) \omega + \frac{k_4 k_3 p}{k_2 k_5 h c_1} g_{11} \lambda_1^2 \lambda_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} = s\beta \sqrt{\frac{\lambda_1^2 g_{11}}{1 + \omega^2}}.$$

Наложим следующие ограничения на коэффициенты k_3 и k_4

$$k_3 = \frac{k_5 k_2}{k_1}, \quad k_4 = \frac{1}{k_1}. \quad (3.2.11)$$

Тогда система (3.2.10) в точности совпадает с системой (3.2.4), и следовательно функции $\lambda_1(q^1)$, $\lambda_2(q^1)$ и $\omega(q^1)$ являются решением системы (3.2.10).

Компоненты тензора усилий (2.1.10) представляются в виде

$$\begin{aligned} \tilde{L}^{11} &= \frac{k_2 k_5}{k_1^2} \frac{2hc_1}{g_{11} \lambda_1 \lambda_2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^4 \lambda_2^2} \right) = \frac{k_2 k_5}{k_1^2} L^{11}, \\ \tilde{L}^{22} &= k_2 k_5 \frac{2hc_1}{g_{22} \lambda_1 \lambda_2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^4} \right) = k_2 k_5 L^{22}. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Изгибающий момент (3.1.16) и равнодействующая (3.1.14) в сечении выразятся соотношениями

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{F}}(x_3) &= k_1 k_2 k_5 \mathbf{F}(x_3), \\ \tilde{\mathbf{M}}(x_3) &= k_1^2 k_2 k_5 \mathbf{M}(x_3)\end{aligned}\tag{3.2.13}$$

В задаче об изгибе имеют место следующие определяющие параметры

$$r_0, h, c_1, p, \beta,\tag{3.2.14}$$

где r_0 – радиус оболочки, h – её толщина, c_1 – постоянная материала, p – интенсивность давления, β – погонный (т. е. рассчитанный на единицу длины оси оболочки) угол поворота сечения оболочки при её изгибе. Параметр β можно назвать также кривизной оси деформированной оболочки. Из пяти параметров (3.2.12), учитывая (3.2.11), можно образовать две безразмерные независимые комбинации:

$$p^* = \frac{pr_0}{c_1 h}, \quad \beta^* = \beta r_0.\tag{3.2.15}$$

В силу (3.2.7) и (3.2.13), искомые величины представим в безразмерном виде следующим образом

$$\begin{aligned}\alpha^* &= \frac{\alpha}{r_0}, \quad \gamma^* = \frac{\gamma}{r_0}, \quad M^* = \frac{M}{c_1 r_0^2 h}, \quad F^* = \frac{F}{c_1 r_0 h}, \\ T_{11}^* &= \frac{G_{11} L^{11}}{c_1 h}, \quad T_{22}^* = \frac{G_{22} L^{22}}{c_1 h}, \quad H^* = \frac{H}{h}, \quad S^* = \frac{S}{\pi r_0^2}\end{aligned}\tag{3.2.16}$$

Здесь M – компонента вектора главного момента \mathbf{M} (3.1.16) на ось \mathbf{i}_1 , в силу симметрии задачи относительно оси \mathbf{e}_2 , другая компонента равна нулю; F – величина равнодействующей \mathbf{F} (3.1.14), $H = H(q^1)$ – толщина деформированной оболочки, S – площадь её поперечного сечения.

Таким образом, в задаче об изгибе круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины, изготовленной из неогукковского материала, выполняются условия подобия [24]. Существуют безразмерные параметры p^* и β^* (3.2.15), для которых безразмерные искомые величины (3.2.16) не зависят от исходных определяющих параметров r_0, h, c_1 (3.2.14).

Результаты

В дальнейшем, будут рассматриваться только безразмерные величины, определяемые соотношениями (3.2.15) и (3.2.16), и обозначавший их индекс «*» будет опускаться.

Формы сечений деформированной оболочки для разных случаев величин давления и изгиба представлены на рисунке 3.2.2. По оси абсцисс отложен параметр α . По оси ординат отложена величина $(\gamma - \gamma_c)$, где γ_c – средняя координата сечения. В силу симметрии задачи на рисунке 3.2.2 отображены только половины сечений оболочки. Пунктирной линией обозначена форма недеформированного сечения. Параметры изображенных на рисунке 3.2.2 графиков приведены в таблице 3.2.1. Номера в первой колонке таблицы 3.2.1 соответствует номерам кривых на рисунке 3.2.2–3.2.5.

Таблица 3.2.1. Значения параметров для графиков представленных на рисунках 3.2.2–3.2.5.

№	p	β
1	1.0	0.005
2	1.0	0.3
3	1.0	0.4
4	0.2	0.005
5	0.2	0.12
6	0.2	0.2

Напряжения в оболочке представлены на рисунках 3.2.3–3.2.4. Напряжения T_{11} вдоль меридиана цилиндра всегда положительны и достигают максимума в точке $q^1 = \pi$ (рис. 3.2.3).

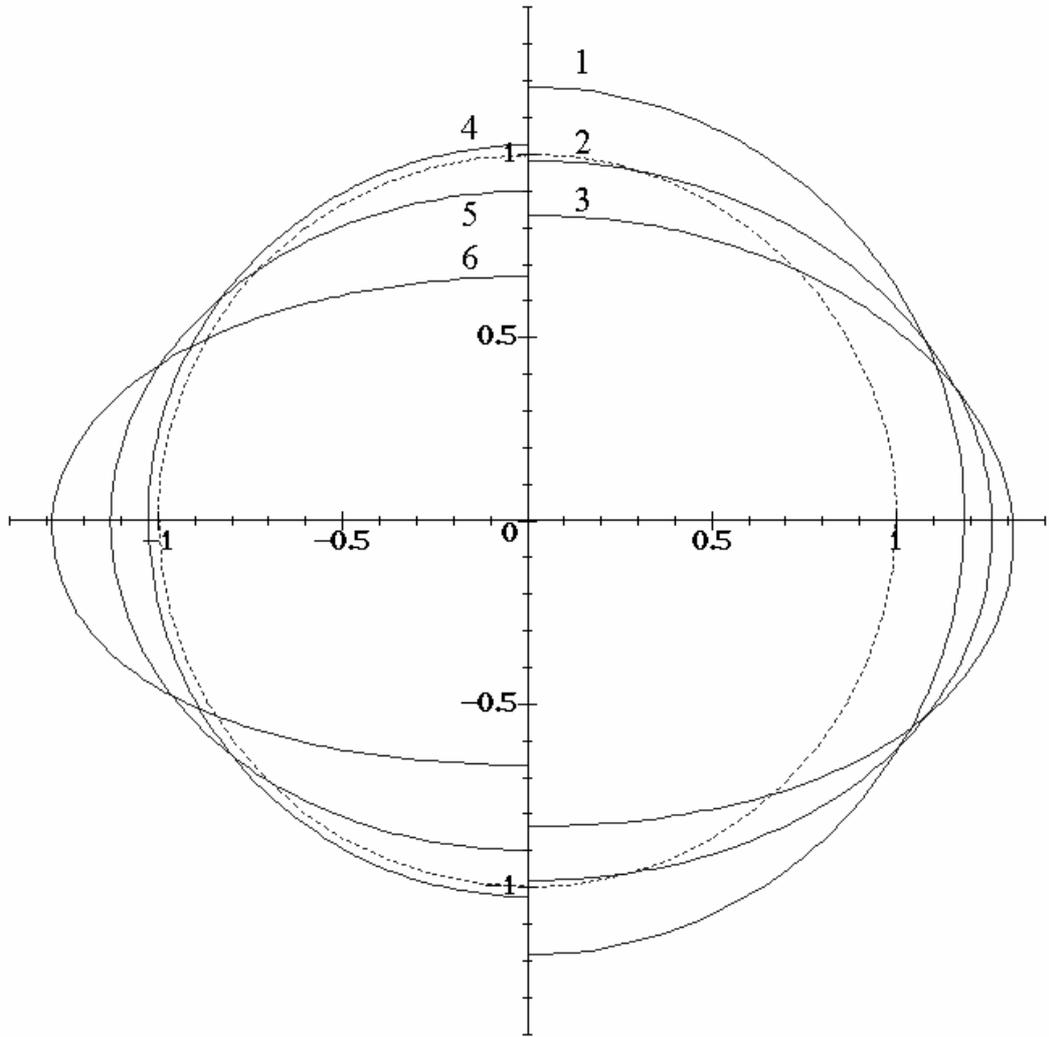


Рис. 3.2.2. Форма сечения деформированной оболочки.

Напряжения T_{22} вдоль образующей цилиндра для малых значений кривизны положительные (рис. 3.2.4). На всем рассматриваемом диапазоне изгиба максимум растягивающих напряжений достигается в точке $q^1 = 0$. С ростом изгиба в оболочке появляются сжимающие напряжения в окрестности точки $q^1 = \pi$. Сжимающие напряжения растут по величине с увеличением изгиба, а область их действия расширяется. Максимальное сжимающее

напряжение достигается в точке $q^1 = \pi$ и по абсолютной величине не превосходит максимального растягивающего напряжения.

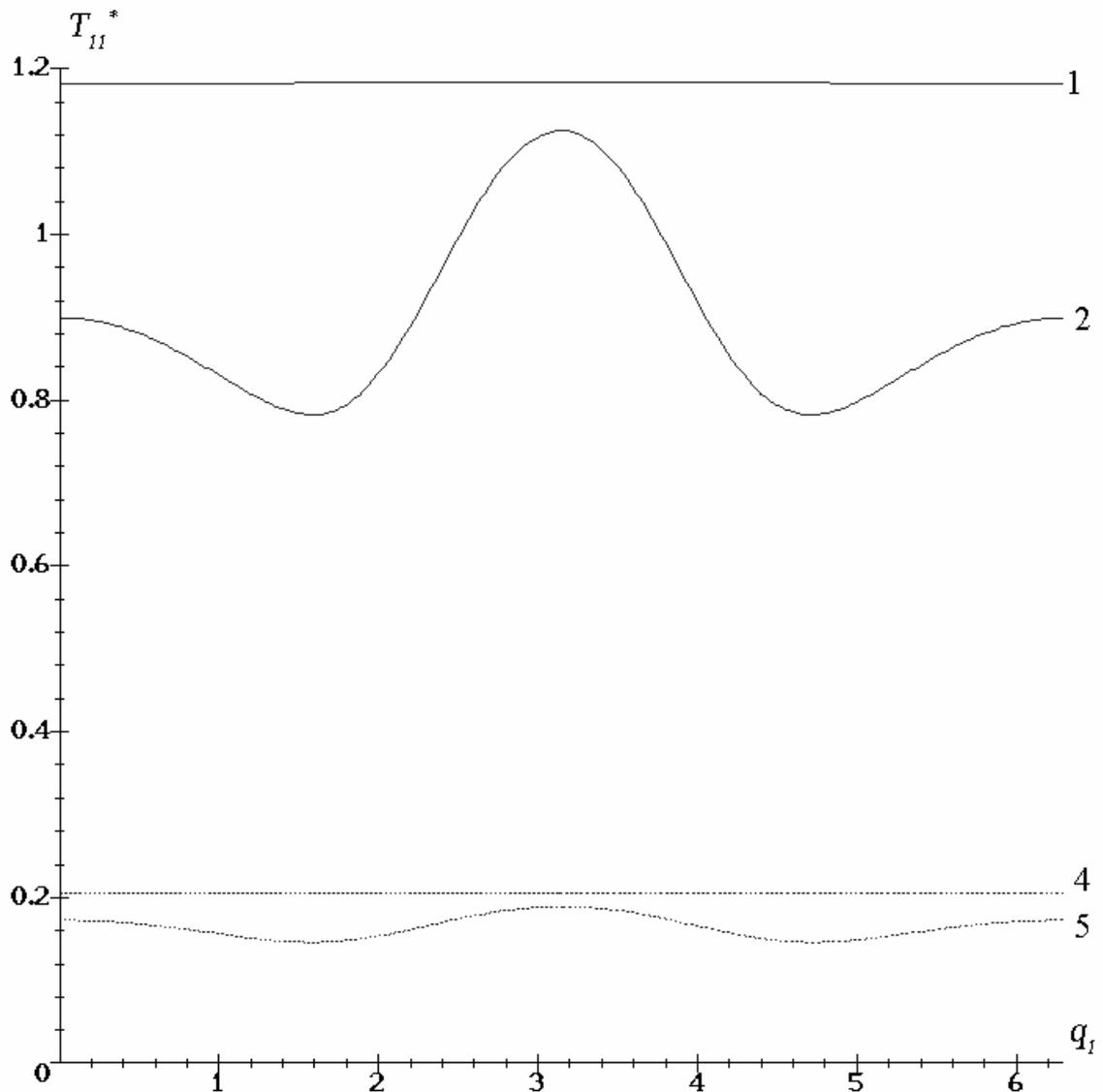


Рис. 3.2.3. Напряжения T_{II} .

В предыдущем параграфе было показано, что равнодействующая сил (3.1.14), действующих на сечение рассматриваемой упругой конструкции, должна равняться нулю. Численные расчеты показали, что это условие соблюдается.

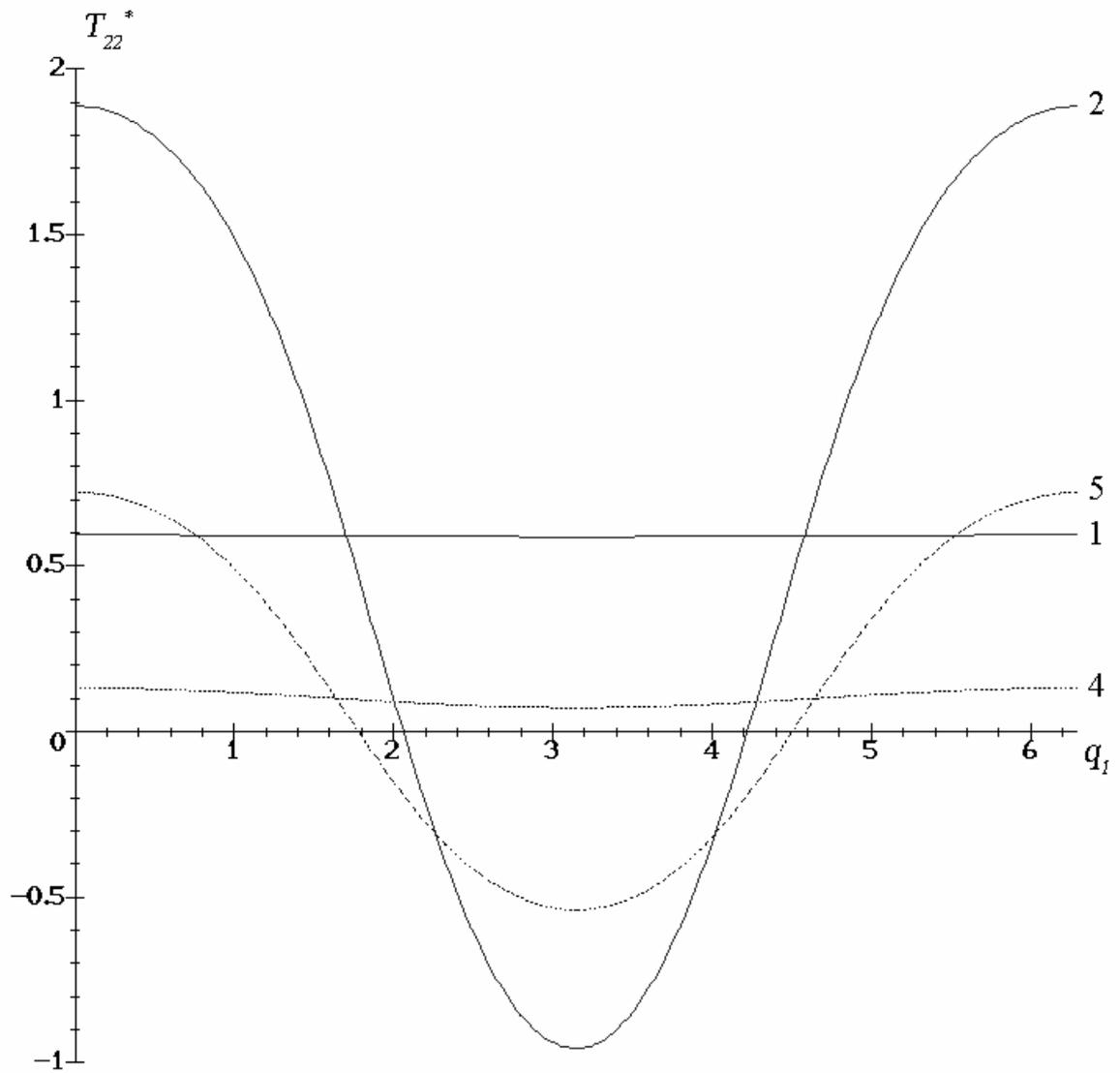


Рис. 3.2.4. Напряжения T_{22} .

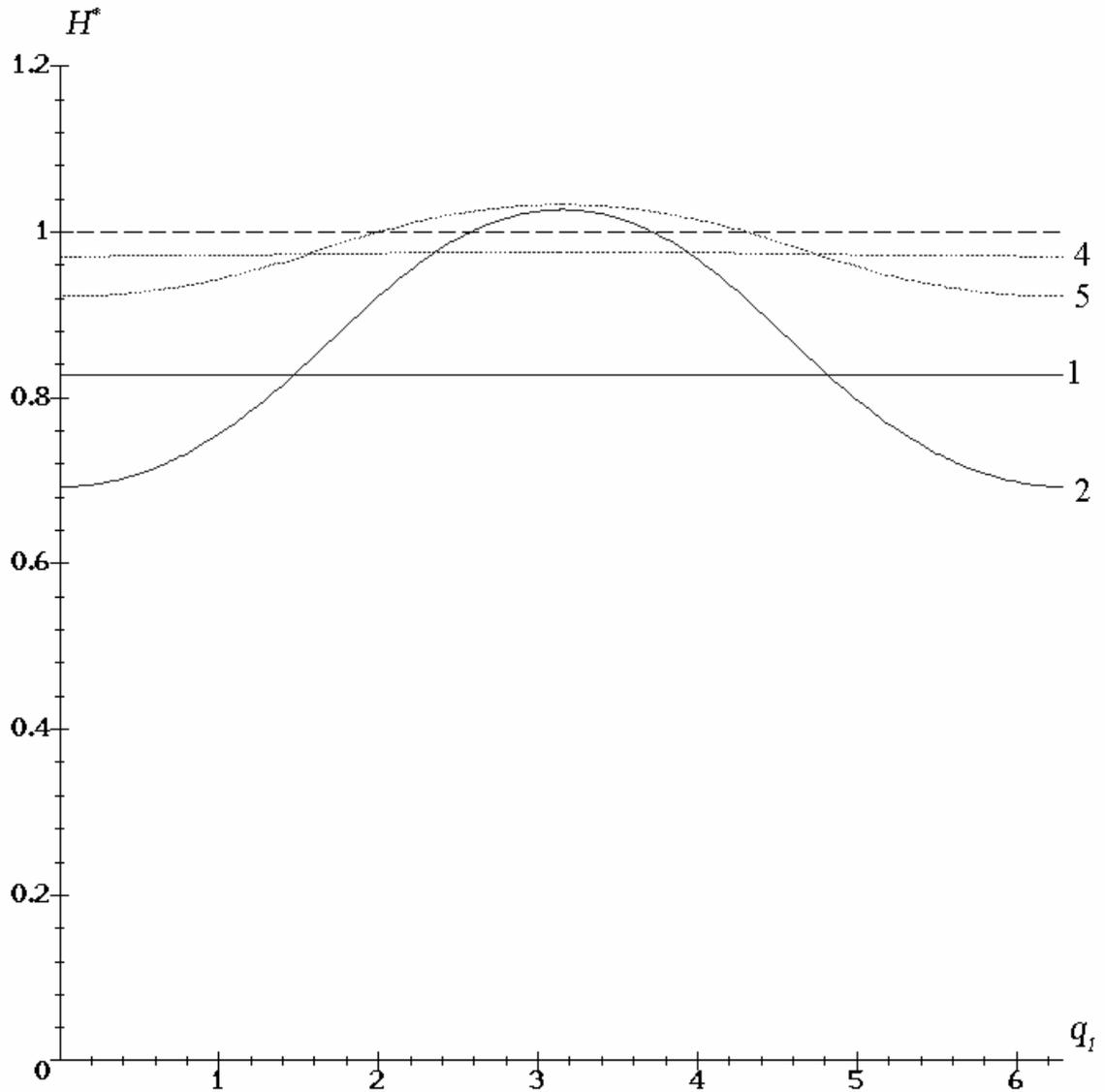


Рис. 3.2.5. Толщина H .

Изменение толщины оболочки изображено на рисунке 3.2.7. Максимальное утончение будет происходить в точке $q^1 = 0$. В точке $q^1 = \pi$ деформированная оболочка будет иметь максимальную толщину, которая, начиная с некоторой величины изгиба, будет превосходить толщину недеформированной оболочки.

Влияние внутреннего давления на изгиб цилиндра.

В силу симметричности задачи относительно оси координат направленной по орту e_2 , главный момент будет направлен вдоль вектора i_1 . Момент сил рассматриваем относительно центра тяжести сечения оболочки (3.1.16).

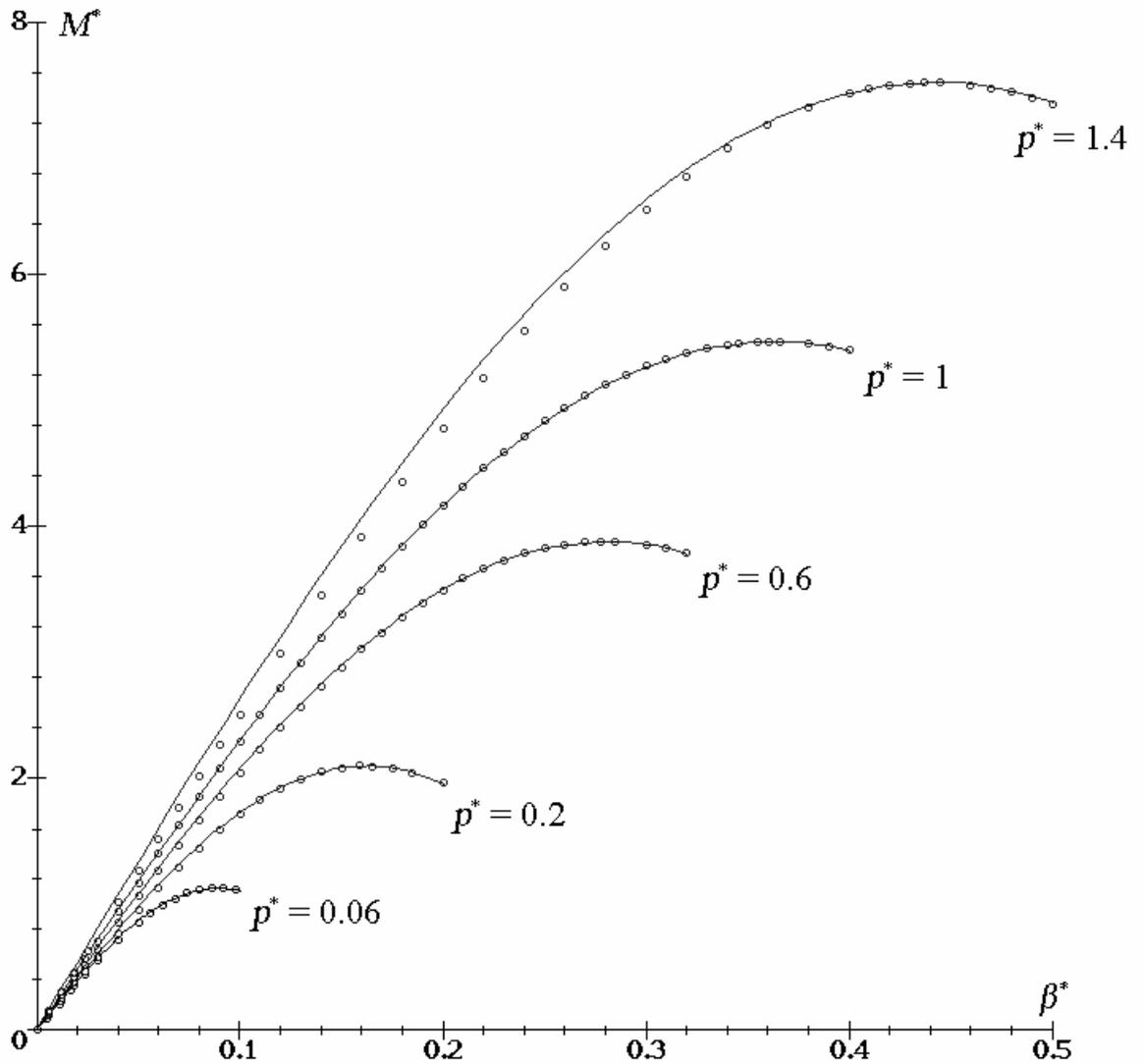


Рис. 3.2.6. Зависимость изгибающего момента от кривизны для разных величин давления.

На рисунке 3.2.6 точками обозначена кривая зависимости абсолютной величины внешнего изгибающего момента M от кривизны оси деформированной оболочки β для различных величин давления. По оси абсцисс отложена кривизна β , по оси ординат изгибающий момент M (3.2.16). Величины давления p представлены на рисунке.

Численные результаты свидетельствуют о том, что рост внутреннего давления приводит к увеличению изгибной жесткости исследуемой упругой конструкции. Кроме того, величина момента в зависимости от кривизны имеет точку максимума для всего рассматриваемого диапазона величин давления.

В процессе деформации с одной стороны раздувание цилиндрической оболочки увеличивает площадь её сечения, с другой стороны изгибание цилиндра сплющивает изначально круговое сечение, уменьшая его площадь. Влияние кривизны изогнутой оболочки на её площадь для различных величин давления представлено на рисунке 3.2.7. По горизонтальной оси отложена кривизна β , по вертикальной оси – площадь деформированного сечения S , отнесенная к площади начального сечения. Пунктирной линией на рисунке обозначена относительная площадь недеформированного сечения.

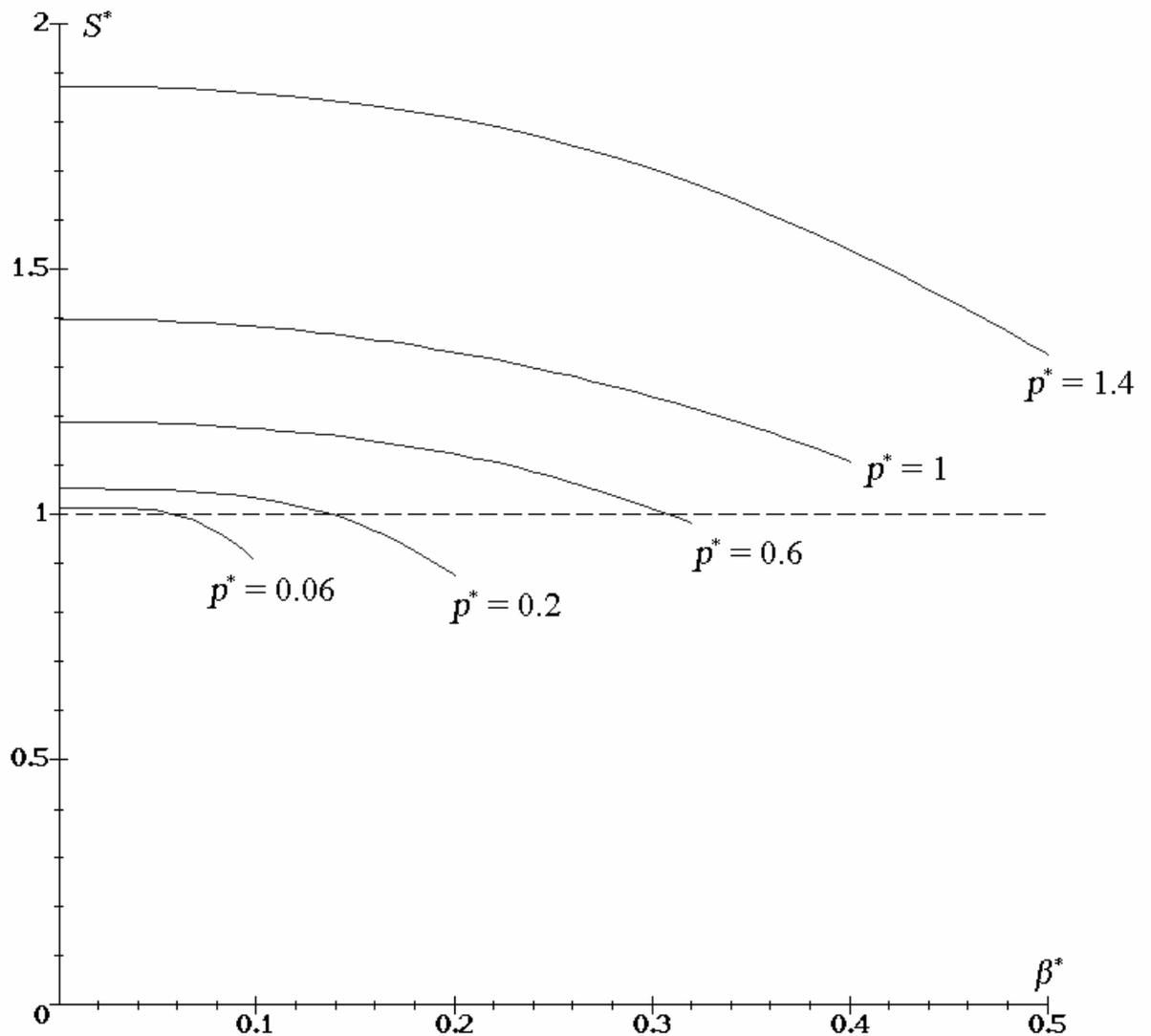


Рис. 3.2.7. Зависимость площади сечения деформированной оболочки от кривизны для разных величин давления.

Для всех рассмотренных случаев изгибающий момент имеет точку максимума. Величина максимума момента существенно зависит от давления внутри цилиндра. Эта зависимость представлена на рисунке 3.2.8 крестиками. Величины кривизны оболочки, соответствующие максимальному изгибающему моменту, в зависимости от давления представлены кривой отмеченной крестиками на рисунке 3.2.9. На рисунках 3.2.8 и 3.2.9 по оси абсцисс отложено давление p , по оси ординат – величины M, β .

Для вычисления величины максимального изгибающего момента и соответствующей ему кривизны в зависимости от величины давления предлагаются следующие приближенные формулы в безразмерном виде, для диапазона изменения давления $p \in [0, 1.4]$:

$$\begin{aligned} M_{\max} &= 4.77\sqrt{p} + 0.68p^2, \\ \beta_{\max} &= 0.364\sqrt{p}. \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

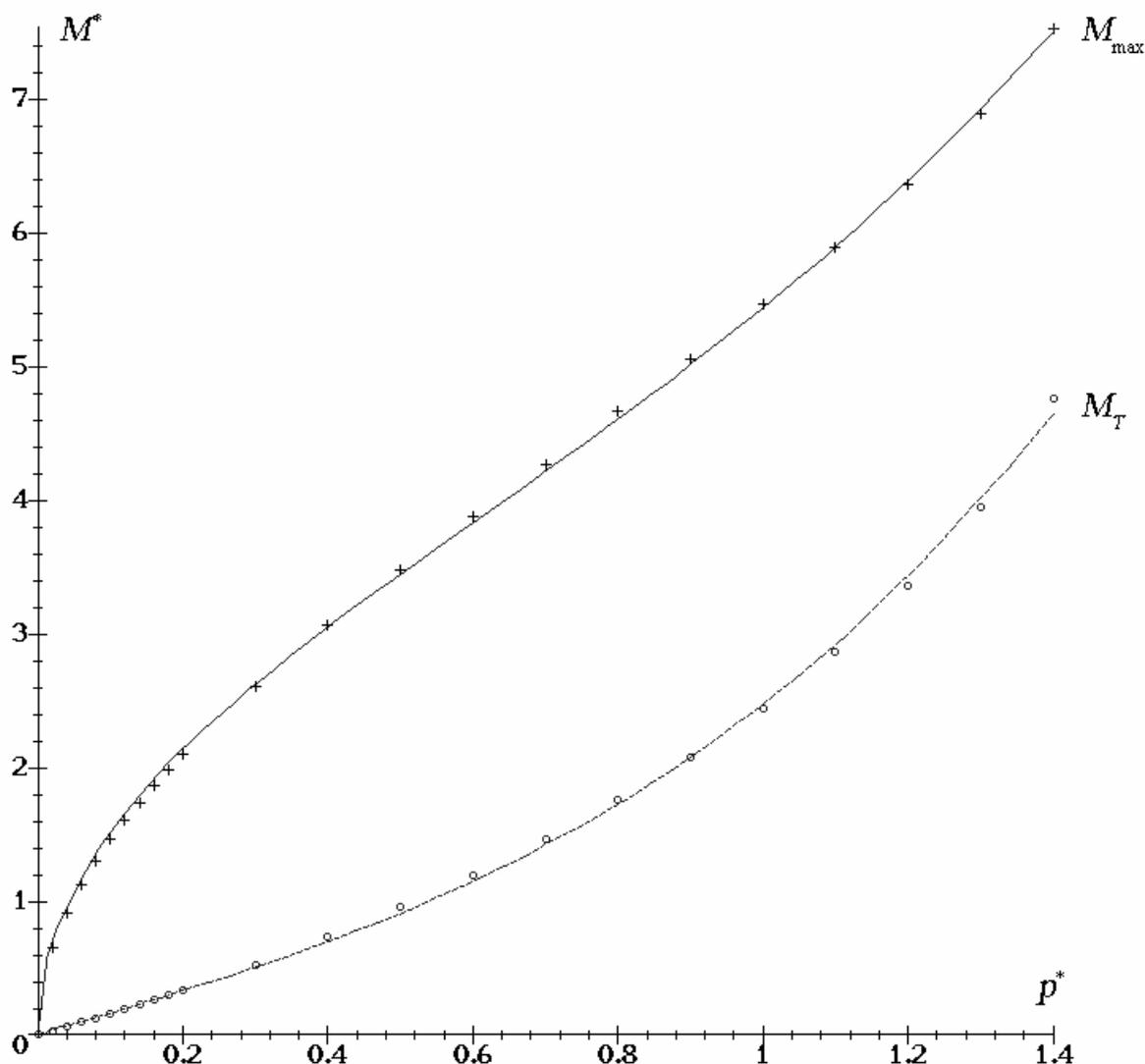


Рис. 3.2.8. Зависимость величины максимального момента M_{\max} и изгибающего момента M_T , соответствующего появлению сжимающих напряжений, от величины давления.

На рисунках 3.2.8 и 3.2.9 сплошная линия соответствует графикам функций (3.2.17). В таблице 3.2.2 дается численное сравнение этих величин. Абсолютная величина относительной погрешности предложенных формул с численными результатами для изгибающего момента составляет менее 5% для величины давления $p < 0.2$ и не более 2% для давлений $p \in [0.2, 1.4]$. Для величины соответствующей кривизны погрешность составляет 2%.

Появление в оболочке сжимающих напряжений происходит задолго до достижения максимальной величины изгибающего момента. На рисунке 3.2.8 точками отображены графики изгибающих моментов, соответствующие появлению сжимающих напряжений. Величины кривизн для них изображены на рисунке 3.2.9, также точками. Для приблизительного расчета этих величин в диапазоне безразмерного давления $p \in [0.1, 1.4]$ предлагаются формулы

$$\begin{aligned} M_T &= 0.0103 + 1.596p + 0.876p^3 \\ \beta_T &= 0.001 + 0.078p + 0.03p^3 \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

На рисунках 3.2.8 и 3.2.9 графики функций (3.2.18) представлены пунктирными линиями. Погрешность предложенного приближения составляет 5% от расчетных данных, при $p \in [0.1, 1.4]$. Для $p < 0.1$ формулы (3.2.18) неприменимы. Численное сравнение результатов представлено в таблице 3.2.3.

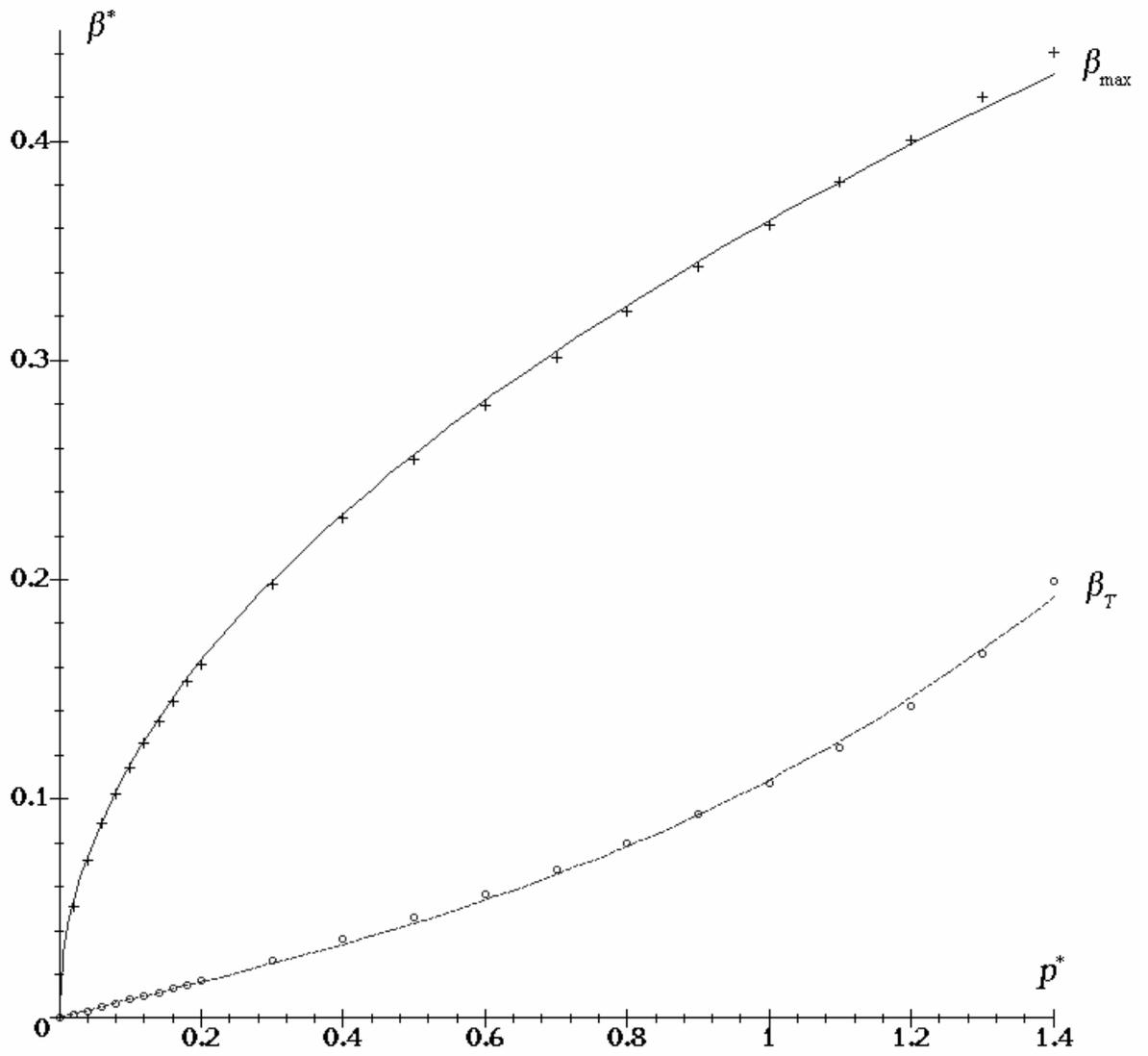


Рис. 3.2.9. Зависимость величин кривизны β_{\max} , соответствующей максимальному изгибающему моменту, и кривизны β_T , соответствующей появлению сжимающих напряжений, от величины давления.

Таблица 3.2.2. Максимальный изгибающий момент и соответствующая ему кривизна.

p	M_{\max} расчет	M_{\max} формула	% (M)	β_{\max} расчет	$\beta_{кр}$ формула	% (β)
0.02	0.648	0.676	4.1	0.051	0.051	0.5
0.1	1.465	1.509	3.0	0.114	0.115	0.6
0.2	2.101	2.139	1.8	0.162	0.163	0.7
0.3	2.612	2.631	0.7	0.198	0.199	0.8
0.4	3.064	3.060	0.1	0.228	0.230	0.9
0.5	3.483	3.458	0.7	0.255	0.257	1.0
0.6	3.884	3.842	1.1	0.279	0.282	1.0
0.7	4.276	4.224	1.2	0.302	0.305	1.0
0.8	4.667	4.615	1.1	0.323	0.326	0.9
0.9	5.063	5.021	0.8	0.343	0.345	0.7
1.0	5.471	5.450	0.4	0.362	0.364	0.5
1.1	5.901	5.908	0.1	0.381	0.382	0.1
1.2	6.367	6.400	0.5	0.400	0.399	0.4
1.3	6.892	6.933	0.6	0.420	0.415	1.2
1.4	7.531	7.510	0.3	0.441	0.431	2.3

Таблица 3.2.3. Изгибающий момент и кривизна соответствующие появлению сжимающих напряжений.

p	M_T расчет	M_T формула	% (M)	β_T расчет	β_T формула	% (β)
0.02	0.312	0.422	35	0.0016	0.0025	55
0.1	0.162	0.170	5.0	0.0085	0.0088	4.5
0.2	0.338	0.337	0.4	0.0173	0.0168	2.4
0.3	0.526	0.512	2.8	0.0264	0.0252	4.5
0.4	0.733	0.705	3.8	0.0360	0.0341	5.1
0.5	0.956	0.918	4.0	0.0460	0.0438	4.9
0.6	1.198	1.157	3.4	0.0566	0.0543	4.0
0.7	1.464	1.428	2.5	0.0678	0.0659	2.8
0.8	1.758	1.736	1.3	0.0799	0.0788	1.4
0.9	2.084	2.085	0.1	0.0930	0.0931	0.1
1.0	2.450	2.482	1.3	0.1074	0.1090	1.5
1.1	2.868	2.932	2.2	0.1237	0.1267	2.5
1.2	3.358	3.439	2.4	0.1427	0.1464	2.7
1.3	3.957	4.010	1.3	0.1663	0.1683	1.2
1.4	4.769	4.648	2.5	0.1996	0.1925	3.5

На основе результатов численного моделирования, для расчета изгибающего момента в зависимости от кривизны и давления, получено выражение

$$M = |M_{\max}| \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{\beta}{\beta_{\max}}\right). \quad (3.2.19)$$

Здесь M_{\max} и β_{\max} для соответствующей величины давления определяются из уравнений (3.2.17). Формула приближенного вычисления изгибающего момента (3.2.19) на всем диапазоне рассмотренных давлений $p \in [0, 1.4]$ и кривизн β дает погрешность 5% по сравнению с численными экспериментами (таблицы 3.2.4–3.2.9). На рисунке 3.2.6 сплошными линиями изображены зависимость M от β (3.2.19) для различных величин давления p , а точками обозначены кривые, полученные из решения задачи об изгибе.

Таблица 3.2.4. Изгибающий момент в зависимости от кривизны для давления $p = 1.4$.

β	M расчет	M формула	% (M)
0.001	0.0255	0.0268	5.4
0.005	0.1275	0.1342	5.2
0.010	0.2549	0.2683	5.2
0.020	0.5098	0.5363	5.2
0.050	1.2705	1.3348	5.1
0.100	2.5115	2.6272	4.6
0.200	4.7784	4.9244	3.1
0.300	6.5218	6.6028	1.2
0.400	7.4435	7.4515	0.1
0.500	7.3519	7.3640	0.2

Таблица 3.2.5. Изгибающий момент в зависимости от кривизны для давления $p = 1$.

β	M расчет	M формула	% (M)
0.001	0.0233	0.0237	2.1
0.005	0.1181	0.1186	0.4
0.010	0.2363	0.2373	0.4
0.020	0.4721	0.4741	0.4
0.050	1.1728	1.1774	0.4
0.100	2.2927	2.2996	0.3
0.200	4.1709	4.1732	0.1
0.300	5.2758	5.2737	0.0
0.400	5.4016	5.3972	0.1

Таблица 3.2.6. Изгибающий момент в зависимости от кривизны для давления $p = 0.6$.

β	M расчет	M формула	% (M)
0.001	0.0216	0.0219	1.0
0.005	0.1075	0.1092	1.6
0.010	0.2150	0.2184	1.6
0.020	0.4294	0.4361	1.6
0.050	1.0629	1.0783	1.4
0.100	2.0495	2.0718	1.1
0.200	3.4982	3.5049	0.2
0.300	3.8583	3.8576	0.0

Таблица 3.2.7. Изгибающий момент в зависимости от кривизны для давления $p = 0.2$.

β	M расчет	M формула	% (M)
0.001	0.0198	0.0204	3.4
0.005	0.0983	0.1021	3.8
0.010	0.1964	0.2039	3.8
0.020	0.3914	0.4059	3.7
0.050	0.9530	0.9814	3.0
0.100	1.7156	1.7356	1.2
0.200	1.9635	1.9565	0.4

Таблица 3.2.8. Изгибающий момент в зависимости от кривизны для давления $p = 0.06$.

β	M расчет	M формула	% (M)
0.001	0.0191	0.0200	4.7
0.005	0.0954	0.0998	4.7
0.010	0.1901	0.1988	4.6
0.020	0.3758	0.3914	4.1
0.050	0.8578	0.8736	1.8
0.100	1.1054	1.1059	0.0

Таблица 3.2.9. Изгибающий момент в зависимости от кривизны для давления $p = 0.02$.

β	M расчет	M формула	% (M)
0.005	0.0944	0.0990	4.9
0.010	0.1871	0.1957	4.6
0.020	0.3609	0.3731	3.4
0.050	0.6475	0.6476	0.0

Глава 4. Экспериментальные исследования торообразной оболочки при больших деформациях.

В качестве оболочки вращения рассматривается автомобильная камера. Замеряемыми параметрами были: величина давления и геометрические характеристики деформированной оболочки («внешний» и «внутренний» радиусы камеры, максимальная «высота» камеры). Схема экспериментальной установки представлена на рисунке 4.1.

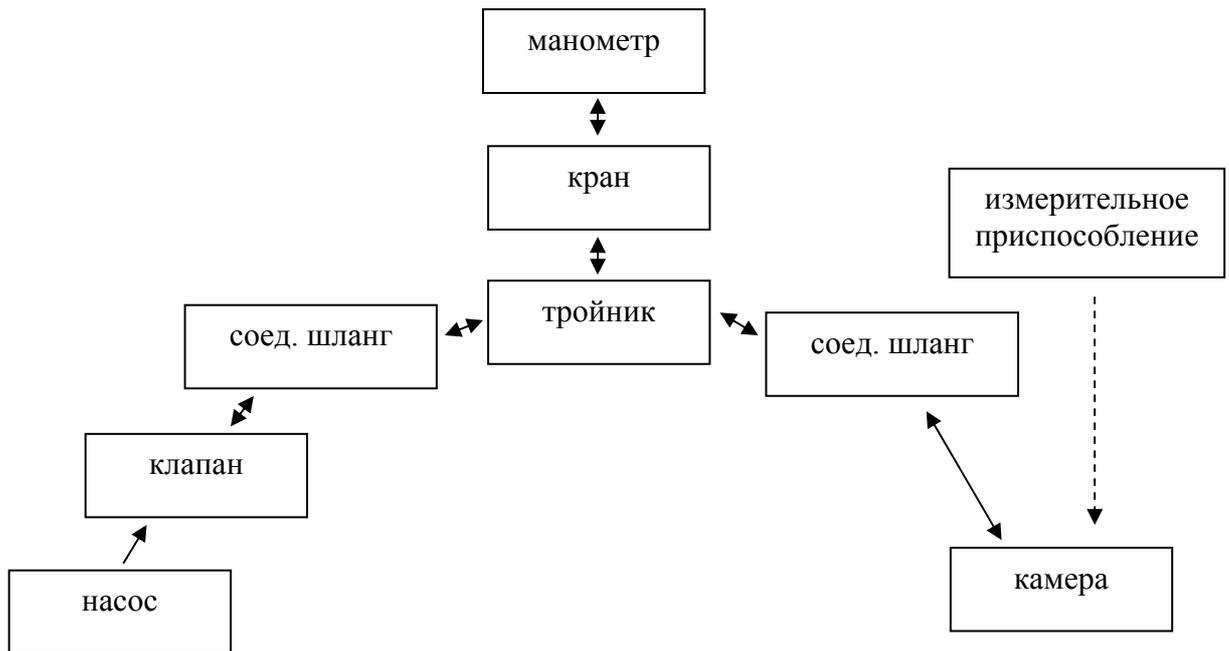


Рис. 4.1. Схема экспериментальной установки.

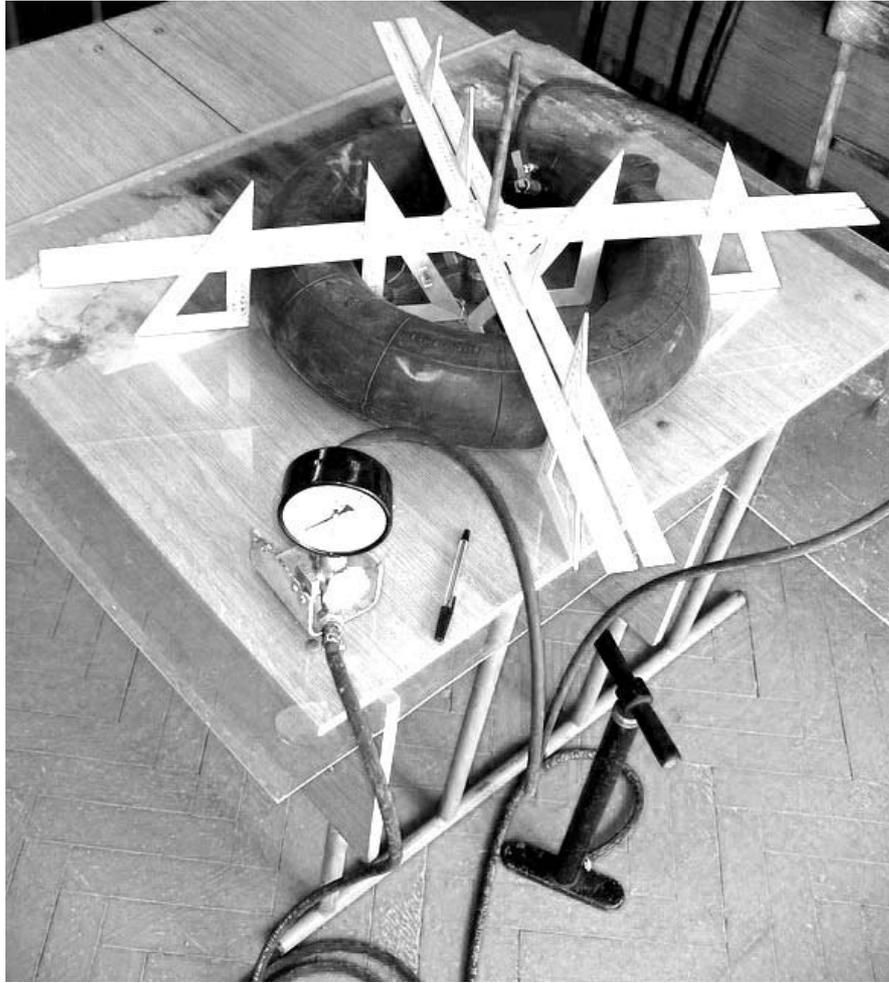


Рис. 4.2. Экспериментальная установка.

Результаты

Автомобильная камера представляет собой торообразную оболочку со слегка эллиптическим сечением. Уравнение поверхности оболочки до деформации представляется в форме (2.1.1) с помощью функций r и z , заданных в виде

$$r(\theta) = r_0 + r_1 \sin \theta, \quad z(\theta) = r_2 \cos \theta, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2, \quad (4.1)$$

$$r_0 = 3.677, \quad r_1 = 1.0, \quad r_2 = 0.963.$$

Здесь за координату q^1 взят угол θ , отсчитываемый по меридиану оболочки.

По толщине камера неоднородна и по результатам измерений закон изменения толщины задан в виде

$$h = h_1 + h_0 \cos 2\theta, \quad h_1 = 0.026, \quad h_0 = 0.0026.$$

В качестве потенциальной энергии рассматривался существенно нелинейный потенциал [14] (1.2.18) в форме

$$W^* = \frac{\mu}{4} \left[(1 + \beta)(I_1 - 3)^\alpha + (1 - \beta)(I_2 - 3)^\alpha \right]. \quad (4.2)$$

Представлены результаты для материала с постоянными

$$\mu = 7.64 \text{ МПа}, \quad \beta = 0.73, \quad \alpha = 0.9. \quad (4.3)$$

Геометрические характеристики (4.1), обезразмеренные относительно радиуса сечения в плоскости $z = 0$ ($r^* = 5.7688$ см), соответствуют параметрам автомобильной камеры R13.

Таблица 4.1. Внутренний радиус.

P (МПа)	Экс.	Расчет
0	2.677	2.677
0.02	2.672	2.675
0.03	2.669	2.669
0.04	2.656	2.660
0.05	2.649	2.650
0.06	2.639	2.638
0.07	2.628	2.626
0.08	2.612	2.612
0.09	2.602	2.598
0.10	2.581	2.582
0.11	2.565	2.566
0.12	2.549	2.549
0.13	2.531	2.534
0.14	2.529	2.525

Таблица 4.2. Внешний радиус.

P (МПа)	Экс.	Расчет
0	4.677	4.677
0.02	4.677	4.674
0.03	4.683	4.681
0.04	4.703	4.690
0.05	4.717	4.703
0.06	4.731	4.718
0.07	4.750	4.737
0.08	4.771	4.760
0.09	4.797	4.788
0.10	4.840	4.823
0.11	4.889	4.869
0.12	4.945	4.932
0.13	5.026	5.026
0.14	5.191	5.211

Таблица 4.3. Высота.

P (МПа)	Экс.	Расчет
0	0.963	0.963
0.02	0.996	0.993
0.03	1.009	1.006
0.04	1.026	1.020
0.05	1.042	1.034
0.06	1.055	1.050
0.07	1.073	1.067
0.08	1.094	1.087
0.09	1.116	1.111
0.10	1.148	1.138
0.11	1.183	1.171
0.12	1.224	1.212
0.13	1.276	1.270
0.14	1.379	1.371

Результаты экспериментальных измерений и численных расчетов представлены в таблицах 4.1 – 4.3 и на рисунках 4.3 – 4.5. Внутренний радиус соответствует значению функции $R(-\pi/2)$ из формулы (2.1.2), внешний радиус – $R(\pi/2)$, высота – $\max(Z(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi)$. Экспериментальные данные отображены на рисунках точками, сплошной линией представлены расчеты для существенно нелинейного материала (4.2) с постоянными (4.3).

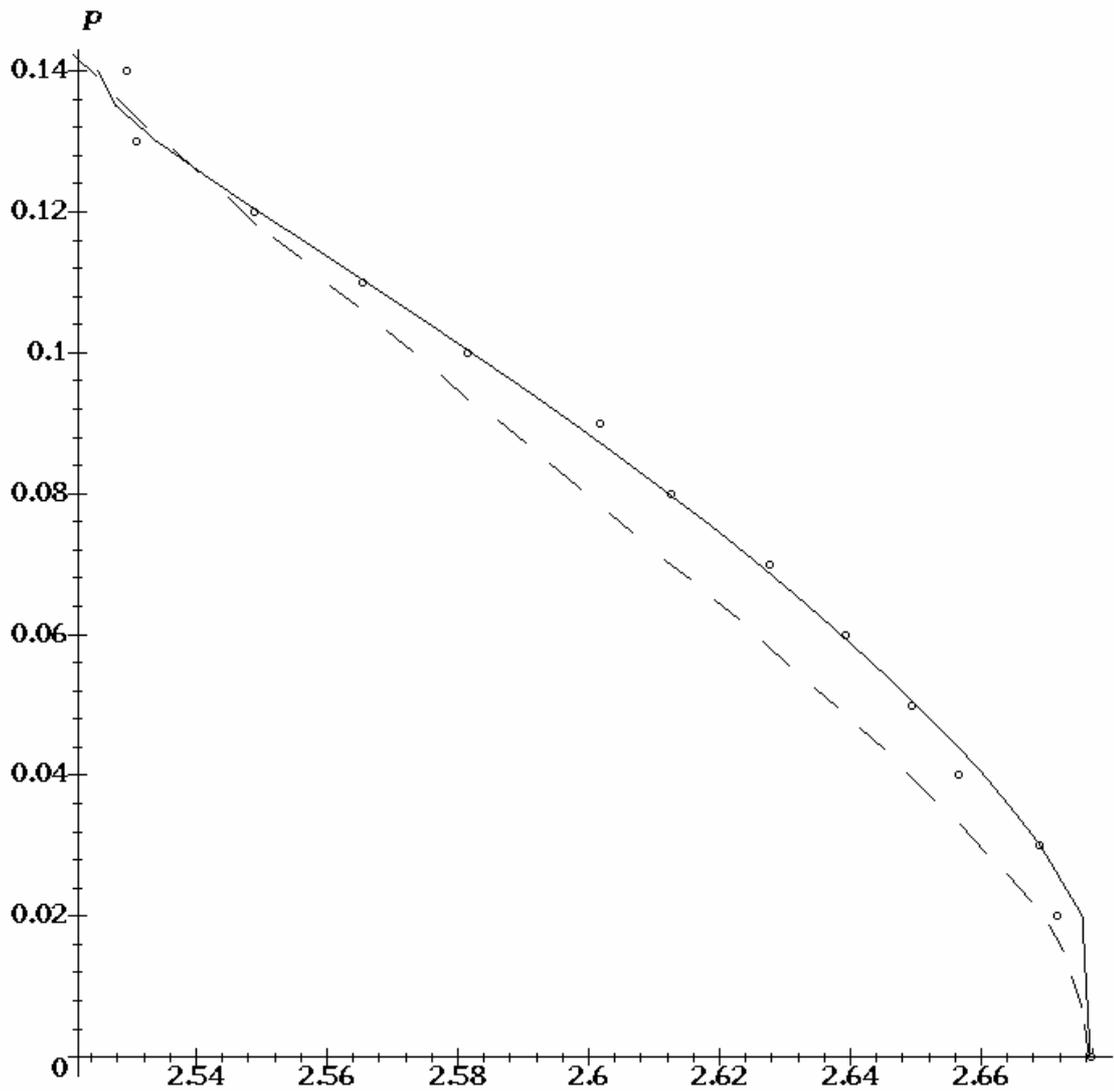


Рис. 4.3. Внутренний радиус тора – давление.

Сравнение численных расчетов и экспериментальных данных показывают хорошее соответствие предлагаемого потенциала и упругих констант материалу исследуемой автомобильной камеры.

Для сравнения рассмотренного существенно нелинейного потенциала (4.2) с другими видами потенциальной энергии на рисунках 4.1 – 4.3 пунктирной линией изображены расчеты деформированного состояния

тороидальной оболочки для материала Клоснера-Сегала (1.2.6) с постоянными равными

$$\mu = 8.0 \text{ МПа}, \quad \beta = 0.5, \quad \kappa = 0.1 .$$

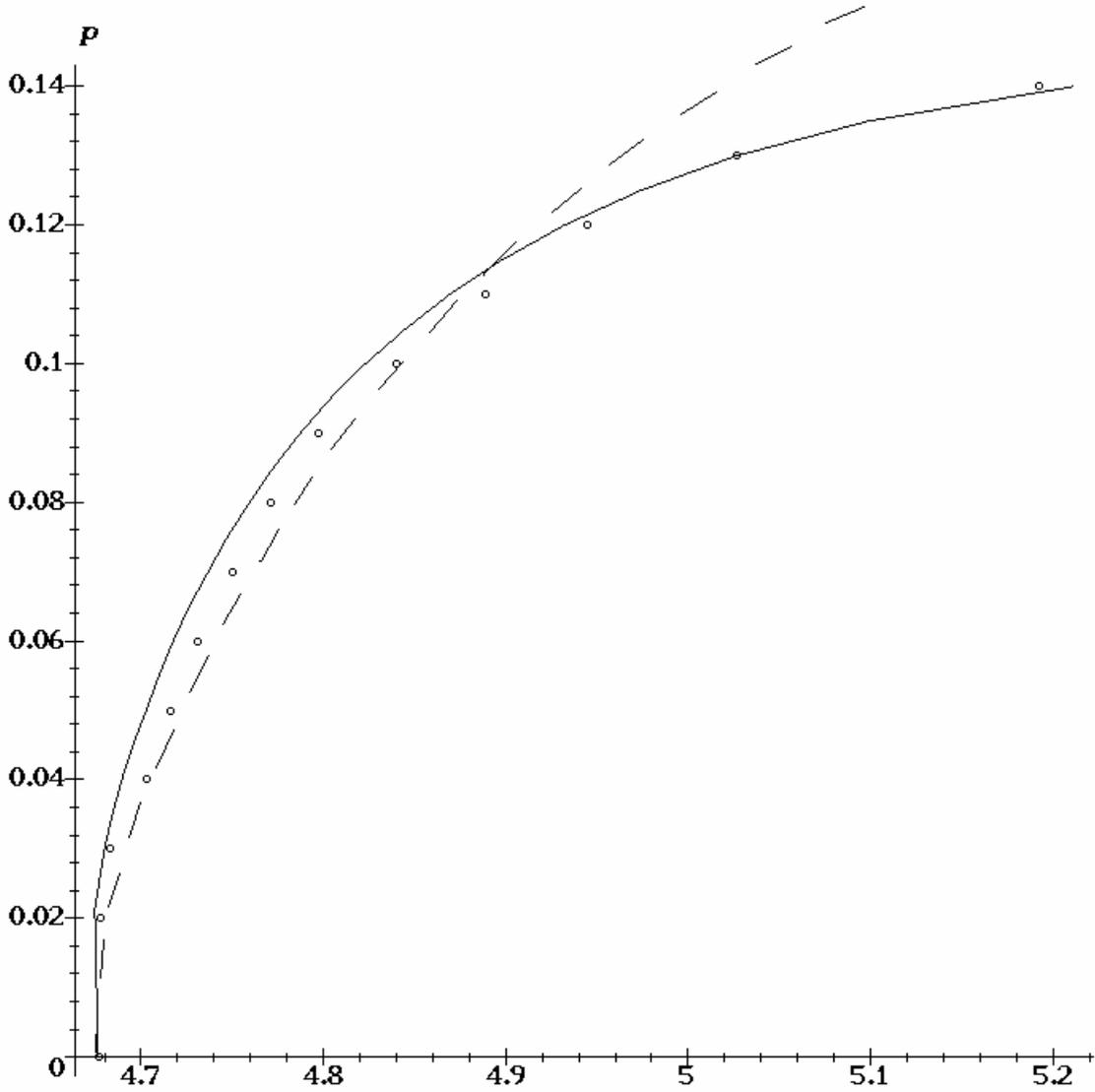


Рис. 4.4. Внешний радиус тора – давление.

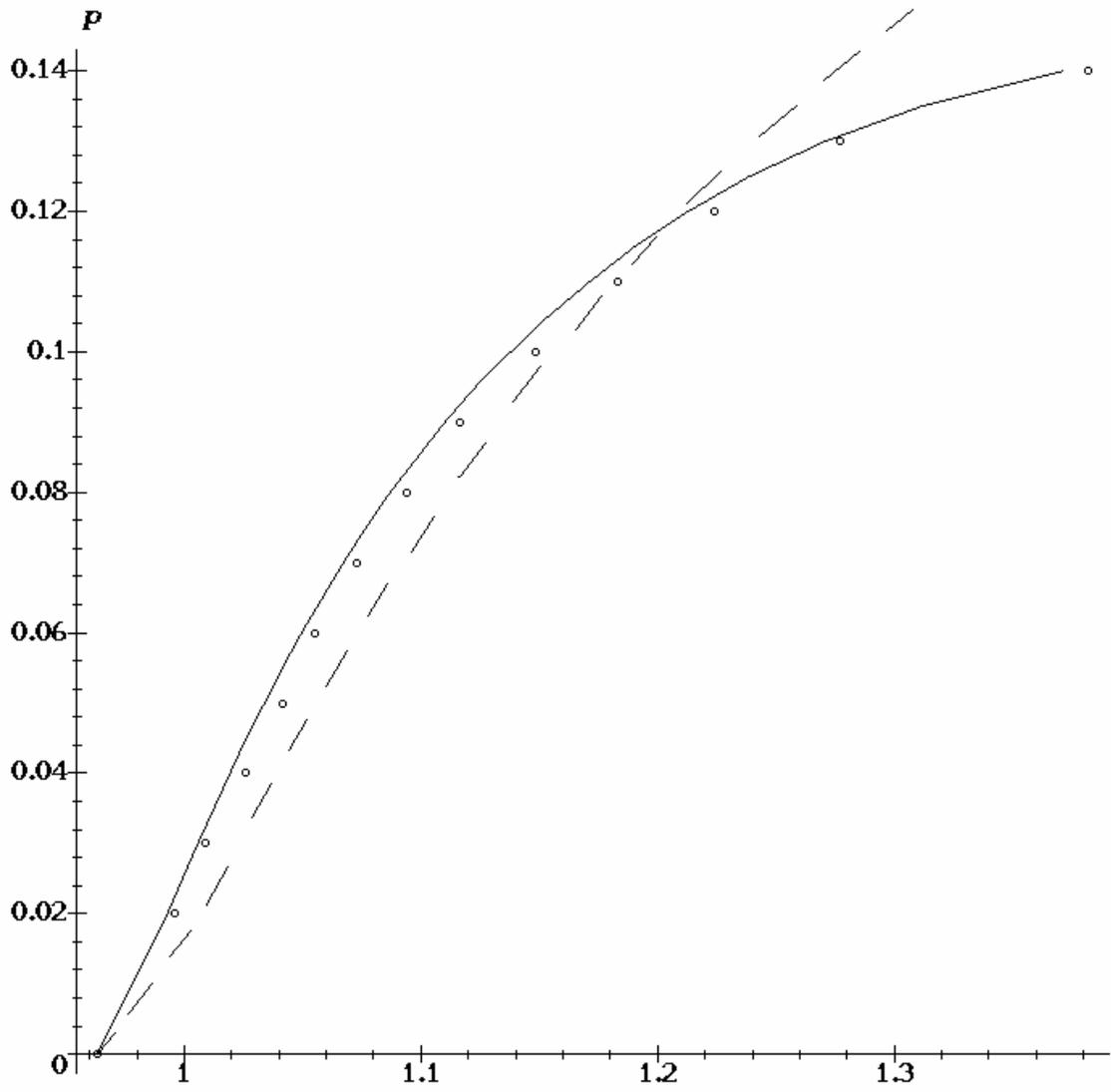


Рис. 4.5. Высота – давление.

Заключение

В диссертации были получены следующие основные результаты.

1. Сформулирован подход к решению класса задач нелинейной теории оболочек с помощью сведения двумерной краевой задачи к одномерной.

2. Получена разрешающая система одномерных уравнений равновесия оболочек вращения под действием осесимметричного нагружения в терминах кратностей удлинений и еще одной функции координат. Решён ряд задач об осесимметричной деформации оболочки вращения, в том числе, раздувание плоской круглой мембраны, раздувание торообразной оболочки, раздувание и растяжение цилиндрической оболочки.

3. Решена задача об изгибе цилиндрической оболочки, нагруженной внутренним давлением, в нелинейной постановке. Получена разрешающая система одномерных уравнений равновесия для оболочки произвольного сечения, изготовленной из произвольного несжимаемого материала.

4. В задаче изгиба оболочки из неогукковского материала найдено семейство независимых безразмерных параметров, для которых доказано подобие характеристик напряженно-деформированного состояния.

5. Произведены численные расчеты напряженно-деформированного состояния раздуваемой изогнутой круговой цилиндрической оболочки, изготовленной из неогукковского материала.

6. Для круговой цилиндрической оболочки из неогукковского материала выведены приближенные зависимости изгибающего момента от давления и кривизны оси оболочки, а также максимального изгибающего момента от давления.

7. Выполнено экспериментальное исследование тороидальной оболочки, и проведено сравнение теоретических и экспериментальных результатов.

Литература

1. *Бартенев Г. М., Хазанович Т. Н.* О законе высокоэластичных деформаций сеточных полимеров // *Высокомолекулярные соединения.* 1960. т.2. N1.– С. 20–26.
2. *Бидерман В. Л.* Вопросы расчета резиновых деталей // *Расчеты на прочность.* 1958. Вып. 3.– М.: Машгиз.– С. 40-87.
3. *Ворович И. И.* Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек.– М.: Наука. 1989.
4. *Галимов К. З.* Основы нелинейной теории тонких оболочек.– Казань.: Изд-во Казанск. ун-та. 1975.– С. 326.
5. *Григолюк Э. И., Шалашилин В. И.* Проблемы нелинейного деформирования: метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела.– М.: Наука. 1988.
6. *Григолюк Э. И., Мамай В. И.* Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций.– М.: Наука. 1997.
7. *Григорьев А. С.* Напряженное состояние безмоментных цилиндрических оболочек при больших деформациях // *ПММ.* 1957. Т.21. № 6.
8. *Григорьев А. С.* Равновесие безмоментных оболочек вращения при больших деформациях // *ПММ.* 1961. Т.25.
9. *Григорьев А. С.* Об устойчивости безмоментных оболочек вращения в условиях растяжения // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1967. № 1.
10. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды.– М.: «Мир». 1965.
11. *Зубов Л. М.* Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек.– Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовск. ун-та. 1982.– С. 144.
12. *Зубов Л. М., Колесников А. М.* Большие деформации упругих безмоментных оболочек вращения // *Изв. вузов Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.* 2004. №1.– С. 33–36.

13. *Зубов Л. М., Овсеенко С. Ю.* Кручение безмоментных оболочек вращения при больших деформациях // Труды 14-ой Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Т. 1.– Тбилиси. Изд-во. ун-та. 1987.– С. 597–602.
14. *Зубов Л. М., Рудев А. Н.* Об особенностях потери устойчивости нелинейно-упругого прямоугольного бруса // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 3.– С. 65–83.
15. *Кабриц С. А., Михайловский Е. И., Товстик П. Е., Черных К. Ф., Шамина В. А.* Общая нелинейная теория упругих оболочек.– С. Петербург.: Изд-во С.-Петербург. ун-та. 2002.– 388с.
16. *Колесников А. М.* Большие деформации высокоэластичной мембраны // Труды аспирантов и соискателей Ростовского государственного университета. Том VIII.– Ростов-на-Дону: Изд.-во. Рост. Ун-та. 2002.– С. 12–15.
17. *Колесников А. М.* Большие деформации высокоэластичной тороидальной оболочки // Труды аспирантов и соискателей Ростовского государственного университета. Том IX.– Ростов-на-Дону: Изд.-во. Рост. Ун-та. 2003.– С. 33–35.
18. *Колесников А. М.* Большие деформации гибкой оболочки вращения // Труды III Всероссийской конференции по теории упругости с международным участием. гг. Ростов-на-Дону – Азов, 13-16.10.2003.– Ростов-на-Дону: Новая книга. 2004.– С. 219–222.
19. *Колесников А. М.* Большие деформации торообразных оболочек // Сборник докладов 16 симпозиума “Проблемы шин и резинокордных композитов”. Том 1.– Москва, 17–21.10.2005. ООО “Научно технический центр “НИИШП”.– С. 201–208.
20. *Колпак Е. П.* Устойчивость безмоментных оболочек при больших деформациях.– С. Петербург. 2000.– С. 248.
21. *Лурье А. И.* Теория упругости.– М. 1970.
22. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости.– М. 1980.

23. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред.– М.: Мир. 1976.– 464с.
24. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды.– Т.1. М.:Наука. 1970.– 492 с.
25. *Товстик П. Е.* Осесимметричная деформация тонких оболочек вращения из нелинейно упругого материала // ПММ. 1997. Том 61. вып. 4.– С. 660–673.
26. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред.– М. 1975.
27. *Усюкин В. И.* Об уравнениях больших деформаций мягких оболочек // Механика твердого тела. 1976. №1.– С.70–75.
28. *Черных К. Ф., Шубина И. М.* Законы упругости для изотропных несжимаемых материалов // Феноменологический подход. Механика эластомеров. Краснодар. 1977.– С. 54–67.
29. *Черных К. Ф.* Нелинейная теория изотропных упругих тонких оболочек // Механика твердого тела. 1980. № 2.– С. 148–159.
30. *Черных К. Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л. Машиностроение. 1986.– 336с.
31. *Юдин А. С.* О некоторых нелинейных уравнениях осесимметричной деформации оболочек вращения // Изв. Сев.-Кавказ. НЦВШ. Серия естеств. Наук. 1973. № 4.– С. 93–98.
32. *Aksel'rad E. L.* Pinpointing the upper critical bending load of a pipe by calculating geometric nonlinearity // Izv. Akad. Nauk SSR Mech. 4. 1965.– pp. 133–139.
33. *Aksel'rad E. L., Emmerling, F. A.* // Collapse Load Of Elastic Tubes Under Bending. Israel Journal of Technology. Vol. 22. 1984/85.– pp. 89-94.
34. *Antman S. S.* Nonlinear problems of elasticity.– Springer-Verlag. 1995.
35. *Bannister K. A.* Direct energy minimization to whipping analysis of pressure hulls // The shock and vibration bulletin. Vol. 54. pt. 2. June. 1984.– pp. 67–85.
36. *Beatty M. F.* Topics in finite elasticity: Hyperelasticity of rubber, elastomers, and biological tissues – with examples // Appl. Mech. Rev. 40. 1987.– pp. 1699–1733.

37. *Becker G. W.* On the phenomenological description of non-linear deformation behavior of rubberlike polymers // *J. Polymer science*. 1967.– pp. 5–16, 2893–2903.
38. *Blyth M. G., Pozrikidis C.* Solution space of axisymmetric capsules enclosed by elastic membranes // *European Journal of Mechanics A/Solids*. 23 (2004).– pp. 877–892.
39. *Bonet J., Wood R. D.* Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis.– Published by Cambridge CB2 1RB. United Kingdom. 1997. ISBN 0-521-57272-X.
40. *Bouzidi Rabah, Le van Anh* Numerical solution of hyperelastic membranes by energy minimization // *Computers and Structures*. 82. 2004.– pp. 1961–1969.
41. *Brazier L. G.* On the flexure of thin cylindrical shells and other thin sections // *Proc. R. Soc. Ser. A.– London. UK* 116. 1927.– pp. 104–114.
42. *Comer R. L., Levy S.* Deflections of an inflated circular cylindrical cantilever beam // *AIAA Journal*. 1963. 1(7).– pp. 1652–1655.
43. *Dickey R. W.* Stretching of cylindrical membranes // *International Journal of Solids and Structures*. Volume 5. Issue 1. March 1970.– pp 35–43.
44. *Drexler E. S., Slifka A. J., Wright J. E., McCowan C. N., Finch D. S., Quinn T. P., McColskey J. D., Ivy D. D., Shandas R.* An experimental method for measuring mechanical properties of rat pulmonary arteries verified with latex // *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.* 2003. v.108.– pp. 183-191.
45. *Duan H., Hu Z. W., Fang Z. C.* Study on deformation characters of a large rubber circular plate // *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.* 12 (2004). PII: S0965-0393(04)72472-9.– pp. 245–253
46. *Gent A. N.* A new constitutive relation for rubber // *Rubber Chemistry Technol.* 69. 1996.– pp. 59–61.
47. *Gent F. M., Thomas A. C.* Forms of the stored (strain) energy function for vulcanized rubber // *J.Polymer.Sci.* 1958. V.28.– pp. 625–628.

48. *Fabian O.* Collapse of cylindrical elastic tubes under combined bending, pressure and axial loads // *Int. J. Solids Struct.* 13. 1977.– pp. 1257–1270.
49. *Fitcher W. B.* A theory for inflated thin-wall cylindrical beams.– NASA TN D-3466. 1966.
50. *Foster H. O.* Very large deformations of axially symmetrical membranes made of neo-hookean materials // *International Journal of Solids and Structures.* Volume 5. Issue 1. January 1967.– pp 95–117.
51. *Haddow J. B., Favre L., Ogden R. W.* Application of variational principles to the axial extension of a circular cylindrical nonlinearly elastic membrane // *Journal of Engineering Mathematics.* 37. 2000.– pp. 65–84.
52. *Hart-Smith, Crisp J. D.* Large elastic deformations of thin rubber membranes // *J.Eng.Sci.* 1967. v.5. N1.– pp. 1–24.
53. *Hsu F. P. K., Schwab C., Rigamonti D., Humphrey J. D.* Identification of response functions from axisymmetric membrane inflation tests: implications for biomechanics // *International Journal of Solids and Structures.* Volume 31. No. 24. 1994.– pp. 3375-3386.
54. *Khayat R. E., Derdouri A., Garcia-Rejon A.* Inflation of an elastic cylindrical membrane: non-linear deformation and instability // *International Journal of Solids and Structures.* Volume 29. No. 1, 1992.– pp. 69–87.
55. *Klosner J. M., Segal A.* Mechanical characteriation of a natural rubber // *PIBAL Rep.Polytech.Inst. of Bruoklyn.* 1969.– pp. 42–68.
56. *Knowles J. K.* The finite anti-plane shear field near of a crack for a class of incompressible elastic solids // *Internat. J. Francfurt.* 13. 1977.– pp. 611–639.
57. *Koga Tatsuzo* Bending Rigidity of an Inflated Circular Cylindrical Membrane of Rubbery material // *AIAA Journal.* Vol. 10. No 11. November 1972. – pp. 1485–1491.
58. *Koiter W. T.* On the nonlinear theory of thin elastic shells // *Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. B* 69(1). 1966.– pp. 1–54.

59. *Kolesnikov A. M., Zubov L. M.* Pure bending of a cylindrical membrane with internal pressure // Proceeding of the 8th conference: Shell Structures: Theory and Applications. Jurate. Poland. 12–14 October 2005.– Taylor & Francis Group. London. 2005. ISBN 0 415 38390.– pp. 129-133.
60. *Kydoniefs A. D., Spencer A. J. M.* The finite inflation of an elastic torus // International Journal of Engineering Science. Volume 3. Issue 2. July 1965.– pp. 173-195.
61. *Kydoniefs A. D.* Finite deformation of an elastic torus under rotation and inflation // International Journal of Engineering Science. Volume 4. Issue 2. April 1966.– pp. 125–154.
62. *Kydoniefs A. D., Spencer A. J. M.* The finite inflation of an elastic toroidal membrane of circular cross section // International Journal of Engineering Science. Volume 5. Issue 4. April 1967.– pp. 367–391.
63. *Kydoniefs A. D.* The finite inflation of an elastic toroidal membrane // International Journal of Engineering Science. Volume 5. Issue 6. June 1967.– pp. 477–494.
64. *Le van A., Wielgosz C.* Bending and buckling of inflatable beams: Some new theoretical results // Thin-Walled Structures. 2005.– pp. 1–22.
65. *Li Long-yaun, Kettle Roger* Nonlinear bending response and buckling of ring-stiffened cylindrical shells under pure bending // International Journal of Solids and Structures. 39. 2002.– pp. 765–781.
66. *Libai Avimoam* The nonlinear membrane shell with application to noncircular cylinder // Int. J. Solids Structures. 1972. Vol. 8.– pp. 923–943.
67. *Libai A., Simmonds J. G.* The nonlinear theory of elastic shells.– 2ed Ed.– Cambridge Univ. Press. 1998.
68. *Lo K. K.* Path independent integrals for cylindrical shells and shells of revolution // Int. J. Solids Structures. 1980. Vol. 19.– pp. 701–707.
69. *Main A., Peterson S. W., Strauss A. M.* Load – deflection behaviour of space-based inflatable fabric beams // J. Aerospace Eng. 1994. 2(7).– pp. 225–238.

70. *Mooney M.* Theory of large elastic deformation // *J.Appl.Phys.* 1940. v. 11.– pp. 582–592.
71. *Ogden R. W.* Large deformation isotropic elasticity: On the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids // *Proc. Roy. Soc. Lond.* A326. 1972.– pp. 565–584.
72. *Pamplona Djenane, Gonçalves Paulo B., Lopes Stefane R. X.* Instabilities of initially stressed hyperelastic cylindrical membrane and shell under internal pressure // *XXI ICTAM.* 15-21 August 2004. Warsaw. Poland.
73. *Papargyri-Pegiou S., Stavrakakis E.* Axisymmetric numerical solutions of a thin-walled pressurized torus of incompressible nonlinear elastic materials // *Computers & Structures.* Volume 77. Issue 6. 15 August 2000.
74. *Pietraszkiewicz W.* Introduction to nonlinear theory of shells.– Bochum: Ruhr- Univ. 1977.
75. *Pietraszkiewicz W.* Geometrically nonlinear theories of thin elastic shells // *Advances in Mechanics* 12(1). 1989.– pp. 51–130.
76. *Reissner E.* On finite bending of pressured tubes // *J. Appl. Mech. ASME* 29. 1959.– pp. 386–392.
77. *Reissner E.* On finite pure bending of cylindrical tubes // *Osterreichisches Ingenieur. Archiv.* Vol. 15. 1961.– pp. 165–172.
78. *Reissner E., Weinitschke H. J.* Finite pure bending of circular cylindrical tubes // *Quarterly of Applied Mechanics.* Vol. XX. No. 4. January. 1963.– pp. 305–319.
79. *Roxburgh D. G.* Inflation of nonlinearly deformed annular elastic membranes // *International Journal of Solids and Structures.* Volume 32. Issue 14. July 1995.– pp. 2041–2052.
80. *Slifka A. J., Drexler E. S., Wright J. E., Shandas R.* Bubble-test method for synthetic and bovine vascular material // *Journal of Biomechanics.* Volume 39. Issue 10. 2006.– pp. 1939–1942

81. *Taber Larry A.* Comparison of elasticity and shell theory results for large deformation of rubberlike shells // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. Volume 24. Issue 3. 1989.– pp. 237–249.
82. *Tatting, B. F., Gürdal, Z., Vasiliev, V. V.* Nonlinear Shell Theory Solution for the Bending Response of Orthotropic Finite Length Cylinders including the Brazier Effect // *Proceedings of the 36th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials (SDM) Conference*. New Orleans. LA. April 10-13. 1995.– pp. 966-976.
83. *Tatting, B. F., Gürdal, Z., Vasiliev, V. V.* The Brazier Effect for Finite Length Composite Cylinders under Bending // *International Journal of Solids & Structures*. Vol. 34. No. 12. 1997.– pp. 1419–1440.
84. *Tcheoegl N. W.* Constitutive equations for elastomers // *J. Polymer Sci.* 1971. A-1.– pp. 1959–1970.
85. *Treolar L. R. G.* Strain in an inflated rubber sheet and the mechanism of bursting. – *Rubber. Chem. Techn.* 1944. v.17. N4.– pp. 957–967.
86. *Thomas J.-C., Wielgosz C.* Deflections of highly inflated fabric tubes // *Thin-Walled Structures*. 42. 2004.– pp. 1049–1066.
87. *Trotsenko V. A.* Variational methods for solving nonlinear boundary problems of statics of hyper-elastic membranes // *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*. 1999. V.6. N 1.– pp. 35–50.
88. *Veldman S. L., Bergsma O. K., Beukers A.* Bending of anisotropic inflated cylindrical beams // *Thin-Walled Structures*. Issue 3. March 2005.– pp. 461–475.
89. *Veldman S. L., Bergsma O. K., Beukers A., Drechsler K.* Bending and optimization of an inflated braided beam // *Thin-Walled Structures*. 43. 2005.– pp. 1338–1354.
90. *Veldman S. L.* Wrinkling prediction of Cylindrical and conical inflated cantilever beams under torsion and bending // *Thin-Walled Structures*. 44. 2006.– pp. 211–215.

91. *Verron E., Marckmann G.* Inflation of elastomeric circular membranes using network constitutive equations // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. Volume 38. Issue 8. October 2003.– pp. 1221–1235.
92. *Verron E., Marckmann G.* Numerical analysis of rubber balloons // *Thin-Walled Structures* 41. 2003.– pp. 731–746.
93. *Wood J. D.* The flexure of a uniformly pressurized circular, cylindrical shell // *Journal of Applied Mechanics*. Vol. 80. 1958.– pp. 453–458.
94. *Ju Bing Feng, Lio Kuo-Khan, Ling Shih-Fu, Ng Woi Hong* A novel technique for characterizing elastic properties of thin biological membrane // *Mechanics of Materials* 34. 2002.– pp. 749–754
95. *Zubov L. M.* Semi-inverse solution in non-linear theory of elastic shells // *Archives of Mechanics*. 2001. V.53. № 4–5.– pp. 599–610.