

Неустойчивость на ранних стадиях вязкого разрушения

А. Рузбехани, М.П. Внук

Висконсинский университет, Милуоки, WI 53201, США

В идеально-хрупких телах существующие трещины либо остаются стационарными, либо (при некотором критическом уровне нагрузки) становятся неустойчивыми, что приводит к необратимому процессу катастрофического разрушения. Однако для тел, обладающих определенным запасом пластичности, характерна другая последовательность событий. Полную неустойчивость, равносильную глобальному разрушению, предваряет сигнал «раннего оповещения» в виде медленного роста трещин, называемого «докритическим» или «квазистатическим» ростом. Эта фаза может рассматриваться как проявление локальной неустойчивости в материале при деформации или нарушении связности. Итоговая вязкость разрушения, достигаемая в ходе этого процесса, не является более свойством материала. Она ограничивается нижним K_{mi} и верхним K_{ss} пределами переменной вязкости K_R , определяемой R -кривой сопротивления материала, и ее точное значение необходимо определять с помощью анализа перехода от устойчивого к неустойчивому росту трещины. Из этого анализа, кроме того, можно определить скорости подвода и поглощения энергии и вариации второго порядка этих энергий.

В данной работе предложен математический аппарат, позволяющий предсказывать подобные переходы при неупругом разрушении образцов различной геометрии для типичных конфигураций трещины. Показано, что необходимы дальнейшие исследования, которые целесообразно сфокусировать на R -кривой, учитывающей геометрию и размерные эффекты, наблюдаемые при сравнении данных об остаточной прочности больших и малых конструкций с трещинами.

Instabilities in early stages of ductile fracture

A. Rouzbehani and M.P. Wnuk

Department of Civil Engineering and Mechanics, University of Wisconsin, Milwaukee, WI 53201, USA

In perfectly brittle solids pre-existing cracks either remain stationary, or — at a certain critical load level — they become unstable leading to an irreversible process of catastrophic fracture. For solids endowed with a certain amount of ductility, though, a different sequence of events emerges. The terminal instability, tantamount to global fracture, is now preceded by an “early-warning” signal given off in the form of slow crack growth referred to as “subcritical” or “quasistatic” crack extension. This phase may be considered as manifestation of the local instability occurring within material subject to the deformation and decohesion process. The terminal fracture toughness attained during this process is no longer a material property. It is bracketed by the lower and upper bounds (K_{mi} and K_{ss} , respectively) of the variable toughness, K_R , determined by the material resistance R -curve, and its precise value has to be established by an analysis of the transition from stable to unstable crack growth. The analysis involves, in addition to the rates of energy demand and supply, the second order variations of these energies.

In this work a mathematical procedure is proposed in order to predict such transitions occurring in non-elastic fracture for various specimen geometries and typical crack configurations. It is pointed out that further studies are needed and that they ought to focus on a geometry dependent R -curve, which would account for the correct trends in the size effects observed when the data concerning the residual strength of cracked structures are compared for small and large dimensions.

1. Прогнозирование полной неустойчивости при вязком разрушении

На ранних стадиях разрушения в неупругих материалах процессы деформации и разрушения происходят между двумя четко различимыми границами. Первая граница определяет момент страгивания трещины (кри-

вая A , рис. 1, a), вторая соответствует началу катастрофического роста (кривая B , рис. 1, a). Верхняя кривая C представляет данные для верхнего уровня вязкости разрушения материала, соответствующие установившемуся процессу квазистатического роста трещины. Для традиционно используемых образцов такой уровень до-

стигается редко, однако это возможно для геометрии образцов с нулевым K -градиентом.

Чем пластичнее материал, тем больше расстояние между тремя линиями, показанными на рис. 1, а. Нижняя кривая строится как геометрическое место точек с постоянной величиной вязкости разрушения в момент страгивания трещины, $K_{ini} = \text{const}$. Для построения верхней кривой используется аналогичное уравнение $K_{ss} = \text{const}$, где величины вязкости разрушения в момент страгивания трещины K_{ini} и при установившемся росте трещины K_{ss} рассматриваются как свойства материала, определяемые с помощью кривой сопротивления материала. Среднюю кривую, напротив, нельзя рассматривать просто как геометрическое место точек; она учитывает геометрию образца с трещиной и вид внешнего нагружения. Таким образом, кривая B сильно зависит от геометрии, и каждая точка на кривой определяется в результате довольно трудоемких вычислений. Все фазы раннего неупругого разрушения представлены на рис. 1, б, где показана зависимость внешней «равновесной» нагрузки от текущей длины трещины.

Отметим также, что в случае идеально хрупкого разрушения, подобного рассмотренному Гриффитсом [1], все три кривые A , B и C сливаются в одну кривую, описываемую хорошо известным уравнением $K_c = \text{const}$. При этих условиях трещина либо остается стационарной, либо происходит катастрофическое распространение трещины. Предварительная фаза устойчивого роста отсутствует.

Для построения средней кривой на рис. 1, а необходимо учитывать соотношение скоростей поглощения и подвода энергии в ходе устойчивого роста трещины. Кроме того, для математического описания перехода от устойчивого к неустойчивому росту трещины необходимы вторые вариации этих энергий. В качестве подхо-

дящей величины, описывающей эти скорости, мы выбрали длину R когезионной зоны при вершине движущейся трещины. Согласно когезионной модели квазистатической трещины [2] эта величина прямо пропорциональна трещиновдвигущей силе G или J :

$$G = -\frac{\partial \Pi}{\partial \ell}, \tag{1}$$

где Π — полная потенциальная энергия системы, состоящей из тела с трещиной и приложенного набора внешних сил; ℓ — длина трещины (для плоского образца с центральной трещиной $\ell = 2a$). В когезионной модели трещины принято считать, что

$$R = \frac{\pi}{8} \left(\frac{GE}{\sigma_Y^2} \right). \tag{2}$$

Здесь σ_Y — локальное значение предела текучести на фронте трещины; E — модуль Юнга. Коэффициенты пропорциональности, отличные от $\pi/8$, рассмотрены в работе [3], где показано, что особый выбор распределения когезионных напряжений определяется выбором мезомеханических параметров.

Чтобы определить условия, которые контролируют устойчивый рост трещины вплоть до момента полной неустойчивости, будем использовать следующие производные:

$$\left(\frac{dR}{da} \right)_{\text{mat}} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{m}{R/R_{ini}} \right), \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial a} \right)_{\text{appl}} = \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right)_{Q=\text{const}}^{\text{appl}} = \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{\pi K_I^2}{8 \sigma_Y^2} \right]_{\sigma=\text{const}}. \tag{4}$$

До тех пор пока скорость поглощения энергии, определяемая $(dR/da)_{\text{mat}}$, выше скорости подведения, задаваемой уравнением (4), мы имеем дело с устойчивым

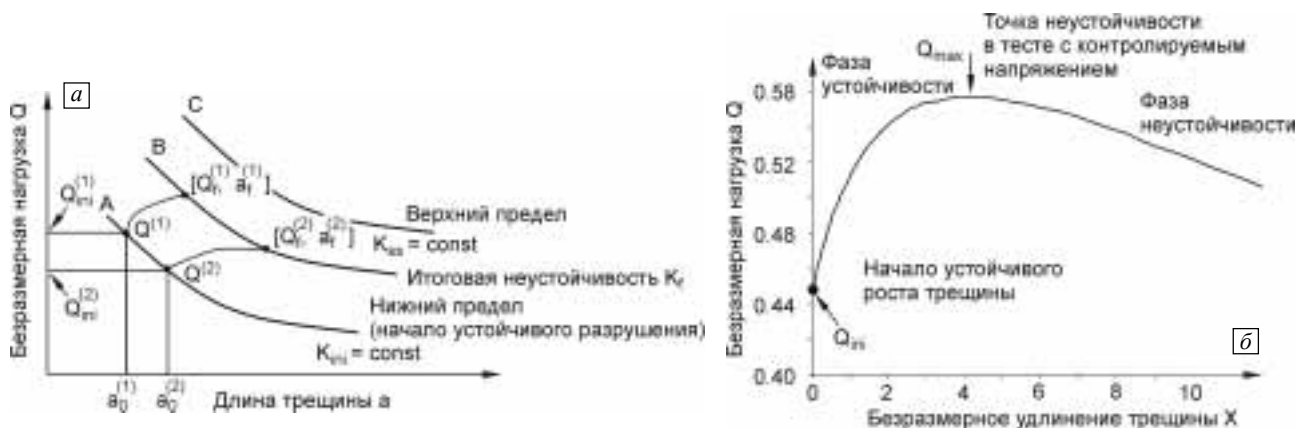


Рис. 1. Верхний предел, итоговая неустойчивость и нижний предел для случая устойчивого роста трещины (а). Тонкие кривые — зависимость внешней нагрузки от текущей длины трещины. Фазы начальной стадии процесса разрушения в неупругом теле (б). Представленная кривая рассматривается как Q -кривая. Она показывает внешнюю нагрузку, которая находится в равновесии с растущей трещиной длиной a в фазе роста, при которой dQ/da положительно. Соответствующие параметры: $m = 3$, $a_0 = 10R_{ini}$, геометрия образца — бесконечная плита с центральной трещиной

ростом трещины, как это видно на так называемой Q -кривой, соединяющей кривые A и B (рис. 1, a). Символ Q представляет безразмерный параметр нагружения:

$$Q = \frac{\pi\sigma}{2\sigma_Y}, \quad (5)$$

где σ — внешнее приложенное напряжение. Здесь Q — некоторая, пока неизвестная функция текущей длины трещины a , которая рассматривается как «равновесная нагрузка» в задаче о квазистатической трещине. Комбинируя определение (5) со стандартной формулой для коэффициента интенсивности напряжений

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\Phi\left(\frac{a}{b}\right) \quad (6)$$

и используя безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \frac{R}{R_{ini}} = Y, \quad \frac{a}{R_{ini}} = X, \\ \frac{b}{R_{ini}} = \omega \text{ (относительное удлинение),} \\ \frac{a}{b} = \frac{X}{\omega}, \end{aligned} \quad (7)$$

запишем уравнение (4) в виде:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)_{Q=\text{const}} &= \frac{\partial}{\partial X}[Y]_{Q=\text{const}} = \\ &= \frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{X}{2}Q^2(X)\Phi^2\left(\frac{X}{\omega}\right)\right] = \\ &= \frac{Q^2\Phi^2}{2} + \frac{X}{2}Q^2(2\Phi\Phi'). \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку выше выражение в квадратных скобках равно Y (безразмерная переменная вязкость разрушения материала), мы можем записать (8) в следующем виде:

$$T_{\text{appl}} = \left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)_{\text{appl}} = \frac{Y}{X} + 2Y\frac{\Phi'}{\Phi}. \quad (9)$$

Здесь символ Φ' означает производную $d\Phi/dX$ коэффициента формы Φ по безразмерной длине трещины X . Выражение (9) можно непосредственно сравнить с уравнением (3), записанным в безразмерной форме:

$$T_{\text{mat}} = \left(\frac{dY}{dX}\right)_{\text{mat}} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{m}{Y}\right). \quad (10)$$

Параметр «увеличения» вязкости разрушения m определяется как отношение верхнего и нижнего пределов переменной вязкости разрушения

$$m = \frac{R_{ss}}{R_{ini}} = \left(\frac{K_{ss}}{K_{ini}}\right)^2. \quad (11)$$

Дифференциальное уравнение (10) определяет так называемую «универсальную» R -кривую сопротивления материала, не зависящую от геометрии, предложенную Внуком [4] и независимо Райсом и Соренсоном [5]

и немного позднее Райсом и др. [6]. Три кривые, получаемые в результате численного интегрирования уравнения (10), показаны на рис. 2. Видно, что форма этих кривых зависит от свойств материала, особенно от R_{ini} и параметра увеличения вязкости разрушения $m = R_{ss}/R_{ini}$. Все кривые, показанные на рис. 2, являются «универсальными» и представляют такую характерную черту материала, которая в условиях маломасштабной текучести не зависит от геометрии. Мы намерены показать, что такой результат может оказаться не всегда корректным и поэтому его следует рассматривать как грубое приближение рассматриваемой задачи.

Условие существования устойчивого роста трещины можно теперь выразить в форме неравенства

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)_{\text{mat}} > \left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)_{\text{appl}} \quad (12)$$

или

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{m}{Y}\right) > \frac{Y}{X} + 2Y\frac{\Phi'}{\Phi}. \quad (13)$$

В качестве альтернативы мы можем определить безразмерную функцию

$$\lambda(Y, m, X_0, \omega) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{m}{Y}\right) - \frac{Y}{X} - 2Y\frac{\Phi'}{\Phi}. \quad (14)$$

Отметим, что при положительном λ трещина распространяется в устойчивом режиме в условиях контролируемой нагрузки. Другими словами, положительное значение λ гарантирует положительный наклон dQ/dX , и мы имеем дело с восходящей ветвью Q -кривой, показанной на рис. 1, b . В точке максимума такой Q -кривой, когда dQ/dX равно нулю, трещина становится неустойчивой и ее распространение невозможно более контролировать изменениями внешней нагрузки.

Будем рассматривать функцию λ в качестве «показателя устойчивости». Она зависит от набора переменных,

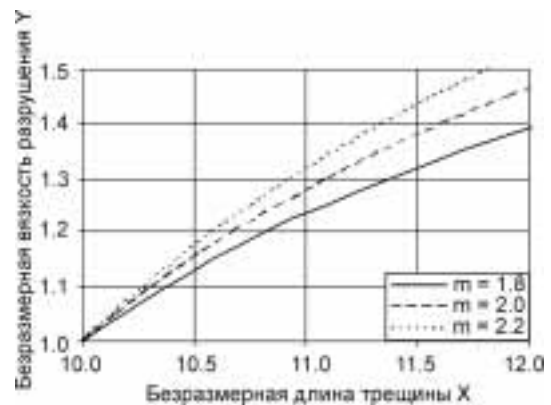


Рис. 2. R -кривые сопротивления материала согласно уравнению (10). Кривые геометрически независимы и их форма определяется только свойством материала — параметром увеличения вязкости разрушения m

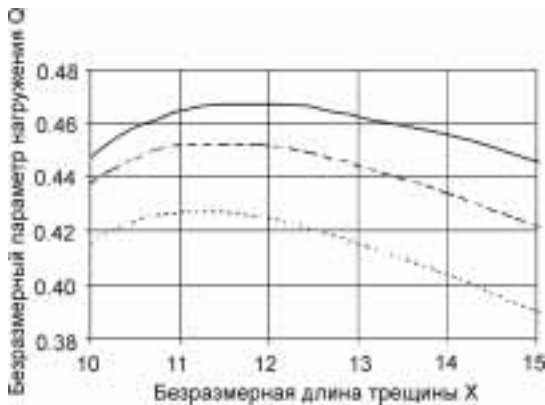


Рис. 3. Q -кривые согласно уравнению (15). Верхняя кривая соответствует образцу бесконечной ширины, средняя кривая — плоскому образцу с центральной трещиной, нижняя кривая — образцу с одним боковым надрезом. Толщина образцов — $100R_{ini}$, начальная длина трещины для всех образцов — $10R_{ini}$, параметр увеличения вязкости разрушения $m = 1.6$ для всех кривых

таких как текущая вязкость разрушения $Y = R/R_{ini}$, начальная длина трещины $X_0 = a_0/R_{ini}$, параметр увеличения вязкости разрушения $m = R_{ss}/R_{ini}$ и безразмерная толщина образца $\omega = b/R_{ini}$. Поскольку Y является функцией текущей длины трещины X , показатель устойчивости λ также зависит от длины трещины. Естественно, наличие члена Φ'/Φ в уравнении (14) обуславливает независимость показателя устойчивости от выбора геометрии. Применение функции λ для исследования неустойчивостей, возникающих при вязком разрушении, будет показано ниже после обсуждения Q -кривых.

Чтобы построить Q -кривую, воспользуемся дифференциальным уравнением (подробности изложены в Приложении А)

$$(15)$$

Примеры интегральных кривых уравнения (15) приведены на рис. 3 для плоского образца с центральной трещиной и образца с одним боковым надрезом. Легко заметить, что для образца бесконечной ширины, когда коэффициент формы равен единице и производная $\Phi' = 0$, приходим к известному уравнению:

$$\frac{dQ_\infty}{dX} = \frac{\log\left(\frac{2m}{XQ_\infty^2}\right) - Q_\infty^2}{2Q_\infty X}. \quad (16)$$

Это уравнение использовалось в работе Оmidвара и Внука [7]. Пример решения данного уравнения приведен на рис. 3.

Для графического представления глобальной неустойчивости, равносильной катастрофическому разру-



Рис. 4. Возрастающие кривые — графики подвода энергии для образцов с одним боковым разрезом, имеющих различную толщину. В точках пересечения этих кривых и графика поглощения энергии (убывающая кривая) происходит переход от устойчивого к неустойчивому разрушению. Самая нижняя кривая соответствует образцу бесконечной толщины. Крестиками отмечены критические точки

шению, можно использовать два математически эквивалентных способа.

Первый способ заключается в построении зависимостей $T_{mat}(Y)$ и $T_{appl}(Y)$ (ср. уравнения (9) и (10)). Эта процедура проиллюстрирована на рис. 4 для образцов с боковым надрезом. Толщина образцов ω варьировалась. Видно, что для образцов с меньшей толщиной катастрофическое разрушение начинается раньше (проявление меньшего X_f) и при меньших величинах вязкости разрушения Y_f . По-видимому, это вывод противоречит предположениям, основанным на «размерном эффекте», наблюдаемом при исследованиях разрушения конструкций большого и маленького размера. Согласно результатам этих исследований, можно было бы ожидать, что конструкции большого размера будут менее прочными, чем маленькие. Мы полагаем, что это расхождение в результатах, скорее всего, вызвано излишне упрощенным представлением не зависящей от геометрии R -кривой, таким как в уравнении Внука–Райса–Соренсена (см. уравнение (10)). Будянский [8] сделал попытку ввести поправку на зависимость от геометрии в существующее и поныне определяющее уравнение R -кривых. Аналогичный подход был предложен Бробергом [9]. Эта проблема требует дальнейшего рассмотрения.

Вторую альтернативу иллюстрирует рис. 5. Здесь вместо построения двух функций, описывающих поглощаемую $T_{mat}(Y)$ и подводимую $T_{appl}(Y)$ энергию, строится только одна функция. В качестве этой функции используется коэффициент устойчивости λ , определяемый уравнением (14), который задается как функция текущей длины трещины X . Чтобы перейти от Y к X , проинтегрируем уравнение (10):

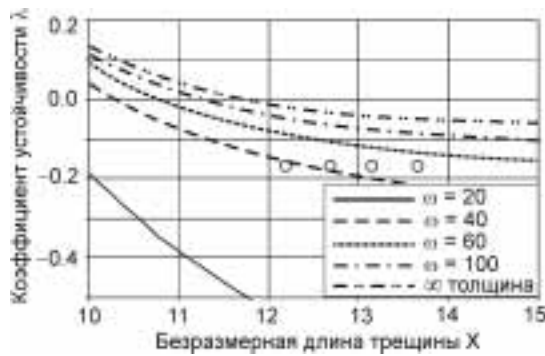


Рис. 5. Графическое определение глобальной неустойчивости с помощью зависимости показателя устойчивости λ от безразмерной длины трещины. Точки пересечения кривых с нулем определяют переход от устойчивого к неустойчивому росту трещины для образцов различной толщины с одним боковым разрезом (верхняя кривая соответствует образцу бесконечной толщины). Сравните эти графики с зависимостями, представленными на рис. 4. Кружки соответствуют критическим состояниям. Обратите внимание на нижнюю сплошную линию для малого образца ($\omega = 20$), где трещина растет неустойчиво, все величины λ отрицательны

$$X(Y, m, X_0) = X_0 + \int_1^Y \frac{2dz}{\log\left(\frac{m}{z}\right)}. \quad (17)$$

Таким образом, основные результаты этих исследований могут быть представлены как функция Y или X . Отметим, что каждый раз, когда кривая $\lambda(X)$ пересекает ноль, мы можем точно указать положение полной неустойчивости, определяемой следующим набором переменных

$$Y = Y_f, X = X_f, Q = Q_f. \quad (18)$$

Результаты этих численных исследований обобщены в табл. 1–3 и на рис. 6–11. Для определения критических значений Y, X и Q было использовано уравнение, в котором в значительной степени учитывается рассматриваемая геометрия:

$$\lambda(Y, m, X_0, \omega) = 0. \quad (19)$$

Если все параметры, кроме Y , остаются неизменными, это уравнение позволяет определить критическую

Таблица 1

Численные значения X_f и их приращение ΔX_f для образцов с различной геометрией

Геометрия	$\omega = 40$		$\omega = 80$		$\omega = 120$		$\omega = 160$		$\omega = 200$		
	m	X_f	$\Delta X_f, \%$	X_f	$\Delta X_f, \%$	X_f	$\Delta X_f, \%$	X_f	$\Delta X_f, \%$	X_f	$\Delta X_f, \%$
CCP	1.4	9.911	-0.889	10.688	6.882	10.882	8.819	10.955	9.552	10.990	9.903
	1.6	10.387	3.869	11.304	13.036	11.531	15.309	11.641	16.409	11.685	16.852
	1.8	10.693	6.932	11.737	17.372	12.013	20.132	12.119	21.187	12.192	21.921
	2.0	10.916	9.161	12.079	20.791	12.404	24.043	12.532	25.321	12.594	25.942
	2.2	11.092	10.919	12.355	23.547	12.717	27.173	12.861	28.610	12.931	29.310
SEN	$\omega = 20$		$\omega = 60$		$\omega = 100$		$\omega = 140$		$\omega = 180$		
	m	X_f	$\Delta X_f, \%$	X_f	$\Delta X_f, \%$	X_f	$\Delta X_f, \%$	X_f	$\Delta X_f, \%$	X_f	$\Delta X_f, \%$
	1.4	8.947	-10.53	10.229	2.292	10.610	6.098	10.768	7.679	10.849	8.490
	1.6	9.358	-6.423	10.766	7.661	11.222	12.218	11.407	14.065	11.499	14.994
	1.8	9.616	-3.841	11.139	11.387	11.652	16.520	11.868	18.685	11.980	19.805
	2.0	9.799	-2.011	11.426	14.263	11.992	19.916	12.241	22.407	12.372	23.720
DEN	2.2	9.934	-0.658	11.646	16.455	12.266	22.662	12.540	25.405	12.686	26.860
	1.4	10.104	1.039	10.931	9.310	11.009	10.094	11.031	10.313	11.040	10.404
	1.6	10.600	6.000	11.610	16.101	11.709	17.094	11.737	17.374	11.749	17.489
	1.8	10.927	9.268	12.083	20.834	12.221	22.214	12.255	22.554	12.270	22.695
	2.0	11.166	11.658	12.489	24.888	12.628	26.281	12.668	26.677	12.684	26.841
ЗРВ	2.2	11.352	13.517	12.812	28.121	12.969	29.693	13.014	30.140	13.033	30.326
	1.4	9.322	-6.777	10.997	9.970	11.285	12.852	11.320	13.200	11.301	13.011
	1.6	9.739	-2.607	11.616	16.156	12.022	20.218	12.079	20.793	12.067	20.671
	1.8	10.001	0.009	12.075	20.748	12.558	25.575	12.641	26.412	12.635	26.346
	2.0	10.191	1.907	12.435	24.348	12.982	29.822	13.089	30.889	13.088	30.876
	2.2	10.330	3.298	12.723	27.229	13.339	33.390	13.467	34.674	13.471	34.714

Примечание: Здесь и в табл. 2, 3 CCP — плоский образец с центральной трещиной; SEN — образец с одним боковым надрезом; DEN — образец с двумя боковыми надрезами; ЗРВ — образец для испытаний на трехточечный изгиб; отрицательные величины соответствуют неустойчивому росту трещины

Таблица 2

Численные значения Y_f и их приращение ΔY_f для образцов с различной геометрией

Геометрия	$\omega = 40$			$\omega = 80$		$\omega = 120$		$\omega = 160$		$\omega = 200$	
	m	Y_f	$\Delta Y_f, \%$	Y_f	$\Delta Y_f, \%$	Y_f	$\Delta Y_f, \%$	Y_f	$\Delta Y_f, \%$	Y_f	$\Delta Y_f, \%$
CCP	1.4	0.985	-1.529	1.098	6.882	1.121	12.097	1.129	12.899	1.133	13.273
	1.6	1.083	8.289	1.230	13.036	1.259	25.862	1.272	27.153	1.277	27.659
	1.8	1.174	17.376	1.356	17.372	1.393	39.304	1.406	40.631	1.415	41.524
	2.0	1.259	25.917	1.477	20.791	1.524	52.395	1.541	54.097	1.549	54.897
	2.2	1.340	34.045	1.593	23.547	1.649	64.861	1.669	66.890	1.678	67.846
SEN	$\omega = 20$			$\omega = 60$		$\omega = 100$		$\omega = 140$		$\omega = 180$	
	m	Y_f	$\Delta Y_f, \%$	Y_f	$\Delta Y_f, \%$	Y_f	$\Delta Y_f, \%$	Y_f	$\Delta Y_f, \%$	Y_f	$\Delta Y_f, \%$
	1.4	0.761	-23.86	1.036	3.645	1.089	8.88	1.108	10.798	1.117	11.730
	1.6	0.820	-17.98	1.151	15.090	1.219	21.914	1.243	24.332	1.255	25.482
	1.8	0.875	-12.49	1.261	26.071	1.344	34.357	1.374	37.400	1.389	38.882
	2.0	0.927	-7.340	1.366	36.631	1.464	46.383	1.501	50.110	1.520	51.954
DEN	1.4	1.017	1.703	1.126	12.638	1.135	13.475	1.137	13.705	1.138	13.799
	1.6	1.123	12.251	1.268	26.797	1.279	27.93	1.282	28.241	1.284	28.369
	1.8	1.221	22.132	1.402	40.193	1.419	41.875	1.423	42.277	1.424	42.443
	2.0	1.314	31.420	1.535	53.528	1.553	55.329	1.558	55.825	1.560	56.030
	2.2	1.402	40.183	1.662	66.209	1.684	68.361	1.690	68.955	1.692	69.200
ЗРВ	1.4	0.863	-13.68	1.133	13.345	1.162	16.204	1.165	16.526	1.164	16.352
	1.6	0.934	-6.553	1.269	26.861	1.312	31.221	1.318	31.785	1.317	31.666
	1.8	1.000	0.028	1.401	40.084	1.456	45.649	1.465	46.523	1.465	46.454
	2.0	1.063	6.310	1.528	52.807	1.596	59.561	1.607	60.746	1.607	60.731
	2.2	1.120	12.025	1.649	64.941	1.730	73.048	1.746	74.560	1.746	74.606

величину переменной вязкости разрушения $Y_f = Y_f(m, X_0, \omega)$. Поскольку это значение соответствует точке на R -кривой, этот результат эквивалентен определению критической длины трещины X_f . Для этого используется уравнение (17):

$$X_f(m, X_0, \omega) = X_0 + \int_1^{Y_f(m, X_0, \omega)} \frac{2dz}{\log(m/z)}. \quad (20)$$

Зная обе переменные Y_f и X_f , можно оценить критическую нагрузку, используя выражения из уравнения (8):

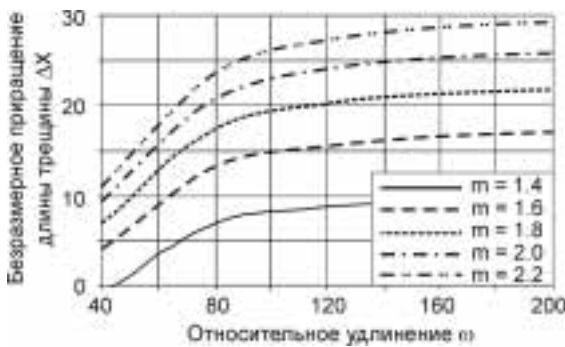


Рис. 6. Плоский образец с центральной трещиной. Влияние относительного удлинения ω и параметра увеличения вязкости разрушения m на приращение длины устойчивой трещины ΔX

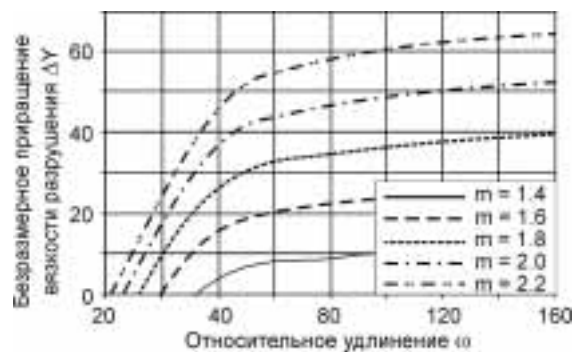


Рис. 7. Образец с одним боковым надрезом. Влияние относительного удлинения ω и параметра увеличения вязкости разрушения m на изменение вязкости разрушения ΔY

Таблица 3

Численные значения Q_f и их приращение ΔQ_f для образцов с различной геометрией

Геометрия	$\omega = 40$			$\omega = 80$		$\omega = 120$		$\omega = 160$		$\omega = 200$	
	m	Q_f	$\Delta Q_f, \%$	Q_f	$\Delta Q_f, \%$	Q_f	$\Delta Q_f, \%$	Q_f	$\Delta Q_f, \%$	Q_f	$\Delta Q_f, \%$
ССР	1.4	0.377	0.025	0.434	0.806	0.445	1.178	0.449	1.325	0.451	1.396
	1.6	0.379	0.506	0.444	3.166	0.457	3.891	0.462	4.164	0.464	4.293
	1.8	0.384	1.773	0.456	5.864	0.470	6.874	0.475	7.248	0.478	7.426
	2.0	0.389	3.285	0.467	8.567	0.483	9.826	0.489	10.292	0.491	10.512
	2.2	0.395	4.855	0.479	11.177	0.496	12.662	0.502	13.212	0.504	13.472
SEN	$\omega = 20$			$\omega = 60$		$\omega = 100$		$\omega = 140$		$\omega = 180$	
	m	Q_f	$\Delta Q_f, \%$	Q_f	$\Delta Q_f, \%$	Q_f	$\Delta Q_f, \%$	Q_f	$\Delta Q_f, \%$	Q_f	$\Delta Q_f, \%$
	1.4	0.193	8.244	0.383	0.110	0.418	0.649	0.431	0.943	0.437	1.103
	1.6	0.184	3.416	0.388	1.486	0.427	2.864	0.441	3.459	0.449	3.763
	1.8	0.181	1.322	0.396	3.451	0.438	5.461	0.454	6.290	0.461	6.710
	2.0	0.179	0.390	0.404	5.551	0.449	8.086	0.466	9.116	0.474	9.635
DEN	1.4	0.396	0.029	0.448	1.277	0.452	1.434	0.453	1.479	0.453	1.497
	1.6	0.401	1.065	0.460	4.075	0.465	4.363	0.466	4.444	0.467	4.477
	1.8	0.407	2.728	0.474	7.125	0.479	7.522	0.480	7.632	0.481	7.678
	2.0	0.414	4.554	0.487	10.138	0.493	10.631	0.494	10.768	0.495	10.825
	2.2	0.422	6.388	0.500	13.030	0.506	13.613	0.508	13.774	0.508	13.841
ЗРВ	1.4	0.326	3.163	0.461	1.503	0.454	2.203	0.444	2.256	0.438	2.196
	1.6	0.318	0.707	0.474	4.361	0.469	5.590	0.459	5.707	0.452	5.626
	1.8	0.316	-0.001	0.487	7.409	0.484	9.086	0.475	9.271	0.467	9.179
	2.0	0.316	0.009	0.501	10.389	0.499	12.471	0.490	12.724	0.482	12.627
	2.2	0.317	0.373	0.514	13.233	0.514	15.691	0.504	16.012	0.496	15.914

$$Y = \frac{X}{2} Q^2(X) \Phi^2\left(\frac{X}{\omega}\right). \quad (21)$$

В критической точке это приводит к

$$Q_f(m, X_0, \omega) = \frac{1}{\Phi(X_f/\omega)} \sqrt{\frac{2Y_f}{X_f}}. \quad (22)$$

Сравнивая критические значения Y, X и Q со значениями, измеренными в начале устойчивого роста трещины, можно оценить в процентах увеличение вязкости разрушения, длины трещины и приложенной нагрузки:

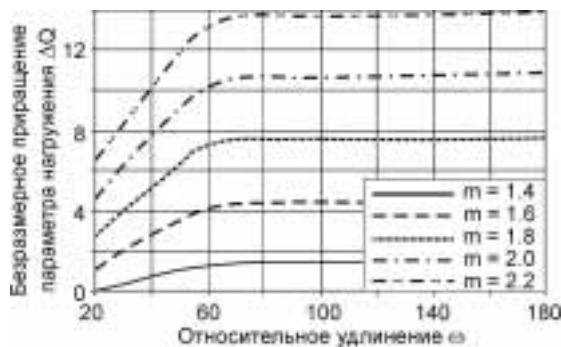


Рис. 8. Образец с двумя боковыми надрезами. Влияние относительного удлинения ω и параметра увеличения вязкости разрушения m на приращение нагрузки ΔQ

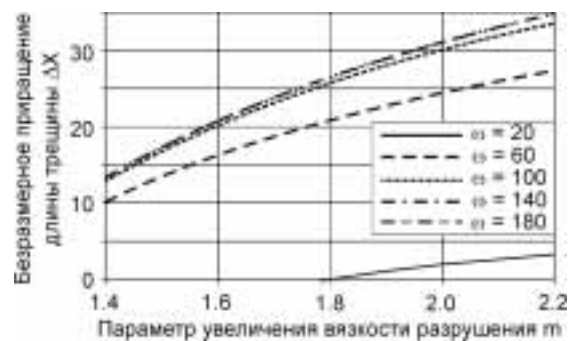


Рис. 9. Образец для испытаний на трехточечный изгиб. Влияние параметра увеличения вязкости разрушения m и относительного удлинения ω на приращение длины устойчивой трещины ΔX

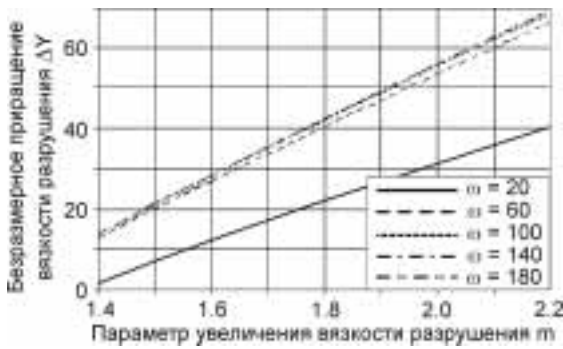


Рис. 10. Образец с двумя боковыми надрезами. Влияние параметра увеличения вязкости разрушения m и относительного удлинения ω на изменение вязкости разрушения ΔY

$$\begin{aligned} \Delta Y_f &= (Y_f - 1) \cdot 100 \%, \\ \Delta X_f &= \frac{X_f - X_0}{X_0} \cdot 100 \%, \\ \Delta Q_f &= \frac{Q_f - Q_{ini}}{Q_{ini}} \cdot 100 \%. \end{aligned} \quad (23)$$

Детали расчетов, используемых здесь, особенно касающихся коэффициента формы для выбранной геометрии образца с трещиной, изложены в Приложении Б. Если любое из приращений X_f , Q_f или Y_f имеет отрицательную величину, это означает отсутствие устойчивого роста трещины перед достижением состояния катастрофической (полной) неустойчивости. Это явление понимается как катастрофическое распространение трещины, которое не предвращается никаким медленным устойчивым растрескиванием. Другими словами, для этих диапазонов значений рассматриваемых параметров материал не подает никакого «сигнала раннего оповещения», предшествующего глобальному разрушению.

2. Заключение

В работе для квазихрупких и пластичных тел продемонстрировано, что докритический рост трещины замедляет возникновение глобального разрушения, определяемого как «полная неустойчивость». Это позволяет отличать это явление от устойчивого роста трещины. Последнее рассматривается как последовательность состояний локальной неустойчивости. Это отличие в чем-то аналогично «локальному короблению» оболочечной конструкции в противоположность глобальному выпучиванию. Понимание таких переходных явлений требует соответствующей математической трактовки.

Ранние стадии вязкого разрушения подвергнуты тщательному математическому анализу. Значимые результаты представлены в виде таблиц и графиков и представляют собой оценку докритических приращений вязкости разрушения, длины трещины и приложенной нагрузки.

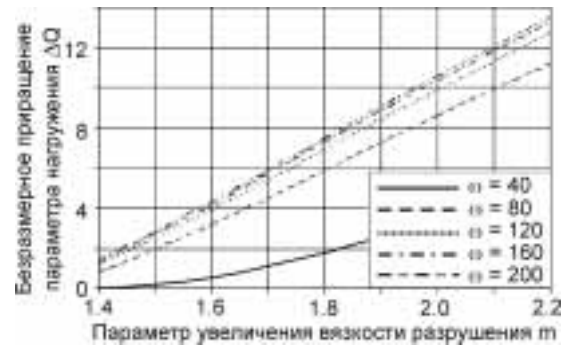


Рис. 11. Плоский образец с центральной трещиной. Влияние параметра увеличения вязкости разрушения m и относительного удлинения ω на приращение нагрузки ΔQ

Набор этих параметров необходим для правильного понимания медленного устойчивого растрескивания. Найдены определенные интервалы геометрических параметров и характеристик материала, для которых процесс медленного растрескивания не существует и начало распространения трещины сопровождается немедленным переходом к необратимому неустойчивому росту трещины. Эти данные могут иметь большое значение для предотвращения разрушения и повышения безопасности сварных конструкций, где используемые материалы часто проявляют ограниченную пластичность.

Благодарности

Авторы выражают признательность доктору Б. Омидвару за его консультации, а также Ф. Рузбехани за его вклад в расчет точных производных и К. Рузбехани за помощь в подготовке иллюстраций.

Приложение А

Если записать основное уравнение (2) в безразмерной форме, мы получим

$$Y = \frac{1}{2} X Q^2 \Phi^2. \quad (A1)$$

В этом уравнении параметры Y , Q и Φ являются некоторыми функциями текущей длины трещины X . Прежде всего, рассмотрим случай бесконечного образца, для которого $\Phi = 1$. Тогда, используя (A1), для Q_∞ будем иметь

$$Q_\infty^2 = \frac{2Y}{X}. \quad (A2)$$

Возьмем производную d/dX от обеих частей этого уравнения:

$$\frac{dQ_\infty^2}{dX} = \frac{dY/dX - Y/X}{Q_\infty X}. \quad (A3)$$

Если dY/dX заменить $T_{mat} = (1/2) \log(m/Y)$, уравнение (A3) сводится к виду

$$\frac{dQ_\infty}{dX} = \frac{\log\left(\frac{2m}{XQ_\infty^2}\right) - Q_\infty^2}{2Q_\infty X}. \quad (A4)$$

Это идентично уравнению (16), справедливому для образца бесконечной ширины. Теперь мы можем вывести уравнение (15), которое определяет функцию $Q = Q(X)$, применимую для произвольной геометрии образца. Напомним, что влияние геометрии учитывается посредством коэффициента формы $\Phi(X/\omega)$. Из уравнения (A1) видно, что Q_∞ и Q связаны как

$$Q(X) = \frac{Q_\infty(X)}{\Phi(X)}. \quad (A5)$$

Возьмем производную d/dX от обеих частей этого уравнения:

$$\frac{dQ}{dX} = \frac{\Phi \frac{dQ_\infty}{dX} - Q \frac{d\Phi}{dX}}{\Phi^2}. \quad (A6)$$

Если выражение (A3) заменить на dQ_∞/dX , тогда (A6) принимает вид:

$$\frac{dQ}{dX} = \frac{\log\left(\frac{2m}{XQ^2}\right) - Q^2 - 2\left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)QX}{2QX\Phi}. \quad (A7)$$

Это дифференциальное уравнение (15), которое определяет функцию $Q = Q(X)$ для произвольной геометрии. Символ Φ' обозначает $d\Phi/dX$.

Для расчета $Q(X)$ можно использовать другой способ: взять интеграл (17) и затем подставить результаты в выражение (A1).

Приложение Б

Коэффициент формы

Для четырех различных геометрий функция $\Phi(a/b)$, так называемый коэффициент формы, приведена согласно работе [10]. Все эти функции основываются на следующей формуле для коэффициента интенсивности напряжений K_I :

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\Phi\left(\frac{a}{b}\right). \quad (B1)$$

Для использования в расчетах эти функции нормируются таким образом, чтобы всегда выполнялось условие $\Phi(0) = 1$.

Б1. Плоский образец с центральной трещиной (center crack panel (CCP)). Это выражение является модификацией формулы секущей Феллерсона, выполненной Тада в 1973 году [10] (рис. 12):

$$\begin{aligned} \Phi1\left(\frac{a}{b}\right) &= \left[1 - 0.025\left(\frac{2a}{b}\right)^2 + 0.06\left(\frac{2a}{b}\right)^4\right] \sqrt{\frac{1}{\cos\left(\pi\frac{a}{b}\right)}}, \\ \Phi1(X, \omega) &= \left[1 - 0.025\left(\frac{2X}{\omega}\right)^2 + 0.06\left(\frac{2X}{\omega}\right)^4\right] \sqrt{\frac{1}{\cos\left(\pi\frac{X}{\omega}\right)}}, \end{aligned} \quad (B2)$$

$$\begin{aligned} G1(X, \omega) &= \frac{d}{dX} \Phi1(X, \omega) = \\ &= \left(-0.2\frac{X}{\omega^2} + 3.84\frac{X^3}{\omega^4}\right) \left[\frac{1}{\cos\left(\pi\frac{X}{\omega}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1 - 0.1\frac{X^2}{\omega^2} + 0.96\frac{X^4}{\omega^4}}{\left[\frac{1}{\cos\left(\pi\frac{X}{\omega}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}} \sin\left(\pi\frac{X}{\omega}\right) \frac{\pi}{\omega} \cos\left(\pi\frac{X}{\omega}\right)^2 \end{aligned}$$

Б2. Образец с одним боковым надрезом (single edge notch (SEN)). Эта формула также взята из работы Тада [10] (рис. 13):

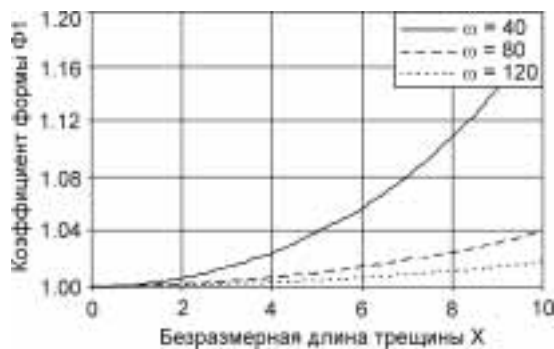


Рис. 12. Плоский образец с центральной трещиной. Зависимость коэффициента формы $\Phi1$ от безразмерной длины трещины X для трех значений относительного удлинения ω

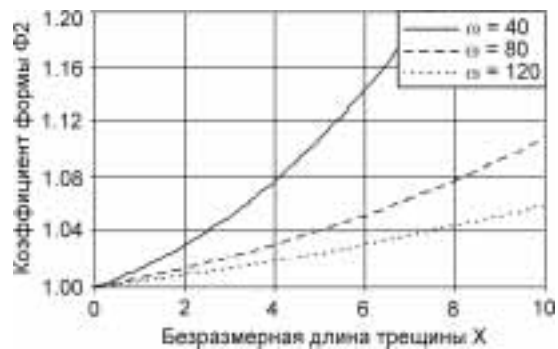


Рис. 13. Образец с одним боковым надрезом. Зависимость коэффициента формы $\Phi2$ от безразмерной длины трещины X для трех значений относительного удлинения ω

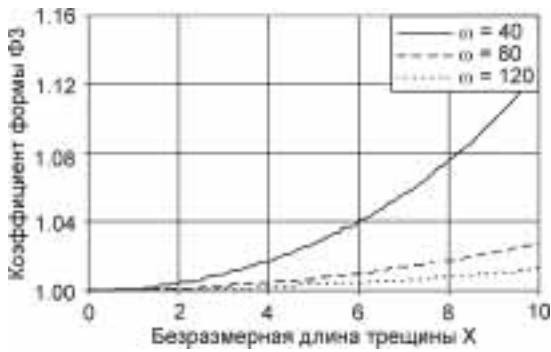


Рис. 14. Образец с двумя боковыми надрезами. Зависимость коэффициента формы Φ_3 от безразмерной длины трещины X для трех значений относительного удлинения ω

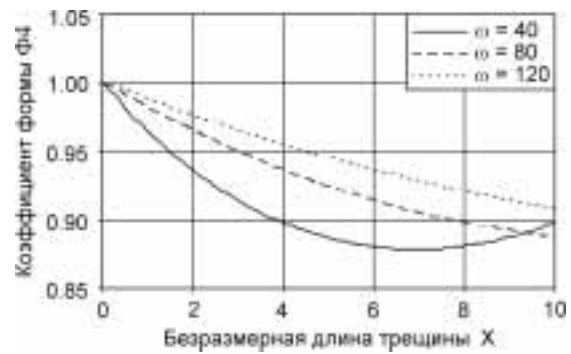


Рис. 15. Образец для испытаний на трехточечный изгиб. Зависимость коэффициента формы Φ_4 от безразмерной длины трещины X для трех значений относительного удлинения ω

$$\begin{aligned} \Phi_2\left(\frac{a}{b}\right) &= \\ &= \frac{1}{1.122} \left[0.265 \left[1 - \left(\frac{a}{b}\right) \right]^4 + \frac{0.857 + 0.265 \left(\frac{a}{b}\right)}{\left[1 - \left(\frac{a}{b}\right) \right]^{\frac{3}{2}}} \right], \\ \Phi_2(X, \omega) &= \\ &= \frac{1}{1.122} \left[0.265 \left(1 - \frac{X}{\omega} \right)^4 + \frac{0.857 + 0.265 \frac{X}{\omega}}{\left(1 - \frac{X}{\omega} \right)^{\frac{3}{2}}} \right], \quad (\text{Б3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2(X, \omega) &= \frac{d}{dX} \Phi_2(X, \omega) = \\ &= -0.94 \frac{\left(1 - \frac{X}{\omega} \right)^3}{\omega} + \frac{0.24}{\omega \left(1 - \frac{X}{\omega} \right)^{\frac{3}{2}}} + \\ &+ 1.34 \frac{0.86 + 0.27 \frac{X}{\omega}}{\left(1 - \frac{X}{\omega} \right)^{\frac{5}{2}} \omega}. \end{aligned}$$

Б3. Образец с двумя боковыми надрезами (double edge notch (DEN)). Эти формулы были предложены Ирвином в 1957 году [10] (рис. 14):

$$\begin{aligned} \Phi_3\left(\frac{a}{b}\right) &= \sqrt{\frac{1}{\pi} \frac{a}{b} \operatorname{tg}\left(\pi \frac{a}{b}\right)}, \\ \Phi_3(X, \omega) &= \sqrt{\frac{1}{\pi} \frac{X}{\omega} \operatorname{tg}\left(\pi \frac{X}{\omega}\right)}, \quad (\text{Б4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_3(X, \omega) &= \frac{d}{dX} \Phi_3(X, \omega) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{2^{1/2}}{\left[\frac{1}{\pi X} \omega \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \pi \frac{X}{\omega}\right) \right]^{1/2}} \times \\ &\times \left\{ \frac{-1}{\pi X^2} \omega \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \pi \frac{X}{\omega}\right) + \frac{1}{2X} \left[1 + \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \pi \frac{X}{\omega}\right)^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Б4. Образец для испытаний на трехточечный изгиб (three point bend (ЗРВ)). Формулы выведены Сроули в 1976 году [10] (рис. 15):

$$\begin{aligned} \Phi_4\left(\frac{a}{b}\right) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1.99 - \frac{a}{b} \left(1 - \frac{a}{b} \right) \left[2.15 - 3.93 \frac{a}{b} + 2.7 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right]}{\left(1 + 2 \frac{a}{b} \right) \left(1 - \frac{a}{b} \right)^{\frac{3}{2}}}, \\ \Phi_4(X, \omega) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1.99 - \frac{X}{\omega} \left(1 - \frac{X}{\omega} \right) \left[2.15 - 3.93 \frac{X}{\omega} + 2.7 \left(\frac{X}{\omega}\right)^2 \right]}{\left(1 + 2 \frac{X}{\omega} \right) \left(1 - \frac{X}{\omega} \right)^{\frac{3}{2}}}, \quad (\text{Б5}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_4(X, \omega) &= \frac{d}{dX} \Phi_4(X, \omega) = \\ &= 0.5 \left[\frac{-1 \left(1 - \frac{X}{\omega} \right) \left(2.15 - 3.93 \frac{X}{\omega} + 2.7 \frac{X^2}{\omega^2} \right)}{\left(1 + 2 \frac{X}{\omega} \right) \left(1 - \frac{X}{\omega} \right)^{\frac{3}{2}}} + \right. \end{aligned}$$



Рис. 16. Зависимость коэффициента формы Φ от безразмерной длины трещины X для различной геометрии образцов, $\omega = 40$. CCP — плоский образец с центральной трещиной; SEN — образец с одним боковым надрезом; DEN — образец с двумя боковыми надрезами; 3PB — образец для испытаний на трехточечный изгиб

$$\begin{aligned}
 & + \frac{X}{\omega^2} \left(2.15 - 3.93 \frac{X}{\omega} + 2.7 \frac{X^2}{\omega^2} \right) - \\
 & \left. \frac{X}{\omega} \left(1 - \frac{X}{\omega} \right) \left(1 - \frac{X}{\omega} \right)^{3/2} \right] - \\
 & - \frac{X}{\omega} \left(1 - \frac{X}{\omega} \right) \left(\frac{-3.93}{\omega} + 5.4 \frac{X}{\omega^2} \right) - \\
 & \left. \frac{X}{\omega} \left(1 - \frac{X}{\omega} \right) \left(1 - \frac{X}{\omega} \right)^{3/2} \right] - \\
 & - 1.005 \frac{1.99 - \frac{X}{\omega} \left(1 - \frac{X}{\omega} \right) \left(2.15 - 3.93 \frac{X}{\omega} + 2.7 \frac{X^2}{\omega^2} \right)}{\left(1 + 2 \frac{X}{\omega} \right)^2 \left(1 - \frac{X}{\omega} \right)^{3/2} \omega} + \\
 & + 0.75 \frac{1.99 - \frac{X}{\omega} \left(1 - \frac{X}{\omega} \right) \left(2.15 - 3.93 \frac{X}{\omega} + 2.7 \frac{X^2}{\omega^2} \right)}{\left(1 + 2 \frac{X}{\omega} \right) \left(1 - \frac{X}{\omega} \right)^{5/2} \omega}.
 \end{aligned}$$

Зависимости коэффициентов формы $\Phi(X, \omega)$ от безразмерного параметра длины X для различных геометрий при $\omega = 40$ приведены на рис. 16.

Приложение В

Для хрупких материалов, таких как большинство металлов при комнатной температуре, началу катастрофического разрушения предшествует образование некоторого числа медленных стабильных трещин. Если величину сопротивления материала разрушению обозначить R , а текущую длину трещины a , тогда для квазистатической трещины взаимосвязь этих величин можно выразить с помощью нелинейного дифференциального уравнения, полученного Внуком [2, 4] из критерия окончательного удлинения при разрушении:

$$\begin{aligned}
 \frac{dR}{da} &= M - \frac{1}{1+\lambda} - \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right), \\
 \lambda &= \sqrt{1 - \frac{\Delta}{R}}.
 \end{aligned} \tag{B1}$$

Появляющаяся в уравнении (B1) дополнительная константа материала, безразмерный модуль разрыва M , связана с константой окончательного удлинения δ . Критерий предполагает существование структурированной зоны при вершине трещины длиной R , которая содержит так называемую «зону процесса», или частицу Нейбера, Δ , расположенную непосредственно на фронте передней кромки трещины. Таким образом, в зоне при вершине трещины мы имеем два физически различных объекта: частицу Нейбера, где происходит сильное уменьшение площади поперечного сечения, и остаток концевой зоны, где пластическая деформация превышает упругую. Окончательное разрушение происходит в этой меньшей по размерам зоне длиной Δ .

Модуль разрыва определяется как отношение некоторой критической длины R_c и размера частицы Нейбера Δ :

$$M = \frac{R_c}{\Delta} = \frac{\pi}{8\Delta} \frac{EG_c}{\sigma_Y^2} = \frac{\pi}{8\Delta} \frac{K_c^2}{\sigma_Y^2}. \tag{B2}$$

В случае квазихрупкого разрушения длина частицы Нейбера достигает R . Очевидно, что λ достигает нуля, в то время как M становится равным 1, приводя к нулевому наклону R -кривой, определяемой уравнением (B1). Положим G_c равным 2γ , как в случае трещины Гриффитса, и заменим R выражением $(\pi/8) K_I^2 / \sigma_Y^2$ в уравнении $R = R_c$, тогда напряжение текучести σ_Y исчезает, предполагается, что трещина растет неустойчиво, и мы получаем результат Гриффитса для напряжения начала разрушения, т.е.

$$\sigma_{crit} = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi a}}. \tag{B3}$$

Уравнение (B1) можно проинтегрировать численно, если принять во внимание начальное условие $R = R_{ini}$ при $a = a_0$ и если предположить, что константа M превышает предельную величину модуля разрыва M_{min} (ниже которой рост трещины неустойчив), определяемую выражением

$$M_{min} = \frac{1}{1+\lambda_{ini}} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+\lambda_{ini}}{1-\lambda_{ini}} \right), \tag{B4}$$

$$\lambda_{ini} = \sqrt{1 - \frac{\Delta}{R_{ini}}}, \quad \frac{R_{ini}}{\Delta} = \rho_i.$$

Константа ρ_i описывает пластичность материала и достигает 1 при хрупком поведении материала. Это означает, что Δ приближенно равно R_{ini} , тогда как для предела вязкого разрушения частица Δ мала по сравнению с длиной R . Итоговая R -кривая простирается от

начальной величины вязкости разрушения R_{ini} до ее верхнего предела, так называемого предела установившегося состояния R_{ss} . Отношение этих двух предельных величин вязкости разрушения будем обозначать m , а именно $m = R_{ss}/R_{ini}$, как и в уравнении (3). Заметим, что при хрупком поведении материала константы R_{ini} , R_{ss} и R_c совпадают (они равны длине частицы Нейбера Δ). Это приводит к нулевому наклону R -кривой. Этот результат может быть получен либо из уравнения (B1) при $\lambda \rightarrow 0$ и $M \rightarrow 1$, либо из уравнения (3) при $m \rightarrow 1$.

Особый интерес представляют две предельные формы уравнения (B1). Первая форма получается разложением функции в левой части в обобщенный степенной ряд по λ при $\Delta/R \rightarrow 1$ (или $\lambda \rightarrow 0$), приводя к R -кривой, справедливой для случая почти хрупкого разрушения:

$$\frac{dR}{da} = M - 1 - \left(1 - \frac{\Delta}{R}\right) + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{\Delta}{R}\right)^{3/2} + \dots \quad (B5)$$

Здесь следует принять, что модуль разрыва несколько больше чем его минимальная (пороговая) величина

$$M_{min} = 1 + \left(1 - \frac{1}{\rho_i}\right) - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{\rho_i}\right)^{3/2}. \quad (B6)$$

Другой предельный случай получается, если считать, что величина R много больше чем Δ , или $\lambda \rightarrow 1$. Это случай вязкого разрушения в пределах маломасштабной текучести, и уравнение записывается как

$$\frac{dR}{da} = M - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \left(\frac{4R}{\Delta} \right). \quad (B7)$$

Фактически, это уравнение Внука–Райса–Соренсена [2, 4–6]. Покажем, что оно идентично уравнению (3), рассмотренному выше. Заметим, что медленный устойчивый рост описывается уравнением (B7) только для значений модуля разрыва M , превышающих пороговую величину

$$M_{min} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log(4\rho_i). \quad (B8)$$

Модуль M можно исключить из уравнения (B7), заменив его установившимся пределом меры вязкости разрушения R_{ss} , используя отношение $m = R_{ss}/R_{ini}$.

В стационарном состоянии скорость dR/da достигает нуля, поскольку мы движемся вдоль горизонтальной асимптоты. Приравняв нулю функцию в правой части уравнения (B7) и заменив R на R_{ss} , получим

$$M = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{4R_{ss}}{\Delta} \right). \quad (B9)$$

Подстановка в уравнение (B7) дает

$$\frac{dR}{da} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{R_{ss}}{R} \right). \quad (B10)$$

Эта форма эквивалентна использованной в тексте (см. уравнение (3)). В заключение отметим, что выражение (B9) представляет собой полезное соотношение, которое связывает верхний предел вязкости разрушения R_{ss} с модулем разрыва M и размером частицы Нейбера:

$$R_{ss} = \frac{\Delta}{4} \exp(2M - 1). \quad (B11)$$

Это уравнение предполагает довольно сильную зависимость верхнего предела вязкости разрушения материала от модуля разрыва и, тем самым, от пластичности материала ρ_i (см. уравнение (B8)). Обозначим соотношение M/M_{min} как k , тогда, комбинируя уравнения (B8) и (B11), получим

$$\frac{R_{ss}}{\Delta} = (4e)^{k-1} \rho_i^k, \quad (B12)$$

где коэффициент k можно оценить следующим образом:

$$k = \frac{2M}{\log(4e\rho_i)}. \quad (B13)$$

Таким образом, используя константы материала k и ρ_i , начальный наклон R -кривой можно определить как

$$\left(\frac{dR}{da} \right)_{ini} = 2e(k-1)\rho_i. \quad (B14)$$

Литература

1. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Royal Society London. – 1921. – A221. – P. 163–198.
2. Wnuk M.P. Accelerating Crack in a Viscoelastic Solid Subject to Subcritical Stress Intensity // Proc. of the Int. Conf. on Dynamic Crack Propagation / Ed. by G.C. Sih. – Leiden: Nordhoff, 1972. – P. 273–280.
3. Wnuk M.P., Legat J. Work of fracture and cohesive stress distributions resulting from triaxiality dependent cohesive zone model // Int. J. Fracture. – 2002. – V. 114. – P. 29–46.
4. Wnuk M.P. Quasi-static extension of a tensile crack contained in a viscoelastic-plastic solid // J. Appl. Mech. – 1974. – V. 41. – P. 234–242.
5. Rice J.R., Sorensen E.P. Continuing crack-tip deformation and fracture for plane-strain crack growth in elastic-plastic solids // J. Mech. Phys. Solids. – 1978. – V. 26. – P. 263–286.
6. Rice J.R., Drugan W.J., Sham T.L. Elastic-plastic analysis of growing cracks // ASTM-STP 700, Philadelphia, PA, 1980. – P. 189–221.
7. Omidvar B., Wnuk M.P. Local and global instabilities associated with continuing crack extension in dissipative solids // Int. J. Fracture. – 1998. – V. 84. – P. 237–260.
8. Budiansky B. Private Communication at a Seminar at Harvard University, 1997.
9. Broberg K.B. Cracks and Fracture. – New York: Academic Press, 1999. – 752 p.
10. Tada H., Paris P.C., Irwin G.R. The Stress Analysis of Cracks Handbook. – New York: ASME Press, 2000. – 677 p.