Структурно-аналитическая мезомеханика деформируемого твердого тела

В.Г. Малинин, Н.А. Малинина

Орловский государственный технический университет, Орел, 302020, Россия

Развивая методологию структурно-аналитической теории прочности, в настоящей статье изложены методы построения определяющих уравнений структурно-аналитической теории физической мезомеханики, основанные на рациональном синтезе основных достижений механики сплошной среды, физики пластичности и прочности твердых тел, материаловедения, термодинамики необратимых процессов и других смежных дисциплин. Нагруженный материал рассматривается как многоуровневая система, в которой микро-, мезо- и макроуровни органически взаимосвязаны. Каждый масштабный уровень характеризуется своими механизмами и закономерностями деформации, эволюцией структуры и повреждаемости. На мезоструктурном уровне доминирует трансляционно-ротационный механизм массопереноса, а разрушение описано как заключительная стадия связанного многоуровневого процесса развития повреждаемости структуры. На основе постулата макроскопической определимости выписана система уравнений сохранения динамического и геометрического характера, а также замыкающие их определяющие соотношения для решения задач инженерного плана по прогнозу термомеханических свойств реальных объектов.

Structural-analytical mesomechanics of a deformable solid

V.G. Malinin and N.A. Malinina

Orel State Technical University, Orel, 302020, Russia

Developing the methodology of the structural-analytical theory of strength, the paper considers methods of deriving constitutive equations of the structural-analytical theory of physical mesomechanics. These methods are based on the main achievements of continuum mechanics, physics of plasticity and strength, materials science, thermodynamics of irreversible processes, and other related branches of science. The loaded material is considered as a multilevel system in which micro-, meso- and macrolevels are integrally related. Each level is characterized by its own mechanisms and laws of deformation as well as by structure and damage evolution. The translational-rotational mechanism of mass transfer dominates at the mesostructural level, whereas fracture is described as a final stage of multilevel structure damage. According to the postulate of macroscopic definability, we write a system of conservation equations of dynamic and geometric types as well as their constitutive closure relationships for solving engineering problems to predict thermomechanical properties of real objects.

1. Введение

Основная задача современной теории деформации заключается в построении модели деформируемого твердого тела, которая должна учитывать его сложную и многоуровневую организацию, различные виды деформации, с одной стороны, и порождающие их напряжения, температуры, радиационные, электрические и магнитные поля и т.д., с другой. Задача физики твердого тела, в этом плане, состоит в рассмотрении микромасштабного уровня и построении теории механического поведения кристаллов, в которой учитываются конкретные физические механизмы явления и их влияние на соответствующие параметры уравнений структурной организации кристаллов. Физика пластичности и прочности описывает законы движения структурных несовершенств в нагруженном твердом теле, используя методологию теории дефектов, в частности, аппарат теории дислокаций. Впечатляющие успехи достигнуты в изучении дислокационной пластичности кристаллов. Труднообозримый массив экспериментальных данных, полученный нередко с использованием ювелирной экспериментальной техники дает хорошее представление о механизме формирования элементарных актов и законов пластичности. Здесь не только поняты структурно-физические механизмы реализации процессов неупругой деформации, но и созданы эффективные способы расчета. Тем не менее, физическая теория пластичности кристаллов не достигла инженерного уровня, сохранив свое значение лишь для объяснения и описания элементарных актов деформации или близких к ним. В рамках рассматриваемого подхода подробно изучены основные механизмы движения дефектов на микромасштабном уровне и даны качественные интерпретации многих закономерностей макродеформаций и макроразрушения. В то же время, анализ напряженно-деформированного состояния макроскопической системы в целом находится вне возможностей микроскопического подхода теории дефектов [1].

Механика деформируемого твердого тела предусматривает создание аналитических соотношений, обеспечивающих прогноз механического поведения реальных макроскопических объектов. Названная проблема решается с помощью феноменологических гипотез, сформулированных на основе экспериментальных данных о механическом поведении макроскопических образцов и привлечения основных законов механики: динамических уравнений равновесия, условий сплошности для деформаций, условий баланса для температуры и определяющих уравнений состояния феноменологического плана. Выполненный в рамках рассматриваемого подхода расчет напряженно-деформированного состояния сплошной среды не учитывает архитектуру внутренней структуры и реальных механизмов деформаций. Как следствие, теория дефектов в моделях механики деформируемого твердого тела не используется.

Необходимо отметить, что механика пластичности кристаллов (испытывающих дислокационную неупругость) получила довольно широкое распространение в инженерной практике и имеет добротную аналитическую базу. Вместе с тем, ее содержательные успехи весьма скромны. Будучи откровенно феноменологической, она описывает в основном лишь те закономерности, на основе которых калибруются аналитические соотношения. Предсказательная сила уравнений механики пластичности в отношении сложных способов механического, температурного, радиационного и других воздействий на материал совершенно неудовлетворительна. В применении же к таким объектам, как материалы со свойствами памяти формы, где факторы механического характера конкурируют с эквивалентными по интенсивности факторами структурного и кристаллохимического происхождения, методы классической механики деформируемого твердого тела вообще не продуктивны. Следует сказать, что основополагающие принципы механики пластичности, используемые при выводе определяющих соотношений, такие как постулаты Друккера и Одквиста, гипотеза существования поверхностей текучести или единой кривой деформирования, установленные в свое время на основе анализа экспериментального изучения поведения объектов, подобных железу или меди, не выдерживают критики применительно к целому ряду новых материалов или в условиях нетривиальных режимов деформирования. Так, например, у никелида титана деформационное упрочнение может и не определяться длиной пути нагружения, как у стали, а лишь конечным значением деформации. В этом же объекте деформация может инициировать выделение, а не поглощение энергии и т.д.

Перечисленные примеры, число которых может быть значительно увеличено, правомерно ставят вопрос о причинах сложившейся ситуации и о возможных путях решения проблемы. Попытаемся ответить на эти вопросы.

Причины невыхода физической теории пластичности на инженерный аспект довольно очевидны. Помимо элементарных актов пластичности, законы которых хорошо изучены на уровне одиночных дислокаций или их простейших образований, существенную роль играют крупномасштабные процессы. В сложных ансамблях дислокаций вступают в силу мощные коллективные эффекты. Это приводит к тому, что свойства ансамбля оказываются не тождественными свойствам одиночных дислокаций, составляющих ансамбль. Сильные внутриансамблевые взаимодействия порождают его сложные солитонные свойства. В крупномасштабных ансамблях на первый план могут выступать принципы самоорганизации структуры, которые в терминах синергетики следует рассматривать как диссипативные. Многочисленные бифуркации в таких структурах порождают новые свойства системы дефектов и очень сложные структурные состояния. Материал испытывает разнообразные кинетические фазовые переходы, управляющим параметром которых оказывается не только температура, но и другие переменные, например суммарная плотность дислокаций. Более того, в сложноорганизованных структурах, помимо трансляционной пластичности, с неизбежностью возбуждается ротационная пластичность и возникают характерные турбулентности [1–4]. Следовательно, в процесс вовлекается еще один масштабный уровень. Как показывает анализ экспериментальных данных, в реальных высокопластичных объектах процесс нагружения сопровождается массопереносом вещества сразу на нескольких структурных и масштабных взаимодействующих уровнях. Количество таких уровней может быть очень велико: электронный, атомно-вакансионный, атомно-дислокационный, ячеистый или блочный, фрагментарный и субзеренный, в масштабах одного зерна или группы зерен и т.д. В некоторых случаях инициация процесса одновременно во всех иерархиях происходит с соблюдением принципа автомодельности, а в других случаях без этого.

Из сказанного следует важнейший вывод о том, что последовательное физическое рассмотрение проблемы пластичности требует корректного учета многочисленных способов реализации элементарного акта не только на нижнем деформационном этаже, но и последовательного рассмотрения формирования каждой из последующих по масштабу структур, их свойств и законов эволюции, а также характера межуровневого взаимовлияния и взаимодействия между структурами одного вида. Ясно, что макроскопические свойства пластичности формируются на всех этапах реализации процесса массопереноса и не могут сводиться лишь к одному из них.

Естественно, что в общей постановке целесообразна формулировка такой теории деформации, которая была бы основана на строгих физических посылках, т.е. на учете реальных физических процессов, и одновременно позволяла бы решение практических задач инженерного характера. Хорошо известно, что многочисленные попытки построения подобной теории предпринимались давно, однако надежда с помощью различных методов ориентационного и статистического усреднения непосредственно перейти из микромасштабной области в макромасштабную не увенчались успехом. Лишь в части анализа упругости, теплового расширения, электро- и магнитострикции можно отметить значительные успехи [2].

Как отмечается в [1, 3, 4], сложившаяся ситуация определяется двумя принципиальными обстоятельствами. Во-первых, последовательное и корректное описание эволюции сложного стохастического распределения дислокаций и их ансамблей сталкивается с непреодолимыми математическими трудностями. Во- вторых, самоорганизация дислокационных ансамблей приводит к новому качеству: в сплошной среде возникает движение более крупномасштабных, чем дислокация, мезодефектов [5].

В свете сказанного следует, что для перехода от микроструктурного масштабного уровня к макроскопическому необходимо учесть вклад эволюции промежуточного, мезоструктурного уровня, который характеризуется движением соответствующих мезодефектов, обеспечивая формирование трансляционно-ротационных мод деформаций [1, 3–6].

Необходимо отметить, что убедительные масштабные экспериментальные результаты и теоретические обобщения о важной роли мезоструктурного уровня в процессе формирования свойств реальных материалов представлены в монографии [3], в которой дан подробный аналитический обзор работ томской научной школы, выполненных под руководством В.Е. Панина, и содержащей фундаментальное экспериментальное и методологическое обоснование нового научного направления — физической мезомеханики материалов.

Принципы построения физической мезомеханики были доложены В.Е. Паниным на международном семинаре «Мезоструктура» (4–7 декабря 2001 г., Санкт-Петербург) [7], где состоялось их подробное обсуждение. В решении семинара отмечено, что созданное под руководством В.Е. Панина новое научное направление — физическая мезомеханика материалов — обеспечило мощный методологический фундамент для объединения основных достижений физики пластичности и разрушения с механикой деформируемого твердого тела.

Основная задача, которая была сформулирована председателем семинара «Мезоструктура» Рыбиным В.В., заключается в разработке общего подхода, позволяющего «прописать, каким образом мезоструктура дает вклад в макромасштабный уровень и как микроструктура влияет на формирование мезоструктуры».

В свете сказанного, как отмечается в [1], принципиально важно сформулировать общий алгоритм построения модели физической мезомеханики для описания деформации твердого тела с любой внутренней структурой и для произвольных режимов его нагружения. Одному из возможных вариантов решения обозначенной проблемы на основе развития методов структурно-аналитической теории прочности [2] и посвящена настоящая статья.

2. Физические аспекты

Следуя [1–7], будем связывать пластическую деформацию и разрушение поликристаллического объекта с потерей его сдвиговой устойчивости, рассматривая данное явление как многоуровневый релаксационный процесс. Учитывая результаты работ [1, 3, 4, 8–13], рассмотрим возможный сценарий основных этапов зарождения и развития пластической деформации и разрушения нагружаемого объекта, принятый при построении модели.

Первоначально потеря сдвиговой устойчивости происходит на микроуровне в локальных областях кристалла. Возникающие на структурных неоднородностях микроконцентраторы напряжений вызывают дислокационные сдвиги в определенных кристаллографических плоскостях и направлениях, инициируя формоизменение, которое с хорошим приближением можно характеризовать трансляционными модами деформации. На первых этапах формируется сдвиг с нестесненным материальным поворотом (микро-1), обеспечивая стадию легкого скольжения, затем по мере включения менее благоприятных систем скольжений инициируется сдвиг со стесненным материальным поворотом (микро-2) [1].

В процессе пластической деформации плотность дислокаций возрастает, и в местах ее интенсивного торможения, согласно экспериментальным результатам Степанова А.В. [8], возникают мощные локальные напряжения, достигающие уровня теоретической прочности, способные зародить микротрещину в голове дислокационных нагромождений. Существуют десятки конкретных дислокационных моделей разрушения [9], в которых дается обстоятельное физическое наполнение идеи Степанова А.В. Таким образом, разрушению на микроуровне предшествует подготовительная стадия, когда трещины еще нет, а неупругая деформация уже происходит. Такая деформация, являясь релаксационной по сути, вызывает мощные структурные изменения в материале и создает в свою очередь концентраторы, которые являются предпосылками для зарождения и развития микротрещин. Когда структура в локальных объемах становится критической, в местах перенапряжения начинают вскрываться зародышевые микротрещины отрыва, среза или инициируются повреждения термофлуктуационной природы. Процесс разрушения существенно зависит от условий нагружения, вида напряженного состояния и истории термомеханического воздействия. Вторая стадия — вскрытие микротрещин — еще не означает исчерпания телом несущей способности, но дает ему новое качество: в кристалле появляются повреждения в виде несплошностей. Возникшие микротрещины вначале не способны к распространению, во-первых, из-за того, что напряжения еще малы для их распространения по Гриффитсу (или Гриффитсу–Ирвину–Оровану), и, во-вторых, из-за того, что условия их распространения затруднены в структурном плане из-за недостаточной подготовленности материала для продвижения устья трещины через созданную деформацией структуру, включая и структуру трещин-эмиссаров. По этой причине необходим второй уровень критической структуры, определяющий требуемые предпосылки для распространения трещин, в отличие от первого критического уровня, необходимого для выполнения условий, создающих возможности зарождения трещин.

С ростом деформации плотность дефектов возрастает, вовлекаются в сдвиговой процесс новые дислокации вдоль кристаллографических плоскостей, не совпадающих с благоприятно ориентированными направлениями, обусловленными траекторией нагружения в пространстве напряжений. Указанные обстоятельства вызывают необходимость самоорганизации дислокационных скоплений и статистических ансамблей микротрещин в диссипативные субструктуры в рамках исходной структуры материала. Для возникновения вышеназванных процессов самоорганизации необходимо достижение критических величин параметрами, характеризующими эволюцию дефектной и поврежденной структуры соответствующего уровня. В качестве таких параметров, как показано в работах [10, 11], могут быть скалярная плотность дислокаций, характеризуемая «длиной пути» пластического деформирования (типа параметра Одквиста для микроуровня), и среднестатистическая величина локальной повреждаемости. Принципиальной особенностью возникающих диссипативных субструктур является образование вихревого способа массопереноса, классифицируемого в [1, 3] как возникновение мезоструктурного уровня 1. На рассматриваемом масштабном и структурном уровне [3, 4] ярко проявляются гидродинамические свойства вещества, зависящие от истории термомеханического воздействия и вида напряженно-деформированного состояния.

По мере развития деформации нарастает плотность структурных несовершенств более крупного масштабного уровня и при некотором критическом значении мезоконцентраторов, когда средние статистические величины сдвиговой деформации и плотности мезотрещин достигнут критических величин, теряется сдвиговая устойчивость в локальных зонах следующего мезоструктурного уровня — мезо-2. В результате становятся возможными структурные изменения в областях значительной протяженности и в произвольных направлениях, не обязательно совпадающих с кристаллографическими вариантами сдвигов и скалывания. Появляются протяженные сдвиговые деформационные структуры и мезотрещины [3], они зарождаются на мезоконцентраторах напряжений и распространяются на большие расстояния через многие структурные элементы независимо от кристаллографической ориентации. На данном масштабном уровне особое значение приобретают стохастические свойства формирования трансляционно-ротационного поля деформируемой поврежденной среды.

Самоорганизация сложных стохастических процессов в различных объемах масштабного уровня мезо-2 приводит к формированию нетривиальных тензорных свойств поврежденной среды на масштабном уровне макрочастицы вещества, т.е. на уровне макро-1.

Неоднородное распределение макродеформаций в нагруженном реальном изделии требует анализа напряженно-деформированного состояния в рамках решения краевой задачи механики деформируемого твердого тела с трещиной с привлечением хорошо разработанных методов механики разрушения.

Отметим, что приведенный сценарий эволюции основных структурных и масштабных уровней процесса деформации поврежденной среды весьма условен, однако он позволяет правильно представить последовательность и основные этапы моделирования в виде соответствующих связанных определяющих соотношений.

Подводя итог краткому анализу физических аспектов поведения поврежденной среды под нагрузкой, отметим, что для адекватного описания процессов деформации и разрушения, согласно методологии физической мезомеханики, необходимо синхронное и взаимосогласованное рассмотрение процессов на трех масштабных уровнях: микро, мезо и макро [1, 3–5], для которых, как отмечается в [12], должны быть развиты принципиально различные математические методы моделирования.

Дадим краткий комментарий, касающийся аналитических методов физической мезомеханики. Известно, что существуют несколько подходов к математическому моделированию многоуровневых процессов деформации и разрушения, подробный их обзор представлен в [3]. Там же отмечается наиболее предпочтительная концепция, в основе которой лежит континуальная модель деформируемого твердого тела в виде суперпозиции двух континуумов, причем квазиконтинуум дефектов рассматривается как самостоятельная подсистема [13]. Методология структурно-аналитической мезомеханики также постулирует возможность на каждом масштабном уровне одновременной эволюции как самостоятельных объектов квазиконтинуумов структурных дефектов различного сорта (ансамблей дислокаций, двойников, межфазных границ и др.), включая и самостоятельный квазиконтинуум структурных повреждений. Причем свойства обозначенных объектов на каждом масштабном уровне различны и подчиняются фундаментальным законам сохранения, отражающим физические аспекты соответствующего масштабного и структурного уровня. Учет сильных взаимодействий структурных элементов внутри каждого квазиконтинуума, а также между различными квазиконтинуумами осуществляется на основе метода самосогласованного эффективного поля [2].

Следуя изложенному сценарию, рассмотрим последовательно методику построения определяющих соотношений для расчета микро-, мезо- и макроскопических механических свойств кристаллических материалов.

3. Микромасштабный уровень

В рамках концепции существования вложенных многомасштабных континуальных сред для анализа микроуровня введем объем усреднения $V_0 \gg V_\text{a}$, где V_a — объем атома. Следуя [2, 14, 15], сформулируем определяющие соотношения для описания соответствующих деформационных потоков и параметров, характеризующих эволюцию структуры и повреждаемости на микроуровне:

$$\dot{\beta}^{\text{el}}_{ik} = C_{ikpq}\dot{\tau}_{pq}, \quad \dot{\beta}^{\text{T}}_{ik} = \gamma_{ik}\dot{T}, \tag{1}$$

$$\dot{\beta}^{\text{H}}_{ik} = \dot{\beta}^{\text{H}}_{31}(\delta_{i3}\delta_{k1} + \delta_{k3}\delta_{i1}), \quad \dot{\beta}^{\text{H}}_{31} = \dot{\beta}^{\text{t}}_{31} + \dot{\beta}^{\text{a}}_{31}, \tag{2}$$

$$\dot{\beta}^{\text{t}}_{31} = A_\text{t}\exp\left(-\frac{u_\text{t} - \gamma_\text{t}\tau'_{31}\text{sign}\tau'_{31}}{kT}\right)\times \\ \times(\tau'_{31}\text{sign}\tau'_{31})^n\,\text{sign}\tau'_{31}, \tag{3}$$

$$\dot{\beta}^{\text{a}}_{31} = A_\text{a}(\dot{\tau}'_{31} - \dot{\tau}^{\text{s}}_0\text{sign}\tau'_{31})\times \\ \times H(\tau'_{31}\text{sign}\tau'_{31} - \tau^{\text{s}})H(\dot{\tau}'_{31}\text{sign}\tau'_{31} - \dot{\tau}^{\text{s}}_0), \tag{4}$$

$$\dot{\tau}^{\text{s}} = A_\text{a}^{-1}\dot{\beta}^{\text{a}}_{31}\text{sign}\dot{\beta}^{\text{a}}_{31} - \chi\dot{T} - \\ - A_\text{s}\exp\left(-\frac{u_\text{s} - \gamma_\text{s}\tau'_{31}\text{sign}\tau'_{31}}{kT}\right)\times \\ \times(\tau^{\text{s}} - \tau_0 + \chi T)^{\text{m}}\,H(\tau^{\text{s}} - \tau_0 + \chi T), \tag{5}$$

$$\dot{\tau}^{\text{s}}_0 = \dot{\tau}^{\text{s}} - A_\text{a}^{-1}\dot{\beta}^{\text{a}}_{31}\text{sign}\dot{\beta}^{\text{a}}_{31}, \\ \tau^{\text{s}}_0(s^\tau) = \tau_0 + s^\tau, \tag{6}$$

$$\Gamma^\tau_{\min} \le s^\tau \le \Gamma^\tau_{\max}, \\ \tau'_{ik} = \tau'_{31}(\delta_{i3}\delta_{k1} + \delta_{k3}\delta_{i1}), \\ \tau'_{31} = \tau_{31} - \psi^{(\rho)}_{31} + \psi^{(r)}_{31} + \nu^{\Sigma}_{31}, \tag{7}$$

$$\tau_{31} = \alpha_{p3}\alpha_{q1}\sigma_{pq}\left[\left(1 - \frac{\Pi_\Sigma}{\Pi_0}\right)^{\varsigma}\right]^{-1}, \\ \psi^{(p)}_{ik} = \alpha_{pi}\alpha_{qk}\rho_{pq}, \\ \psi^{(r)}_{ik} = \alpha_{pi}\alpha_{qk}r_{pq}, \tag{8}$$

$$\dot{\pi}^0 = \left[H(\hat{\tau}_{33} - \tau^0)\,\delta\left(\frac{\beta}{\beta^0} - 1\right)\frac{\dot{\beta}}{\beta^0} + \right. \\ \left. + H(\beta - \beta^0)\,\delta\left(\frac{\hat{\tau}_{33}}{\tau^0} - 1\right)\frac{\dot{\hat{\tau}}_{33}}{\tau^0}\right]\times \\ \times\left(1 + \alpha^0\frac{\beta}{\beta^0}\right)H(1 - \pi^0) + \\ + \alpha^0 H(\beta - \beta^0)H(\hat{\tau}_{33} - \tau^0)\frac{\dot{\beta}}{\beta_0}, \tag{9}$$

$$\dot{\pi}^{\text{c}} = \left[H(\overline{\tau}_{31}\text{sign}\overline{\tau}_{31} - \tau^{\text{c}})\,\delta\left(\frac{\beta}{\beta^{\text{c}}} - 1\right)\frac{\dot{\beta}}{\beta^{\text{c}}} + \right. \\ \left. + H(\beta - \beta^{\text{c}})\delta\left(\frac{\overline{\tau}_{31}\text{sign}\overline{\tau}_{31}}{\tau^{\text{c}}} - 1\right)\frac{\dot{\overline{\tau}}_{31}\text{sign}\overline{\tau}_{31}}{\tau^{\text{c}}}\right]\times \\ \times\left(1 + \alpha^{\text{c}}\frac{\beta}{\beta^{\text{c}}}\right)H(1 - \pi^{\text{c}}) + \\ + \alpha^{\text{c}}H(\beta - \beta^{\text{c}})H(\overline{\tau}_{31}\text{sign}\overline{\tau}_{31} - \tau^{\text{c}})\frac{\dot{\beta}}{\beta^{\text{c}}}, \tag{10}$$

$$\int_0^{t_\text{p}}\tau_0^{-1}\exp\left(-\frac{u_\text{p} - \gamma_\text{p}\hat{\tau}_{33}}{kT}\right)\text{d}t = 1, \\ \dot{\pi}^{\text{t}} = \delta\left(\frac{t}{t_\text{p}} - 1\right)\left(\frac{1}{t_\text{p}}\right)(1 + a^{\text{t}}\beta)H(1 - \pi^{\text{t}}) + \\ + a^{\text{t}}H\left(\frac{t}{t_\text{p}} - 1\right)\dot{\beta}, \tag{11}$$

$$\hat{\pi}_i = [\hat{\tau}_{31}\delta_{i1} + \hat{\tau}_{33}H(\hat{\tau}_{33})\delta_{i3}](\pi^0 + \pi^t)^{n_r}, \\ \overline{\pi}_i = [\overline{\tau}_{31}\delta_{i1} + \overline{\tau}_{33}H(\overline{\tau}_{33})\delta_{i3}](\pi^{\text{c}})^{n_r}, \tag{12}$$

$$\dot{\beta} = \dot{\beta}^H_{31}\text{sign}\dot{\beta}^H_{31}, \quad \beta = \int_0^t\dot{\beta}^{\text{H}}_{31}\text{sign}\dot{\beta}^{\text{H}}_{31}\text{d}s, \tag{13}$$

$$\hat{\tau}_{ik} = \eta^0_{pi}\eta^0_{qk}\tau^{**}_{pq}, \\ \overline{\tau}_{ik} = \eta^{\text{c}}_{pi}\eta^{\text{c}}_{qk}\tau^{**}_{pq}, \\ \tau^{**}_{ik} = \tau'_{ik} + \alpha_\rho\psi^{(\rho)}_{ik} - \alpha_r\psi^{(r)}_{ik} + \nu^{\Sigma}_{ik}. \tag{14}$$

В соотношениях (1)–(14) и далее точка над символом означает производную по времени. Тензоры упругой деформации β_{ik}^{el}, коэффициентов упругости C_{ikpq}, деформации теплового расширения β_{ik}^{T} (1) и коэффициентов теплового расширения γ_{ik} отнесены к кристаллографическому базису. Тензор полной скорости неупругой деформации $\dot{\beta}_{ik}^{\mathrm{H}}$ (2) состоит из термоактивированной $\dot{\beta}_{ik}^{\mathrm{t}}$ (3) и атермической $\dot{\beta}_{ik}^{\mathrm{a}}$ (4) составляющих. Эволюционные уравнения для начального τ_0^{s} (6) и текущего τ^{s} (5) напряжения течения кристаллографического сдвига учитывают деформационное упрочнение (первое слагаемое в (5)), температурный фактор (T), а также способность к старению или возврату (второе и третье слагаемые в (5)). Эффективное напряжение τ_{ik}' содержит, наряду с компонентами напряжений от внешних нагрузок τ_{ik}, ориентированные $\psi_{ik}^{(\rho)}$, $\psi_{ik}^{(r)}$ и неориентированные ν_{ik}^{Σ} структурные напряжения различной природы [2]. Среди неориентированных микронапряжений часто выделяют напряжения, обусловленные анизотропией коэффициентов теплового расширения и анизотропией упругой податливости кристаллов. Подробный вывод эволюционных уравнений для расчета неориентированных напряжений различной природы содержится в монографии [2]. Отметим, что поля ν_{ik}^{Σ} взаимно уравновешены, являются близкодействующими, а длина волны флуктуирующего поля напряжений соизмерима с характерным размером представительного объема V_0. Ориентированные напряжения $\psi_{ik}^{(\rho)}$ и $\psi_{ik}^{(r)}$ являются дальнодействующими, отражают влияние на напряженное состояние кристаллов пространственной неравномерности зарождения и развития пластической деформации ($\psi_{ik}^{(\rho)}$) и появление трещин на мезо- и макромасштабных уровнях ($\psi_{ik}^{(r)}$). Введение ориентированных структурных напряжений учитывает фактор релаксации напряжений в локальных объемах, где происходит пластический сдвиг ($\psi_{ik}^{(\rho)}$) и вскрываются трещины ($\psi_{ik}^{(r)}$). Рассматриваемые структурные напряжения $\psi_{ik}^{(\rho)}$ и $\psi_{ik}^{(r)}$ формируются на мезо- и макромасштабных уровнях, поэтому подробный вывод эволюционных уравнений для их расчета будет представлен ниже при анализе соответствующих определяющих соотношений. Уравнения (9)–(14) моделируют процессы образования трещин отрыва (9), среза (10), вскрытие повреждений термофлуктуационной природы (11), (12), а также их рост в процессе неупругой деформации. Отметим, что для удобства, указанные соотношения сформулированы в соответствующих базисах: отрыва (**a**, **b**, **c**) (9), (11), (12) и среза (**p**, **r**, **s**) (10). Уравнения (9) и (10) учитывают то, что микротрещины зарождаются только при обязательном выполнении двух условий: во-первых, когда длина пути микродеформаций β (13) достигнет критического значения, равного для трещин отрыва β^0, а для трещин среза β^{c}, во-вторых, когда напряжение отрыва $\hat{\tau}_{33}$ или величина напряжения среза $\bar{\tau}_{31}\mathrm{sign}\bar{\tau}_{31}$ достигнет соответствующего критического напряжения отрыва τ^0 или критического напряжения среза τ^{c}. Параметр повреждаемости Π_{Σ} в (7) учитывает влияние на τ_{ik} тех повреждений, которые вскрываются на микро- и мезоструктурных уровнях. Расчет параметра Π_{Σ} обсуждается в разделе, посвященном формулировке критерия разрушения на макроуровне. Обозначения α_{ik} характеризуют направляющие косинусы взаимной ориентации локального (**l**, **m**, **n**) и лабораторного (**x**, **y**, **z**) базисов; η_{ik}^{0}, η_{ik}^{c} — направляющие косинусы между локальным базисом реализации пластического сдвига (**l**, **m**, **n**), базисами отрыва (**a**, **b**, **c**) и среза (**p**, **r**, **s**); δ — дельта-функция Дирака; δ_{ik} — символ Кронекера; $H(x)$ — функция Хевисайда; α_{ρ}, α_r — коэффициенты концентрации структурных напряжений; $\Gamma_{\min}^{\tau}$, $\Gamma_{\max}^{\tau}$ — граничные значения случайного поля τ_0^{s}, которые оцениваются из анализа физического содержания задачи.

Отметим, что само по себе появление микротрещин отрыва или среза еще не означает, что они будут сразу развиваться, необходимо выполнение дополнительных критериев. В соответствии с идеями механики разрушения для подрастания возникших трещин необходимо выполнить силовое (или энергетическое) условие их распространения. В этой связи вводятся векторы микроповреждаемости [2] для трещин отрыва и трещин среза в виде соотношений (12), где n_r — постоянная. Выражения в первых скобках формул (12) учитывают степень раскрытия микротрещин в поле напряжений. Когда величины $\hat{\pi}_i\hat{\pi}_i$ и $\bar{\pi}_i\bar{\pi}_i$ превысят критический уровень π_{cr}^2, имеющаяся трещина будет способна распространяться в кристалле. Среднестатистическая мера микротрещин, способных к распространению, в макрообъеме определится силовым (энергетическим) параметром Π_{π}^{0}, который сформулирован при анализе макроскопического уровня и будет использоваться при рассмотрении критерия макроскопического разрушения.

Соотношения (1)–(14) описывают эволюцию потери сдвиговой устойчивости нагруженного материала на микромасштабном уровне, позволяют рассчитывать повреждаемость и прогнозировать микродеформации соответствующей природы при произвольных режимах термомеханического воздействия.

4. Мезоструктурный уровень 1 (мезо-1)

Для анализа мезоструктурных аспектов процессов деформации и разрушения целесообразно ввести в рассмотрение два мезоуровня [3]. С этой целью выделим два объема усреднения: мезо-1 с объемом $V_{\mathrm{m1}} \gg V_0$ и мезо-2 с объемом $V_{\mathrm{m2}} \gg V_{\mathrm{m1}}$. Следует отметить, что на мезоструктурном уровне на первое место выступают характерные закономерности сильнонеравновесных состояний большого статистического ансамбля структурных элементов и соответствующих статистических ансамблей носителей неупругой деформации и разрушения.

При нагружении материала в этих условиях инициируются процессы самоорганизации названных неравновесных систем, что приводит к необходимости учета гидродинамического характера массопереноса и эволюции повреждаемости в заданных граничных условиях, обусловленных видом напряженно-деформированного состояния и траекторией нагружения. Указанные представления положены в основу аналитических соотношений для процессов, реализуемых на структурном уровне мезо-1 [14–17].

Учитывая трансляционно-ротационную природу пластической деформации и разрушения на уровне мезо-1, в рамках подхода, допускающего возможность эволюции как самостоятельных объектов вложенных квазиконтинуумов структурных дефектов и структурных повреждений, а также используя результаты работ [14, 15], можно выписать соответствующие уравнения сохранения гидродинамического типа. В этом случае, целесообразно обратиться к хорошо известным гидродинамическим методам описания [16, 17], используя представление о гидродинамическом ориентационном пространстве конфигурационных переменных $\{\Omega\}$ и гидродинамической шкале времени (t) [2, 14–17].

Рассмотрим случай пластической деформации, реализуемой за счет механизма смещения мезополос и описываемой тензором дисторсии $B_{ik}^{\text{H}}(\Omega)$, а возникающие мезотрещины скалярным параметром повреждаемости $P(\Omega)$.

С целью моделирования процессов на уровне мезо-1 для объема усреднения V_{m1} вычислим средние значения компонент микродеформаций $\left\langle \beta_{31}^{\text{H}} \right\rangle$ и параметров повреждения $\left\langle \pi^0 \right\rangle$ и $\left\langle \pi^{\text{c}} \right\rangle$. Для решения поставленной задачи целесообразно учесть хорошо известные из физики прочности сведения о том, что в поликристаллическом объекте за счет структурной неоднородности вещества в различных микрообъемах наиболее сильно проявляются статистические свойства начального кристаллографического напряжения течения τ_0^{s}, неориентированного структурного напряжения ν_{ik}, а также критических значений напряжений отрыва τ^0 и среза τ^{s} [18]. Указанные обстоятельства существенным образом влияют на структурную эволюцию в процессе деформирования и, в конечном счете, на мезо- и макроскопические свойства материалов. Учитывая статистическую независимость обозначенных выше параметров, можно выписать формулы:

$$\left\langle \beta_{31}^{\text{H}} \right\rangle = \int_0^t \int_{-\Gamma^\nu}^{\Gamma^\nu} \int_{-\Gamma^\tau}^{\Gamma^\tau} F(s^\tau)\, \Phi(s^\nu)\, \dot{\beta}_{31}^{\text{H}}(s)\, \mathrm{d}s^\tau \mathrm{d}s^\nu \mathrm{d}s,$$

$$\int_{-\Gamma_{\min}^\tau}^{\Gamma_{\max}^\tau} F(s^\tau)\mathrm{d}s^\tau = 1, \quad \int_{-\Gamma_{\min}^\nu}^{\Gamma_{\max}^\nu} \Phi(s^\nu)\mathrm{d}s^\nu = 1, \tag{15}$$

$$\left\langle \pi^0 \right\rangle = \int_0^t \int_{-\Gamma^0}^{\Gamma^0} \varphi(s^0)\, \dot{\pi}^0(s)\mathrm{d}s^0\mathrm{d}s,$$

$$\int_{-\Gamma_{\min}^0}^{\Gamma_{\max}^0} \varphi(s^0)\mathrm{d}s^0 = 1, \tag{16}$$

$$\left\langle \pi^{\text{c}} \right\rangle = \int_0^t \int_{-\Gamma^{\text{c}}}^{\Gamma^{\text{c}}} \varphi(s^{\text{c}})\, \dot{\pi}^{\text{c}}(s)\mathrm{d}s^{\text{c}}\mathrm{d}s,$$

$$\int_{-\Gamma_{\min}^{\text{c}}}^{\Gamma_{\max}^{\text{c}}} \varphi(s^{\text{c}})\mathrm{d}s^{\text{c}} = 1, \ \left\langle \pi_1 \right\rangle = \left\langle \pi^0 \right\rangle + \left\langle \pi^{\text{c}} \right\rangle. \tag{17}$$

Здесь $F(s^\tau)$, $\Phi(s^\nu)$, $\varphi(s^0)$, $\varphi(s^{\text{c}})$ — соответствующие функции плотности распределения вероятностей; $\Gamma_{\min}^{\tau,\nu,0,\text{c}}$, $\Gamma_{\max}^{\tau,\nu,0,\text{c}}$ — границы интегрирования случайных полей τ_0^{s}, ν_{ik}, τ^0, τ^{c}, которые оцениваются на основе учета физического содержания задачи конкретного объекта [1–3, 9, 18]. Хорошее соответствие экспериментальных и расчетных данных получено, когда в качестве функций плотностей распределения использовался нормальный закон.

Необходимо отметить, что введенные среднестатистические параметры $\left\langle \beta_{31}^{\text{H}} \right\rangle$, $\left\langle \pi^0 \right\rangle$, $\left\langle \pi^{\text{c}} \right\rangle$, не в полной мере отражают эволюцию структуры на уровне мезо-1. Известно [3–7, 14, 15], что характерной особенностью мезомасштабного уровня мезо-1 является инициирование процессов самоорганизации, порождающих деформационное поле и повреждаемость структуры, вызывающих одновременно сдвиг и материальный поворот структурных элементов. Используя результаты работ [14, 15], сформулирована связанная система уравнений сохранения гидродинамического типа, описывающая кинетику дисторсии B_{ik} при трансляционно-ротационном массопереносе и эволюцию параметра повреждаемости $P(\Omega)$ на уровне мезо-1 в виде:

$$\dot{B}_{ik}^{\text{H}} = \dot{B}_{31}^{\text{H}} \delta_{i3}\delta_{k1}, \ \dot{B}_{31}^{\text{H}} = -\nabla_\Omega \cdot \mathbf{I}_\beta + \sigma_\beta,$$

$$\mathbf{I}_\beta = A_\beta \nabla_\Omega \left\langle \beta_{31}^{\text{H}} \right\rangle H(\left\langle \beta_{31}^{\text{H}} \right\rangle - \beta_1), \tag{18}$$

$$\sigma_\beta = K_\beta \left\langle \dot{\beta}_{31}^{\text{H}} \right\rangle H(\left\langle \beta_{31}^{\text{H}} \right\rangle - \beta_1) + l_\beta (\nabla_\Omega \times \mathbf{a}_\beta) \cdot \mathbf{e}_n, \tag{19}$$

$$\mathbf{a}_\beta = B_\beta \left\langle \dot{\beta}_{31}^{\text{H}} \right\rangle \mathbf{e}_l,$$

$$l_\beta = \eta_\beta \left(\frac{\operatorname{mod}(\nabla_\Omega \left\langle \dot{\beta}_{31}^{\text{H}} \right\rangle)}{\nabla_\Omega^2 \left\langle \dot{\beta}_{31}^{\text{H}} \right\rangle} \right), \tag{20}$$

$$\dot{P} = -\nabla_\Omega \cdot \mathbf{I}_p + \sigma_p,$$

$$\mathbf{I}_p = A_p \nabla_\Omega \left\langle \pi_1 \right\rangle \cdot H(\left\langle \pi_1 \right\rangle - P_1),$$

$$\sigma_p = K_p \left\langle \dot{\pi}_1 \right\rangle \cdot H(\left\langle \pi_1 \right\rangle - P_1), \tag{21}$$

$$\beta_1 = B_1^0 + S^\beta, \ P_1 = P_1^0 + S^\pi,$$

$$\Gamma_{\min}^\beta \le S^\beta \le \Gamma_{\max}^\beta, \ \Gamma_{\min}^\pi \le S^\pi \le \Gamma_{\max}^\pi. \tag{22}$$

Формулы (18)–(20) относятся к расчету скорости пластической дисторсии $\dot{B}_{ik}^{\text{H}}$, а (21) и (22) — к расчету параметра повреждаемости $P(\Omega)$ на мезо-1. Вектор $\mathbf{I}_\beta$ в (18) характеризует плотность потока дисторсии B_{ik}^{H} на мезо-1 за счет сдвигов по статистическому ансамблю систем скольжений. Аналогично, в (21) вектор $\mathbf{I}_p$ характеризует плотность потока структурных повреждений, обусловленных процессом самоорганизации статистического ансамбля микротрещин среза и отрыва. Параметр σ_β в (18) описывает производство внутреннего источника деформационного поля за счет инициирования в мезообъеме $V_{\text{m}1}$ статистического ансамбля микросдвигов (слагаемое $k_\beta\left\langle\dot{\beta}_{31}^{\text{H}}\right\rangle H(\left\langle\beta_{31}^{\text{H}}\right\rangle-\beta_1)$) и потока циркуляции деформационного поля (составляющая $l_\beta(\nabla_\Omega\times\mathbf{a}_\beta)\cdot\mathbf{e}_n$). Параметр l_β в (20), согласно гипотезе Кармана [16], характеризует размер возникающего вихря. Аналогичным по смыслу является параметр σ_p в формуле (21), который отражает производство внутреннего источника (стока) структурных повреждений за счет инициирования внутри объема $V_{\text{m}1}$ процессов самоорганизации статистического ансамбля микротрещин $\langle\dot{\pi}_1\rangle$. Операторы Хевисайда $H(\left\langle\beta_{31}^{\text{H}}\right\rangle-\beta_1)$ и $H(\langle\pi_1\rangle-P_1)$, входящие в формулы (18), (19) и (21), представляют критериальные условия подготовки структуры за счет процессов самоорганизации статистических ансамблей сдвигов и повреждений на структурном уровне мезо-1; A_β, β_1, K_β, B_1^0, B_β, η_β, A_p, P_1, K_p, P_1^0 — константы вещества; ∇_Ω — оператор «набла» для ориентационной системы координат; s^β, s^π — параметры, характеризующие статистические свойства дисторсии B_{ik}^{H} и повреждаемости P в объеме $V_{\text{m}1}$; $\Gamma_{\min}^{\beta,p}$, $\Gamma_{\max}^{\beta,p}$ — граничные значения соответствующих статистических флуктуаций.

5. Мезоструктурный уровень 2 (мезо-2)

Рассмотрим структурный уровень мезо-2 с объемом усреднения $V_{\text{m}2}\gg V_{\text{m}1}$. Для данного уровня характерны следующие предпосылки. Прогрессирующий процесс самоорганизации структурных несовершенств в объемах мезо-1 готовит условия для появления диссипативных структур, релаксация которых создает мощные структурные мезоконцентраторы в объемах мезо-2 [3, 4]. В результате реализуется процесс подготовки структуры к новому критическому событию, а именно, к потере сдвиговой устойчивости более крупных (по сравнению с мезо-1) фрагментов, что и обуславливает появление полосовых структур в виде мезополос деформации. Значительную роль в этих процессах играют крупномасштабные пространственные флуктуации параметров, характеризующие повреждаемость, деформационное поле и структурную эволюцию. Для анализа рассматриваемого мезоструктурного уровня целесообразно использовать хорошо развитые методы статистической механики многоуровневых сплошных сред [2, 19, 20], позволяющие учесть влияние на эволюционные процессы структурного уровня мезо-2 крупномасштабных флуктуаций соответствующих параметров. Важным аспектом при построении определяющих уравнений на данном структурном уровне является необходимость формулировки аналитических соотношений, удовлетворяющих условиям самоорганизации структурных элементов в широком спектре ориентационного и пространственного поля. Указанные предпосылки являются основой при моделировании процессов, развивающихся на уровне мезо-2.

Скорость дисторсии на рассматриваемом уровне $\dot{\varphi}_{ik}$ будем описывать системой интегродифференциальных уравнений, учитывающих условие неразрывности среды. В рамках развиваемой модели условие неразрывности означает необходимость согласования влияния на скорость смещения рассматриваемой мезополосы сдвигов, происходящих во всех активных мезополосах деформации. Используя методику из [14, 15], сформулируем для мезо-2 следующие аналитические соотношения:

$$\left\langle B_{31}^{\text{H}}\right\rangle=\int_0^t\int_{-\Gamma^\beta}^{\Gamma^\beta}F(S^\beta)\dot{B}_{31}^{\text{H}}(S^\beta)\mathrm{d}S^\beta\mathrm{d}S,$$

$$\int_{-\Gamma_{\min}^{\beta\tau}}^{\Gamma_{\max}^{\beta}}F(S^\beta)\mathrm{d}S^\beta=1, \tag{23}$$

$$\langle P\rangle=\int_0^t\int_{-\Gamma^p}^{\Gamma^p}\psi(S^p)\dot{P}(S^p)\mathrm{d}S^p\mathrm{d}S,$$

$$\int_{-\Gamma_{\min}^{p}}^{\Gamma_{\max}^{p}}\psi(S^p)\mathrm{d}S^p=1, \tag{24}$$

$$\dot{\varphi}_{ik}=\dot{\varphi}_{31}\delta_{i1}\delta_{k3},$$

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_{31}(\Omega)={}&\int_{\{\Omega'\}}f(\Omega')A(\Omega,\Omega')\frac{1}{2}[\alpha_{m3}(\Omega')\alpha_{n1}(\Omega')+\\&+\alpha_{m1}(\Omega')\alpha_{n3}(\Omega')]\overline{D}(\dot{\sigma}_{mn}^*)\mathrm{d}\Omega'+\\&+\int_{\{\Omega''\}}f(\Omega'')B(\Omega,\Omega'')\frac{1}{2}[\alpha_{m3}(\Omega'')\alpha_{n1}(\Omega'')+\\&+\alpha_{m1}(\Omega'')\alpha_{n3}(\Omega'')]\overline{D}(\sigma_{mn}^*)\mathrm{d}\Omega'',\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}A(\Omega,\Omega')={}&A_1\{[\left\langle B_{31}^{\text{H}}(\Omega)\right\rangle\mathrm{sign}\left\langle B_{31}^{\text{H}}(\Omega)\right\rangle-C_0]\times\\&\times H_\varphi(\Omega)[\left\langle B_{31}^{\text{H}}(\Omega')\right\rangle\mathrm{sign}\left\langle B_{31}^{\text{H}}(\Omega')\right\rangle-C_0]\}\,H_\varphi(\Omega'),\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}H_\varphi(\Omega)={}&H[\left\langle B_{31}^{\text{H}}(\Omega)\right\rangle\mathrm{sign}\left\langle B_{31}^{\text{H}}(\Omega)\right\rangle-C_0]\times\\&\times H[T_\tau^*(\Omega)-T^{\text{s}}(\Omega)]\,H[\dot{T}_\tau^*(\Omega)-\dot{T}_0^{\text{s}}(\Omega)]\times\\&\times H[W_{31}(\Omega)-\max W_{31}(\Omega)],\end{aligned} \tag{27}$$

$$B(\Omega,\Omega'')=$$
$$=B_1\left\{e^{-\frac{(u_1-\gamma_1 T_\tau^*(\Omega))}{kT}}[\langle\dot B_{31}^{\text{H}}(\Omega)\rangle\operatorname{sign}\langle B_{31}^{\text{H}}(\Omega)\rangle-\right.$$
$$-\dot C_0]H_\varphi(\Omega)e^{-\frac{(u_1-\gamma_1 T_\tau^*(\Omega''))}{kT}}[\langle\dot B_{31}^{\text{H}}(\Omega'')\rangle\times$$
$$\left.\times\operatorname{sign}\langle B_{31}^{\text{H}}(\Omega'')\rangle-\dot C_0]H_\varphi(\Omega'')\right\},\tag{28}$$
$$\dot T_\tau^*=\frac{1}{\sqrt2}(\dot\Sigma_{ik}^*\dot\Sigma_{ik}^*)^{1/2},$$
$$\dot\Sigma_{ik}^*=\dot\Sigma_{31}^*(\delta_{i1}\delta_{k3}+\delta_{k1}\delta_{i3}),\tag{29}$$
$$\dot\Sigma_{31}^*=\dot\tau_{31}-\dot\psi_{31}^{(\rho)}+\dot\psi_{31}^{(r)}-\dot\psi_{31},$$
$$\dot\psi_{31}=\int_{\{\omega\}}\dot\psi_{31}^0(\Omega)\cos(\omega-\omega_0)\mathrm d\omega,$$
$$T_\tau^*=\frac{1}{\sqrt2}(\Sigma_{ik}^*\Sigma_{ik}^*)^{1/2},\tag{30}$$
$$W_{31}(\Omega)=T_\tau^*(\Omega_i)\langle\dot B_{31}^{\text{H}}(\Omega)\rangle,$$
$$\dot T^{\text{s}}=N_m\langle\dot B_{31}^{\text{H}}\rangle\operatorname{sign}\langle\dot B_{31}^{\text{H}}\rangle+\dot F(I(t),\tau_i(t))-$$
$$-W_m e^{-\frac{[u_m-\gamma_m T_\tau^*(\Omega)]}{kT}}(T^{\text{s}}-T_1^0)^m H(T^{\text{s}}-T_1^0),\tag{31}$$
$$\dot T_0^{\text{s}}=\dot T^{\text{s}}-N_m\langle\dot B_{31}^{\text{H}}\rangle\operatorname{sign}\langle\dot B_{31}^{\text{H}}\rangle,\tag{32}$$
$$\dot q_{ik}=\dot q_{31}\delta_{i1}\delta_{k3},$$
$$\dot q_{31}(\Omega)=\int_{\{\Omega'\}}f(\Omega')\,G_\rho(\Omega,\Omega')\times$$
$$\times\frac12[\alpha_{m3}(\Omega')\alpha_{n1}(\Omega')+\alpha_{m1}(\Omega')\,\alpha_{n3}(\Omega')]\times$$
$$\times\overline D(\dot\varepsilon_{mn}^{\text{H}})\,\mathrm d\Omega'-\int_{\{\Omega''\}}f(\Omega'')R(\Omega,\Omega'')\times$$
$$\times\frac12[\alpha_{m3}(\Omega'')\alpha_{n1}(\Omega'')+\alpha_{m1}(\Omega'')\alpha_{n3}(\Omega'')]\times$$
$$\times\overline D(\rho_{ik})\,\mathrm d\Omega'',\tag{33}$$
$$G(\Omega,\Omega')=G_1[\psi_{31}(\Omega)\operatorname{sign}\psi_{31}(\Omega)]\times$$
$$\times[\psi_{31}(\Omega')\operatorname{sign}\psi_{31}(\Omega')],\tag{34}$$
$$R(\Omega,\Omega'')=R_1\left\{e^{-\frac{[u_\rho-\gamma_\rho T_\tau^*(\Omega)]}{kT}}[\dot\psi_{31}(\Omega)\operatorname{sign}\psi_{31}(\Omega)]\times\right.$$
$$\left.\times e^{-\frac{[u_\rho-\gamma_\rho T_\tau^*(\Omega'')]}{kT}}[\dot\psi_{31}(\Omega'')\operatorname{sign}\psi_{31}(\Omega'')]\right\},\tag{35}$$
$$\dot P_{ik}=\dot P_{33}\delta_{i3}\delta_{k3},$$
$$\dot P_{33}(\Omega_r)=\int_{\{\Omega'_r\}}f(\Omega'_r)\Pi(\Omega_r,\Omega'_r)\alpha_{m3}(\Omega'_r)\alpha_{n3}(\Omega'_r)\times$$
$$\times\overline D(\dot\sigma_{mn}^{**})\mathrm d\Omega'-\int_{\{\Omega''\}}f(\Omega''_r)Z(\Omega_r,\Omega''_r)\times$$
$$\times\alpha_{m3}(\Omega''_r)\,\alpha_{n3}(\Omega''_r)\overline D(r_{mn})\mathrm d\Omega''_r,\tag{36}$$

$$\Pi(\Omega_r,\Omega'_r)=\Pi_1\left\{\langle P(\Omega_r)\rangle\left[\left(1-\frac{\Pi_p}{\Pi_0}\right)\frac{\Pi_p}{\Pi_0}H_p(\Omega_r)\right]\times\right.$$
$$\left.\times\langle P(\Omega'_r)\rangle\left[\left(1-\frac{\Pi_p}{\Pi_0}\right)\frac{\Pi_p}{\Pi_0}\right]H_p(\Omega'_r)\right\},\tag{37}$$
$$Z(\Omega_r,\Omega''_r)=Z_1\left\{e^{-\frac{[u_r-\gamma_r\Sigma_{33}^{**}(\Omega_r)]}{kT}}\left[\langle\dot P(\Omega_r)\rangle\left(1-\frac{\Pi_p}{\Pi_0}\right)\frac{\Pi_p}{\Pi_0}+\right.\right.$$
$$\left.+\langle P(\Omega_r)\rangle\frac{\Pi_p}{\Pi_0}\left(1-2\frac{\Pi_p}{\Pi_0}\right)\right]H_p(\Omega_r)\times$$
$$\times e^{-\frac{[u_r-\gamma_r\Sigma_{33}^{**}(\Omega''_r)]}{kT}}\left[\langle\dot P(\Omega''_r)\rangle\left(1-\frac{\Pi_p}{\Pi_0}\right)\frac{\Pi_p}{\Pi_0}+\right.$$
$$\left.\left.+\langle P(\Omega''_r)\rangle\frac{\dot\Pi_p}{\Pi_0}\left(1-2\frac{\Pi_p}{\Pi_0}\right)\right]H_p(\Omega''_r)\right\},\tag{38}$$
$$H_p(\Omega_r)=H[P_i(\Omega_r)P_i(\Omega_r)-P_2^2]\times$$
$$\times H(\Pi_0-\Pi_p)\,H(\Pi_{0p}-\Pi_p^0),\tag{39}$$
$$P_i(\Omega_r)=[\Sigma_{31}^{**}\delta_{i3}+\Sigma_{33}^{**}H(\Sigma_{33}^{**})\delta_{i3}](\langle P\rangle)^{Np},\tag{40}$$
$$\Sigma_{ik}^{**}=\Sigma_{31}^{**}(\delta_{i1}\delta_{k3}+\delta_{i3}\delta_{k1})+\Sigma_{33}^{**}\delta_{i3}\delta_{k3},$$
$$\Sigma_{31}^{**}=\tau_{31}-\alpha_r\psi_{31}^{(r)}+\alpha_\rho\psi_{31}^{(\rho)},\tag{41}$$
$$\Sigma_{33}^{**}=\tau_{33}-\alpha_r\psi_{33}^{(r)}.$$

Прокомментируем основное содержание математической модели мезоструктурного уровня мезо-2, представленной формулами (23)–(41). Выражения (23) и (24) позволяют рассчитывать средние величины (по объему $V_{\text{m}2}$) компонент тензора дисторсии $\langle\beta_{31}^{\text{H}}\rangle$ и скалярной меры повреждаемости $\langle P\rangle$. Учет статистики по названным параметрам отражает структурную неоднородность мезообъема $V_{\text{m}2}$.

Формула (25) позволяет вычислить тензор скорости дисторсии $\dot\varphi_{ik}$ в предположении, что процесс смещения мезополосы осуществляется простым сдвигом, т.е. по схеме «сдвиг + поворот». Здесь $f(\Omega')$ и $f(\Omega'')$ — плотности распределения по ориентациям $\{\Omega'\}$ и $\{\Omega''\}$ [2]; $A(\Omega,\Omega')$, $B(\Omega,\Omega'')$ — функции влияния, которые имеют смысл структурной податливости и структурной текучести соответственно. Учитывая физическое содержание процесса неупругой деформации на мезоструктурном уровне [3, 4], выражения для расчета параметров $A(\Omega,\Omega'')$ и $B(\Omega,\Omega'')$ представляются соотношениями (26)–(32).

Анализируя (25)–(32) можно отметить, что пластическое течение, инициируемое потерей сдвиговой устойчивости на мезо-2, возникает при обязательном выполнении кинетических критериев, связанных с достижением и воспроизводством критической величины дефектной структуры, и силовых критериев, обусловленных требованием соблюдения локального равновесия между эффективным сдвиговым напряжением $T_\tau^*(\Omega)$ (29) и величиной напряжения течения $T^{\mathrm{s}}(\Omega)$ (31). Обозначенные критерии представлены в (26), (28) оператором $H_\varphi(\Omega)$, состоящим из произведений соответствующих функций Хевисайда (27). В выражении для $H_\varphi(\Omega)$ первый сомножитель $H[\langle B_{31}^{\mathrm{H}}(\Omega)\rangle \operatorname{sign}\langle B_{31}^{\mathrm{H}}(\Omega)\rangle - C_0]$ отражает кинетический критерий. Здесь C_0 — параметр, характеризующий критическую величину дефектной структуры; $H[T_\tau^*(\Omega) - T^{\mathrm{s}}(\Omega)]$ представляет силовой критерий, где $T^{\mathrm{s}}(\Omega)$ — текущее, а $T_0^{\mathrm{s}}(\Omega)$ — начальное значение напряжений течения, которые рассчитываются по формулам (31), (32); $H[\dot{T}_\tau^*(\Omega) - \dot{T}_0^{\mathrm{s}}(\Omega)]$ отражает адаптацию поля эффективных напряжений $T_\tau^*(\Omega)$ при вариации скорости напряжений; $H[W_{31}(\Omega) - \max W_{31}(\Omega)]$ — термодинамический критерий, который позволяет определить направление сдвига мезополосы, обеспечивая ее движение на структурном уровне мезо-2 в направлении максимума диссипации энергии $W_{31}(\Omega)$ (30).

Необходимо отметить, что эффективное напряжение Σ_{ik}^*, действующее на структурном уровне мезо-2, состоит из компонент тензора τ_{ik} (7) от внешних нагрузок, ориентированных напряжений $\psi_{31}, \psi_{31}^{(\rho)}, \psi_{31}^{(r)}$. Величина $\dot\psi_{31}$ определяется из критериального условия $H[\dot{T}_\tau^*(\Omega) - \dot{T}_0^{\mathrm{s}}(\Omega)] = 1$, которое приводит к интегральному уравнению Фредгольма первого рода с вырожденным ядром относительно искомой величины $\dot\psi_{31}$. Компонента $\dot\psi_{31}$ характеризует скорость генерации «встречного» поля структурных напряжений в локальной системе сдвига, обеспечивая динамическое равновесие напряженного состояния в активной мезополосе, т.е. в локальной системе, где $H_\varphi = 1$.

Определяющие уравнения для T_0^{s} и T^{s}, как и на микроуровне, представлены в форме, учитывающей влияние основных процессов структурной эволюции (31). Первое и третье слагаемые отражают влияние упрочнения и возврата механических свойств; второе слагаемое соответствует скорости изменения функционала $F[I(t), \sigma_i(t)]$, учитывающего влияние температуры и скорости нагружения на величину начального предела текучести T_0^{s}, отражая наследственные свойства структуры материала по температуре и времени воздействия [2, 18]. В работах [2, 21] подробно исследованы параметр неоднородности $I(t)$ и аналитические выражения для функционала $F[I(t), \sigma_i(t)]$.

Для расчета структурных напряжений $\psi_{ik}^{(\rho)}$ используется модифицированное уравнение Кренера [20], которое позволяет для структурного уровня мезо-2 определить тензор интенсивности структурных напряжений q_{ik} (33)–(35). В указанных формулах $G_p(\Omega, \Omega')$ и $R(\Omega, \Omega'')$ — функции влияния, имеющие смысл структурной неоднородности пластического течения и структурной релаксации соответственно.

Особую роль в поврежденной среде играют ориентированные напряжения $\psi_{ik}^{(r)}$, которые характеризуют эффект возникновения структурных напряжений за счет появления концентраторов в виде трещин на масштабном уровне мезо-2. Тензорная интенсивность P_{ik} структурных напряжений, локализованных в устьях мезотрещин, рассчитывается на основе соотношений (36)–(41). При формулировке рассматриваемых уравнений на основе метода эффективного поля [15] учитывается эволюционирующая в процессе нагружения протяженность мезоконцентраторов в виде границы между сплошной и поврежденной структурой, а также степень раскрытия мезотрещин в поле эффективных напряжений Σ_{ik}^{**}. Функции влияния $\Pi(\Omega_r, \Omega_r'')$, $Z(\Omega_r, \Omega_r'')$ в (37) и (38) имеют смысл структурной повреждаемости и структурной релаксации концентраторов повреждений материала соответственно.

Формула (40) необходима для расчета вектора повреждаемости $P_i(\Omega_r)$ в случае мезотрещины уровня мезо-2. Данный параметр учитывает степень раскрытия мезотрещин в поле эффективных напряжений Σ_{ik}^{**} (41). Введение параметра $P_i(\Omega_r)$ позволяет сформулировать критерий энергетического (или силового) распространения мезотрещины в объеме мезо-2. Критерий развития мезотрещин согласно идеям механики разрушения можно сформулировать в виде: $H[P_i(\Omega_r)P_i(\Omega_r) - P_{\mathrm{cr}}^2] = 1$. Среднестатистическая мера мезотрещин, способных к развитию, оценивается параметром Π_p^0 и используется при формулировке макроскопического критерия разрушения. В формулах (26)–(41) A_1, C_0, B_1, U_1, γ_1, U_{m}, G_1, R_1, Π_1, Z_1, Π_0, U_r, γ_r, N_p, Π_{0p} — константы материала.

В соотношения (25), (33), (36) входят направляющие тензоры $\overline{D}(\dot\sigma_{ik}^*)$, $\overline{D}(\sigma_{ik}^*)$, $\overline{D}(\dot\varepsilon_{ik}^{\mathrm{H}})$, $\overline{D}(\rho_{ik})$, $\overline{D}(\dot\sigma_{ik}^{**})$, $\overline{D}(\dot\sigma_{ik}^{**})$ соответствующих тензорных полей макромасштабного уровня (50).

Отметим, что в процессе нагружения в различных мезообъемах локальное равновесие одновременно достигается при неодинаковых значениях эффективных напряжений Σ_{ik}^*, Σ_{ik}^{**} и других структурных параметров пластического течения $(T^{\mathrm{s}}, T_0^{\mathrm{s}})$ и повреждения среды $(P_i(\Omega))$, что указывает на наличие в макрообъеме соответствующих крупномасштабных флуктуаций.

В целом, соотношения (15)–(41) отражают кинетику массопереноса в условиях возникновения повреждений и эволюции на уровне мезо-2 динамических диссипативных структур в смысле И. Пригожина [22].

6. Макромасштабный уровень 1 (макро-1)

Оценку механического поведения материала, расчет напряженно-деформированного состояния и прочностного прогноза изделия на макроуровне целесообразно анализировать на двух масштабных уровнях: макро-1 с объемом усреднения $V_1 \gg V_{\text{m}2}$ и макро-2 с объемом усреднения $V_2 \gg V_1$. Объем V_2 имеет порядок величины L^3, где L — характерный размер изделия.

Масштабный уровень макро-1 необходим для расчета механического поведения материала в зависимости от истории термомеханического воздействия, вида напряженно-деформированного состояния и траектории нагружения. Уровень макро-2 требуется для прогноза прочностного ресурса изделия, расчета напряженно-деформированного состояния соответствующего технологического процесса. В этом случае возникает возможность решения разнообразных задач по оценке технологической наследственности, а также весьма актуальной проблемы определения остаточного ресурса ответственных инженерных объектов.

Для расчета механических свойств материала на макромасштабном уровне с объемом усреднения $V_1 \gg V_{\text{m}2}$ введем соответствующие конфигурационные переменные [2, 14, 15] с помощью статистического и ориентационного усреднения компонент деформаций, параметров повреждений и структурных напряжений, возникающих на микро- (β_{ik}^{el}, β_{ik}^{T}, β_{ik}^{H}, π_1), мезо-1 (B_{ik}^{H}, P) и мезо-2 (φ_{ik}, q_{ik}, P_{ik}) масштабных уровнях по соответствующим статистическим и ориентационным $\{\Omega\}$ переменным [14, 15]. Простые вычисления приводят к формулам:

$$\dot{\varepsilon}_{ik}^{\text{H}}\{V_0\} = \frac{1}{2}\int\limits_{\{\Omega_0\}} f(\Omega_0)[\alpha_{i3}\alpha_{k1} + \alpha_{i1}\alpha_{k3}]\left\langle\dot{\beta}_{31}^{\text{H}}\right\rangle \mathrm{d}\Omega_0,$$

$$\dot{\varepsilon}_{ik}^{\text{H}}\{V_{m1}\} = \frac{1}{2}\int\limits_{\{\Omega_{m1}\}} f(\Omega_{m1})[\alpha_{i3}\alpha_{k1} + \alpha_{i1}\alpha_{k3}]\left\langle\dot{B}_{31}^{\text{H}}\right\rangle \mathrm{d}\Omega_{m1},$$

$$\dot{\varepsilon}_{ik}^{\text{H}}\{V_{m2}\} = \frac{1}{2}\int\limits_{\{\Omega_{m2}\}} f(\Omega_{m2})\dot{\varphi}_{31}(\Omega)[\alpha_{i3}(\Omega)\alpha_{k1}(\Omega) + \alpha_{i1}(\Omega)\alpha_{k3}(\Omega)]\mathrm{d}\Omega,$$

$$\dot{\rho}_{ik} = \frac{1}{2}\int\limits_{\{\Omega_{m2}\}} f(\Omega)\dot{q}_{31}(\Omega)[\alpha_{i3}(\Omega)\alpha_{k1}(\Omega) + \alpha_{i1}(\Omega)\alpha_{k3}(\Omega)]\mathrm{d}\Omega,$$

$$r_{ik} = \int\limits_{\{\Omega_{m2}\}} f(\Omega_r)p_{33}(\Omega_r)\alpha_{i3}(\Omega_r)\alpha_{k3}(\Omega_r)\mathrm{d}\Omega_r, \tag{42}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ik}^{\text{H}}\{V_{m2}\} = A_{ikmn}\dot{\sigma}_{mn}^{*} + B_{ikmn}\sigma_{mn}^{*},$$

$$\dot{\varepsilon}_{ik}^{\text{el}} = \overline{C}_{ikmn}\dot{\sigma}_{mn}, \quad \dot{\varepsilon}_{ik}^{\text{T}} = \overline{\gamma}_{ik}\dot{T}, \tag{43}$$

$$\dot{\rho}_{ik} = G_{ikmn}\dot{\varepsilon}_{mn}^{\text{H}} - R_{ikmn}\rho_{mn}, \tag{44}$$

$$\dot{r}_{ik} = \Pi_{ikmn}\dot{\sigma}_{mn}^{**} - Z_{ikmn}r_{mn}, \tag{45}$$

$$A_{ikmn} = \int\limits_{\{\Omega_{m2}\}} f(\Omega)\int\limits_{\{\Omega'_{m2}\}} f(\Omega')(1/2)[\alpha_{i3}(\Omega)\alpha_{k1}(\Omega) + \alpha_{i1}(\Omega)\alpha_{k3}(\Omega)]\frac{A(\Omega,\Omega')}{\dot{\sigma}_i^{*}}\times (1/2)[\alpha_{m3}(\Omega')\alpha_{n1}(\Omega') + \alpha_{m1}(\Omega')\alpha_{k3}(\Omega')]\mathrm{d}\Omega'\mathrm{d}\Omega,$$

$$B_{ikmn} = \int\limits_{\{\Omega_{m2}\}} f(\Omega)\int\limits_{\{\Omega''_{m2}\}} f(\Omega'')(1/2)[\alpha_{i3}(\Omega)\alpha_{k1}(\Omega) + \alpha_{i1}(\Omega)\alpha_{k3}(\Omega)]\frac{B(\Omega,\Omega'')}{\sigma_i^{*}}\times (1/2)[\alpha_{m3}(\Omega'')\alpha_{n1}(\Omega'') + \alpha_{m1}(\Omega'')\alpha_{k3}(\Omega'')]\mathrm{d}\Omega''\mathrm{d}\Omega, \tag{46}$$

$$G_{ikmn} = \int\limits_{\{\Omega_{m2}\}} f(\Omega)\int\limits_{\{\Omega'_{m2}\}} f(\Omega')(1/2)[\alpha_{i3}(\Omega)\alpha_{k1}(\Omega) + \alpha_{i1}(\Omega)\alpha_{k3}(\Omega)]\frac{G(\Omega,\Omega')}{\dot{\varepsilon}_i^{\text{H}}}\times (1/2)[\alpha_{m3}(\Omega')\alpha_{n1}(\Omega') + \alpha_{m1}(\Omega')\alpha_{k3}(\Omega')]\mathrm{d}\Omega'\mathrm{d}\Omega,$$

$$R_{ikmn} = \int\limits_{\{\Omega_{m2}\}} f(\Omega)\int\limits_{\{\Omega''_{m2}\}} f(\Omega'')(1/2)[\alpha_{i3}(\Omega)\alpha_{k1}(\Omega) + \alpha_{i1}(\Omega)\alpha_{k3}(\Omega)]\frac{R(\Omega,\Omega'')}{\rho_i}\times (1/2)[\alpha_{m3}(\Omega'')\alpha_{n1}(\Omega'') + \alpha_{m1}(\Omega'')\alpha_{k3}(\Omega'')]\mathrm{d}\Omega''\mathrm{d}\Omega, \tag{47}$$

$$\Pi_{ikmn} = \int\limits_{\{\Omega_r\}} f(\Omega_r)\int\limits_{\{\Omega'_r\}} f(\Omega'_r)\,\alpha_{i3}(\Omega_r)\,\alpha_{k3}(\Omega_r)\times \frac{\Pi(\Omega_r,\Omega'_r)}{\dot{\sigma}_i^{**}}\alpha_{m3}(\Omega'_r)\alpha_{k3}(\Omega'_r)\mathrm{d}\Omega'_r\mathrm{d}\Omega_r,$$

$$Z_{ikmn} = \int\limits_{\{\Omega_r\}} f(\Omega_r)\int\limits_{\{\Omega''_r\}} f(\Omega''_r)\,\alpha_{i3}(\Omega_r)\,\alpha_{k3}(\Omega_r)\times \frac{Z(\Omega_r,\Omega''_r)}{r_i^{*}}\alpha_{m3}(\Omega''_r)\alpha_{k3}(\Omega''_r)\mathrm{d}\Omega''_r\mathrm{d}\Omega_r, \tag{48}$$

$$A_{ikmn} = A_{kimn} = A_{iknm} = A_{mnik} = \frac{A_1}{\dot{\sigma}_i^{*}}A_{ik}A_{mn},$$

$$B_{ikmn} = B_{kimn} = B_{iknm} = B_{mnik} = \frac{B_1}{\sigma_i^{*}}B_{ik}B_{mn},$$

$$G_{ikmn} = G_{kimn} = G_{iknm} = G_{mnik} = \frac{G_1}{\dot{\varepsilon}_i^{\text{H}}}G_{ik}G_{mn},$$

$$R_{ikmn} = R_{kimn} = R_{iknm} = R_{mnik} = \frac{R_1}{\rho_i}R_{ik}R_{mn},$$

$$\Pi_{ikmn} = \Pi_{kimn} = \Pi_{iknm} = \Pi_{mnik} = \frac{\Pi_1}{\dot{\sigma}_i^{**}}\Pi_{ik}\Pi_{mn},$$

$$Z_{ikmn} = Z_{kimn} = Z_{iknm} = Z_{mnik} = \frac{Z_1}{r_i}Z_{ik}Z_{mn}, \tag{49}$$

$$\overline{D}(\dot{\sigma}_{ik}^{*}) = \frac{\dot{\sigma}_{ik}^{*}}{\dot{\sigma}_i^{*}},$$

где $\dot{\sigma}_{ik}^{*} = \dot{\sigma}_{ik} - \dot{\rho}_{ik} + \dot{r}_{ik}$, $\dot{\sigma}_i^{*} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{\sigma}_{ik}^{*}\dot{\sigma}_{ik}^{*})^{1/2}$,

$$\overline{D}(\sigma_{ik}^{*}) = \frac{\sigma_{ik}^{*}}{\sigma_i^{*}},$$

где $\sigma_{ik}^{*} = \sigma_{ik} - \rho_{ik} + r_{ik}$, $\sigma_i^{*} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{ik}^{*}\sigma_{ik}^{*})^{1/2}$,

$$\overline{D}(\dot{\varepsilon}_{ik}^{\mathrm{H}}) = \frac{\dot{\varepsilon}_{ik}^{\mathrm{H}}\{V_{m2}\}}{\dot{\varepsilon}_{i}^{\mathrm{H}}\{V_{m2}\}},$$

где $\dot{\varepsilon}_i^*\{V_{m2}\} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{\varepsilon}_{ik}^{\mathrm{H}}\{V_{m2}\}\dot{\varepsilon}_{ik}^{\mathrm{H}}\{V_{m2}\})^{1/2}$, (50)

$$\overline{D}(\rho_{ik}) = \frac{\rho_{ik}}{\rho_i},$$

где $\rho_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{ik}\rho_{ik})^{1/2}$,

$$\overline{D}(\dot{\sigma}_{ik}^{**}) = \frac{\dot{\sigma}_{ik}^{**}}{\dot{\sigma}_{i}^{**}},$$

где $\dot{\sigma}_{ik}^{**} = \dot{\sigma}_{ik} + \alpha_\rho \dot{\rho}_{ik} - \alpha_r \dot{r}_{ik}$, $\dot{\sigma}_i^{**} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{\sigma}_{ik}^{**}\dot{\sigma}_{ik}^{**})^{1/2}$,

$$\overline{D}(r_{ik}) = \frac{r_{ik}}{r_i},$$

где $r_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(r_{ik}r_{ik})^{1/2}$,

$$\dot{\varepsilon}_{ik}^{\mathrm{H}} = \dot{\varepsilon}_{ik}^{\mathrm{H}}\{V_0\}H[-\varepsilon_i^{\mathrm{H}}\{V_{m1}\}]^{\alpha_1} + \dot{\varepsilon}_{ik}^{\mathrm{H}}\{V_{m1}\}H[-\varepsilon_i^{\mathrm{H}}\{V_{m2}\}]^{\alpha_2} + \dot{\varepsilon}_{ik}^{\mathrm{H}}\{V_{m2}\}, \quad (51)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ik}^{\Sigma} = \dot{\varepsilon}_{ik}^{\Sigma} + \dot{\varepsilon}_{ik}^{\mathrm{T}} + \dot{\varepsilon}_{ik}^{\mathrm{H}}. \quad (52)$$

В формулах (42) $\varepsilon_{ik}^{\mathrm{H}}\{V_0\}$, $\varepsilon_{ik}^{\mathrm{H}}\{V_{m1}\}$, $\varepsilon_{ik}^{\mathrm{H}}\{V_{m2}\}$ — тензоры макроскопической деформации, отражающие вклад процессов массопереноса на микро-, мезо-1 и мезо-2 структурных и масштабных уровнях соответственно; $\varepsilon_i^{\mathrm{H}}\{V_{m1}\}$ и $\varepsilon_i^{\mathrm{H}}\{V_{m2}\}$ в (52) характеризуют соответствующие интенсивности тензоров деформаций $\varepsilon_{ik}^{\mathrm{H}}\{V_{m1}\}$ и $\varepsilon_{ik}^{\mathrm{H}}\{V_{m2}\}$; α_1 и α_2 — постоянные материала, принимающие значения 1 или 0. Для большинства поликристаллов, учитывая различный масштаб величин $\varepsilon_{ik}^{\mathrm{H}}\{V_0\}$, $\varepsilon_{ik}^{\mathrm{H}}\{V_{m1}\}$, $\varepsilon_{ik}^{\mathrm{H}}\{V_{m2}\}$ по шкале деформаций, хорошее соответствие с опытом достигается при $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

Рассмотрим вариант модели, когда области $\{\Omega\}$, $\{\Omega'\}$, $\{\Omega''\}$ и $\{\Omega_r\}$, $\{\Omega'_r\}$, $\{\Omega''_r\}$ совпадают. В этом случае, учитывая, что функции влияния $A\{\Omega,\Omega'\}$, $B\{\Omega,\Omega''\}$, $G\{\Omega,\Omega'\}$, $R\{\Omega,\Omega''\}$, $\Pi\{\Omega_r,\Omega'_r\}$, $Z\{\Omega_r,\Omega''_r\}$ положительны, кинетические коэффициенты A_{ikmn}, B_{ikmn}, G_{ikmn}, R_{ikmn}, Π_{ikmn}, Z_{ikmn} являются симметричными тензорными объектами четвертого ранга, которые можно представить в виде соотношений (49), где параметры A_{ik}, B_{ik}, G_{ik}, R_{ik}, Π_{ik}, Z_{ik} вычисляются по следующим формулам:

$$A_{ik}(\Omega) = \frac{1}{2}\int\limits_{\{\Omega_{m2}\}} f(\Omega)[\alpha_{i3}(\Omega)\alpha_{k1}(\Omega) + \alpha_{i1}(\Omega)\alpha_{k3}(\Omega)]\times$$
$$\times[\langle B_{31}^{\mathrm{H}}(\Omega)\rangle \operatorname{sign}\langle B_{31}^{\mathrm{H}}(\Omega)\rangle - C_0]H_\varphi(\Omega)\mathrm{d}\Omega,$$

$$B_{ik} = \frac{1}{2}\int\limits_{\{\Omega_{m2}\}} f(\Omega)[\alpha_{i3}(\Omega)\alpha_{k1}(\Omega) + \alpha_{i1}(\Omega)\alpha_{k3}(\Omega)]\times$$
$$\times e^{\frac{-[u_1 - \gamma_1 T_\tau^*(\Omega)]}{kT}}[\langle \dot{B}_{31}^{\mathrm{H}}(\Omega)\rangle \operatorname{sign}\langle B_{31}^{\mathrm{H}}(\Omega)\rangle - \dot{C}_0]H_\varphi(\Omega)\mathrm{d}\Omega,$$

$$G_{ik}(\Omega) = \frac{1}{2}\int\limits_{\{\Omega_{m2}\}} f(\Omega)[\alpha_{i3}(\Omega)\alpha_{k1}(\Omega) + \alpha_{i1}(\Omega)\alpha_{k3}(\Omega)]\times$$
$$\times[\psi_{31}(\Omega)\operatorname{sign}\psi_{31}(\Omega)]\mathrm{d}\Omega,$$

$$R_{ik} = \frac{1}{2}\int\limits_{\{\Omega_{m2}\}} f(\Omega)[\alpha_{i3}(\Omega)\alpha_{k1}(\Omega) + \alpha_{i1}(\Omega)\alpha_{k3}(\Omega)]\times$$
$$\times e^{\frac{-[u_\rho - \gamma_\rho T_\tau^*(\Omega)]}{kT}}[\dot{\psi}_{31}(\Omega'')\operatorname{sign}\psi_{31}(\Omega'')]\mathrm{d}\Omega,$$

$$\Pi_{ik}(\Omega) = \int\limits_{\{\Omega_r\}} f(\Omega)[\alpha_{i3}(\Omega_r)\alpha_{k3}(\Omega_r)]\langle P(\Omega_r\rangle\times$$
$$\times\left[\left(1 - \frac{\Pi_p}{\Pi_0}\right)\frac{\Pi_p}{\Pi_0}\right]H_p(\Omega)_r\,\mathrm{d}\Omega_r,$$

$$Z_{ik}(\Omega) = \int\limits_{\{\Omega_r\}} f(\Omega)[\alpha_{i3}(\Omega_r)\alpha_{k3}(\Omega_r)]\times$$
$$\times e^{\frac{-[u_r - \gamma_r \Sigma_{33}^{**}(\Omega_r)]}{kT}}\left[\langle \dot{P}(\Omega_r)\rangle\left(1 - \frac{\Pi_p}{\Pi_0}\right)\frac{\Pi_p}{\Pi_0} + \right.$$
$$\left. + \langle P(\Omega_r)\rangle\frac{\dot{\Pi}_p}{\Pi_0}\left(1 - 2\frac{\Pi_p}{\Pi_0}\right)\right]H_p(\Omega_r)\,\mathrm{d}\Omega_r. \quad (53)$$

Упругие ($\varepsilon_{ik}^{\mathrm{el}}$) и температурные ($\varepsilon_{ik}^{\mathrm{T}}$) деформации для макромасштабного уровня V_1 вычисляются по обычным формулам (43). Полная деформация рассчитывается с помощью соотношения (52).

7. Критерий макроразрушения

Рассмотрим вопрос о построении критерия макроразрушения, учитывающего особенности развития повреждаемости на микро- и мезомасштабных уровнях.

Следуя [2], введем параметр Π_π, характеризующий на макроуровне рассеянную повреждаемость, созданную в микрообъемах V_0 за счет образования трещин среза π^{c}, трещин отрыва π^0 и повреждений термофлуктуационной природы π^{t}:

$$\Pi_\pi = \int\limits_{\{\Omega_0\}} f(\Omega_0)\langle\pi_\Sigma(\Omega_0)\rangle\mathrm{d}\Omega_0,$$
$$\langle\pi_\Sigma\rangle = \langle\pi\rangle^{\mathrm{c}} + \langle\pi\rangle^0 + \langle\pi\rangle^{\mathrm{t}}. \quad (54)$$

Повреждаемость, инициированную трансляционно-ротационным массопереносом на мезоструктурном уровне мезо-1, рассчитаем используя параметр $\langle P(Q)\rangle$, вводя на макроуровне меру повреждаемости Π_p. Полную повреждаемость Π_Σ найдем в виде суммы Π_π и Π_p:

$$\Pi_p = \int\limits_{\{\Omega_{m1}\}} f(\Omega_{m1})\langle p(\Omega_{m1})\rangle\mathrm{d}\Omega_{m1},$$
$$\Pi_\Sigma = \Pi_\pi + \Pi_p. \quad (55)$$

Представленные ранее векторы повреждаемости для трещин отрыва $\hat{\pi}_i$ и трещин среза $\overline{\pi}_i$ на микроуровне (12) и соответствующий вектор на мезоуровне P_i в виде

(40) учитывают степень раскрытия микро- и мезотрещин в поле напряжений. В соответствии с идеями механики разрушения, для подрастания возникших трещин необходимо выполнить силовые (или энергетические) условия их распространения [2, 14, 15]. Когда величины $\hat{\pi}_i(\Omega_0)\hat{\pi}_i(\Omega_0)$, $\overline{\pi}_i(\Omega_0)\overline{\pi}_i(\Omega_0)$ и $P_i(\Omega_{m1})P_i(\Omega_{m1})$ преодолеют соответствующий критический уровень π^2_{cr} или P^2_{cr}, имеющиеся микро- и мезотрещины смогут распространяться. Суммарное количество микро- и мезотрещин в макрообъеме V_1, способных к распространению, выражается параметрами Π^0_π и Π^0_p соответственно с помощью формул:

$$\Pi^0_\pi = \int\limits_{\{\Omega_0\}} f(\Omega_0)[H(\hat{\pi}_i\hat{\pi}_i - \pi^2_{\text{cr}})(\pi^0 + \pi^{\text{t}}) + H(\hat{\pi}_i\hat{\pi}_i - \pi^2_{\text{cr}})\pi^{\text{c}}]\text{d}\Omega_0, \tag{56}$$
$$\Pi^0_p = \int\limits_{\{\Omega_{m1}\}} f(\Omega_{m1})[H(P_iP_i - P^2_{\text{cr}})\langle P\rangle]\text{d}\Omega_{m1}.$$

Согласно (56) параметр Π^0_π характеризует способность тела к массовому распространению в нем микротрещин на микромасштабном уровне V_0, отражая стремление к адаптации микроструктуры за счет образования (в местах концентрации напряжений) микротрещин соответствующей природы. Параметр Π^0_p характеризует аналогичную способность тела к массовому движению мезотрещин в объеме V_{m1}.

С учетом введенных параметров (54)–(56), используя идеи механики и физики разрушения, сформулируем макроскопический критерий окончательного разрушения в виде:

$$\Pi^{\text{M}} = H[\Pi_{\text{p}} - a_1(\Pi_\pi + \Pi^0_\pi) - \Pi_{\text{cr}}] \times H[\Pi^0_{\text{p}} + a_2\Pi_{\text{p}} - \Pi^0_{\text{cr}}] \times H[\dot{u}(\Omega_{m2}) - \max\dot{u}(\Omega_{m2})]. \tag{57}$$

В соответствии с функциональным соотношением (57), если $\Pi^{\text{M}} = 1$, то макрообъем V_1 будет разрушен, и он не будет разрушен, если $\Pi^{\text{M}} = 0$. В соотношениях (56) и (57) π_{cr}, P_{cr}, a_1, a_2, Π_{cr}, Π^0_{cr} — константы материала. Необходимо отметить, что критерий разрушения (57) содержит среднестатистические характеристики повреждаемостей, возникающих как на микроструктурном Π_π, Π^0_π, так и мезоструктурном Π_p и Π^0_p уровнях. Учитывая идеи работ [1–4, 14], параметры повреждаемости Π_π и Π^0_π введены так, что с их увеличением затрудняется реализация окончательной стадии разрушения, отражая этим аккомодационную роль процессов микроразрушений в объемах на микроуровне. Повреждаемость на мезоструктурном уровне характеризуется параметрами Π_p и Π^0_p, которые также увеличиваются с ростом плотности микротрещин отрыва $\langle\pi^0\rangle$, $\langle\pi^{\text{t}}\rangle$ и микротрещин среза $\langle\pi^{\text{c}}\rangle$, однако рост параметров Π_p и Π^0_p согласно критерию разрушения (57) приводит к деградации прочностных свойств макрообъема и макроразрушению. Другая важная особенность критерия (57) заключается в том, что первый сомножитель (57), в виде оператора

$$H[\Pi_p - a_1(\Pi_\pi + \Pi^0_\pi) - \Pi_{\text{cr}}],$$

характеризует кинетический критерий эволюции повреждений на трех масштабных уровнях, второй сомножитель (57) отражает силовой (энергетический) критерий разрушения, и третий оператор в (57)

$$H[\dot{u}(\Omega_{m2}) - \max\dot{u}(\Omega_{m2})]$$

является термодинамическим критерием, который позволяет определить направление образования макротрещины. Согласно данному критерию, ориентация образующейся макротрещины совпадает с направлением максимальной скорости диссипации энергии ($\dot{u}(\Omega_{m2})$), связанной со специфической работой эффективных напряжений Σ^{**}_{ik} на перемещениях точек среды, вызванных раскрытием мезоскопических трещин.

Для расчета $\dot{u}(\Omega_{m2})$ введем в рассмотрение тензор T_{ik}, характеризующий раскрытие мезотрещин отрыва:

$$T_{ik} = \eta^0_{ip}\eta^0_{kq}\delta_{p3}P_q. \tag{58}$$

Тензор T_{ik} образован диадным произведением нормали к плоскости трещины на вектор $P_i(\Omega_{m2})$ (40). Зная тензор T_{ik}, можно вычислить скорость мезодеформаций ($\dot{\gamma}^{\text{p}}_{ik}$), вызванных раскрытием трещин:

$$\dot{\gamma}^{\text{p}}_{ik} = c_1(\dot{T}_{ik} + \dot{T}_{ki}), \tag{59}$$

где c_1 — постоянная.

С учетом (58) и (59), искомая мощность рассеивания энергии за счет образования мезотрещин определяется формулой:

$$\dot{u}(\Omega_{m2}) = \Sigma^{**}_{ik}\dot{\gamma}^{\text{p}}_{ik}. \tag{60}$$

Выражение для скорости макроскопический деформации $\dot{\varepsilon}^{\text{p}}_{ik}$, вызванной процессами разрушения на мезоструктурном уровне, имеет в виде:

$$\dot{\varepsilon}^{\text{p}}_{ik} = \int\limits_{\{\Omega_{\text{m}2}\}} f(\Omega_{\text{m}2})\alpha_{ip}\alpha_{kq}\dot{\gamma}^{\text{p}}_{pq}\text{d}\Omega. \tag{61}$$

Появление составляющей $\dot{\varepsilon}^{\text{p}}_{ik}$ требует корректировки суммарной скорости деформации $\dot{\varepsilon}^{\Sigma}_{ik}$ (52):

$$\dot{\varepsilon}^{\Sigma}_{ik} = \dot{\varepsilon}^{\text{el}}_{ik} + \dot{\varepsilon}^{\text{T}}_{ik} + \dot{\varepsilon}^{\text{H}}_{ik} + \dot{\varepsilon}^{\text{p}}_{ik}. \tag{62}$$

Таким образом, в развиваемой модели учитывается многоуровневая и многостадийная природа пластической деформации, эволюции повреждаемости и разрушения. Появляется возможность прогнозировать прочностной ресурс материала, характер разрушения в зависимости от траектории нагружения и режима воздействия, включая идентификацию направления развития макротрещины.

8. Макромасштабный уровень 2 (макро-2)

Аналитические соотношения (42)–(62) совместно с уравнениями (1)–(14), (15)–(41) следует рассматривать как определяющие уравнения для структурно-неоднородной среды в макроточке. Для решения задач инженерной механики требуется дополнительно использовать традиционные уравнения механики деформируемого твердого тела, учитывающие пространственное расположение объемов V_1, динамические и геометрические соотношения, а также начальные и краевые условия для соответствующих переменных. Сказанное сводится к следующим уравнениям краевой задачи механики.

1. Динамические уравнения равновесия для напряжений:

$$\Delta_i \sigma_{ik} = \rho \ddot{u}_k, \tag{63}$$

где ρ — плотность среды; u_i — вектор перемещения.

2. Условие сплошности:

$$e_{ksr} e_{qmt} \nabla_s \nabla_t \varepsilon_{rm}^{\Sigma} = 0, \tag{64}$$

где e_{ikr} — тензор Леви-Чивиты.

3. Условие баланса для температуры:

$$\dot{T} = \frac{K_{ik}}{\rho c} \nabla_i \nabla_k T, \quad K_{ik} = K_0 \delta_{ik}, \tag{65}$$

где K_0 — скалярный коэффициент теплопроводности. Для целостной формулировки конкретной краевой задачи дифференциальные уравнения для напряжений (63), деформаций (64) и температуры (65) необходимо дополнить соответствующими краевыми и начальными условиями.

Для получения замкнутой системы уравнений, как отмечалось выше, соотношения (63)–(65) необходимо дополнить определяющими уравнениями макромасштабного уровня. Для наглядности выпишем их при $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ в виде:

4. Термоупругость:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ik}^{\mathrm{el}} &= \bar{C}_{ikmn} \dot{\sigma}_{mn}, \\ \dot{\varepsilon}_{ik}^{\mathrm{T}} &= \bar{\gamma}_{ik} \dot{T}. \end{aligned} \tag{66}$$

5. Реологические соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ik}^{\mathrm{H}} &= A_{ikmn} \dot{\sigma}_{mn}^{*} + B_{ikmn} \sigma_{mn}^{*}, \\ \dot{\rho}_{ik} &= G_{ikmn} \dot{\varepsilon}_{mn}^{\mathrm{H}} - R_{ikmn} \rho_{mn}, \\ \dot{r}_{ik} &= \Pi_{ikmn} \dot{\sigma}_{mn}^{**} - Z_{ikmn} r_{mn}, \\ \sigma_{ik}^{*} &= \sigma_{ik} - \rho_{ik}, \\ \dot{\sigma}_{ik}^{**} &= \dot{\sigma}_{ik} + \alpha_\rho \dot{\rho}_{ik} - \alpha_r \dot{r}_{ik}. \end{aligned} \tag{67}$$

7. Критерий макроразрушения:

$$\begin{aligned} \Pi^{\mathrm{M}} &= H[\Pi_p - a_1(\Pi_\pi + \Pi_\pi^0) - \Pi_{\mathrm{cr}}] \times \\ &\times H[\Pi_p^0 + a_2 \Pi_p - \Pi_{\mathrm{cr}}^0] H[\dot{u}(\Omega_{m2}) - \\ &- \max \dot{u}(\Omega_{m2})]. \end{aligned} \tag{68}$$

При анализе развития макротрещин в изделии необходимо использовать хорошо развитые методы линейной и нелинейной механики разрушения. Наиболее универсальными (в силу их инвариантности по отношению к задаче) инструментами исследований в механике разрушения следует считать [23] понятия потока энергии в вершину трещины и коэффициента интенсивности напряжений.

9. Заключение

В заключение отметим следующие важные моменты. В отличие от традиционной методологии механики сплошной среды, когда компоненты тензора деформаций вводятся как производные от поля перемещений точек континуума, в рассматриваемом подходе они заданы через соответствующие микро- и мезохарактеристики с учетом физических закономерностей развития пластической деформации и повреждений на микроуровне, процессов самоорганизации статистических ансамблей сдвигов и ансамблей микротрещин на мезоуровне, реологических закономерностей макромасштабного уровня. Аналитические соотношения (67), (68) учитывают не только трансляционно-ротационный характер массопереноса на мезоструктурном уровне, но и перекрестные эффекты взаимодействия элементов среды различного масштабного уровня.

Для отражения на макроуровне сложных механических свойств реальных поликристаллических объектов, деформирующихся в условиях накопления повреждений, используя методологические принципы физической мезомеханики [3], удалось вывести уравнения для расчета кинетических коэффициентов структурной податливости A_{ikpq}, структурной текучести B_{ikpq}, структурной неоднородности G_{ikpq}, структурной релаксации R_{ikpq}, структурной повреждаемости Π_{ikpq} и структурной релаксации концентраторов повреждений Z_{ikpq}. Все эти коэффициенты получены в виде функционалов, представляющих тензорные объекты четвертого ранга, и наряду с коэффициентами упругой податливости $\bar{C}_{ikpq}$ и теплового расширения $\bar{\gamma}_{ik}$ отражают нетривиальные механические свойства с учетом структурных изменений на микро-, мезо- и макромасштабных уровнях.

Предложенный вариант теории устраняет основные недостатки предшествующих моделей, построенных на основе методов структурно-аналитической теории прочности, существенно расширяет возможности аналитического моделирования процессов деформации и эволюции повреждений при сложных режимах термомеханического воздействия.

Результаты аналитических расчетов показали хорошее качественное и количественное соответствие с опытными данными в широком спектре вариации режимов термомеханических воздействий.

Благодарности

Авторы благодарны РФФИ (грант № 04-01-00573) за финансовую поддержку этой работы.

Литература

1. *Панин В.Е.* Методология физической мезомеханики как основа построения моделей в компьютерном конструировании материалов // Изв. вузов. Физика. – 1995. – Т. 38. – № 11. – С. 6–25.
2. *Лихачев В.А., Малинин В.Г.* Структурно-аналитическая теория прочности. – С-Петербург: Наука, 1993. – 471 с.
3. *Физическая* мезомеханика и компьютерное конструирование материалов / Под ред. В.Е. Панина. – Новосибирск: Наука, 1995. – Т. 1. – 298 с., Т. 2. – 320 с.
4. *Панин В.Е.* Основы физической мезомеханики // Физ. мезомех. – 1998. – Т. 1. – № 1. – С. 5–22.
5. *Панин В.Е., Гриняев Ю.В., Елсукова Т.Ф., Иванчин А.Г.* Структурные уровни деформации твердых тел // Изв. вузов. Физика. – 1982. – Т. 25. – № 6. – С. 5–27.
6. *Рыбин В.В.* Большие пластические деформации и разрушение металлов. – М.: Металлургия, 1986. – 224 с.
7. *Панин В.Е.* Пластическая деформация и разрушение твердых тел как эволюция потери их сдвиговой устойчивости на разных масштабных уровнях // Тезисы докладов международного семинара «Мезоструктура», С-Петербург, 4–7 декабря 2001 г. – С. 16.
8. *Степанов А.В*. Основы практической прочности кристаллов. – М.: Наука, 1974. – 131 с.
9. *Финкель В.М.* Физика разрушения (Рост трещин в твердых телах). – М.: Металлургия, 1970. – 376 с.
10. *Конева Н.А., Козлов Э.В*. Физическая природа стадийности пластической деформации // Структурные уровни пластической деформации и разрушения / Под ред. В.Е. Панина. – Новосибирск: Наука, 1990. – С. 123–186.
11. *Рыбин В.В.* Структурно-кинетические аспекты физики развитой пластической деформации // Изв. вузов. Физика. – 1991. – № 3. – С. 7–22.
12. *Макаров П.В.* Подход физической мезомеханики к моделированию процессов деформации и разрушения // Физ. мезомех. – 1998. – Т. 1. – № 1. – С. 61–81.
13. *Гриняев Ю.В., Панин В.Е.* Полевая теория дефектов на мезоуровне // Доклады РАН. – 1997. – Т. 353. – № 1. – С. 37–39.
14. *Малинин В.Г.* Структурно-аналитическая теория физической мезомеханики материалов // Вестник НовГУ. Естеств. и техн. науки. – 1997. – № 5. – С. 35–38.
15. *Малинина Н.А., Малинин В.Г.* Теория пластичности, основанная на структурно-аналитической концепции физической мезомеханики материалов // Вестник НовГУ. Естеств. и техн. науки. – 1998. – № 10. – С. 22–30.
16. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1970. – 904 с.
17. *Гуров К.П.* Феноменологическая термодинамика необратимых процессов (физические основы). – М.: Наука, 1978. – 128 с.
18. *Регель В.Р., Слуцкер А.И., Томашевский Э.Е.* Кинетическая природа прочности твердых тел. – М.: Наука, 1974. – 560 с.
19. *Введение* в микромеханику / Под ред. М. Онами. – М.: Металлургия, 1987. – 280 с.
20. *Kroener E.* Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. – Berlin: Springer-Verlag, 1958. – 179 s.
21. *Русинко К.Н., Малинин В.Г.* Деформация твердого тела с учетом времени // Прикладная механика. – 1975. – Т. 2. – № 2. – С. 15–21.
22. *Пригожин И., Стенгерс И*. Порядок из хаоса: Новый диалог человека с природой. – М.: Прогресс, 1986. – 432 с.
23. *Партон В.З., Морозов Е.М.* Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1974. – 416 с.