Полевая теория дефектов. Часть II

Ю.В. Гриняев, Н.В. Чертова

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, 634021, Россия

Показано, что 4-мерная формулировка теории дефектов приводит к описанию жидкокристаллических сред. Получены динамические уравнения, описывающие поведение дефектов, характерных для жидкокристаллических сред. Установлено, что вихрь является динамическим дефектом жидкости, подобно дислокации в твердом теле.

Field theory of defects. Part II

Yu.V. Grinyaev and N.V. Chertova

Institute of Strength Physics and Materials Science SB RAS, Tomsk, 634021, Russia

It is shown that a four-dimensional formulation of the defect theory is possible only for liquid-crystalline media. Dynamic equations describing behavior of defects typical of liquid-crystalline media are derived. The vortex is found to be a dynamic defect of a fluid similarly to the dislocation in a solid.

1. 4-мерная формулировка полевой теории дефектов

При введении тензора деформации в механике сплошных сред рассматривают начальное положение деформируемого тела в момент времени $t = t_0$ и конечное (текущее) положение в некоторый момент t. Разность квадратов расстояний между бесконечно близкими точками в начальном $\mathrm{d}s_0^2$ при t_0 и конечном положении $\mathrm{d}s^2$ при t определится тензором деформации ε_{ij}. В случае малых деформаций разность квадратов запишется как

$$\mathrm{d}s^2 - \mathrm{d}s_0^2 = \varepsilon_{\alpha\beta}\mathrm{d}x_\alpha \mathrm{d}x_\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right)\mathrm{d}x_\alpha \mathrm{d}x_\beta, \quad (1)$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right), \ \alpha, \beta = 1, 2, 3 \quad (2)$

есть тензор малых деформаций; u_α — компоненты вектора смещений.

Такое рассмотрение учитывает бесконечно малые изменения в пространстве (градиенты вектора смещений полагаются значительно меньше единицы), в то же время, промежуток времени перехода деформируемого тела из начального положения в конечное $(t - t_0)$ может быть совершенно произвольным. Это означает, что процесс перехода из начального положения в конечное выпадает из рассмотрения. Чтобы учесть процесс перехода во времени, необходимо наряду с бесконечно малыми пространственными изменениями рассматривать бесконечно малые изменения, происходящие во времени.

Для учета бесконечно малых изменений во времени рассмотрим правую часть выражения (1) и преобразуем ее следующим образом:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right)\mathrm{d}x_\alpha \mathrm{d}x_\beta = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}\mathrm{d}x_\alpha \mathrm{d}x_\beta =$$

$$= \mathrm{d}\mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = |\mathrm{d}u||\mathrm{d}r|\cos\alpha, \quad (3)$$

где α — угол между векторами $\mathrm{d}\mathbf{u}$ и $\mathrm{d}\mathbf{r}$. Поскольку наибольшее и наименьшее значение $\cos\alpha = \pm 1$, то правую часть выражения (3) можно оценить как

$$|\mathrm{d}u||\mathrm{d}r|\cos \gtrless |\mathrm{d}u||\mathrm{d}r|. \quad (4)$$

Запишем приращение скаляра вектора смещений и скаляра радиус-вектора:

$$|\Delta u| = |\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1| \ge |u_2| - |u_1| \ \text{ и } \ |\Delta r| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \ge |r_2| - |r_1|.$$

В этом случае можно записать

$$\frac{|\mathrm{d}u|}{|\mathrm{d}r|} = \lim_{|\Delta r|\to 0} \frac{|\Delta u|}{|\Delta r|} = \mathrm{tg}\,\beta,$$

где β — угол между касательной к кривой зависимости модуля смещений от модуля радиус-вектора $|u| = |u|(|r|)$. С учетом выше изложенного можно записать неравенство

$$\mathrm{du} \cdot \mathrm{dr} \gtrless |\mathrm{d}r|^2\, \mathrm{tg}\,\beta. \tag{5}$$

Поскольку $|\mathrm{d}r|$ — расстояние между фиксированными точками в начальном положении, то изменение правой части (5) во времени может происходить только за счет изменения угла β. В начальном положении угол $\beta = 0$, поскольку смещения отсутствуют. За бесконечно малый промежуток времени угол β получит бесконечно малое приращение

$$\mathrm{d}\beta = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t.$$

Тогда правую часть выражения (5), если отсчет идет от начального положения в пространстве и во времени, можно представить как

$$|\mathrm{d}r|^2\, \mathrm{tg}\,\mathrm{d}\beta = |\mathrm{d}r|^2\, \mathrm{tg}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t. \tag{6}$$

Поскольку угол $\mathrm{d}\beta$ — малая величина, то имеет место следующая аппроксимация

$$\mathrm{tg}\,\mathrm{d}\beta \approx \sin \mathrm{d}\beta \approx \mathrm{d}\beta.$$

Используя эту аппроксимацию, можно записать следующее соотношение

$$|\mathrm{d}r|^2\, \mathrm{tg}\,\mathrm{d}\beta \approx |\mathrm{d}r|^2 \sin \mathrm{d}\beta \approx |\mathrm{d}r|^2\, \mathrm{d}\beta.$$

Выражение $|\mathrm{d}r|^2 \sin \mathrm{d}\beta \approx |\mathrm{d}r|^2\, \mathrm{d}\beta$ представляет собой скалярную величину векторного произведения двух одинаковых векторов, повернутых друг относительно друга на угол β. Следовательно, изменение за бесконечно малый промежуток времени определяется удвоенной площадью, которую заметает вектор $\mathrm{d}\mathbf{r}$ при повороте на угол $\mathrm{d}\beta$. Введем обозначение для приращения площади за единицу времени

$$\mathrm{d}\varphi = |\mathrm{d}r|^2 \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t},$$

что позволит записать выражение следующим образом:

$$|\mathrm{d}r|^2\, \mathrm{tg}\,\mathrm{d}\beta \cong \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}t.$$

Тогда с учетом всего выше изложенного будет иметь место неравенство

$$\mathrm{d}\mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} - \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}t \neq 0.$$

Введем некоторую скорость C и перепишем верхнее выражение как

$$\mathrm{d}\mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} - \frac{1}{c}\mathrm{d}\varphi\, c\, \mathrm{d}t \neq 0. \tag{7}$$

Выражение (7) представляет собой скалярное произведение двух 4-векторов в псевдоевклидовом пространстве индекса 1 [1]. Один 4-вектор имеет компоненты

$$\mathrm{d}U^i = (\frac{1}{c}\mathrm{d}\varphi, \mathrm{d}\mathbf{u}) \text{ и } \mathrm{d}U_i = (-\frac{1}{c}\mathrm{d}\varphi, \mathrm{d}\mathbf{u}), \tag{8}$$

второй 4-вектор — компоненты

$$\mathrm{d}R^i = (c\mathrm{d}t, \mathrm{d}\mathbf{r}) \text{ и } \mathrm{d}R_i = (-c\mathrm{d}t, \mathrm{d}\mathbf{r}). \tag{9}$$

В дальнейшем индексы, обозначенные буквами латинского алфавита, принимают значения $i, j = 0, 1, 2, 3$.

Выясним, что физически означает введение 4-вектора смещений U^i. Для этого рассмотрим сплошную среду, которой свойственны черты как обычной идеальной жидкости, так и черты упругого тела. Состояние такой среды должно описываться заданием переменных, характерных как для упругого тела, так и для жидкости. Хорошо известно, что для описания упругого тела без дефектов вводится вектор упругих смещений [2]. Вектор смещений определяется с точностью до смещений и поворотов тела как целого, т.е. он не определяет состояние упругого тела и является своего рода векторным потенциалом. Состояние упругого тела определяется градиентами вектора смещений. Для жидкости в качестве кинематического параметра берется вектор скорости $\mathbf{v}$ [3]. В случае потенциального течения вектор скорости определяется как градиент некоторого потенциала $\mathbf{v} = -\nabla\varphi$, который имеет размерность площади, заметаемой в единицу времени. Для жидкости скалярный потенциал также определен не однозначно, а с точностью до временной функции. Из изложенного выше следует, что для описания сплошной среды со свойствами упругого тела и жидкости следует ввести 4-потенциал (4-вектор смещений)

$$U^i = (\frac{1}{c}\varphi, \mathbf{u}), \tag{10}$$

объединяющий векторный и скалярный потенциалы. Множитель $1/c$ введен для того, чтобы компоненты 4-вектора имели одинаковую размерность смещений.

Таким образом, в бесконечно малых временных процессах деформируемое тело проявляет жидкоподобные свойства, а процесс деформирования следует рассматривать в 4-мерном псевдоевклидовом пространстве индекса 1. В качестве вектора смещений возьмем 4-вектор (10), а в качестве радиус-вектора — 4-вектор $R^i = (ct, \mathbf{r})$. 4-мерный тензор деформации введем таким же образом, как и в трехмерном случае. Только теперь вместо квадрата расстояний в пространстве возьмем квадрат расстояний в пространственно-временном континууме.

Выражение (1) для 4-мерного случая запишется следующим образом:

$$\mathrm{d}s^2 - \mathrm{d}s_0^2 = \varepsilon_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x^j} + \frac{\partial U_j}{\partial x^i}\right)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = \\ = \mathrm{d}U_i\mathrm{d}x^i, \tag{11}$$

где индексы i, j пробегают значения 0, 1, 2, 3, $\dfrac{\partial}{\partial x^0} = \dfrac{\partial}{c\partial t}$, $\dfrac{\partial}{\partial x^1} = \dfrac{\partial}{\partial x_1} = \dfrac{\partial}{\partial x}$ и подобные выражения справедливы для двух других пространственных координат, поскольку имеет место функциональная зависимость $U_i = U_i(x^0, x^1, x^2, x^3)$.

В этом случае 4-тензор дисторсии можно записать в виде таблицы

$$\beta_{ij} = \frac{\partial U_j}{\partial x^i} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} & \frac{1}{c}\frac{\partial u_1}{\partial t} & \frac{1}{c}\frac{\partial u_2}{\partial t} & \frac{1}{c}\frac{\partial u_3}{\partial t} \\ -\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1} & \frac{\partial u_1}{\partial x^1} & \frac{\partial u_2}{\partial x^1} & \frac{\partial u_3}{\partial x^1} \\ -\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2} & \frac{\partial u_1}{\partial x^2} & \frac{\partial u_2}{\partial x^2} & \frac{\partial u_3}{\partial x^2} \\ -\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial x^3} & \frac{\partial u_1}{\partial x^3} & \frac{\partial u_2}{\partial x^3} & \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{c^2}\psi & \frac{1}{c}V_1 & \frac{1}{c}V_2 & \frac{1}{c}V_3 \\ \frac{1}{c}v_1 & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \frac{1}{c}v_2 & \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \frac{1}{c}v_3 & \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Из сопоставления приведенных таблиц легко понять, какие обозначения введены. Из верхней таблицы следует, что пространственные компоненты 4-тензора дисторсии — это компоненты трехмерного тензора дисторсии $\beta_{\alpha\gamma} = \dfrac{\partial u_\gamma}{\partial x^\alpha}$ $(\alpha, \gamma = 1, 2, 3)$, для которых оставлены обычные обозначения. Смешанными (пространственно-временными) компонентами 4-тензора являются два 3-мерных вектора: вектор упругих скоростей

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{V}(V_1, V_2, V_3),$$

и вектор скорости $\mathbf{v} = -\nabla\varphi(v_1, v_2, v_3)$, характерный для жидкости. Чисто временной компонентой

$$\beta_{00} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\psi$$

является скаляр. Симметричная часть 4-тензора дисторсии определит 4-тензор деформации

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\beta_{ij} + \beta_{ji}\right). \quad (13)$$

В этом случае выражение (1) можно записать следующим образом:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}s_0^2 + \varepsilon_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = -(\mathrm{d}x^0)_0^2 + (\mathrm{d}x^1)_0^2 + (\mathrm{d}x^2)_0^2 + (\mathrm{d}x^3)_0^2 + \varepsilon_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j. \quad (14)$$

С точки зрения общей теории относительности [1] выражение (14) представляет метрическую квадратичную форму, записанную в координатах, близких по своим свойствам к галилеевым координатам, поскольку добавочная квадратичная форма $\varepsilon_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ мала ввиду малости компонент 4-тензора деформации.

2. 4-тензоры поля

Хорошо известно, что при наличии дефектов в упругой среде вектор смещений не определен и трехмерный тензор дисторсии не является градиентом вектора смещений $\beta \neq \nabla\mathbf{u}$. Подобная ситуация имеет место и для жидкости, если течение жидкости непотенциально, то вектор скорости не определяется как $\mathbf{v} \neq -\nabla\varphi$. Это значит, что при наличии дефектов в жидкокристаллической среде 4-векторный потенциал $U^i = (\frac{1}{c}\varphi, \mathbf{u})$ не определен. При описании такой среды следует использовать 4-тензор дисторсии, компоненты которого определяются нижней таблицей (12).

Для того чтобы 4-тензор дисторсии был полным дифференциалом, т.е. существовал 4-потенциал, необходимо выполнение следующих условий:

$$\frac{\partial\beta_{ji}}{\partial x^n} - \frac{\partial\beta_{ni}}{\partial x^j} = 0. \quad (15)$$

Если условие (15) не выполняется, то это означает наличие дефектов в сплошной среде. Тензор, описывающий дефектность среды, выбирается как мера отклонения от условия (15):

$$\alpha_{nji} = \frac{\partial\beta_{ji}}{\partial x^n} - \frac{\partial\beta_{ni}}{\partial x^j}. \quad (16)$$

Если исходить из терминологии теории поля, то антисимметричный по двум первым индексам тензор (16) следует назвать тензором поля дефектов. Рассмотрим компоненты тензора (16), когда индексы $n, j, i = 1, 2, 3$ принимают пространственные значения. В этом случае индексы обозначаются латинскими буквами. Введем дуальный тензор (обозначение для него оставим прежним) согласно

$$\alpha_{\alpha\tau} = \frac{1}{2}\mathrm{E}_{\alpha\beta\gamma}\alpha_{\beta\gamma\tau} = \mathrm{E}_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial\beta_{\beta\tau}}{\partial x^\alpha} \quad \text{или} \quad \alpha = \nabla\times\beta. \quad (17)$$

Здесь $\mathrm{E}_{\alpha\beta\gamma}$ — трехмерный полностью антисимметричный тензор Леви-Чивиты. Введенный таким образом дуальный тензор $\alpha = \nabla\times\beta$ — это хорошо известный в континуальной теории дефектов тензор плотности дислокаций [2]. Тензор (16) выражается через дуальный тензор следующим образом:

$$\alpha_{\alpha\beta\tau} = \mathrm{E}_{\alpha\beta\gamma}\alpha_{\gamma\tau}. \quad (18)$$

Рассмотрим компоненты тензора (16), для которых индексы $j, i = 1, 2, 3$, а $n = 0$:

$$\alpha_{0\alpha\beta} = \frac{\partial\beta_{\alpha\beta}}{\partial x^0} - \frac{\partial\beta_{0i}}{\partial x^j} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\beta_{\alpha\beta}}{\partial t} - \frac{\partial V_\beta}{\partial x^\alpha}\right). \quad (19)$$

Здесь компоненты 4-тензора дисторсии взяты из верхней таблицы (12). Из континуальной теории дефектов известно, что выражение в круглых скобках (19) есть тензор плотности потока дефектов

$$J_{\alpha\beta} = \frac{\partial \beta_{\alpha\beta}}{\partial t} - \frac{\partial V_\beta}{\partial x^\alpha}. \qquad (20)$$

Теперь рассмотрим компоненты тензора (16), когда индекс $i = 0$, индексы $n, j = 1, 2, 3$:

$$\alpha_{\alpha\beta 0} = \frac{\partial \beta_{\beta 0}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \beta_{\alpha 0}}{\partial x^\beta} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial v_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial v_\alpha}{\partial x^\beta}\right). \qquad (21)$$

Введем тензор, дуальный тензору (21):

$$\omega_\alpha = \frac{1}{2} \mathrm{E}_{\alpha\beta\gamma} \alpha_{\beta\gamma}$$

или

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}. \qquad (22)$$

В выражениях (22) опустили последний временной индекс. Тогда будет иметь место

$$\alpha_{\alpha\beta} = \mathrm{E}_{\alpha\beta\gamma}\omega_\gamma. \qquad (23)$$

Наконец, рассмотрим компоненты тензора (16), когда индексы $i, n = 0$, а $j = 1, 2, 3$:

$$\alpha_{0\alpha 0} = \frac{\partial \beta_{\alpha 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial \beta_{00}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}\right). \qquad (24)$$

Все рассмотренные выше компоненты тензора поля можно представить в виде двух таблиц. Первая таблица для компонент тензора поля, индексы которых принимают значения $i = 1, 2, 3$, а $n, j = 0, 1, 2, 3$. Учитывая выражения (17)–(20), получим

$$\alpha_{nj\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{c}J_{1\alpha} & \frac{1}{c}J_{2\alpha} & \frac{1}{c}J_{3\alpha} \\ -\frac{1}{c}J_{1\alpha} & 0 & \alpha_{3\alpha} & -\alpha_{2\alpha} \\ -\frac{1}{c}J_{2\alpha} & -\alpha_{3\alpha} & 0 & \alpha_{1\alpha} \\ -\frac{1}{c}J_{3\alpha} & \alpha_{2\alpha} & -\alpha_{1\alpha} & 0 \end{vmatrix}, \qquad (25)$$

а учитывая выражения (21)–(24), таблица для компонент тензора поля с индексами $i = 0$ и $n, j = 0, 1, 2, 3$ примет вид:

$$\alpha_{nj0} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{c^2}j_1 & \frac{1}{c^2}j_2 & \frac{1}{c^2}j_3 \\ -\frac{1}{c^2}j_1 & 0 & \frac{1}{c}\omega_3 & -\frac{1}{c}\omega_2 \\ -\frac{1}{c^2}j_2 & -\frac{1}{c}\omega_3 & 0 & \frac{1}{c}\omega_1 \\ -\frac{1}{c^2}j_3 & \frac{1}{c}\omega_2 & -\frac{1}{c}\omega_1 & 0 \end{vmatrix}. \qquad (26)$$

Здесь вектор

$$\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nabla\psi \qquad (27)$$

имеет смысл вектора ускорений.

Теперь для тензоров поля (25) и (26) можно записать геометрические полевые уравнения исходя из условия, которому удовлетворяет тензор поля:

$$\frac{\partial \alpha_{nji}}{\partial x^k} + \frac{\partial \alpha_{jki}}{\partial x^n} + \frac{\partial \alpha_{kni}}{\partial x^j} = 0. \qquad (28)$$

Рассмотрим случай, когда все три индекса принимают пространственные значения, т.е. $n, i, j = 1, 2, 3$. Подставляя значение координат тензора из таблицы (25) в уравнение (28), получим

$$\frac{\partial \alpha_{3\alpha}}{\partial x^3} + \frac{\partial \alpha_{1\alpha}}{\partial x^1} + \frac{\partial \alpha_{2\alpha}}{\partial x^2} = 0$$

или

$$\nabla \cdot \alpha = 0. \qquad (29)$$

Здесь α — тензор плотности дислокаций, используемый в континуальной теории дефектов, а уравнение (29) является одним из геометрических уравнений континуальной теории дефектов.

Если один из индексов n или j принимает нулевое значение, то из уравнения (28) с учетом таблицы (25) для случая $n = 0$, получим

$$\frac{1}{c}\frac{\partial J_{1\alpha}}{\partial x^2} - \frac{1}{c}\frac{\partial J_{2\alpha}}{\partial x^1} + \frac{1}{c}\frac{\partial \alpha_{3\alpha}}{\partial t} = 0.$$

Меняя индексы j, k при $n = 0$, получим два других уравнения, подобных уравнению выше. Эти три уравнения можно записать в виде одного соотношения:

$$\nabla \times J = \frac{\partial \alpha}{\partial t}. \qquad (30)$$

Соотношение (30) представляет собой второе геометрическое уравнение континуальной теории дефектов, где J — тензор плотности потока дефектов.

Теперь рассмотрим геометрические соотношения, когда $i = 0$. Подставляя в уравнение (28) значение коэффициентов тензора поля из таблицы (26), получим в случае $n, j, k = 1, 2, 3$

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^3}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$$

или

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0, \qquad (31)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор завихренности (22), используемый в гидродинамике при описании турбулентного поведения жидкости.

Таким образом, при четырехмерном описании поля дефектов вихрь следует рассматривать как дефект. При $n = 0$ получим три уравнения, одно из которых имеет вид:

$$\frac{\partial j_1}{\partial x^2} - \frac{\partial j_2}{\partial x^1} + \frac{\partial \omega_3}{\partial t} = 0.$$

Все три уравнения в векторном виде запишутся как

$$\nabla \times \mathbf{j} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}. \qquad (32)$$

Вектор $\mathbf{j}$ имеет смысл вектора ускорений и, в то же время, его можно истолковать как вектор потока вихрей.

3. 4-тензор источников поля дефектов

Чтобы получить динамические уравнения теории дефектов, необходимо определить источники поля, которые должны удовлетворять уравнению неразрывности. Из уравнения непрерывности для 4-тензора плотности источников поля должны следовать хорошо известные соотношения теории деформируемого твердого тела и гидродинамики. Кроме того, при использовании данного 4-тензора плотности источников поля должны получаться динамические уравнения, содержащие уравнения работы [4], в которых в качестве источников выступают тензор напряжений и вектор импульса.

Исходя из этих соображений, симметричный 4-мерный тензор источников поля дефектов запишем в следующем виде:

$$\sigma^{ij} = \begin{vmatrix} \rho c^2 & \rho c w_1 & \rho c w_2 & \rho c w_3 \\ \rho c w_1 & -(\sigma_{11} - \rho w_1^2) & -(\sigma_{12} - \rho w_1 w_2) & -(\sigma_{13} - \rho w_1 w_3) \\ \rho c w_2 & -(\sigma_{21} - \rho w_2 w_1) & -(\sigma_{22} - \rho w_2^2) & -(\sigma_{23} - \rho w_2 w_3) \\ \rho c w_3 & -(\sigma_{31} - \rho w_3 w_1) & -(\sigma_{32} - \rho w_3 w_2) & -(\sigma_{33} - \rho w_3^2) \end{vmatrix}. \tag{33}$$

Здесь ρ — плотность сплошной среды, а $\mathbf{w} = \mathbf{V} + \mathbf{v}$. Из условия непрерывности для 4-тензора плотности источников

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^i} = 0 \tag{34}$$

при $j = 0$ следует условие сохранения массы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{w} = 0. \tag{35}$$

При $j = 1, 2, 3$ условие непрерывности для 4-тензора тока запишется как

$$\frac{\partial \rho \mathbf{w}}{\partial t} = \nabla \cdot (\sigma - \rho \mathbf{w}\mathbf{w}). \tag{36}$$

В случае чисто упругого тела $\mathbf{w} = \mathbf{V}$ и уравнение (36) примет вид:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} = \nabla \cdot (\sigma - \rho \mathbf{V}\mathbf{V}).$$

Скорость $\mathbf{V}$ является компонентой 4-тензора деформации, а компоненты изначально предполагаются малыми по сравнению с единицей. Следовательно, произведением скоростей можно пренебречь и верхнее выражение перейдет в динамическое уравнение теории упругости.

Для идеальной жидкости $\mathbf{w} = \mathbf{v}$, $\sigma = -P\delta$, где P — давление, δ — единичный тензор, уравнение непрерывности примет вид:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \cdot (P\delta + \rho \mathbf{v}\mathbf{v}).$$

Динамические уравнения дефектов получим из условия

$$\frac{\partial \alpha^{nji}}{\partial x^n} = -\frac{1}{S} \sigma^{ji}. \tag{37}$$

Здесь введен коэффициент S, имеющий размерность силы, для того чтобы размерности левой и правой частей (37) были одинаковы.

Вначале рассмотрим уравнение (37), когда j, i = 1, 2, 3, например, для $j = 1$:

$$\frac{\partial \alpha^{01\alpha}}{\partial x^0} + \frac{\partial \alpha^{21\alpha}}{\partial x^2} + \frac{\partial \alpha^{31\alpha}}{\partial x^3} = -\frac{1}{S} \sigma^{1\alpha}.$$

Подставляя значение компонент тензора поля из таблицы (25), а компонент 4-тензора тока из таблицы (33), получим

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial J_{1\alpha}}{\partial t} - \frac{\partial \alpha_{3\alpha}}{\partial x^2} + \frac{\partial \alpha_{2\alpha}}{\partial x^3} = \frac{1}{S} (\sigma_{1\alpha} - \rho w_1 w_i).$$

Для других значений $j = 2, 3$ получим еще два подобных уравнения. Эти три уравнения в тензорном виде примут вид:

$$\nabla \times \alpha = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial J}{\partial t} - \frac{1}{S} (\sigma - \rho \mathbf{w}\mathbf{w}). \tag{38}$$

Второе динамическое уравнение получается при $j = 0$

$$\nabla \cdot J = -\frac{c^2}{S} \rho \mathbf{w}. \tag{39}$$

Динамические уравнения (38) и (39) совпадают с динамическими уравнениями континуальной теории дефектов, полученными в работе [4], где был использован совершенно другой подход.

Рассмотрим вторую пару уравнений для жидкоподобного поведения деформируемого тела. Используя уравнение (37), а также таблицы (26) и (33), получим два уравнения:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{c^2}{S} c^2 \rho, \tag{40}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \frac{1}{S} c^2 \rho \mathbf{w}. \tag{41}$$

Сведем уравнения (31), (32), (39) и (40) воедино:

$$\begin{gathered} \nabla \cdot \alpha = 0, \qquad \nabla \times J = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \\ \nabla \times \alpha = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial J}{\partial t} - \frac{1}{S} (\sigma - \rho \mathbf{w}\mathbf{w}), \\ \nabla \cdot J = -\frac{c^2}{S} \rho \mathbf{w}, \\ \nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{c^2}{S} c^2 \rho, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{j} = \frac{\partial \beta \boldsymbol{\omega}}{\partial t}, \quad \nabla \times \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \frac{1}{S} c^2 \rho \mathbf{w}. \end{gathered} \tag{42}$$

4. Тензор энергии-импульса

Тензор энергии-импульса поля дефектов определяется как

$$T^{ik} = -\alpha^{ijn}\alpha^{k}_{jn} + \frac{1}{4} g^{ik}\alpha^{mjn}\alpha_{mjn},$$

где g^{ik} — дважды контравариантный метрический тензор псевдоевклидова пространства индекса 1. В качестве примера рассмотрим тензор энергии-импульса для жидкости, определяемый тензором поля дефектов (26).

Пространственные компоненты тензора энергии-импульса в этом случае примут вид:

$$T^{\alpha\beta} = -\alpha^{\alpha j0}\alpha^{\beta}_{j0} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta}\alpha^{mj0}\alpha_{mj0}.$$

Подставляя значение компонент тензора поля из таблицы (26), получим пространственные компоненты тензора энергии-импульса, которые представляют трехмерный тензор максвелловских напряжений. Он будет иметь смысл обычных напряжений, если умножить его на ранее введенный коэффициент S. В итоге получим

$$\sigma_{\alpha\beta} = ST^{\alpha\beta} =$$
$$= \frac{S}{c^2}\left[-\frac{1}{c^2} j_\alpha j_\beta - \omega_\alpha\omega_\beta + \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\left(\frac{1}{c^2} j_\gamma j_\gamma + \omega_\gamma\omega_\gamma\right)\right].$$

Пространственно-временные компоненты тензора энергии-импульса имеют смысл вектора потока импульса и определяются следующим образом:

$$T^{0\alpha} = -\alpha^{0j0}\alpha^{\alpha}_{j0}.$$

Используя таблицу (26), выражение для вектора потока импульса **p** запишется как

$$\mathbf{p} = \frac{S}{c^3}\mathbf{j}\times\boldsymbol{\omega}.$$

Чисто временная компонента тензора энергии-импульса представляет плотность энергии E поля дефектов, определенных тензором поля (26):

$$E = \frac{S}{2c^4}\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} + \frac{S}{2c^2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}.$$

Подобные выражения можно записать и для твердотельной составляющей жидкокристаллической среды.

Таким образом, получена динамическая система уравнений для дефектов в жидкокристаллических средах, из которой можно получить уравнения для дефектов в твердом теле, рассмотренные в первой части статьи [4]. Из этой же системы можно получить уравнения для дефектов в жидкости, которые ранее в гидродинамике не рассматривались.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 05-01-00303.

Литература

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. – Т. 2. – М.: Наука, 1967. – 460 с.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. – Т. 7. – М.: Наука, 1987. – 248 с.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. – Т. 6. – М.: Наука, 1986. – 733 с.
4. *Гриняев Ю.В., Чертова Н.В.* Полевая теория дефектов. Часть I // Физ. мезомех. – 2000. – Т. 3. – № 5. – С. 19–32.