

Нагружаемый материал как нелинейная динамическая система. Проблемы моделирования

П.В. Макаров

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, 634021, Россия

Дан краткий обзор основных идей и выводов нелинейной динамики, на основе которых анализируются возможности «иерархического моделирования». Центральные проблемы при выполнении такого моделирования видятся: 1) в нахождении путей и методов анализа общих свойств решений соответствующих нелинейных динамических уравнений механики сплошных сред в контексте основополагающих идей синергетики; 2) в установлении «генетического кода» организации пространственно-временных иерархий, рождающихся в нагружаемых материалах и средах. Утверждается, что нелинейные уравнения механики сплошных сред с релаксационными определяющими уравнениями (т.е. эволюционными уравнениями) для описания скоростей пластической деформации, накопления повреждений и разрушения, с положительными и отрицательными обратными связями между параметрами являются самодостаточными для выполнения иерархического моделирования. В общем случае это нелинейные уравнения смешанного типа, которые содержат как гиперболические, так и параболические решения. Их потенциальные возможности описывать эволюцию нагружаемых прочных сред по сценарию синергетики колоссальны и практически не изучены.

Loaded material as a nonlinear dynamic system. Simulation problems

P.V. Makarov

Institute of Strength Physics and Materials Science SB RAS, Tomsk, 634021, Russia

The paper briefly reviews main ideas and conclusions of nonlinear dynamics, which provide the basis for analyzing the potentialities of “hierarchical simulation”. The central problems of such simulation are: (i) to find ways and methods of analyzing common properties of solutions of corresponding nonlinear dynamic equations of continuum mechanics in the context of fundamental ideas of synergetics and (ii) to reveal the “genetic code” of organization of spatio-temporal hierarchies formed in loaded materials and media. It is stated that nonlinear equations of continuum mechanics with governing relaxation equations (i.e. evolution equations), which are intended for describing plastic strain rates, damage accumulation and fracture and have positive and negative feedback between parameters, are sufficient for hierarchical simulation. In the general case, these are nonlinear equations of mixed type that contain both hyperbolic and parabolic solutions. Their potentialities for describing the evolution of loaded solid media according to the synergetics scenario are huge and yet to be studied.

1. Введение. Общие черты нелинейной динамики

Физическая мезомеханика материалов, как новое научное направление, неразрывно связана с именем Виктора Евгеньевича Панина, который одним из первых начал изучать нагружаемое твердое тело как систему, эволюционирующую под приложенным воздействием [1–4]. Им получен ряд фундаментальных результатов, которые полностью соответствуют современным пред-

ставлениям теории динамических систем и основополагающим принципам синергетики [3, 4], и сформулированы синергетические принципы мезомеханики [3]. На настоящем этапе развития методов и средств физической мезомеханики уже не только экспериментальные исследования разрушения и деформации материалов, но также и многие методы технологической обработки материалов широко используют подходы нелинейной

динамики (теории самоорганизации или синергетики) и фрактальной геометрии [5–12].

Однако моделирование процессов упругопластической деформации и разрушения, несмотря на многочисленные заклинания по поводу иерархичности этих процессов, фактически не выходит за рамки традиционных подходов и моделей механики сплошных сред. Отчасти такая ситуация связана с объективными сложностями, затрудняющими выполнение математических расчетов в достаточно широком интервале масштабов.

Главная же причина такого положения дел заключается, все-таки, в отсутствии стройной и ясной методической концепции, которая указала бы, как такое иерархическое моделирование должно быть выполнено и какие именно уравнения должны быть записаны и исследованы. Фактически никто строго не изучал нагружаемое твердое тело как систему (имеется в виду математическое моделирование) и математически не исследовал эволюционные свойства систем уравнений, описывающих деформацию и разрушение твердых тел.

Такое положение дел не случайно и объясняется не ленью и неосведомленностью механиков, а теми чудовищными трудностями, с которыми сталкивается теория самоорганизации или нелинейная динамика при теоретическом моделировании эволюции конкретных физических систем (в данном случае нагружаемых материалов). Все теоретические исследования, выполненные до настоящего времени, не продвинулись дальше анализа различных модификаций модели брюсселятора и других, сравнительно простых базовых моделей синергетики [13–21]. Впечатляющие результаты получены в развитии общей теории систем параболических уравнений, описывающих различные явления переноса (тепла, процессов типа реакция-диффузия и т.д.) [18, 22–24], но и здесь продвижение вперед было долгим и драматическим [18, 22, 24]. Один из ведущих специалистов в области нелинейной динамики Г.Г. Малинецкий в одной из своих работ [18] замечает: «От «теории всего» — каковой некоторые гуманитарии представляют себе синергетику — не приходится ждать конкретных результатов и методов». Правда, далее он блестяще иллюстрирует всю мощь и силу синергетического подхода, намечая, в том числе, пути приложения синергетики к решению конкретных физических задач.

Это замечание, на наш взгляд, следует понимать в контексте, что «спасение утопающих — дело рук самих утопающих», т.е. в каждой конкретной области приложения на основе общих идей синергетики должны разрабатываться оригинальные методы и подходы, существенно связанные с «пониманием изучаемого явления». Это замечание означает также и то, что анализ отдельных, пусть чрезвычайно важных явлений «жизни» динамических систем, например нагружаемого материала, с общих позиций синергетики и только на основе ее базовых моделей вне контекста всей системы нелиней-

ных динамических уравнений, описывающих поведение этой системы, уже не даст принципиально новых результатов, кроме выяснения деталей (может быть и весьма существенных), тем более, что нам уже очень многое известно из анализа соответствующих экспериментов. Уже достаточно многочисленные примеры применения эволюционных уравнений Г. Хакена и И. Пригожина к анализу зарождения и развития пластической деформации и разрушения или применение нелинейного уравнения Гинзбурга–Ландау к анализу условий распространения фронтов разрушения, по большому счету, не проясняют, как эволюционирует твердое тело под приложенными нагрузками.

Не отрицая всей важности подобных исследований, мы хотим просто акцентировать внимание на том обстоятельстве, что подобное моделирование в принципе не может описать ход эволюции нагружаемой среды как системы, так как в нем нет места напряженно-деформированному состоянию среды, а значит, нет соответствующих взаимосвязей и особенностей течения, управляемого внутренними напряжениями. Анализируются отдельные, вырванные из общего контекста, и в этом смысле «абстрактные» явления. Таким образом, следует обсудить вопрос, как может быть выполнено иерархическое моделирование в контексте идей нелинейной динамики.

В синергетике [14–18], в частности в той ее части, которая изучает общую теорию динамических систем (интегрируемых и неинтегрируемых), или в нелинейной динамике по другой (также общепринятой) терминологии получены фундаментальные результаты [14–21, 25, 26], позволяющие применить эти достижения к анализу такой сложной системы, какой является деформируемое твердое тело.

Определение интегрируемой динамической системы связано с возможностью исключения взаимодействий между частицами [15, 18], в то время как нас интересуют, прежде всего, взаимодействия (корреляции) между элементами структуры, которые позволяют эволюционировать системе по сценарию самоорганизации. По образному выражению И. Пригожина «в интегрируемом мире не нашлось бы места для самоорганизации и для жизни» [15].

Согласно Пригожину [14, 15] переход в неравновесное состояние открытой системы приводит к появлению когерентного поведения частиц (коллективным явлениям или кооперативному поведению), совершенно чуждого для равновесных условий. Эта особенность нелинейных динамических систем, когда неравновесность приводит к крупномасштабным корреляциям, является важнейшим свойством или отличительной чертой нелинейной динамики.

Таким образом, неравновесность и возможность развития неустойчивостей как существенных черт нелинейной динамики должны быть характерными особен-

ностями системы уравнений, моделирующих эволюцию твердого тела под внешними воздействиями.

Выдающимся достижением теории динамических систем (по проблеме неинтегрируемых систем) являются работы Колмогорова, Арнольда и Мозера, результатом которых является так называемая теория КАМ [17, 18]. Рассматривая влияние резонансов на траектории частиц в фазовом пространстве, теория КАМ привела к фундаментальному выводу — существованию как регулярных траекторий, так и стохастических, уже отражающих взаимодействия между частицами (элементами структуры). Не вдаваясь в подробности, запишем гамильтониан в виде суммы [13–15, 17]

$$H = H_0 + \lambda V,$$

где H_0 — «свободный» гамильтониан, соответствующий интегрируемой системе, для которой связи между частицами отсутствуют. Этот гамильтониан возмущен потенциалом взаимодействия λV , где λ — параметр, отражающий интенсивность взаимодействия частиц, например, учет вязкости в гидромеханике или нарастание диссипации при переходе от чисто упругого поведения к упругопластическому течению. При увеличении λ увеличиваются области фазового пространства, где преобладает стохастичность. Более того, при некоторых (достаточно малых) значениях λ существуют промежуточные режимы, в которых имеют место как регулярные траектории, так и стохастические. При некотором критическом значении λ возникает хаос, хотя сама теория КАМ не приводит к динамической теории хаоса [13–15]!

Подробно динамический хаос был изучен на примерах простых систем, например, таких как динамика Ферхюльста [13, 14, 18, 27].

Динамика Ферхюльста, а также и другие сценарии проникновения в хаос имеют много общих черт (имеется в виду динамический или детерминированный хаос, принципиально отличающийся от хаоса теплового, приводящего к равновесию и понятию температуры; динамический хаос имеет другую функцию распределения и не приводит к понятию температуры). При изменении управляющего параметра состояние равновесия становится неустойчивым, возникают бифуркации, приводящие в ряде случаев к устойчивым периодическим колебаниям. Так, в динамике Ферхюльста (и многих других случаях) периодические колебания усложняются, обнаруживая последовательности с удвоением периода колебаний (так называемая универсальность Фейгенбаума, характеризуемая числом $\delta \approx 4.669\dots$ — отношением длин следующих друг за другом интервалов удвоения периодов). Затем процесс перестает быть периодическим, приводя к полосам хаотического поведения. На самом деле этот процесс более сложен и содержит много тонких деталей [18, 27]. Для нас же важны две следующие универсальные черты: 1) понятие аттрактора как

области (точки в частном случае) равновесия или притяжения, характеризующей асимптотическое поведение системы вблизи своего аттрактора (точка равновесия; при периодическом поведении — набор точек, между которыми «мечется» решение; полоса или каскад бифуркаций при хаотическом поведении); 2) полная бифуркационная диаграмма (в координатах «решения — управляющий параметр»), которая демонстрирует самоподобные картины, специфические бифуркационные «деревья» (рис. 1).

Заметим, что переход от упругого поведения к пластическому как раз и осуществляется в расчетах (как и в эксперименте) по бифуркационному сценарию.

Такая бифуркационная диаграмма отражает набор всех (или очень многих) возможных решений в зависимости от управляющего параметра, что наводит на простую мысль. Для понимания эволюции нелинейной динамической системы уравнений необходимо выполнить качественный анализ решений соответствующих нелинейных уравнений (задача Р. Фейнмана [28]).

Для выявления сути нелинейных явлений, а также и нелинейных уравнений бифуркационный сценарий приобретает фундаментальное значение. Сама возможность динамического хаоса, а главное, сценарий, по которому порядок переходит в хаос, выявили общие универсальные свойства сложных динамических систем и процессов (а в нашем понимании здесь и свойства нелинейных уравнений, как будет показано далее, смешанного типа). Существуют разные пути перехода от порядка к хаосу [15, 18, 24–26, 29] (процессы Ландау, Ферхюльста и Мандельброта). Так, множество Мандельброта представляет собой более общий принцип перехода от порядка к хаосу, чем универсальность Фейгенбаума [18, 27, 30], для нас же важно то, что они содержат

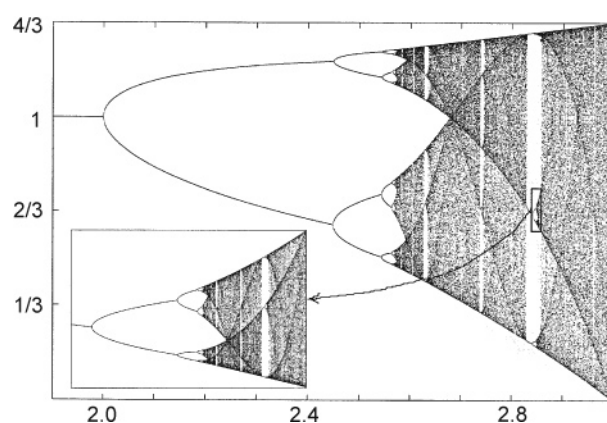


Рис. 1. Бифуркационный сценарий Ферхюльста. Показано ветвление решений в зависимости от управляющего параметра τ . Для каждого значения τ пропускался переходный период в 2000 итераций, затем наносились 100 точек итераций. При $\tau > 2.57$ начинаются полосы динамического хаоса. Полная совокупность решений (в области $1.9 \leq \tau < 3.0$) демонстрирует самоподобный характер этого процесса

хаотические последовательности точек, которые никогда не придут к какой-либо регулярности. Другими словами, конкретный вид правила перехода к хаосу не является принципиальным (известно, что разные правила могут порождать, например, множество Мандельброта, а сам процесс Мандельброта в некоторой своей части эквивалентен процессу Ферхюльста [18, 27, 30]). Фундаментальное значение здесь имеет природа границ между областями притяжения — различными зонами притяжения аттракторов (в физических системах — это границы зерен, ячеек, любые другие интерфейсы, поверхности изломов материалов и т.д.).

Центры этих зон притяжения — аттракторы — ведут борьбу за влияние на плоскости (любая начальная точка X_0 в течение процесса либо приходит к тому или другому центру, либо «лежит» на границе области и не может принять определенное значение). С изменением управляющего параметра изменяются как сами области притяжения, так и границы. Именно эту самоподобную природу границ Мандельброт и назвал фрактальной структурой [30].

В случае фрактальной структуры границ областей притяжения соответствующий аттрактор называется странным. На рис. 1 показана бифуркационная диаграмма процесса Ферхюльста.

Итак, сценарий проникновения в хаос лежит через последовательности бифуркаций и определяется особыми свойствами нелинейных уравнений, что составляет другую важнейшую отличительную черту нелинейной динамики и нелинейных уравнений.

Одним из центральных вопросов нелинейной динамики является проблема параметров порядка. Ответ на вопросы о том, какие именно переменные для исследуемой системы будут параметрами порядка и каков алгоритм их смены, — это задачи, существенно связанные с физическими особенностями каждой конкретной системы. Установление этих особенностей является предметом усилий многих исследователей, занимающихся изучением конкретных систем [31, 32]. Строгое же обоснование концепции параметров порядка является серьезным достижением нелинейной динамики [14–16, 18, 19] и следует из теории инерциальных многообразий.

2. Иерархическое моделирование и нелинейная динамика

Таким образом, изучение механического поведения нагружаемого материала как системы в рамках иерархического моделирования должно быть неразрывно связано с новой междисциплинарной парадигмой — теорией динамических систем (или нелинейной динамикой), анализирующей общую стратегию эволюции динамических систем вне зависимости от их физического содержания. Как уже отмечалось, отличительные черты поведения таких систем — это свойства универсаль-

ности и самоподобия, наличие параметров порядка и их смена при самоорганизации системы, т.е. при образовании новых структур (неоднородностей), возникающих вследствие потери системой устойчивости в некоторых локальных областях. Дальнейшая эволюция системы в этих локальных областях потери устойчивости развивается по бифуркационному сценарию, обеспечивая переход системы через динамический хаос к возникновению неоднородности и самоорганизации ее частей, выражающейся в появлении крупномасштабных корреляций.

Именно все это (или почти все) мы и должны продемонстрировать (увидеть), выполняя иерархическое моделирование. Следовательно, система уравнений, моделирующая деформационные процессы (возможно, включая накопление повреждений и разрушение) должна открывать возможности к учету всех этих синергетических явлений. Здесь следует отметить, что термин «самоорганизация» мы понимаем по Г. Хакену: «Самоорганизация — это самопроизвольное обретение системой пространственной, временной или функциональной неоднородности» [19].

Принципиальным для эволюции подобных систем оказалось наличие диссипативных процессов: вязкости, диффузии, теплопроводности (добавим, пластичности и накопления повреждений и разрушения). Они позволяли системам «забыть» начальные данные и независимо от их «деталей» формировать с течением времени одни и те же или похожие стационарные распределения изучаемых переменных [14, 18]. Но также именно наличие нелинейных диссипативных процессов обеспечивает с одной стороны нелинейные связи в системе, а с другой стороны, регулирует либо развитие в среде неустойчивостей, либо переход к устойчивому равновесному состоянию, в зависимости от конкурирующего воздействия извне.

Согласно работам И. Пригожина и И. Стенгерса [17, 26] поток тепла или вещества в открытой системе, т.е. внешнее воздействие, заставляющее систему более интенсивно диссипировать подводимую энергию, «является связью в том смысле, что без него система бы эволюционировала к равновесию. Вихри Бенара производят больше энтропии, чем это следует из теоремы о минимуме производства энтропии».

Так, переход материала от упругого обратимого поведения к необратимому пластическому течению связан с резким возрастанием диссипации, но возникает такой переход вследствие локальной потери устойчивости под действием приложенных напряжений.

Затронутый вопрос достаточно тонкий и связан с отношением системы к собственным флуктуациям, т.е. неустойчивостям. В одних условиях они могут быть подавлены и система обретает равновесие, в других они «выгодны» системе [14, 15] и она эволюционирует по пути самоорганизации. Это все хорошо известно. Нам

же важно здесь иметь в виду, что в любой системе всегда идет борьба, своеобразная конкуренция, между равновесием и бифуркационным, хаотическим неустойчивым поведением. Стабилизирующее воздействие диссипации, определяемое в деформируемом теле скоростью пластической деформации, конкурирует с возмущающими дестабилизирующими факторами — ростом напряжений в деформируемом материале, а также соответствующими особенностями течения среды, которые продиктованы внешними воздействиями (полем сил тяжести, скоростью нагружения и т.д.).

Следовательно, определяющие уравнения для упругопластической среды должны быть записаны как эволюционные уравнения — в релаксационной форме, явно вводя в рассмотрение упомянутые конкурирующие факторы.

Для выполнения задачи иерархического моделирования и воспроизведения структур в нагружаемой среде необходимо в этих уравнениях прописать положительные и отрицательные обратные связи, которые и должны обеспечить конкуренцию в среде между стабилизирующим воздействием диссипативных процессов и стремлением системы к обретению равновесия и дестабилизацией, приводящей к развитию неустойчивостей.

Из вышеизложенного ясно, что «иерархическое» моделирование, воспроизводящее эволюцию нагружаемой среды по законам синергетики, должно опираться на систему нелинейных уравнений механики сплошных сред, учитывающих диссипацию (и как будет ясно из дальнейшего, смешанного типа). Определяющие уравнения, записанные в релаксационной форме, должны ввести в рассмотрение конкурирующие процессы.

Уместно задать вопрос: выполняя иерархическое моделирование, что мы хотим увидеть? Но парадокс заключается в том, что именно это мы и хотим знать. Однако от соответствующих ответов будет зависеть успех подобного моделирования.

Если мы хотим увидеть, как развивается деформация или разрушение при переходе с масштаба на масштаб, начиная с микроуровня (уровня отдельных дислокаций, например) и вплоть до образца в целом, то с уверенностью можно сказать, что это невозможно в рамках единого описания, по крайней мере, в обозримом будущем. И дело вовсе не в технических трудностях, а в сложностях принципиального характера.

Слишком велико различие пространственно-временных масштабов. Достаточно сравнить характерные времена и масштабы микроскопических процессов, ограниченные долями микрометров и временами порядка 10^{-10} – 10^{-12} с и менее и характерные времена и масштабы мезоуровня, отличающиеся на многие порядки от характерных времен (особенно времен) и масштабов макроуровня, не говоря о геологических временах и масштабах тектонических плит, чтобы понять суть проблемы.

И если эти причины, по большому счету, можно как-то отнести к «техническим трудностям», то физические законы, управляющие процессами микроуровня, с одной стороны, и мезо- и макроуровня, с другой стороны, а также соответствующие модели, математические методы и средства описания этих различных физических явлений уже принципиально различны.

Дискретные методы молекулярной динамики и континуальные методы механики сплошных сред являются яркой иллюстрацией высказанного соображения.

Следовательно, имеет смысл говорить о «близких» пространственно-временных масштабах. Из экспериментов и из многих расчетов, в которых наблюдается возникновение неоднородностей, например полос локализованной деформации или повреждений, локализаций тепла и т.д. (сформировавшихся вследствие внутренних нелинейных свойств системы, но не по причине искусственно введенного концентратора), видно, что их пространственное распределение и характерные масштабы неоднородностей позволяют сравнительно легко включать в рассмотрение несколько пространственных масштабов (если приблизительно считать, что линейные размеры формирующих блоков в последовательности утраиваются [33, 34]). Сложнее дело обстоит с временными масштабами. Характерные времена релаксации могут меняться уже на порядки и необходимое время расчетов эволюции системы катастрофически возрастает.

Практически в любом случае из всей возможной иерархии масштабов рассматриваемой среды для изучения выделяется объект (образец) вполне определенных ограниченных размеров, в зависимости от целей исследования. Как правило, это макроскопический объект и его интегральные макроскопические характеристики усредненно отражают его поведение на макроуровне. Физическая мезомеханика переносит центр внимания на более низкий, предшествующий, мезоскопический уровень.

Таким образом, объектом изучения является мезообъем нагружаемого материала, который является элементом n -го уровня иерархии (мезоуровень) и включает в себя определенное число блоков (элементов) $(n-1)$ -го уровня (микроуровень). Сам исследуемый мезообъем является составной частью более крупного структурного элемента-блока $(n+1)$ -го уровня (макроуровень) [34–36].

Если выбран масштаб образца для изучения, то, как правило, достаточно трех указанных уровней описания: микро (интегрально отражает вклады нижележащих уровней и более подробное описание часто является избыточным [34–36]), мезо и макро.

Причем, если ставится задача эволюции и образования структур, то можно ограничиться мезоуровнем, считая выбранный мезообъем представительным. Мик-

роуровень учтем усредненно через задание соответствующей кинетики накопления микроповреждений и через усредненное представление скорости пластических сдвигов $\dot{\gamma}^p$ [35, 36], которую можно определить кинетикой дислокаций, например при дислокационной пластичности [35–38].

Конкретное решение вопроса выбора соответствующих кинетик в данном контексте является хотя и важной, но частной задачей, и зависит от поставленных целей исследования, ведущих физических механизмов на нижележащем микроскопическом уровне, т.е. от масштаба рассматриваемого как микроскопический ($(n-1)$ -й уровень).

Так как для исследования выбран представительный мезообъем, то его усредненное поведение (средняя σ - ϵ -диаграмма, например) будет эквивалентно поведению следующего в ряду иерархии макроскопического уровня, конечно, при условии, что ход эволюции на исследуемом мезоуровне отражает реальную физическую ситуацию этого мезоскопического масштаба.

В своей книге «Линейные и нелинейные волны» [39] Дж.Уизем пишет, что гиперболические уравнения (которые в основном и используются при моделировании динамического отклика на нагружение материалов и сред) являются идеализированной моделью волновой динамики. Более общим типом являются по его определению линейные и нелинейные диспергирующие волны, которые определяются скорее видом решения (с дисперсией), чем типом уравнения [39]. Их решения представляют собой уже волновые пакеты, определяемые дисперсионным соотношением (функцией, связывающей волновой вектор и частоту), а ключевым понятием является групповая скорость.

Еще более общим классом являются уравнения смешанного типа, в решениях которых возможны как гиперболические (либо дисперсионные) волны — это быстрые возмущения, движущиеся со скоростью звука, так и «медленные возмущения», обусловленные параболическими свойствами уравнений смешанного типа. Этот класс уравнений изучен сравнительно слабо. Как будет видно из дальнейшего изложения, именно параболические свойства решения окажутся чрезвычайно важными при исследовании сценария эволюции моделируемой системы — нагружаемого материала.

Эволюция системы во времени обеспечивается также взаимодействиями — положительными и отрицательными обратными связями — между макроскопическими переменными X_i и так называемыми управляющими параметрами λ [14–21], которые входят в эволюционные уравнения вида

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = F_i(\{X\}, \lambda). \quad (1)$$

Управляющие параметры λ связаны с «внешним миром» [17, 18]. Другими словами, они существенно связа-

ны с внешними воздействиями и ограничениями, т.е. обусловлены взаимодействиями системы с окружающей средой, например, определяются условиями нагружения, т.е. скоростью подвода энергии к системе.

Для качественного анализа рассмотрим частный вид такого эволюционного уравнения (1) [17]:

$$\frac{dX}{dt} = \lambda - KX. \quad (2)$$

Равновесное или стационарное состояние достигается при

$$\lambda - KX = 0. \quad (3)$$

Это динамическое равновесие, обусловленное внешними воздействиями, с одной стороны, и способностью системы диссипировать подводимую к ней энергию, с другой.

Роль эволюционного уравнения в нашем случае играют определяющие уравнения, которые следует записать в релаксационной форме [34–38].

Представим тензор напряжений в виде упругой равновесной части и неравновесной (диссипативной):

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + S_{ij}^e + S_{ij}^v. \quad (4)$$

Здесь $P = -1/3 \sigma_{ii}$ — среднее давление; S_{ij}^e — равновесная часть напряжения; S_{ij}^v — неравновесная, релаксирующая составляющая. В равновесном (упругом) состоянии $S_{ij}^v = 0$.

Определяющие уравнения в релаксационной форме следуют из закона Гука, записанного в дифференциальном виде, и имеют вид:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \lambda(\dot{\theta}^T - \dot{\theta}^P)\delta_{ij} + 2\mu(\dot{\epsilon}_{ij}^T - \dot{\epsilon}_{ij}^P). \quad (5)$$

Здесь полная скорость деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^T$ есть сумма упругой $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ и пластической $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ составляющих; $\dot{\theta}^T = \dot{\epsilon}_{ii}^T$ — полная скорость объемной деформации; $\dot{\theta}^P = \dot{\epsilon}_{ii}^P$ — скорость объемной неупругой деформации, т.е. скорость дилатансии нагружаемой среды, определяющая ее разрыхление вследствие накопления повреждений.

Релаксационные определяющие уравнения выполняют роль эволюционных уравнений для прочной деформируемой среды и по сути и форме совпадают с эволюционными уравнениями (1), (2).

Более детально особенности применения развиваемого подхода для различных задач (расчета σ - ϵ -диаграмм, структуры и эволюции ударно-волновых фронтов, фронтов Людерса и т.д.) изложены, например, в работах [2, 35–37].

Полная скорость деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^T$ определяется условиями нагружения, т.е. является управляющим параметром. Скорость пластических сдвигов $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ полностью определяется внутренними свойствами среды — ее способностью диссипировать подводимую энергию. В частном случае для расчета σ - ϵ -диаграмм [35, 36] (одноосное растяжение стержней) выражение (5) принимает вид:

$$\dot{\sigma}_1 = E \left(\dot{\epsilon}_1^T - \frac{4}{3} \dot{\gamma}^P \right), \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0, \quad (6)$$

где $\dot{\gamma}^P$ — главный пластический сдвиг ($\dot{\gamma}^P = (1/2)(\dot{\epsilon}_1^P - \dot{\epsilon}_2^P)$), $\dot{\epsilon}_1^P + \dot{\epsilon}_2^P + \dot{\epsilon}_3^P = 0$ и $\dot{\epsilon}_2^P \approx \dot{\epsilon}_3^P$; $\dot{\epsilon}_1^T$ полностью определяется внешними условиями, например растяжением с постоянной скоростью $\dot{\epsilon}_1^T = \text{const}$. В более общем случае нагружения среды $\dot{\epsilon}_{ij}^T$ определяется параметрами течения среды, $\dot{\epsilon}_{ij}^T = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right)$, где v_i — компоненты скорости течения среды. В этом случае управляющие параметры связаны с «внешним миром» более сложным способом через граничные условия, задающие характер нагружения среды, т.е. $\dot{\epsilon}_{ij}^T$ во внутренних областях нагружаемого объема являются довольно сложными функциями напряжений, деформаций и скоростей развившегося течения и определяются численно в ходе решения полной системы уравнений механики сплошных сред.

Скорости неупругой деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^P$ и скорость дилатансии $\dot{\theta}^P$ задаются соответствующими кинетиками для развития пластических сдвигов и накопления повреждений [35–38]. В общем случае это сложные нелинейные функции напряжений и накопленных неупругих деформаций (либо повреждений). Например, при дислокационной пластичности $\dot{\theta}^P \approx 0$, а скорость пластических сдвигов может быть усредненно описана законом Орована:

$$\dot{\gamma}^P = gbN(\dot{\gamma}^P, \tau) f(\dot{\gamma}^P) \nu(\tau, \dot{\gamma}^P). \quad (7)$$

Здесь g — ориентационный множитель ($g \approx 1/2$); b — длина вектора Бюргерса; $N(\dot{\gamma}^P, \tau)$ — средняя плотность дислокаций; $f(\dot{\gamma}^P)$ — доля подвижных деформационных дефектов; $\nu(\tau, \dot{\gamma}^P)$ — средняя скорость деформационных дефектов; τ — напряжение сдвига.

Соответствующие кинетики для скорости дилатансии $\dot{\theta}^P$ обеспечивают эволюцию напряженно-деформированного состояния нагружаемого материала за счет накопления повреждений.

Таким образом, видно, что нелинейные эволюционные уравнения (5) или (6) обеспечивают как положительные, так и отрицательные обратные связи.

Стабилизирующее действие развивающейся пластической деформации как существенно нелинейного диссипативного процесса выражается в релаксации напряжений (уравнения (6), (7)), что заставляет систему эволюционировать к равновесному состоянию. Чем выше скорость пластической деформации, тем быстрее релаксируют напряжения. В свою очередь, уменьшение напряжений приводит к уменьшению скорости пластической деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^P$. Когда скорость пластических деформаций станет меньше скорости полной деформации, обусловленной как внешними воздействиями, так и характером развивающегося течения, напряжения опять

начнут расти. Эта тонкая игра, включая детали положительных и отрицательных обратных связей, определяется как видом конкретных нелинейных кинетик для $\dot{\epsilon}^P$ и $\dot{\theta}^P$, с одной стороны, так и особенностями неоднородного течения и внешними воздействиями (граничными условиями), с другой стороны.

3. Примеры иерархического моделирования. Система нелинейных уравнений для описания деструкции сплошных сред

Традиционный подход к моделированию упруго-пластических течений нагружаемых материалов и сред опирается на численное решение квазилинейной системы уравнений механики сплошных сред. Переход к пластическому течению осуществляется приведением напряжений к кругу текучести, если они превысят некоторое критическое значение. Такой анализ в среднем слабо нелинейной системы не сулит каких-либо неожиданностей.

Ситуация кардинально меняется, если в качестве определяющих уравнений взять нелинейные уравнения релаксационного типа (5), (6), а также явно ввести в рассмотрение нелинейные функции неупругих деформаций и повреждений.

Эта в среднем слабо нелинейная система уравнений на определенных этапах ее эволюции (например, при переходе от упругого поведения к пластическому или при разрушении, при переходе через ударный фронт или фронт детонации и т.д.) становится существенно нелинейной, когда резко возрастает диссипация и процессы развиваются катастрофически в режимах с обострением. Это области потери устойчивости. Именно в эти моменты все события и развиваются по бифуркационному сценарию. Система уравнений становится способной эволюционировать через локальную потерю устойчивости и динамический хаос к обретению неоднородностей и к образованию новых (диссипативных) структур.

Более того, как показали расчеты Ю.П. Стефанова [40], один только учет нелинейного накопления повреждений и внутреннего трения даже при мгновенной релаксации (выполняется процедура приведения напряжений на поверхность текучести на каждом временном слое) заставляет эволюционировать нагружаемую среду как типичную нелинейную синергетическую систему.

Рассеянное накопление повреждений очень быстро сменяется его локализацией (это же относится и к неупругой пластической деформации) и развитием локализованного повреждения либо деформации в режимах с обострением, формируя в расчетных областях нагружаемого материала сопряженные системы полос локализованной деформации или локализованного разрушения. На рис. 2, 3 приведены некоторые расчеты локализации повреждений для случая такой «мгновенной» ре-

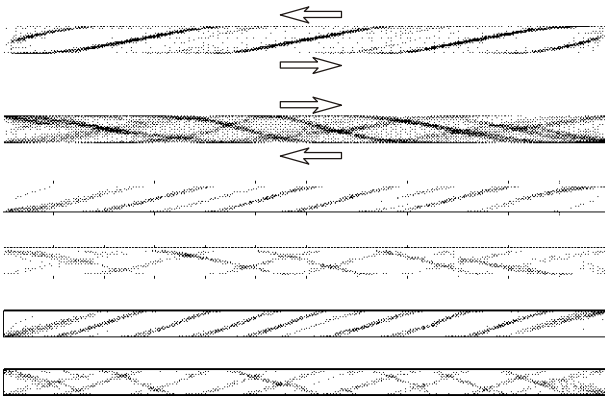


Рис. 2. Формирование сопряженных систем полос локализации при прямом и обратном сдвиге по границам слоя нелинейной среды

лаксации, выполненные при нелинейных зависимостях для $\dot{\theta}^p$ и учета внутреннего трения [40].

Сценарий развития этих сопряженных полос локализованной деформации — типичный пример самоорганизации. Из многих зародившихся полос «выживают» только некоторые. Их ориентация и характерные расстояния между полосами могут меняться в ходе нагружения. Моделируемая нелинейная среда самопроизвольно обретает неоднородность в ходе ее эволюции. Прослеживается несколько (по крайней мере, два) пространственных масштабов.

Другой алгоритм жизни и эволюции нелинейной системы был предложен в работах [38, 41, 42]. В этом подходе мы объединили численные методы континуальной механики и дискретный метод клеточных автоматов. Суть такого описания неупругого поведения нагружаемой среды заключается в том, что каждая расчетная ячейка (частица среды) рассматривается как клеточный автомат, жизнь которого зависит, в том числе, от состояния ближайших соседей. Такой подход позволил сформулировать физический критерий пластичности на мезоуровне [41], когда пластические сдвиги зарождаются либо на свободных границах, либо на различных интерфейсах. Развитая методика позволила воспроизвести эволюцию нагружаемой системы [38, 41, 43], численно смоделировать процессы формирования фронтов Людерса [44], блоков разных масштабов, систем полос локализованной деформации [43, 44], ударно-волновых фронтов [37]. На рис. 4 приведены расчеты возникновения и распространения от свободных поверхностей деформационных фронтов и систем полос локализованной деформации и формирования блоков нескольких масштабов (до четырех). Эти расчеты убедительно иллюстрируют возможности иерархического моделирования при учете нелинейных свойств нагружаемой среды.

В теории нелинейных динамических систем при анализе многих физических явлений очень часто исполь-

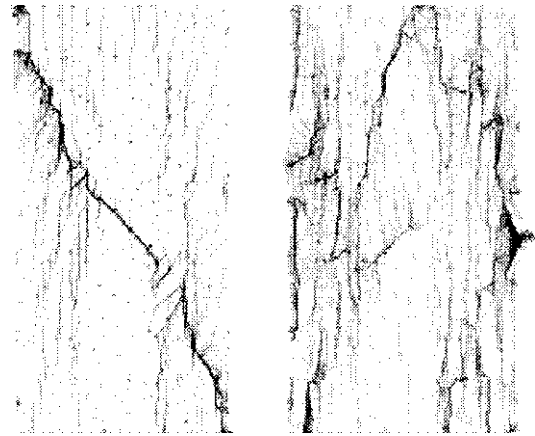


Рис. 3. Картины локализации повреждений в неоднородном образце при условиях идеального скольжения на торцах

зуется нелинейное уравнение Гинзбурга–Ландау или нелинейное уравнение Шредингера [18, 22, 24].

Уравнение Гинзбурга–Ландау

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(k(t) \frac{\partial \Gamma}{\partial x^i} \right) + Q(\Gamma). \quad (8)$$

Кубическое уравнение Шредингера (одномерный вариант)

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - |\Psi|^2 \Psi. \quad (9)$$

Это наиболее хорошо изученные уравнения, хотя процесс их исследования был очень долгим и трудным, существует много открытых и дискуссионных вопросов [18, 22, 24]. Так, уравнение (9) широко используется в волновой динамике (теории волн на поверхности жидкости).

Очень важной особенностью решения этих уравнений является возможность рассчитать процесс возникновения и распространения различных фронтов, связанных с явлениями переноса (тепла, диффузии, фронтов разрушения и неупругой деформации).

Другая характерная особенность этих уравнений связана с возможностью анализа развития исследуемых процессов в различных режимах с обострением [18, 22, 24].

По этим причинам эти уравнения используются при изучении процессов накопления повреждений и неупругих деформаций [31, 45].

Мы же включим подобные нелинейные параболические уравнения в общую систему уравнений динамики упругопластических сред в качестве кинетических уравнений, определяющих зарождение и распространение в нагружаемой нелинейной среде повреждений и неупругой деформации. Не отягощая общую систему уравнений деталями, связанными с конкретным видом кинетических уравнений (см., например, [31, 45]), представим ее в виде:

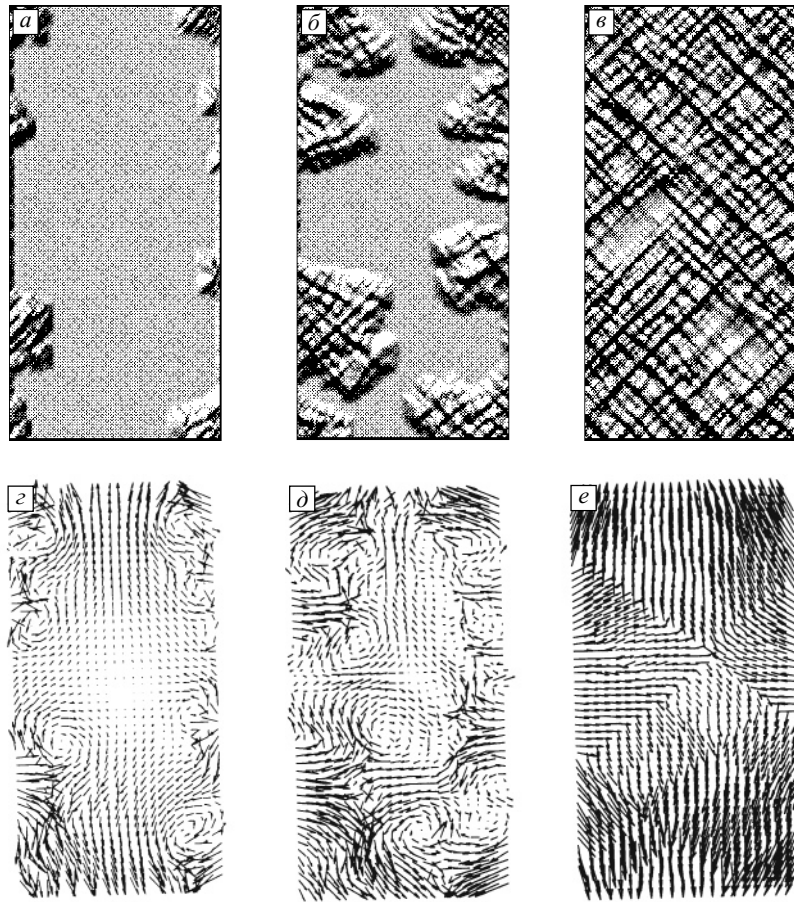


Рис. 4. Расчет распространения фронтов и полос локализованной деформации и формирование иерархии блоков при описании эволюции нагружаемой среды на основе комбинации численных методов механики сплошных сред и дискретного метода клеточных автоматов; а-в — деформационный рельеф; г-е — поле скоростей

$$\begin{aligned}
 \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{v} &= 0, \\
 \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^j} + \rho F_i, \\
 \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} - q_{i,i}, \\
 \sigma_{ij} &= -P \delta_{ij} + S_{ij}^e + S_{ij}^v, \quad -P = \frac{1}{3} \sigma_{ii}, \\
 \dot{\sigma}_{ij} &= \lambda (\dot{\theta}^T - \dot{\theta}^P) \delta_{ij} + 2\mu (\dot{\varepsilon}_{ij}^T - \dot{\varepsilon}_{ij}^P), \\
 \dot{\varepsilon}_{ij}^T &= \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad \dot{\theta}^T = \dot{\varepsilon}_{ii}^T, \quad \dot{\theta}^P = \dot{\varepsilon}_{ii}^p, \\
 \dot{\varepsilon}_{ij}^T &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right), \\
 \dot{\theta}^P &= A \frac{\partial}{\partial x^i} B \frac{\partial}{\partial x^i} \theta^P + C(\theta), \\
 \dot{\varepsilon}_{ij}^p &= \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_{\text{eff}}^p}{\sigma_{\text{eff}}} S_{ij},
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\varepsilon}_{\text{eff}}^p &= \frac{\sqrt{2}}{3} [(\dot{\varepsilon}_{11}^p - \dot{\varepsilon}_{22}^p)^2 + (\dot{\varepsilon}_{22}^p - \dot{\varepsilon}_{33}^p)^2 + \\
 &\quad + (\dot{\varepsilon}_{33}^p - \dot{\varepsilon}_{11}^p)^2 + 6((\dot{\varepsilon}_{12}^p)^2 + (\dot{\varepsilon}_{23}^p)^2 + (\dot{\varepsilon}_{31}^p)^2)]^{1/2}, \\
 \sigma_{\text{eff}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(S_{11} - S_{22})^2 + (S_{22} - S_{33})^2 + \\
 &\quad + (S_{33} - S_{11})^2 + 6(S_{12}^2 + S_{23}^2 + S_{31}^2)]^{1/2}, \\
 P &= f(\rho, E).
 \end{aligned}$$

Здесь $\dot{\varepsilon}_{\text{eff}}^p$ и σ_{eff} — вторые инварианты скоростей пластических деформаций и напряжений соответственно; A, B, C — некоторые функции, определяемые при выборе конкретной кинетики [31, 45].

Задание скорости пластических сдвигов в виде

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_{\text{eff}}^p}{\sigma_{\text{eff}}} S_{ij}
 \tag{11}$$

фактически означает выполнение уравнений пластического течения Прандтля–Рейсса и используется при приведении напряжений к мгновенному кругу текучести,

определенному законом их релаксации, если задан закон ограничения для напряжений:

$$\sigma_{\text{eff}} \leq \sigma_{\text{eff}}^0(\epsilon^P). \quad (12)$$

Здесь $\sigma_{\text{eff}}^0(\epsilon^P)$ имеет смысл стационарного равновесного предела текучести при стремлении скорости нагружения к нулю, но с учетом деформационного упрочнения.

Осталось определить закон релаксации напряжений. Это можно сделать многими способами [35], например, заданием дислокационной кинетики в случае дислокационной пластичности [35, 37], либо задав функцию релаксации (в каждом случае свою для выбранного пространственного мезоскопического масштаба) [34–36]. Большие надежды мы связываем с использованием «параболического» закона накопления пластических сдвигов по аналогии с таковым для повреждений, как это обсуждается, например, в [31].

Так как для пластичных материалов $\dot{\theta}^P \approx 0$, то определяющие релаксационные уравнения (5) с учетом (11), т.е. в случае ассоциированного закона пластического течения, примут вид:

$$\dot{S}_{ij} = 2\mu \left(\dot{\epsilon}_{ij}^T - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}_{\text{eff}}^P}{\sigma_{\text{eff}}} S_{ij} \right). \quad (13)$$

Таким образом, релаксационные уравнения (13) означают, что все компоненты девиатора напряжений S_{ij} релаксируют сходным образом в соответствии с заданным законом релаксации для второго инварианта напряжений σ_{eff} .

Этот закон представим в виде

$$\sigma_{\text{eff}} = \sigma_{\text{eff}}^0 + \eta \dot{\epsilon}_{\text{eff}}^P. \quad (14)$$

Здесь функция релаксации

$$\eta = \eta(\sigma_{\text{eff}}, \epsilon_{\text{eff}}^P L_n) = G t_r(\sigma_{\text{eff}}, \epsilon_{\text{eff}}^P L_n), \quad (15)$$

где t_r — характерное время релаксации, свое для каждого мезоскопического масштаба L_n ; G — модуль сдвига.

Эти характерные времена релаксации t_r усредненно описывают скорость диссипации подводимой к телу энергии, которая обеспечивается элементарными актами неупругой деформации, развивающейся на предыдущем микроскопическом уровне.

Эффективная функция вязкости η варьируется в широких пределах от единиц Па·с в ударно-волновых фронтах в металлах до значений $\approx 10^{22} \div 10^{24}$ Па·с для масштабов, соизмеримых с размерами тектонических плит.

Соответственно характерные времена релаксации изменяются от значений $t_r \approx 10^{-9}$ с во фронтах ударных волн до геологических времен, измеряемых миллионами лет.

Теперь релаксационное уравнение (13) примет вид:

$$\dot{S}_{ij} = 2\mu \left(\dot{\epsilon}_{ij}^T - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} - \frac{3}{2\eta} \left(1 - \frac{\sigma_{\text{eff}}^0}{\sigma_{\text{eff}}} \right) S_{ij} \right). \quad (16)$$

В более общем случае учета внутреннего трения и дилатансии выражения (11) и (12) будут выглядеть иначе. Их вид будет зависеть от конкретного способа учета внутреннего трения и дилатансии. По этому вопросу имеется обширная литература, обзор которой не входит в цели настоящей работы. Заметим только, что очень удачной и перспективной моделью, учитывающей внутреннее трение и дилатансию, является модель Николаевского, который рассматривает внутреннее трение и дилатансию как независимые процессы. В этом случае используется уже неассоциированный закон пластического течения. Подробное изучение модели Николаевского в сравнении с другими подобными моделями было выполнено Ю.П. Стефановым [40].

В случае модели Николаевского выражения (11) и (12) примут вид:

$$\frac{\alpha}{3} I_1 + I_2^{1/2} - Y = f(\sigma_{ij}), \quad (17)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = \dot{\lambda} \left(S_{ij} + \frac{2}{3} \Lambda \left(Y - \frac{\alpha}{3} I_1 \right) \delta_{ij} \right). \quad (18)$$

Здесь I_1, I_2 — первый и второй инварианты тензора напряжений; $f(\sigma_{ij})$ — функция (поверхность) текучести. Теперь скорость пластических сдвигов $\dot{\epsilon}_{ij}^P$ определится как

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}},$$

где $\Phi(\sigma_{ij})$ — потенциал пластического течения, который для неассоциированного закона пластического течения не совпадает с функцией текучести $f(\sigma_{ij})$ и имеет следующий вид для модели Николаевского:

$$\Phi(\sigma_{ij}) = I_2(\sigma_{ij}) + \frac{\Lambda}{3} I_1(\sigma_{ij}) \left(2Y - \frac{\alpha}{3} I_1(\sigma_{ij}) \right) + \text{const},$$

Λ — независимый коэффициент дилатансии в выражении $\dot{\theta}^P = \dot{I}_1(\epsilon_{ij}^P) = 2\Lambda(\dot{I}_2^P(\epsilon_{ij}^P))^{1/2}$, $\dot{I}_2(\epsilon_{ij}^P) = \dot{\epsilon}_{\text{eff}}^P$, $I_2(\sigma_{ij}) = \sigma_{\text{eff}}$. Это означает, что скорость накопления повреждений $\dot{\theta}^P$ может быть подсчитана независимо, путем задания соответствующей кинетики, а затем через коэффициент Λ процесс разрыхления материала может быть учтен в соответствующей процедуре ограничения напряжений — законе релаксации в (10), с учетом выражений (11)–(13) или (17), (18), либо других аналогичных условий, в зависимости от принятой модели.

Таким образом, полная система нелинейных уравнений (10) вместе с определяющими релаксационными уравнениями и с нелинейными дифференциальными уравнениями параболического типа для определения

скоростей зарождения повреждений и скоростей неупругих деформаций образует полную систему уравнений смешанного типа, которая и определяет эволюцию нагружаемой среды как нелинейной динамической системы. Решения такой системы должны обладать как гиперболическими, так и параболическими свойствами и приводить как к гиперболическим (дисперсионным, в более общем случае) волнам напряжений, так и к медленным движениям, обусловленным параболическими свойствами системы.

Подобные медленные деформационные фронты и фронты повреждений были получены при использовании дискретного метода клеточных автоматов для описания зарождения и развития неупругих деформаций в нагружаемой среде (рис. 4).

4. Самоподобие разрушения углей.

Замечания о «генетическом коде»

эволюции нагружаемых твердых тел

Уголь является уникальным модельным материалом, позволяющим изучать фрактальные свойства и самоподобие разрушения в широком диапазоне масштабов. Нами было изучено более десяти различных марок угля Кузбасского бассейна в области масштабов разрушения от сотен нм до 10 см.

Изучение масштабов разрушения углей было выполнено двумя независимыми методами: 1) на основе анализа оптических изображений поверхностей изломов; 2) на основе изучения распределений фрагментов по весовым долям методами седиментационного и ситового анализов. Оба метода дали очень хорошо согласующиеся результаты по величинам масштабов разрушения. Часть результатов этих исследований была опубликована в работах [46–48], в которых было показано, что отношение размеров блоков в ряду иерархии близко к 3 (варьируется в пределах 2.4÷3). Последние, более детальные исследования существенно уточняют эти данные и убедительно свидетельствуют о самоподобии разрушения углей.

Однако пока не проведен полный мультифрактальный анализ оптических изображений поверхностей изломов угля и данных по седиментационному и ситовому анализу, означающий переход от исследования только геометрической структуры к изучению меры, можно сделать лишь ряд предварительных замечаний о соотношении размеров блоков в ряду иерархии.

Для всех марок углей всегда выявляется масштаб $L = 3\div 4$ мкм и масштаб $L^* = 10$ мкм. L^* — особая точка, которая выявляется всегда и с очень малой погрешностью, не более 5 % (рис. 5). По этой причине при анализе мультифрактальных свойств эта точка была выбрана как опорная. В масштабе 1÷10 мкм при седиментационном анализе шаг по размерам частиц был в 1 мкм, усреднение в этой области осуществляется по миллионам частиц (в 1 мм³ содержится $100^3 = 10^6$ пылевых частиц размером в 10 мкм), поэтому разброс точек в этой области минимален.

Как оптические изображения изломов, так и данные по седиментационному и ситовому анализу выявляют два разных ряда последовательностей, в которых соотношения масштабов относятся как 1:(1.4÷1.7) и 1:(2.4÷2.9). Непосредственные измерения более крупных фракций (табл. 1 и 2) в двух циклах дробления показали, что размеры фрагментов в трех направлениях ($a:b:c$) дают отношения a/b и b/c тем ближе к значению ≈ 1.6 , чем больше выборка, а $a/c \approx 2.6$. Это позволило упорядочить данные, полученные по анализу оптических изображений изломов, и согласовать их с данными о распределении фракций по весовым долям (в последнем случае выявляются последовательные размеры блоков в ряду иерархии, в то время как оптические изображения несут информацию как по соотношениям размеров блоков в последовательности, так и об их геометрической форме).

В диапазоне масштабов 1÷160 мкм (рис. 5) уверенно выявляются масштабы в 3÷4 мкм и в 10 ± 0.5 мкм. Масштаб $L = 3\div 4$ мкм для марки угля, представленной на рис. 5, проявляется слабо, в то время как для многих

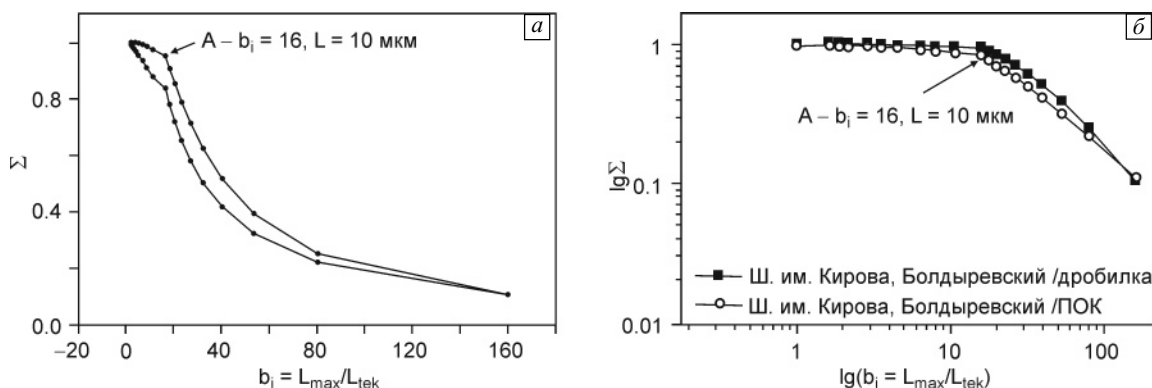


Рис. 5. Исследование масштабов разрушения угля в диапазоне 1÷160 мкм: *a* — кумулятивная сумма вкладов весовых долей фрагментов разрушения; *b* — весовая доля вкладов в двойных логарифмических координатах. $L_{tek} = 1\div 160$ мкм

Таблица 1

Шахта Осиновская	Размер образца, мм					
	1 цикл			2 цикл		
Пласт Е-5, марка Ж	a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2
	34.3	33.2	12.3	15.3	8.8	7.3
	48.9	35	25.7	13.1	9.1	5.2
	30.9	26.2	22.3	16.3	11.5	7.4
	35.3	32.4	21.4	15.1	9.1	6.9
Среднее	37.35	31.7	20.425	14.2	9	8.1
	1.18		1.55	12.1	12	6.9
				24.3	13.4	8.9
				13.1	9.3	8
				14.9	10.5	7.9
				16.2	14.8	12
				13	12.4	6.9
				11.3	10.1	8.1
				12.6	11.6	6.5
Среднее				14.731	10.892	7.7
Коэффициент блочности	2.5355	2.9103	2.6526	1.35		1.42

других углей он выражен более ярко, как и $L = 10$ мкм. Так как эти масштабы в указанном диапазоне «оттягивают» на себя почти весь вес (рис. 5), то при дальнейшем

анализе более мелкие масштабы (3, 10 мкм и т.д.) отсекались, диапазон изучения сужался, и проводилась перенормировка вкладов в кумулятивную сумму. Эти дан-

Таблица 2

Шахта Зиминка	Размер образца, мм					
	1 цикл			2 цикл		
Пласт 1У внутренний, марка К	a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2
	35.90	25.40	16.60	14.00	9.30	7.10
	34.10	20.50	17.50	20.20	14.90	8.80
	31.40	23.00	18.40	19.50	11.80	9.80
	35.70	29.10	22.30	13.50	8.00	6.70
Среднее	34.28	24.50	18.70	20.10	9.40	4.60
	1.40		1.31	13.20	11.50	6.50
				12.20	11.50	5.00
				16.00	11.20	7.00
				13.80	9.60	6.70
				15.10	12.4	6.90
				12.50	10.00	4.20
				11.90	10.70	5.50
Среднее				15.17	10.86	6.57
Коэффициент блочности	2.26	2.26	2.85	1.40		1.65

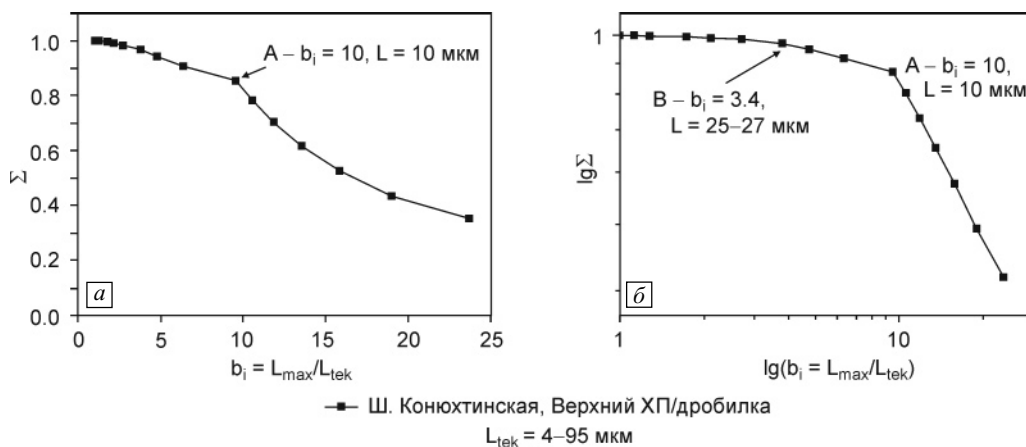


Рис. 6. Исследование масштабов разрушения угля в диапазоне 4÷95 мкм: *a* — кумулятивная сумма вкладов весовых долей фрагментов разрушения; *b* — весовая доля вкладов в двойных логарифмических координатах

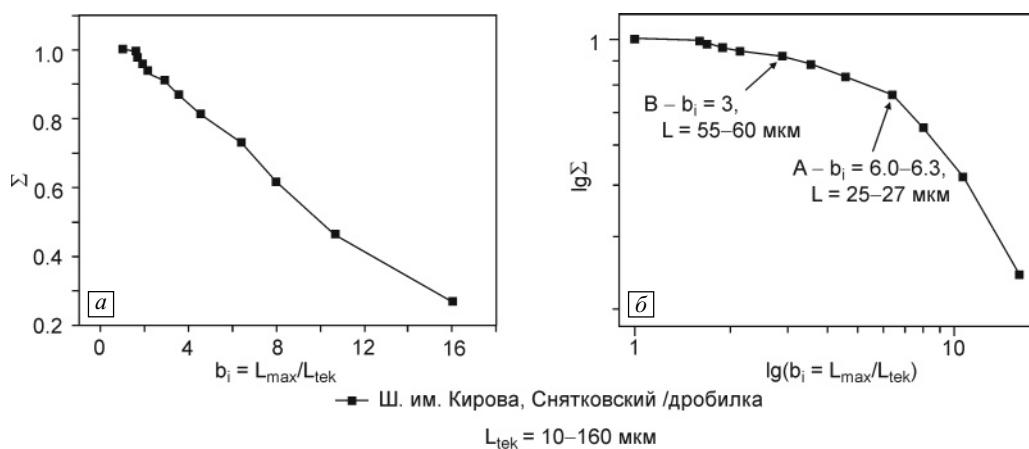


Рис. 7. Исследование масштабов разрушения угля в диапазоне 10÷160 мкм: *a* — кумулятивная сумма вкладов весовых долей фрагментов разрушения; *b* — весовая доля вкладов в двойных логарифмических координатах

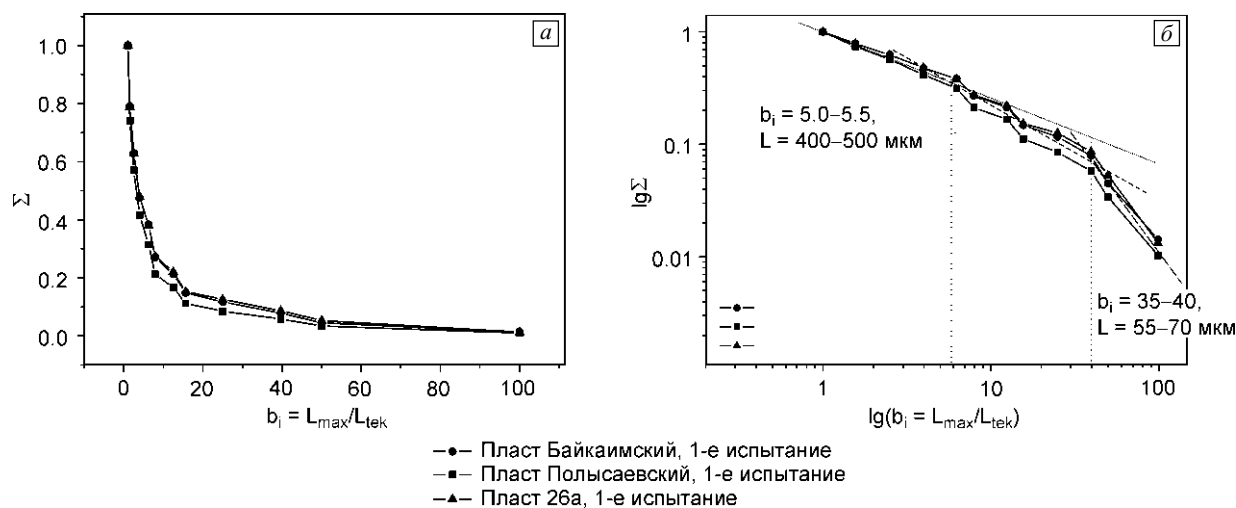


Рис. 8. Исследование масштабов разрушения угля в диапазоне 25÷2500 мкм: *a* — кумулятивная сумма вкладов весовых долей фрагментов разрушения; *b* — весовая доля вкладов в двойных логарифмических координатах

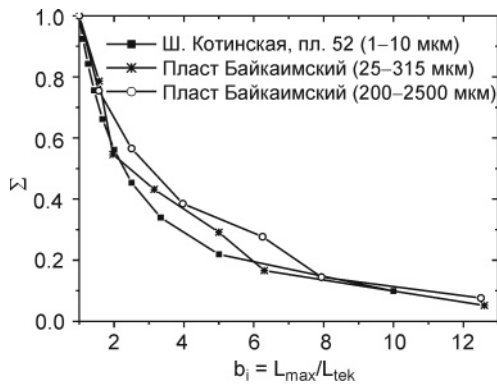


Рис. 9. Самоподобие разрушения угля на разных масштабах

ные приведены на рис. 6 и 7, что позволило достаточно уверенно выявить следующие в ряду иерархии масштабы: $L = 25 \div 30$ мкм, $L = 55 \div 70$ мкм.

Данные в диапазоне $25 \div 2500$ мкм (рис. 8) уверенно выявляют два масштаба (изломы кривых для трех разных углей на рис. 8 в двойных логарифмических координатах). Это масштабы $L = 55 \div 70$ мкм и $L = 400 \div 500$ мкм.

Также при переходе от масштабов $1 \div 160$ мкм к масштабам $25 \div 2500$ мкм выявляется излом в области $L = 160 \div 180$ мкм.

Вырисовывается следующая картина, полученная по двум методам фрактального анализа. Ярko выражены масштабы: $L_{-2} = 3 \div 4$ мкм, $L_0 = 10$ мкм; $L_2 = 25 \div 30$ мкм, $L_4 = 55 \div 70$ мкм, $L_6 = 160 \div 180$ мкм, $L_8 = 400 \div 500$ мкм. Эти масштабы, вероятнее всего, отражают отношения максимальных размеров блоков в ряду иерархии.

Менее ярко (несколько ниже весовые доли) выражены масштабы $L_{-1} = 6 \div 7$ мкм, $L_1 = 15 \div 17$ мкм, $L_3 = 35 \div 45$ мкм, $L_5 = 100 \div 120$ мкм, $L_7 = 280 \div 300$ мкм.

Следует заметить, что для ряда углей нечетный ряд масштабов проявляется довольно ярко.

На рис. 9 приведены кривые распределения по весовым долям фрагментов разрушения угля в безразмерных координатах для трех разных масштабов: $1 \div 10$ мкм, $25 \div 315$ мкм, $200 \div 2500$ мкм. Все три кривые практически совпадают, что еще раз подтверждает самоподобие процесса разрушения угля и корректность определенных масштабов.

Возникает вопрос: что за параметр лежит в основе закона трансляции масштабов в ряду иерархии? И может ли в основе соотношений обнаруженных кластеров лежать некий закон трансляции параметров «кристаллической решетки»?

В Государственном Макеевском научно-исследовательском институте по безопасности работ в горной промышленности (г. Донецк, Украина) [49] изучалась форма частиц угля. Как показали электронно-микроскопические исследования, она сохраняется до самых мельчайших размеров [49]. Установлено, что отношение раз-

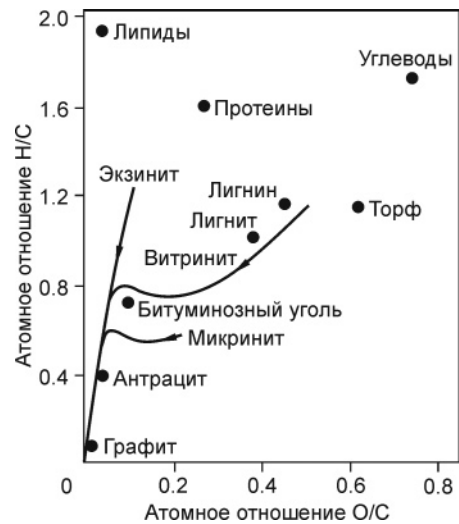


Рис. 10. Изменение химического состава и пути углефикации различных типов углей [49]

меров a/b для частиц антрацита колеблется пределах $1.613 \div 1.690$ и в среднем равно 1.65 ; $a/c = 2.65$. Эти же параметры в широком диапазоне масштабов были получены и в настоящем исследовании.

С возрастанием степени углефикации углей в процессе их метаморфизма идет потеря воды, кислорода (в форме CO_2) и водорода (в форме метана). В угле увеличивается содержание углерода и соотношения его с водородом и кислородом. В качестве показателей углефикации часто используют атомные соотношения H/C и O/C (рис. 10). Как видно из этого рисунка, антрациты наиболее близки по содержанию углерода к графиту. Каменные угли с высокой степенью углефикации содержат от 90 до 98 % углерода (у антрацитов).

Так как угли являются органическими соединениями и имеют сложное молекулярное строение, сравнение их микроструктурных молекулярных параметров со строением графита является большой натяжкой. Но, учитывая высокое содержание углерода (до 98 % у каменных углей), мы рискнули провести такое сравнение, тем более что полученные результаты едва ли могут носить случайный характер.

Взяв за основу реперную точку $L = 10$ мкм $= 10^5 \text{ \AA}$, а в качестве параметра трансляции размеров блоков — число $\Phi^2 = 2.618$, являющееся квадратом золотого числа ($\Phi = 1.618$ — золотая пропорция), а само число Φ — как «идеальное» отношение размеров сторон блока, получим следующие минимальные числа x_i в ряду иерархии:

$$x_1 = \frac{10 \cdot 10^4 \text{ \AA}}{(\Phi^2)^{10}} = 6.6115 \text{ \AA},$$

$$x_2 = \frac{x_1}{\Phi^2} = \frac{6.6115}{2.618} = 2.525 \text{ \AA}.$$

Таблица 3

Степени числа $\Phi \cdot 10$ мкм	Найденные масштабы L
$10 \cdot \Phi^0 = 10.00$	10 \oplus
$10 \cdot \Phi^1 = 16.18$	15÷17 —
$10 \cdot \Phi^2 = 26.18$	25÷27 \oplus
$10 \cdot \Phi^3 = 42.359$	35÷45 —
$10 \cdot \Phi^4 = 68.539$	55÷70 \oplus
$10 \cdot \Phi^5 = 110.896$	100÷120 —
$10 \cdot \Phi^6 = 179.435$	160÷180 \oplus
$10 \cdot \Phi^7 = 290.320$	280÷300 —
$10 \cdot \Phi^8 = 469.76$	400÷500 \oplus

Графит со слоистой гексагональной кристаллической решеткой и периодами $a = 2.461 \text{ \AA}$ и $C = 6.708 \text{ \AA}$ имеет очень близкие к полученным величинам значения параметров решетки, отношение которых равно $6.708/2.461 = 2.72$, что близко к значению Φ^2 . Заметим

также, что гексагональная модификация алмаза (как совершенного кристалла по представлениям древних) имеет периоды $a = 2.52 \text{ \AA}$ и $C = 4.12 \text{ \AA}$. Их отношения равны: $c/a = 1.6349$, $a/c = 0.6118$, что очень близко к числам золотого сечения.

Такие совпадения вряд ли могут быть случайными.

Выпишем следующую таблицу (табл. 3), в которой две колонки: первая — степени числа Φ , умноженные на 10 мкм, вторая — найденные нами масштабы (т.е. отсчет также будем вести от реперной точки $L = 10$ мкм). Знаком \oplus помечены масштабы, для которых изломы на кривых выявляются наиболее ярко для всех углей.

На рис. 11 приведены характерная картина поверхности излома угля (рис. 11, *a*) и система трещин вблизи тектонического разлома (рис. 11, *б*). На обоих рисунках четко прослеживается клиновидная форма блоков. Для этих физических объектов закон чередования устроен более деликатно и тонко. Надо анализировать не прямоугольники, а фигуры, близкие к ромбам, как на

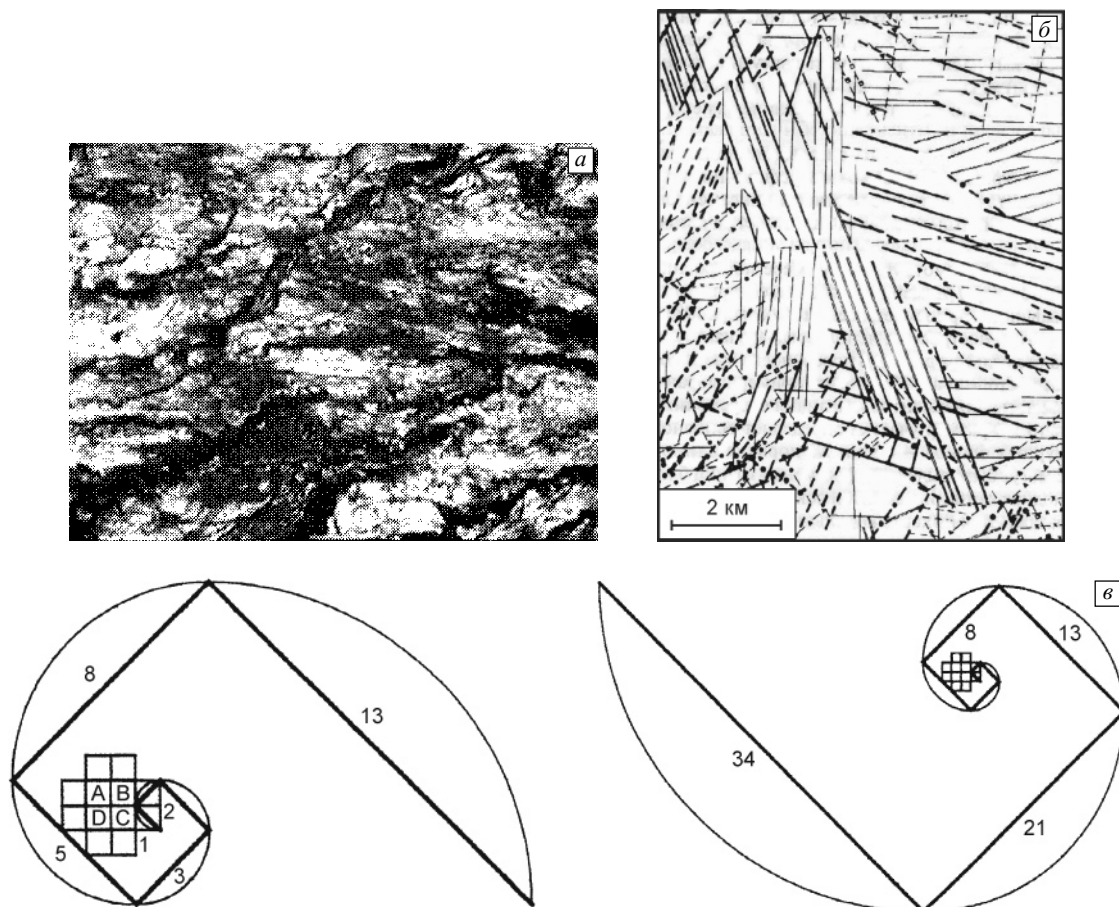


Рис. 11. «Генетический код» организации блочных структур угля: *a* — оптическое изображение излома угля; *б* — схема линейментов участка западного разрыва, связанного с землетрясением 28 октября 1983 г. в Центральном Айдахо (США) (разными линиями показаны линейменты различных систем), по Г.Г. Кочаряну и А.А Спиваку [50]; *в* — спираль золотого сечения и спираль Фибоначчи, определяющие закон пространственной организации блочных структур углей

рис. 11. При приготовлении образца для исследования из угля всегда выкалывались клиновидные фрагменты, сохраняя форму естественного блока.

Рисунок 11, в иллюстрирует алгоритм восхождения к большим масштабам от элементарной ячейки по закону золотого сечения (показана спираль золотого сечения и последовательность ряда чисел Фибоначчи). Противоположные стороны в спирали Фибоначчи дают соотношения размеров сторон последовательных блоков в ряду иерархии, которые соотносятся как $\Phi^2 = 2.618\dots$, а отношения размеров прилегающих сторон каждого из блоков равны $\Phi = 1.618\dots$

Эти спирали определяют «генетический код» организации блочных структур изученных углей.

Заметим также, что и другие исследователи анализируют самоподобные процессы и законы изменения параметров в точках неустойчивости системы при переходе к новым структурам, используя свойства золотой пропорции и ее производных [5, 7, 9–12]. Так В.С. Иванова отмечает «контролирующее влияние закона золотой пропорции как кода устойчивости структур живой и косной природы» [5].

5. Заключительные замечания

В заключение работы сделаем несколько замечаний общего характера, отражающих, в том числе, наметившиеся направления дальнейших исследований.

Нелинейные уравнения механики сплошных сред с релаксационными определяющими уравнениями (т.е. эволюционными уравнениями) для описания скоростей пластической деформации, накопления повреждений и разрушения, с положительными и отрицательными обратными связями между параметрами являются самодостаточными для выполнения иерархического моделирования. В общем случае это нелинейные уравнения смешанного типа, которые содержат как гиперболические, так и параболические решения. Их потенциальные возможности описывать эволюцию нагружаемых прочных сред по сценарию синергетики колоссальны и практически не изучены.

Синергетика или нелинейная динамика на настоящем этапе своего развития представляет собой не набор ряда не связанных между собой правил и свойств, а определяет четкий сценарий эволюции любой нелинейной динамической системы (реальной физической или систем нелинейных уравнений в частных производных) к самопроизвольному обретению системой пространственно-временных неоднородностей. Такая самоорганизация системы возможна, если система обладает определенными универсальными свойствами. К этим свойствам относится наличие диссипации, которая приводит к нелинейным связям. Следствием нелинейности и диссипации является развитие неустойчивостей разных масштабов, возникающих в результате конкуренции ста-

билизирующих и возмущающих эффектов. Эти неустойчивости приводят к бифуркациям и динамическому хаосу. В результате, в системе возникают крупномасштабные корреляции, т.е. происходит самоорганизация, а сама система обретает неоднородное распределение параметров (тепла, деформаций, повреждений, концентраций, денег и т.п.). Этот процесс обретения системой неоднородностей самоподобен и распространяется на все большие масштабы, следуя универсальному «генетическому коду» эволюции (например, нагружаемых материалов).

Принципиально важным для проведения иерархического моделирования является не просто получение определенного конкретного решения (аналитического или численного), а анализ характера поведения всей совокупности решений нелинейных уравнений в частных производных, что позволит установить динамику поведения и возможные пути эволюции моделируемой системы. На особую важность этой проблемы обратил внимание еще Р. Фейнман [28]. Он связал ее решение с «эрой будущего пробуждения человеческого разума», отмечая, что все фундаментальные физические теории (электродинамика, теории упругости и пластичности, гидродинамика) сформулированы на языке этих уравнений. Несмотря на то, что мы фактически располагаем только ограниченным набором частных численных решений (с большой долей скепсиса по отношению к тому, как реализованные разностные аналоги относятся к исходным дифференциальным уравнениям), есть надежда на то, что понимание общих универсальных свойств этих нелинейных уравнений будет достигнуто в контексте динамической теории систем и синергетики. Это обстоятельство позволяет с существенно большим оптимизмом относиться к решению указанной проблемы, чем во времена Р. Фейнмана.

Установление «генетического кода» организации пространственно-временных иерархий, возникающих в нагружаемых материалах и средах как нелинейных системах является задачей не только обобщения соответствующих экспериментальных данных, но и предметом теоретического анализа, выполненного как на основе изучения общих свойств решений систем нелинейных уравнений смешанного типа механики сплошных сред, так и на основе анализа полученных конкретных численных решений.

Синтез экспериментальных знаний о самоподобии деформационных процессов и процессов разрушения материалов и сред на разных масштабах и теоретического анализа различных сценариев эволюции нагружаемых материалов и сред позволяет уже сейчас с полной уверенностью говорить о возможности и необходимости разработки информационных технологий создания (а также модификации, упрочнения, разрушения и т.д.) материалов.

В завершение этого краткого обзора хочется сказать, что вклад академика В.Е. Панина в становление и развитие новых взглядов на природу твердых тел, их деформацию и разрушение, а также в решение обозначенных выше проблем трудно переоценить. Во многом благодаря личным усилиям В.Е. Панина физическая мезомеханика материалов как мультидисциплинарная научная методология развивается в теорию деформируемых материалов и сред как нелинейных динамических систем.

Благодарности

Автор выражает благодарность А.А. Трубицину и Н.В. Трубициной за предоставление ряда данных по силовому и седиментационному анализу пылевых частиц, В.А. Тунде за помощь в работе. Настоящая работа частично поддержана грантом РФФИ № 05-05-64659а.

Литература

1. Панин В.Е., Гриняев Ю.В. Физическая мезомеханика — новая парадигма на стыке физики и механики // Физ. мезомех. — 2003. — Т. 6. — № 4. — С. 9–36.
2. Panin V.E., Makarov P.V., Psakhie S.G. et al. Physical mesomechanics of heterogeneous media and computer-aided of materials. — Cambridge: Cambridge International Science Publishing, 1998. — 339 p.
3. Panin V.E. Synergetic principles of physical mesomechanics // Theor. Appl. Fracture Mech. — 2001. — V. 37. — Nos. 1–3. — P. 261–298.
4. Панин В.Е. Физические основы мезомеханики среды со структурой // Изв. вузов. Физика. — 1992. — Т. 35. — № 4. — С. 5–18.
5. Иванова В.С. Закономерности упорядоченной самоорганизации // Прикладная синергетика, фракталы и компьютерное моделирование структур. — Томск: Изд-во ТГУ, 2002. — С. 222–237.
6. Иванова В.С. Синергетика. Прочность и разрушение металлических материалов. — М.: Наука, 1992. — 157 с.
7. Оксогоев А.А. Режимы с обострением в самоорганизующихся процессах высокоинтенсивной обработки металлических материалов // Прикладная синергетика, фракталы и компьютерное моделирование структур. — Томск: Изд-во ТГУ, 2002. — С. 106–140.
8. Бовенко В.Н. Теория акустической эмиссии в деформированных кристаллах // Прогноз землетрясений. — 1983. — № 8. — С. 70–91.
9. Оксогоев А.А., Иванова В.С. Физические предпосылки к развитию технологий получения материалов с заданными свойствами // Перспективные материалы. — 1999. — № 5. — С. 5–16.
10. Оксогоев А.А., Бунин И.Ж., Колмаков А.Г., Встовский Г.В. Мультифрактальный анализ изменений зеренной структуры алюминиевого сплава при ударном воздействии скоростной частицы // Физика и химия обработки материалов. — 1999. — № 4. — С. 63–71.
11. Иванова В.С., Закирничная М.М., Кузеев И.Р. Синергетика и фракталы. Универсальности механического поведения материалов. — Уфа: Изд-во УГНТУ, 1998. — 363 с.
12. Иванова В.С., Баланкин А.С., Бунин И.Ж., Оксогоев А.А. Синергетика и фракталы в материаловедении. — М.: Наука, 1994. — 385 с.
13. Prigogine I., Nicolis G. On symmetry breaking instabilities in dissipative systems // J. Chem. Phys. — 1967. — V. 46. — P. 3542–3550.
14. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. — М.: УРСС, 2003. — 280 с.
15. Пригожин И., Николис Г. Познание сложного. Введение. — М.: УРСС, 2003. — 342 с.
16. Хакен Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. — М.: Мир, 1985. — 411 с.
17. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой. — М.: УРСС, 2003. — 431 с.
18. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. — М.: УРСС, 2002. — 356 с.
19. Хакен Г. Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам. — М.: Мир, 1991. — 240 с.
20. Пригожин И. Человек перед лицом неопределенности. — Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. — 304 с.
21. Пригожин И., Кондепуди Д. Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. — М.: Мир, 2002. — 461 с.
22. Курдюмов С.П., Князева Е.Н. У истоков синергетического видения мира: режимы с обострением // Самоорганизация и наука: опыт философского осмысления. — М.: Арга, 1994. — С. 162–186.
23. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. — М.: Наука, 1992. — 544 с.
24. Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика — теория самоорганизации. Идеи, методы, перспективы. — М.: Знание, 1983. — 64 с.
25. Катица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. — М.: УРСС, 2002. — 342 с.
26. Пригожин И., Стенгерс И. Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени. — М.: УРСС, 2003. — 240 с.
27. Пайтген Х.О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. — М.: Мир, 1993. — 176 с.
28. Фейнмановские лекции по физике. — М.: Мир, 1993.
29. Вейль Г. Симметрия. — М.: УРСС, 2003. — 192 с.
30. Mandelbrot B.B. The fractal geometry of nature. — San Francisco: W.H. Freeman, 1982. — 460 p.
31. Наймарк О.Б. Коллективные свойства ансамблей дефектов и некоторые нелинейные проблемы пластичности и разрушения // Физ. мезомех. — 2003. — Т. 6. — № 4. — С. 45–72.
32. Олемской А.И., Хоменко А.В. Синергетика пластической деформации // Успехи физики металлов. — 2001. — Т. 2. — № 3. — С. 189–264.
33. Садовский М.А. Естественная кусковатость горной породы // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 247. — № 4. — С. 829–831.
34. Макаров П.В. Об иерархической природе деформации и разрушения твердых тел и сред // Физ. мезомех. — 2004. — Т. 7. — № 4. — С. 25–34.
35. Макаров П.В. Моделирование процессов деформации и разрушения на мезоуровне // Изв. АН. Механика твердого тела. — 1999. — № 5. — С. 109–131.
36. Макаров П.В. Моделирование упругопластической деформации и разрушения неоднородных сред на мезоуровне // Физ. мезомех. — 2003. — Т. 6. — № 4. — С. 111–124.
37. Макаров П.В., Романова В.А., Балохонов Р.Р. Динамика потери сдвиговой устойчивости материалов в условиях ударно-волнового нагружения // Хим. физика. — 2001. — Т. 20. — № 8. — С. 94–99.
38. Makarov P.V. Localized deformation and fracture of polycrystals at mesolevel // Theor. Appl. Fracture Mech. — 2000. — V. 33. — P. 23–30.
39. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977. — 622 с.
40. Стефанов Ю.П. Локализация деформации и разрушение в геоматериалах. Численное моделирование // Физ. мезомех. — 2002. — Т. 5. — № 5. — С. 107–118.
41. Макаров П.В., Романова В.А. О новом критерии пластического течения при моделировании деформационных процессов на мезоуровне // Математическое моделирование. — 2000. — Т. 12. — № 11. — С. 91–101.
42. Makarov P.V., Romanova V.A. Mesoscale plastic flow generation and development for polycrystals // Theor. Appl. Fracture Mech. — 2000. — V. 33. — P. 1–7.
43. Макаров П.В., Романова В.А., Балохонов Р.Р. Моделирование неоднородной пластической деформации с учетом зарождения локализованных пластических сдвигов на границах раздела // Физ. мезомех. — 2001. — Т. 4. — № 5. — С. 29–39.
44. Balokhonov R.R., Romanova V.A., Schmauder S., Makarov P.V. Simulation of meso-macro dynamic behavior using steel as an example // Computational Materials Science. — 2003. — V. 28. — Nos. 3–4. — P. 505–511.
45. Баренблатт Г.И. Модель нелокального накопления повреждений // Физ. мезомех. — 2003. — Т. 6. — № 4. — С. 85–92.

46. Макаров П.В., Смолин И.Ю., Черепанов О.И., Трубицына Н.В., Ворошилов Я.С. Упруго-вязкопластическая деформация и разрушение угля на мезоскопическом уровне // Физ. мезомех. – 2002. – Т. 5. – № 3. – С. 63–87.
47. Макаров П.В., Трубицын А.А., Трубицына Н.В. и др. Экспериментальное и теоретическое исследование разрушения углей и расчет выхода пылевых частиц. I. Исследование иерархии масштабов разрушения // Физ. мезомех. – 2004. – Т. 7. – Спец. вып. – Ч. 2. – С. 245–248.
48. Кузнецов П.В., Макаров П.В., Петракова И.В. и др. Определение коэффициента формы блоков в иерархии масштабов разрушения углей в мезоскопическом диапазоне 1–1000 мкм // Физ. мезомех. – 2004. – Т. 7. – Спец. вып. – Ч. 2. – С. 273–276.
49. Петрухин П.М., Гродель Г.С., Жилев Н.И. и др. Борьба с угольной и природной пылью в шахтах. – М.: Недра, 1981. – 271 с.
50. Кочарян Г.Г., Спивак А.А. Динамика деформирования блочных массивов горных пород. – М.: ИКЦ «Академкнига», 2003. – 423 с.