Из книги В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина, «Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка» — М.: Физматлит, 2003.

12. Квазилинейные уравнения вида $f(x,y,w)\frac{\partial w}{\partial x}+g(x,y,w)\frac{\partial w}{\partial y}=h(x,y,w)$

12.1. Предварительные замечания

12.1.1. Методы решения

12.1.1-1. Характеристическая система. Общее решение.

Общее квазилинейное уравнение с частными производными первого порядка с двумя независимыми переменными имеет вид

$$f(x,y,w)\frac{\partial w}{\partial x}+g(x,y,w)\frac{\partial w}{\partial y}=h(x,y,w) \tag{1}$$

и часто встречается в различных приложениях (в механике сплошных сред, газовой динамике, гидродинамике, теории волн, акустике, теории фильтрации, теории массо- и теплопереноса, химической технологии и других областях). Частный случай $f'_w \equiv g'_w \equiv 0$ рассматривается в разд. 11.1.

Если известны два независимых интеграла

$$u_1(x,y,w)=C_1, \qquad u_2(x,y,w)=C_2 \tag{2}$$

характеристической системы

$$\frac{dx}{f(x,y,w)}=\frac{dy}{g(x,y,w)}=\frac{dw}{h(x,y,w)}, \tag{3}$$

то общее решение уравнения (1) дается формулой

$$\Phi(u_1,u_2)=0, \tag{4}$$

где Φ — произвольная функция двух аргументов. Разрешив (4) относительно u_1 или u_2, решение будем часто записывать в виде:

$$u_k=\overline{\Phi}(u_{3-k}),$$

где $k=1,\,2$ и $\overline{\Phi}$ — произвольная функция одного аргумента.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial x}+aw\frac{\partial w}{\partial y}=1.$$

Два независимых интеграла характеристической системы

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{aw}=\frac{dw}{1}$$

имеют вид

$$x-w=C_1, \quad 2y-aw^2=C_2.$$

Поэтому общее решение исходного уравнения дается формулой

$$\Phi(x-w,\,2y-aw^2)=0.$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial x}+yw^2\frac{\partial w}{\partial y}+aw=0.$$

Характеристическая система

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{yw^2}=-\frac{dw}{aw}$$

имеет независимые интегралы

$$we^{ax}=C_1, \quad 2a\ln|y|+w^2=C_2.$$

Отсюда получим общее решение исходного уравнения:

$$\Phi(we^{ax},\,2a\ln|y|+w^2)=0.$$

12.1.1-2. Сведение к линейному уравнению.

Пусть $\zeta = \zeta(x,y,w)$ — интеграл вспомогательного линейного однородного уравнения с тремя независимыми переменными

$$f(x,y,w)\frac{\partial \zeta}{\partial x} + g(x,y,w)\frac{\partial \zeta}{\partial y} + h(x,y,w)\frac{\partial \zeta}{\partial w} = 0. \tag{5}$$

Тогда интеграл $w(x,y)$ исходного неоднородного уравнения (1) можно получить путем разрешения алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\zeta(x,y,w) = 0 \qquad (\zeta'_w \neq 0)$$

относительно w.

О решении уравнений вида (5) см. разд. 6.1.

12.1.1-3. Использование частных решений.

Пусть двухпараметрическое частное решение уравнения (1) дается формулой

$$\Xi(x,y,w,C_1,C_2) = 0, \tag{6}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Тогда решение уравнения (1), имеющее функциональный произвол, можно представить в параметрическом виде с помощью равенства (6) и двух уравнений

$$C_2 = F(C_1), \tag{7}$$

$$\frac{\partial \Xi}{\partial C_1} + \frac{\partial \Xi}{\partial C_2}\frac{dF(C_1)}{dC_1} = 0, \tag{8}$$

где $F = F(C)$ — произвольная функция (см. также разд. 14.1).

⊙ *Литература к разделу* 12.1.1: Р. Курант (1964), Э. Камке (1966), И. Г. Петровский (1970), E. Zauderer (1983), D. Zwillinger (1998).

12.1.2. Задача Коши. Теорема существования и единственности

12.1.2-1. Рассмотрим две формулировки задачи Коши.

1°. *Обобщенная задача Коши.* Требуется найти решение $w = w(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$x = h_1(\xi), \quad y = h_2(\xi), \quad w = h_3(\xi), \tag{9}$$

где ξ — параметр ($\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta$), а $h_k(\xi)$ — заданные функции.

Геометрическая интерпретация: требуется найти интегральную поверхность уравнения (1), проходящую через линию (9), заданную параметрически.

2°. *Классическая задача Коши.* Требуется найти решение $w = w(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$w = \varphi(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \tag{10}$$

где $\varphi(y)$ — заданная функция.

Классическую задачу Коши удобно представить в виде обобщенной задачи Коши, записав начальное условие (10) в параметрическом виде:

$$x = 0, \quad y = \xi, \quad w = \varphi(\xi). \tag{11}$$

12.1.2-2. Процедура решения задачи Коши.

Процедура решения задачи Коши (1), (9) состоит из нескольких этапов. Сначала определяются два независимых интеграла (2) характеристической системы (3). Затем для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 в интегралы (2) подставляются начальные данные (9):

$$u_1(h_1(\xi),h_2(\xi),h_3(\xi)) = C_1, \qquad u_2(h_1(\xi),h_2(\xi),h_3(\xi)) = C_2. \tag{12}$$

Исключая из (2) и (12) постоянные C_1 и C_2, имеем

$$\begin{aligned} u_1(x,y,w) &= u_1(h_1(\xi),h_2(\xi),h_3(\xi)),\\ u_2(x,y,w) &= u_2(h_1(\xi),h_2(\xi),h_3(\xi)). \end{aligned} \tag{13}$$

Формулы (13) представляют собой параметрическую форму решения задачи Коши (1), (9). В некоторых случаях, исключая параметр ξ, удается получить решение в явном виде.

12.1.2-3. Теорема существования и единственности.

Пусть $\mathfrak{G}_0$ — область плоскости x, y, а $\mathfrak{G}$ — цилиндрическая область пространства x, y, w, полученная из $\mathfrak{G}_0$ добавлением координаты w, причем $|w| < A_1$. Пусть коэффициенты уравнения (1) f, g, h — непрерывно дифференцируемые функции от x, y, w в $\mathfrak{G}$, а $x = h_1(\xi)$, $y = h_2(\xi)$, $w = h_3(\xi)$ — непрерывно дифференцируемые функции ξ для $|\xi| < A_2$, определяющие кривую C в $\mathfrak{G}$ с простой проекцией C_0 в $\mathfrak{G}_0$, и такие, что $(h_1')^2 + (h_2')^2 \neq 0$ (штрих обозначает производную по ξ). Считаем, что $fh_2' - gh_1' \neq 0$ на C. Тогда существует подобласть $\overline{\mathfrak{G}}_0$ области $\mathfrak{G}_0$, содержащая C_0, в которой определена непрерывно дифференцируемая функция $w = w(x, y)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (1) в $\overline{\mathfrak{G}}_0$ и начальному условию (9) на C_0. Эта функция определяется единственным образом.

Важно отметить, что эта теорема носит локальный характер — существование решения гарантируется только в некоторой, «достаточно узкой», заранее не фиксированной, окрестности линии C (см. замечание в конце примера 3).

Пример 3. Рассмотрим задачу Коши для уравнения Хопфа

$$\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{14}$$

с начальным условием

$$w = \varphi(y) \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{15}$$

Сначала представим начальное условие (15) в параметрическом виде (9):

$$x = 0, \quad y = \xi, \quad w = \varphi(\xi). \tag{16}$$

Решая характеристическую систему

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{w} = \frac{dw}{0}, \tag{17}$$

находим два независимых интеграла:

$$w = C_1, \quad y - wx = C_2. \tag{18}$$

Используя начальные условия (16), определяем значения постоянных интегрирования $C_1 = \varphi(\xi)$, $C_2 = \xi$. Подставляя эти выражения в (18), получим решение задачи Коши (14), (15) в параметрическом виде

$$w = \varphi(\xi), \tag{19}$$
$$y = \xi + \varphi(\xi)x. \tag{20}$$

Характеристики (20) представляют собой прямые линии в плоскости x, y с углом наклона $\varphi(\xi)$, пересекающие ось y в точках ξ. На каждой характеристике функция w имеет одинаковое значение, равное $\varphi(\xi)$ (на разных характеристиках значения w в общем случае разные).

При $\varphi'(\xi) > 0$ различные характеристики не пересекаются, и формулы (19), (20) описывают однозначное решение. В качестве примера рассмотрим начальный профиль

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} w_1 & \text{при } \xi \leqslant 0, \\ \dfrac{w_2\xi^2 + \varepsilon w_1}{\xi^2 + \varepsilon} & \text{при } \xi > 0, \end{cases} \tag{21}$$

где $w_1 < w_2$ и $\varepsilon > 0$. Из формул (19), (20) получим однозначное гладкое решение во всей полуплоскости $x > 0$. В области, которую заполняют характеристики $y = \xi + w_1 x$ (при $\xi \leqslant 0$), решение постоянно:

$$w = w_1 \quad \text{при} \quad y/x \leqslant w_1. \tag{22}$$

При $\xi > 0$ решение можно определить по формулам (19)–(21).

Посмотрим, во что перейдет указанное решение в предельном случае $\varepsilon \to 0$, который соответствует кусочно-непрерывному начальному профилю

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} w_1 & \text{при } \xi \leqslant 0, \\ w_2 & \text{при } \xi > 0, \end{cases} \quad \text{где} \quad w_1 < w_2. \tag{23}$$

Далее считаем, что $\xi > 0$ [при $\xi \leqslant 0$ справедлива формула (22)]. При $\xi = \text{const} \neq 0$ и $\varepsilon \to 0$ из (21) имеем $\varphi(\xi) = w_2$. Поэтому в области, которую заполняют характеристики $y = \xi + w_2 x$ (при $\xi > 0$), решение постоянно:

$$w = w_2 \quad \text{при} \quad y/x \geqslant w_2 \qquad (\text{при } \varepsilon \to 0). \tag{24}$$

При $\xi \to 0$ функция φ может принимать любое значение между w_1 и w_2 в зависимости от соотношений между двумя малыми параметрами ε и ξ, при этом первым слагаемым в правой части формулы (20) можно пренебречь. В результате из (19), (20) находим соответствующую асимптотику решения в явном виде

$$w = y/x \quad \text{при} \quad w_1 \leqslant y/x \leqslant w_2 \qquad (\text{при } \varepsilon \to 0). \tag{25}$$

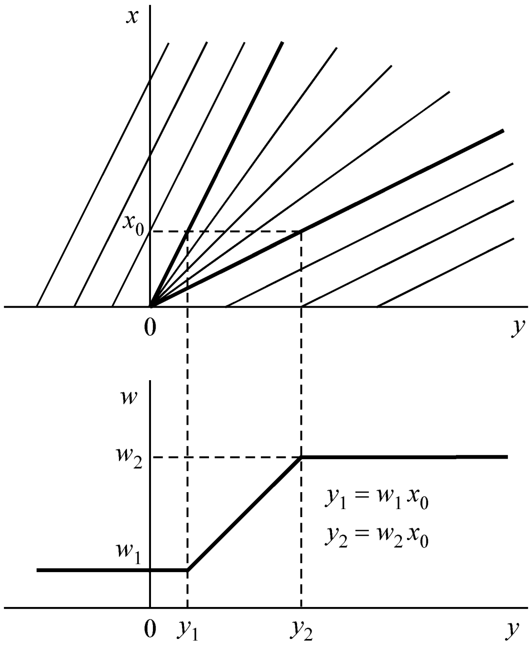

Рис. 1

Объединяя формулы (22), (24) и (25), получим решение задачи Коши для уравнения (14) с начальным условием (23):

$$w(x,y) = \begin{cases} w_1 & \text{при } y \leqslant w_1 x, \\ y/x & \text{при } w_1 x \leqslant y \leqslant w_2 x, \\ w_2 & \text{при } y \geqslant w_2 x. \end{cases} \tag{26}$$

Характеристики уравнения (14) при условии (23) и зависимость функции w от y показаны на рис. 1 (где $w_1 = \frac{1}{2}$, $w_2 = 2$, $x_0 = 1$). В приложениях такое решение называют центрированной волной разрежения (см. также разд. 12.1.3).

Замечание. При наличии участка с $\varphi'(\xi) < 0$ характеристики будут пересекаться в некоторой области. В точке пересечения двух характеристик, задаваемых различными значениями параметра ξ_1 и ξ_2, функция w согласно первой формуле (21) будет иметь два разных значения, равных $\varphi(\xi_1)$ и $\varphi(\xi_2)$. Поэтому в области пересечения характеристик решение будем многозначным. Этот пример демонстрирует локальность теоремы существования и единственности. Более подробно эти вопросы рассмотрены в разд. 12.1.3, 12.1.4.

⦿ *Литература к разделу* 12.1.2: Р. Курант (1964), Э. Камке (1966), И. Г. Петровский (1970), Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко (1978), S. J. Farlow (1982).

12.1.3. Качественные особенности и разрывные решения квазилинейных уравнений

12.1.3-1. Модельное уравнение газовой динамики.

Рассмотрим квазилинейное уравнение специального вида*

$$\frac{\partial w}{\partial x} + f(w)\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \tag{27}$$

которое представляет собой закон сохранения количества вещества (или какой-либо другой величины) и часто встречается в механике сплошных сред, газовой динамике, гидродинамике, теории волн, акустике, теории фильтрации и химической технологии. Это уравнение используется для моделирования многих процессов диффузионного типа: адсорбция и хромотография,

* Уравнения общего вида рассматриваются далее в разд. 12.1.4.

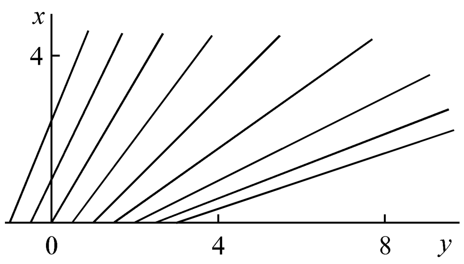

Рис. 2

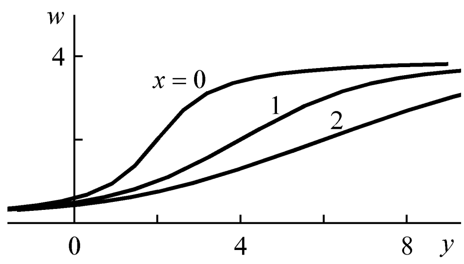

Рис. 3

двухфазные течения в пористой среде, паводковые волны в реках, движение потоков транспорта на улицах, течения жидких пленок по наклонной плоскости и др. Независимые переменные x и y в уравнении (1) обычно играют роль времени и пространственной координаты, w играет роль плотности переносимой величины, а $f(w)$ — ее скорости.

⦿ *Литература*: И. М. Гельфанд (1959), F. Helfferich, G. Klein (1970), A. Jeffery (1976), Дж. Уизем (1977), Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко (1978), Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик (1984), H. Rhee, R. Aris, N. R. Amundson (1986), P. Bedrikovetsky (1993), D. Logan (1997), А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов (2001).

12.1.3-2. Решение задачи Коши.

Решение $w = w(x, y)$ задачи Коши для уравнения (27) с начальным условием

$$w = \varphi(y) \quad \text{при} \quad x = 0 \qquad (-\infty < y < \infty) \tag{28}$$

можно представить в параметрическом виде

$$y = \xi + \mathcal{F}(\xi)x, \quad w = \varphi(\xi), \tag{29}$$

где $\mathcal{F}(\xi) = f\bigl(\varphi(\xi)\bigr)$.

Рассмотрим характеристические прямые $y = \xi + \mathcal{F}(\xi)x$ в плоскости y, x при различных значениях параметра ξ. Наклон этих прямых определяется коэффициентом $\mathcal{F}(\xi)$. На каждой такой прямой искомая величина постоянна и равна $w = \varphi(\xi)$. В частном случае $f = a = \text{const}$ рассматриваемое уравнение является линейным, при этом решение (29) записывается в явном виде $w = \varphi(y - ax)$ и описывает бегущую волну с неизменным профилем. Зависимость $f = f(w)$ приводит к типичному нелинейному эффекту: искажению профиля распространяющейся волны.

Далее будем рассматривать область $x \geqslant 0$ и считаем*, что $f > 0$ при $w > 0$ и $f'_w > 0$. В этом случае большие значения w распространяются быстрее, чем малые. Если начальный профиль при всех y удовлетворяет условию $\varphi'(y) > 0$, то характеристики на плоскости y, x, выходящие из точек оси y в область $x > 0$, являются расходящимися прямыми, и решение существует и однозначно при всех $x > 0$. В физике такие решения называют волнами разрежения.

Пример 4. На рис. 2 и 3 для иллюстрации показаны характеристики и эволюция волны разрежения для уравнения Хопфа [при $f(w) = w$ в (27)] с начальным профилем

$$\varphi(y) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}(y - 2) + 2.$$

Видно, что решение является гладким при всех $x > 0$.

Посмотрим теперь, что произойдет если $\varphi'(y) < 0$ на некотором интервале оси y. Пусть y_1 и y_2 — точки на этом интервале. При $y_1 < y_2$ имеем $f(y_1) > f(y_2)$. Из первого соотношения (29) следует, что характеристики, выходящие из точек y_1 и y_2, пересекутся в «момент времени», равный

$$x_* = \frac{y_2 - y_1}{f(w_1) - f(w_2)}, \quad \text{где} \;\; w_1 = \varphi(y_1), \;\; w_2 = \varphi(y_2).$$

Так как w имеет различные значения на этих характеристиках, то решение не может быть непрерывно продолжено для $x > x_*$. Если $\varphi'(y) < 0$ на ограниченном интервале, то найдется

* Рассмотрение области $x \leqslant 0$ заменой $x = -\widetilde{x}$ сводится к рассмотрению области $x \geqslant 0$. Случай $f < 0$ заменой $y = -\widetilde{y}$ сводится к случаю $f > 0$.

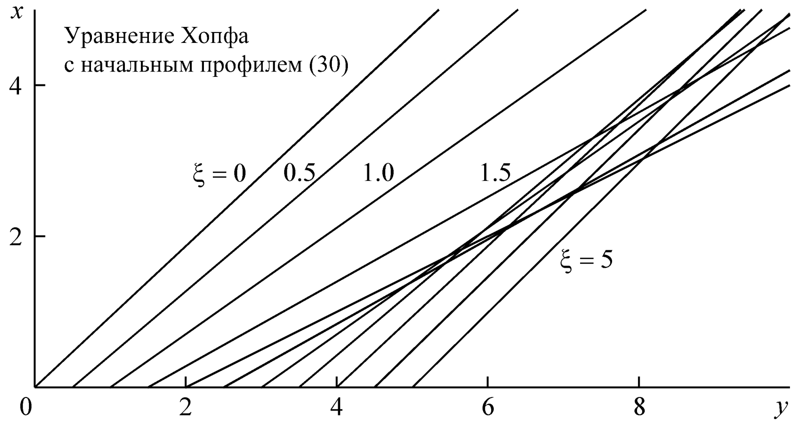

Рис. 4

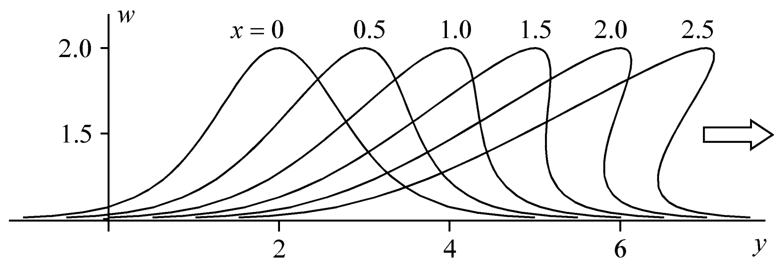

Рис. 5

такое значение $x_{\min} = \min\limits_{y_1,y_2} x_*$, что в области $x > x_{\min}$ характеристики будут пересекаться, см. рис. 4. Поэтому часть волны, где ее профиль является убывающей функцией от y, со временем будет «опрокидывается». Время начала опрокидывания $x_{\min}$ определяется по формуле

$$x_{\min} = -\frac{1}{\mathcal{F}'(\xi_0)},$$

где значение ξ_0 находится из условия $|\mathcal{F}'(\xi_0)| = \max|\mathcal{F}'(\xi)|$ при $\mathcal{F}'(\xi) < 0$. Формальное продолжение решения в область $x > x_{\min}$ делает это решение неоднозначным. Граница области однозначности решения в плоскости y, x является огибающей характеристик и может быть записана в параметрическом виде

$$y = \xi + \mathcal{F}(\xi)x, \quad 0 = 1 + \mathcal{F}'(\xi)x.$$

Пример 5. На рис. 5 в качестве иллюстрации изображена эволюция уединенной волны с начальным профилем

$$\varphi(y) = \mathrm{ch}^{-2}(y-2) + 1, \tag{30}$$

которая описывается уравнением (27) с $f(w) = w$. Видно, что при $x > x_{\min}$, где $x_{\min} = \frac{3}{4}\sqrt{3} \approx 1.3$, происходит опрокидывание волны.

12.1.3-3. Ударные волны. Условия на разрыве.

В большинстве приложений, в которых встречается рассматриваемое уравнение, искомая функция $w(x,y)$ является плотностью некоторой среды и по своей сущности должна быть однозначна. В этих случаях вместо непрерывного гладкого решения приходится рассматривать обобщенное (негладкое) решение, описывающее ударную волну, которая имеет вид «ступеньки». При этом многозначная часть волнового профиля заменяется некоторым подходящим разрывом, как показано на рис. 6. Следует подчеркнуть, что разрыв может образоваться при сколь угодно гладких функциях $f(w)$ и $\varphi(y)$, входящих в уравнение (27) и начальное условие (28).

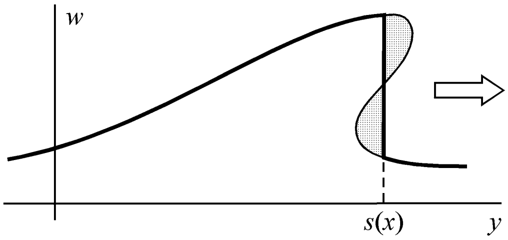

Рис. 6

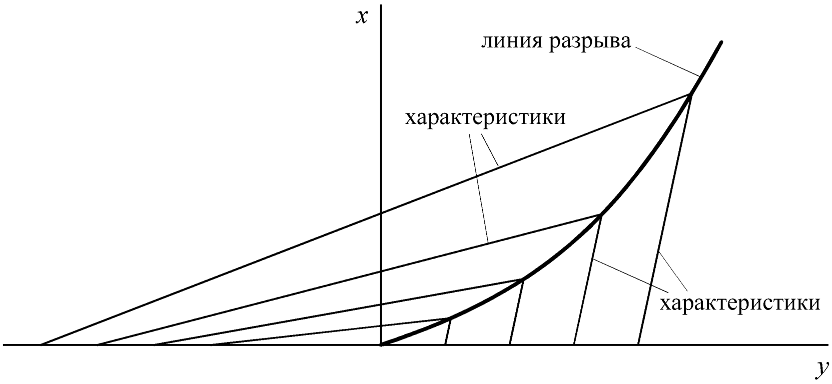

Рис. 7

Далее будем считать, что функция $w(x, y)$ терпит разрыв на линии $y = s(x)$ в плоскости y, x. По обе стороны от разрыва функция $w(x, y)$ является гладкой и однозначной; как и ранее, она описывается уравнениями (29). Скорость распространения разрыва V выражается через производную: $V = s'$. При этом должно выполняться соотношение

$$V = \frac{F(w_2) - F(w_1)}{w_2 - w_1}, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw, \tag{31}$$

где индекс 1 соответствует значениям величин перед разрывом, а индекс 2 — после разрыва. В приложениях соотношение (31) принято называть законом сохранения на разрыве (вывод этого соотношения дан ниже в разд. 12.1.3-4).

Непрерывная волна опрокидывается и приводит к разрыву тогда и только тогда, когда скорость распространения $f(w)$ убывает с увеличением y, т. е. выполняется неравенство

$$f(w_2) < V < f(w_1). \tag{32}$$

Геометрический смысл условий (32) заключается в том, что характеристики, выходящие из оси x (эти характеристики «несут» информацию о начальных данных) должны пересекать линию разрыва, см. рис. 7. В этом случае разрывное решение будет устойчивым по отношению к малым возмущениям начального профиля (т. е. соответствующее решение также мало изменится).

Положение точки разрыва в плоскости y, w можно определить геометрически, следуя правилу Уизема: разрыв должен отсекать из профиля опрокидывающейся волны области с равными площадями (на рис. 6 эти области заштрихованы). Положение точки разрыва можно найти путем решения уравнений

$$\begin{gathered} s(x) = \xi_1 + \mathcal{F}_1 x, \\ s(x) = \xi_2 + \mathcal{F}_2 x, \\ w_2\mathcal{F}_2 - w_1\mathcal{F}_1 = F(w_2) - F(w_1) + \frac{\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1}{\xi_2 - \xi_1}\int_{\xi_1}^{\xi_2} w\,d\xi. \end{gathered} \tag{33}$$

Здесь w и $\mathcal{F}$ определяются как функции ξ по формулам $w = \varphi(\xi)$ и $\mathcal{F} = f(w)$, функция $F(w)$ введена в (31), а индексы обозначают значения соответствующих величин при ξ_1 и ξ_2. Уравнения

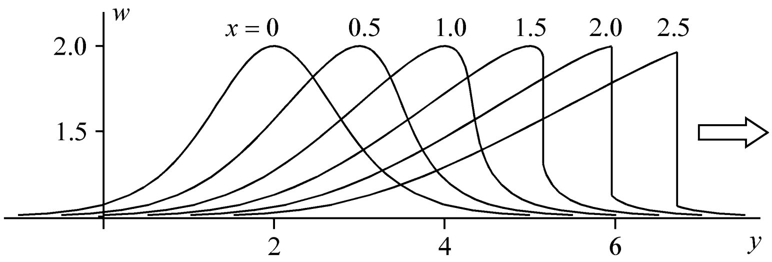

Рис. 8

(33) позволяют найти зависимости $s = s(x)$, $\xi_1 = \xi_1(x)$, $\xi_2 = \xi_2(x)$. Можно показать, что из последнего уравнения (33) следует условие на разрыве (31).

Пример 6. Для уравнения Хопфа, которое соответствует $f(w) = w$ в (27), условие на скачке (31) с учетом равенства $F(w) = \frac{1}{2}w^2$ записывается так:

$$V = \frac{w_1 + w_2}{2},$$

а система (33), определяющая положение положения точки разрыва, принимает вид

$$\begin{aligned} s(x) &= \xi_1 + \varphi(\xi_1)x, \\ s(x) &= \xi_2 + \varphi(\xi_2)x, \\ \frac{\varphi(\xi_1) + \varphi(\xi_2)}{2} &= \frac{1}{\xi_2 - \xi_1}\int_{\xi_1}^{\xi_2} \varphi(\xi)\,d\xi, \end{aligned}$$

где функция $\varphi(\xi)$ задает начальный профиль волны.

На рис. 8 изображено формирование ударной волны, которая описывается обобщенным решением уравнения Хопфа при $f(w) = w$ и образуется из уединенной волны с гладким начальным профилем (30).

Большое число решений задачи Коши для уравнения (27), описывающих слияние и распад разрывов, периодические волны и другие физические эффекты, приведено, например, в книгах Дж. Уизема (1977), Б. Л. Рождественского, Н. Н. Яненко (1978), А. Г. Куликовского, Е. И. Свешниковой (1998).

12.1.3-4. Использование интегральных равенств для определения обобщенных решений.

Обобщенные решения, которые описываются кусочно-гладкими (кусочно-непрерывными) функциями, формально можно ввести путем рассмотрения следующего уравнения, представленного в интегральной форме:

$$-\iint\limits_D \left[w\frac{\partial\psi}{\partial x} + F(w)\frac{\partial\psi}{\partial y}\right] dy\,dx = 0. \qquad (34)$$

Здесь D — произвольный прямоугольник в плоскости y, x; $\psi = \psi(x,y)$ — любая «пробная» функция с непрерывными первыми производными в D, которая обращается в нуль на границе D, а функция $F(w)$ определена в (31). Если w и $F(w)$ непрерывно дифференцируемы, то уравнение (33) эквивалентно исходному дифференциальному уравнению (27). Действительно, если умножить уравнение (27) на ψ и проинтегрировать по области D, то, интегрируя затем по частям, получим (34). Обратно, интегрируя (34) по частям, имеем

$$\iint\limits_D \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial F(w)}{\partial y}\right]\psi\,dy\,dx = 0.$$

Поскольку это равенство должно выполняться для любой пробной функции ψ, отсюда с учетом соотношения $F'(w) = f(w)$ получим исходное уравнение (27). Однако, уравнение (34) имеет более широкий класс решений, поскольку допустимые функции $w(x,y)$ не обязаны иметь производные. Функции $w(x,y)$, удовлетворяющие интегральному равенству (34) для всех пробных функций ψ, называются обобщенными (или слабыми) решениями уравнения (27).

Использование обобщенных решений удобно для описания разрывов, так как позволяет автоматически получать условия на разрыве. Рассмотрим решение уравнения (34), непрерывно дифференцируемое в двух частях D_1 и D_2 прямоугольника D, которое имеет конечный разрыв первого рода на границе Г, разделяющей R_1 и R_2. Интегрируя в каждой из областей R_1 и R_2 по частям, из (34) получим

$$\iint\limits_{D_1}\Big[\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial F(w)}{\partial y}\Big]\psi\,dy\,dx+\iint\limits_{D_2}\Big[\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial F(w)}{\partial y}\Big]\psi\,dy\,dx+\int\limits_{\Gamma}\big\{[w]\,dy-[F(w)]\,dx\big\}\psi=0,$$

где $[w]=w_2-w_1$ и $[F(w)]=F(w_2)-F(w_1)$ — скачки на Г. Криволинейный интеграл по Г образован граничными членами интегралов по R_1 и R_2, возникающими в результате интегрирования по частям. Так как полученное равенство должно быть справедливым для всех пробных функций ψ, отсюда следует, что уравнение (27) справедливо внутри каждой из подобластей R_1 и R_2, и кроме того, должно выполняться равенство

$$[w]\,dy-[F(w)]\,dx=0 \qquad (\text{на линии } \Gamma).$$

Считая, как и ранее, что линия разрыва описывается уравнением $y=s(x)$, получаем отсюда условие на разрыве (31).

Следует отметить, что условия (32) не следуют из интегрального равенства (34), а выводятся из дополнительного требования устойчивости решения.

12.1.3-5. Законы сохранения. Вязкие решения.

Укажем здесь другие способы введения обобщенных решений.

1°. Обобщенные решения можно ввести с помощью закона сохранения

$$\frac{d}{dx}\int_{y_1}^{y_2}w\,dy+F(w_2)-F(w_1)=0, \tag{35}$$

при записи которого использованы краткие обозначения: $w=w(x,y)$, $w_n=w(x,y_n)$, где $n=1,\,2$; функция $F(w)$, как и (31), вводится по формуле $F(w)=\displaystyle\int f(w)\,dw$. Равенство (35) считается выполненным для любых y_1 и y_2 и допускает простую физическую интерпретацию: скорость изменения общего количества величины w, распределенной на интервале $(y_1,\,y_2)$, компенсируется «потоком» функции $F(w)$ через концы этого интервала.

Пусть w непрерывно дифференцируемое решение закона сохранения. Тогда дифференцируя (35) по y_2, а затем полагая $y_2=y$, приходим к уравнению (27). Закон сохранения (35) удобен тем, что он допускает и разрывные решения. Нетрудно показать, что в этом случае должно выполняться условие на разрыве (31). Поэтому законы сохранения типа (35) иногда используется в качестве основы для определения обобщенных решений, см., например, Р. Курант (1964), Дж. Уизем (1977), Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко (1978).

2°. Возможен также другой подход к определению обобщенных решений, связанный с рассмотрением вспомогательного уравнения параболического типа

$$\frac{\partial w}{\partial x}+f(w)\frac{\partial w}{\partial y}=\varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad \varepsilon>0. \tag{36}$$

При этом обобщенное решение задачи Коши (27), (28) (для финитного начального профиля) определяется как предел решения уравнения (36) с тем же начальным условием (28) при $\varepsilon\to 0$. В работах О. А. Олейник (1957), И. М. Гельфанда (1959) было показано, что рассмотренные выше определения обобщенного решения приводят к одинаковым результатам.

Параметр ε играет роль «вязкости» (по аналогии с вязкостью жидкости или газа), которая «размазывает» разрыв, делая непрерывным профиль искомой величины w. Поэтому указанную конструкцию, основанную на предельном переходе при $\varepsilon\to 0$, называют методом исчезающей вязкости, а полученную предельную функцию — вязким решением. Уравнение (36) при малом ε нередко используется в качестве основы для численного моделирования разрывных решений уравнения (27) [в этом случае нет необходимости в численной схеме специально выделять область разрыва].

Пример 7. Для уравнения Хопфа (14) вспомогательное уравнение (36) имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial y}=\varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad \varepsilon>0 \tag{37}$$

и является уравнением Бюргерса. Решение задачи Коши (37), (28) дается формулами [см. E. Hopf (1950), Дж. Уизем (1977)]:

$$w(x,y) = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y-\eta}{x} \exp\Big[-\frac{1}{2\varepsilon}H(x,y,\eta)\Big]\,d\eta}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big[-\frac{1}{2\varepsilon}H(x,y,\eta)\Big]\,d\eta}, \tag{38}$$

где

$$H(x,y,\eta) = \int_0^\eta \varphi(\bar\eta)\,d\bar\eta + \frac{(y-\eta)^2}{2x}. \tag{39}$$

Рассмотрим асимптотическое поведение решения (39) при малых ε, когда x, y, $\varphi(y)$ фиксированы. При $\varepsilon \to 0$ основной вклад в интегралы, входящие в формулу (38), дают окрестности стационарных точек функции H. Эти точки определяются из условия равенства нулю частной производной: $H_\eta = 0$. Отсюда имеем

$$\varphi(\eta) - \frac{y-\eta}{x} = 0. \tag{40}$$

Пусть $\eta = \xi(x,y)$ — стационарная точка, т. е. функция $\xi(x,y)$ определяется неявно, как решение алгебраического (или трансцендентного) уравнения:

$$\varphi(\xi) - \frac{y-\xi}{x} = 0. \tag{41}$$

Вклад окрестности стационарной точки $\eta = \xi$ в интеграл вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q(\eta)\exp\Big[-\frac{1}{2\varepsilon}H(\eta)\Big]\,d\eta$$

при $\varepsilon \to 0$ определяется помощью метода перевала [см. М. В. Федорюк (1977, 1987), Ф. Олвер (1990)] и равен:

$$Q(\xi)\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon}{|H''(\xi)|}}\,\exp\Big[-\frac{1}{2\varepsilon}H(\xi)\Big].$$

Предположим сначала, что существует только одна стационарная точка $\xi(x,y)$, удовлетворяющая уравнению (41). Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y-\eta}{x}\exp\Big[-\frac{1}{2\varepsilon}H(x,y,\eta)\Big]\,d\eta &\simeq \frac{y-\xi}{x}\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon}{|H''(\xi)|}}\,\exp\Big[-\frac{1}{2\varepsilon}H(x,y,\xi)\Big],\\ \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big[-\frac{1}{2\varepsilon}H(x,y,\eta)\Big]\,d\eta &\simeq \sqrt{\frac{4\pi\varepsilon}{|H''(\xi)|}}\,\exp\Big[-\frac{1}{2\varepsilon}H(x,y,\xi)\Big]. \end{aligned} \tag{42}$$

Отсюда из формулы (38) получим

$$w(x,y) \simeq \frac{y-\xi}{x} \qquad (\text{при } \varepsilon \to 0), \tag{43}$$

где $\eta = \xi(x,y)$ определяется уравнением (41). Полученное асимптотическое решение можно переписать в параметрическом виде

$$w = \varphi(\xi), \qquad y = \xi + \varphi(\xi)x. \tag{44}$$

Видно, что оно точности совпадает с решением (19), (20), полученным путем решения задачи Коши (14), (15) для уравнения Хопфа; при этом стационарная точка $\xi = \xi(x,t)$ соответствует характеристической переменной.

Ранее было показано, что в некоторых случаях при достаточно больших x формулы (44) дают многозначные решения и приходится вводить разрывы. В то же время решение (38) уравнения Бюргерса (37) однозначно и непрерывно для любого x. Дело объясняется тем, что в таких случаях имеется сразу несколько стационарных точек, удовлетворяющих уравнению (41), и надо несколько скорректировать предыдущий асимптотический анализ. Пусть ξ_1 и ξ_2 — две стационарные точки, удовлетворяющие неравенству $\xi_1 < \xi_2$. Каждая из них вносит свой вклад в решение, этот вклад определяется по формулам (42). Учитывая сказанное, из формулы (38) имеем

$$\begin{aligned} w \simeq{}& \frac{\{(y-\xi_1)/x\}|H''(\xi_1)|^{-1/2}e^{-H(\xi_1)/(2\varepsilon)}}{|H''(\xi_1)|^{-1/2}e^{-H(\xi_1)/(2\varepsilon)} + |H''(\xi_2)|^{-1/2}e^{-H(\xi_2)/(2\varepsilon)}} +\\ &+ \frac{\{(y-\xi_2)/x\}|H''(\xi_2)|^{-1/2}e^{-H(\xi_2)/(2\varepsilon)}}{|H''(\xi_1)|^{-1/2}e^{-H(\xi_1)/(2\varepsilon)} + |H''(\xi_2)|^{-1/2}e^{-H(\xi_2)/(2\varepsilon)}}, \end{aligned} \tag{45}$$

где $H(\xi_n) = H(x, y, \xi_n)$. Когда $H(\xi_1) \neq H(\xi_2)$, наличие в экспонентах малого знаменателя ε делает один из членов преобладающим при $\varepsilon \to 0$. Отсюда следует, что

$$w \simeq \begin{cases} \dfrac{y-\xi_1}{x} & \text{при } H(\xi_1) < H(\xi_2), \\ \dfrac{y-\xi_2}{x} & \text{при } H(\xi_1) > H(\xi_2). \end{cases}$$

В каждом из этих случаев справедливо решение (44), где либо $\xi = \xi_1$, либо $\xi = \xi_2$. Но выбор здесь однозначен: и ξ_1, и ξ_2 являются функциями переменных x и y, знак разности $\delta = H(\xi_1) - H(\xi_2)$ определяет выбор ξ_1 и ξ_2 в заданной точке x, y. Переход от ξ_1 к ξ_2 происходит в тех точках, где

$$H(\xi_1) = H(\xi_2).$$

Из формулы (39) отсюда имеем

$$\int_0^{\xi_1} \varphi(\bar{\xi})\, d\bar{\xi} + \frac{(y-\xi_1)^2}{2x} = \int_0^{\xi_2} \varphi(\bar{\xi})\, d\bar{\xi} + \frac{(y-\xi_2)^2}{2x}. \qquad (46)$$

Поскольку и ξ_1, и ξ_2 удовлетворяют уравнению (41), то условие (46) можно записать в виде

$$(\xi_2 - \xi_1)\bigl[\varphi(\xi_1) + \varphi(\xi_2)\bigr] = 2\int_{\xi_1}^{\xi_2} \varphi(\bar{\xi})\, d\bar{\xi}. \qquad (47)$$

Точно такое же соотношение получается путем решения задачи Коши (14), (15) для уравнения Хопфа (см. пример 6). Отсюда следует, что асимптотическое решение удовлетворяет условию на разрыве (31). Таким же образом можно показать, для него выполняется условие устойчивости (32).

Проведенный анализ показывает, что решение задачи Коши для уравнения Бюргерса при $\varepsilon \to 0$ переходит в обобщенное решение задачи Коши для уравнения Хопфа, которое может иметь разрывы.

Отметим, что имеются также иные способы введения обобщенных решений, см., например, M. G. Crandall, P.-L. Lions (1983), А. И. Субботин (1991), A. I. Subbotin (1995), A. A. Melikyan (1998), Б. П. Андреянов (1999). Более подробную информацию об обобщенных решениях и их приложениях можно найти, например, в цитируемой в конце этого раздела литературе (см. также разд. 12.1.4).

Замечание. В конкретных задачах квазилинейные уравнения первого порядка часто являются следствием интегральных законов сохранения, имеющих ясный физический смысл. В этих случаях обобщенные решения надо вводить, исходя из этих законов сохранения, см. например, Дж. Уизем (1977), Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко (1978). Полученные таким путем негладкие обобщенные решения могут отличаться от обобщенных решений, описанных выше.

12.1.3-6. Формула Хопфа для обобщенного решения.

Приведем теперь общую формулу для обобщенного решения задачи Коши (27), (28), которое описывает разрывные решения, удовлетворяющие условию устойчивости (32). Как и ранее будем считать, что $x \geqslant 0$ и $f > 0$ при $w > 0$; $f'_w > 0$.

Рассмотрим функцию

$$Z(s) = \min_w \bigl\{ws - F(w)\bigr\}, \quad \text{где } F(w) = \int f(w)\, dw. \qquad (48)$$

Положим

$$H(x, y, \eta) = \int_0^{\eta} \varphi(\bar{\eta})\, d\bar{\eta} + xZ\Bigl(\frac{y-\eta}{x}\Bigr). \qquad (49)$$

Эта непрерывная функция η при фиксированных x и y. Можно показать, что при фиксированном x и за исключением счетного множества значений y функция (49) имеет единственный минимум по η. Обозначим положение этого минимума $\eta = \xi$, где $\xi = \xi(x, y)$. Устойчивое обобщенное решение уравнения (28) с начальным условием (29) дается формулой

$$w(x, y) = \mathcal{Z}\Bigl(\frac{y-\xi}{x}\Bigr), \quad \text{где } \mathcal{Z}(s) = \frac{dZ}{ds}. \qquad (50)$$

Формулы (48)–(50) были обоснованы в работах E. Hopf (1950), О. А. Олейник (1954), P. D. Lax (1954).

Функцию $Z = Z(s)$, заданную выражением (48), можно записать в параметрическом виде

$$s = f(w), \quad Z = ws - \int f(w)\, dw. \qquad (51)$$

Отсюда получим параметрическое представление ее для производной $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(s)$:

$$s = f(w), \qquad \mathcal{Z} = w. \tag{52}$$

Положение минимума $\eta = \xi(x,y)$ функции (49) находится из условия $H_\eta = 0$, что приводит к следующему уравнению для определения функции ξ:

$$\varphi(\xi) - \mathcal{Z}\Big(\frac{y-\xi}{x}\Big) = 0. \tag{53}$$

Для иллюстрации использования приведенных формул рассмотрим два случая.

1°. Пусть алгебраическое (или трансцендентное) уравнение (53) в некоторой области переменных x, y имеет единственное решение $\xi = \xi(x,y)$. Положим в равенствах (52) $s = (y-\xi)/x$, а затем рассмотрим их совместно с уравнением (53). Исключая из них функции $f(w)$ и $\mathcal{Z}$, получим решение задачи в параметрическом виде (29). В этом случае мы получили гладкое (классическое) решение, описывающее волну разрежения.

2°. Пусть теперь алгебраическое (или трансцендентное) уравнение (53) имеет два решения ξ_1 и ξ_2, которые являются функциями переменных x и y. В каждом из этих случаев справедливо решение (29), где либо $\xi = \xi_1$, либо $\xi = \xi_2$. В каждой точке x, y выбирается то решение ξ_n $(n = 1,\ 2)$, которое обеспечивает минимум функции $H(x,y,\xi_n)$, заданной формулой (49). В этом случае мы получили разрывное (обобщенное) решение, описывающее ударную волну.

12.1.3-7. Задача о распаде произвольного разрыва.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (27) с разрывным начальным условием

$$w(0,y) = \begin{cases} w_1 & \text{при } y < 0, \\ w_2 & \text{при } y > 0. \end{cases} \tag{54}$$

Эта задача называется задачей о распаде произвольного разрыва. Ее кусочно-гладкое автомодельное обобщенное решение для произвольной гладкой функции $f = f(w)$ описывается формулой (знаки функции f и ее производной могут быть любыми):

$$w(x,y) = w(\xi) = [\dot{\mathfrak{F}}]^{-1}(\xi), \qquad \xi = y/x, \tag{55}$$

где

$$\mathfrak{F}(w) = \begin{cases} \sup\{g(w) \,|\, g(w) \leqslant f(w),\ g \text{ выпукла вниз на } [w_1,w_2]\} & \text{при } w_1 < w_2; \\ \inf\{g(w) \,|\, g(w) \geqslant f(w),\ g \text{ выпукла вверх на } [w_2,w_1]\} & \text{при } w_2 < w_1. \end{cases} \tag{56}$$

Здесь обратная к монотонной на интервале (a,b) функции $\mathfrak{P}(w)$ функция $[\mathfrak{P}]^{-1}(\xi)$ при необходимости доопределяется константами по непрерывности в окрестности $\pm\infty$ и на отрезках, соответствующих разрывам $\mathfrak{P}(w)$. В точках, соответствующих промежуткам постоянства $\mathfrak{P}(w)$, функция $[\mathfrak{P}]^{-1}(\xi)$ доопределяется до непрерывной справа функции. Точкой в решении (55) обозначена производная по ξ.

Решение (55), (56) для гладких функций $f(w)$ было получено И. М. Гельфандом (1959). Эти результаты обобщены на случай непрерывных функций $f(w)$ Б. П. Андреяновым (1999).

12.1.3-8. Задача о распространении сигнала.

В задаче о распространении сигнала и других физических приложениях ищут решение исходного уравнения со следующими условиями:

$$\begin{aligned} &w = w_0 && \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(начальное условие)}, \\ &w = g(x) && \text{при} \quad y = 0 \quad \text{(граничное условие)}, \end{aligned} \tag{57}$$

где w_0 — некоторая константа, а $g(x)$ — заданная функция. Рассматривается область $x > 0$, $y > 0$, где переменная x играет роль времени, а переменная y — роль пространственной координаты, и считается, что $f(w) > 0$.

Характеристики этой задачи начинаются на положительной полуоси y и на положительной полуоси x, см. рис. 9. На характеристиках, начинающихся на оси y, имеем $w = w_0$. Поэтому они представляют собой прямые $y - a_0 x = \text{const}$, где $a_0 = f(w_0)$. Отсюда следует, что

$$w = w_0 \quad \text{при} \quad y > a_0 x. \tag{58}$$

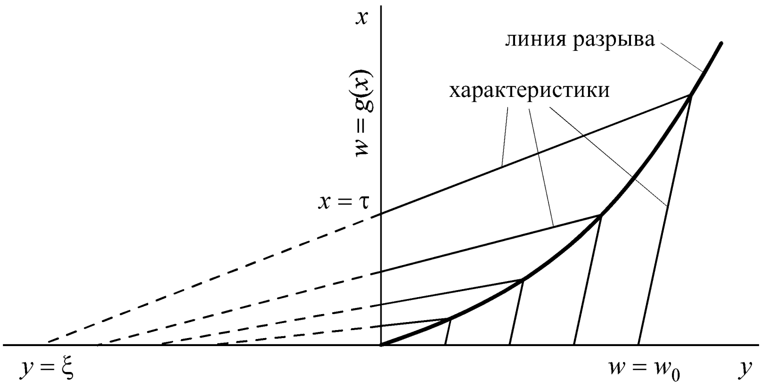

Рис. 9

Рассмотрим теперь характеристики, начинающиеся на оси x, и предположим, что какая-либо из них начинается в точке $x = \tau$. Решение уравнения (27) с граничным условием (57) можно представить в параметрическом виде

$$y = \mathcal{G}(\tau)(x - \tau), \quad w = g(\tau), \tag{59}$$

где $\mathcal{G}(\tau) = f\big(g(\tau)\big)$. Это решение можно связать с решением (29) задачи Коши (27), (28), если положить

$$\xi = -\tau\mathcal{G}(\tau), \quad \varphi(\xi) = g(\tau), \quad \mathcal{F}(\xi) = \mathcal{G}(\tau). \tag{60}$$

Это соответствует продолжению характеристик через точки $y = 0$, $x = \tau$ до оси y и обозначению точек пересечения через $y = \xi$. При этом задача о распространении сигнала формулируется как задача Коши.

Каждую область многозначности в решении (59) следует заменить разрывом. При выполнении условия

$$\mathcal{G}(+0) > a_0, \quad \text{где} \quad a_0 = f(w_0),$$

такая область возникает мгновенно, поскольку первая характеристика $y = \mathcal{G}(+0)x$ находится впереди последней характеристики $y = a_0 x$ невозмущенной области. В этом случае разрыв возникает в начале координат, и выполняется соотношение

$$G - G_0 = (w - w_0)\mathcal{G} - \frac{1}{x - \tau}\int_0^\tau \big[G(\bar\tau) - G_0\big]\,d\bar\tau. \tag{61}$$

Здесь величины w, $\mathcal{G}$ и G являются функциям τ в области за разрывом и вычисляются по формулам

$$w = g(\tau), \quad \mathcal{G} = f\big(g(\tau)\big), \quad G = F\big(g(\tau)\big),$$

а индекс «ноль» соответствует значениям этих величин перед разрывом: $w = w_0$, $\mathcal{G}_0 = f(w_0)$, $G_0 = F(w_0)$.

Формулы (59) описывают решение в возмущенной области за разрывом. Равенство (61) позволяет найти величину $\tau(x)$ в точке разрыва; подставив эту величину в формулы (59), находим как местонахождение разрыва, так и значение w сразу за ним.

Если $g(x)$ остается постоянной и равной w_c, то при $a_c > a_0$, где $a_c = f(w_c)$, решение имеет разрыв, который распространяется с постоянной скоростью и разделяет две однородные области с $w = w_c$ и $w = w_0$.

⊙ *Литература к разделу* 12.1.3: E. Hopf (1950), P. D. Lax (1954), О. А. Олейник (1957, 1959), И. М. Гельфанд (1959), Дж. Уизем (1977), Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко (1978), C. M. Dafermos (1983), J. Smoller (1983), H. Rhee, R. Aris, N. R. Amundson (1986, 1989), А. И. Субботин (1991), P. Bedrikovetsky (1993), A. I. Subbotin (1995), А. А. Меликян (1996), A. A. Melikyan (1998), Б. П. Андреянов (1999).

12.1.4. Обобщенные решения квазилинейных уравнений

12.1.4-1. Предварительные замечания.

В общем случае квазилинейное уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial x} + f(x,y,w)\frac{\partial w}{\partial y} = g(x,y,w) \tag{62}$$

можно представить в эквивалентном (консервативном) виде

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}F(x,y,w) = G(x,y,w), \tag{63}$$

где новые функции введены по формулам (w_0 — любое)

$$F(x,y,w) = \int_{w_0}^{w} f(x,y,t)\,dt, \quad G(x,y,w) = g(x,y,w) + \int_{w_0}^{w} \frac{\partial}{\partial y}\Big[f(x,y,t)\Big]\,dt. \tag{64}$$

Далее считаем, что функции f и g непрерывны и имеют непрерывные первые производные.

Как было показано на конкретных примерах в разд. 12.1.2–12.1.3, характеристики уравнения (62) в некоторой области могут пересекаться, что приводит к неоднозначности (и физической неинтерпретируемости) решения. Поэтому вместо классического непрерывного гладкого решения приходится использовать обобщенное решение, описываемое разрывной функцией.

Будем рассматривать класс функций $w(x,y) \in \mathcal{K}$, удовлетворяющих условиям:

1°. В любой ограниченной части полуплоскости $x \geqslant 0$ имеется конечное число линий и точек разрыва; вне этих линий и точек функция $w(x,y)$ непрерывна и имеет непрерывные первые производные.

2°. На линиях разрыва $y=y(x)$ существуют левые $w(x,y-0)$ и правые $w(x,y+0)$ предельные значения.

12.1.4-2. Обобщенное решение. Условия на разрыве и условия устойчивости.

Обобщенное решение можно ввести следующим образом. Пусть $\psi(x,y) \in \mathcal{C}_1$ — непрерывная финитная функция (обращается в нуль вне конечной части плоскости x, y), имеющая непрерывные первые производные. Умножим уравнение (62) на $\psi(x,y)$ и проинтегрируем полученное выражение по полуплоскости $\Omega = \{0 \leqslant x < \infty,\ -\infty < y < \infty\}$. После интегрирования по частям, имеем

$$\iint\limits_{\Omega} \Big[w\frac{\partial \psi}{\partial x} + F(x,y,w)\frac{\partial \psi}{\partial y} + G(x,y,w)\psi(x,y)\Big]\,dy\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} w(0,y)\psi(0,y)\,dy = 0. \tag{65}$$

Выражение для функции $F(x,y,w)$ приведено в (64). Интегральное равенство (65) не содержит производных от искомой функции и не теряет смысла для разрывных $w(x,y)$. Функцию $w(x,y) \in \mathcal{K}$ будем называть обобщенным решением уравнения (62), если равенство (65) выполняется для любой финитной функции $\psi(x,y) \in \mathcal{C}_1$.

Основные свойства обобщенного решения:

1°. В области, где решение w непрерывно дифференцируемо, уравнения (62) и (65) эквивалентны.

2°. Пусть $y = y(x)$ — уравнение одной из линий разрыва функции $w(x,y)$. Тогда должно выполняться условие Гюгонио, выражающее скорость движения линии разрыва через параметры решения до и после разрыва:

$$V = \frac{[F(x,y,w)]}{[w]} \equiv \frac{F\big(x,y(x),w_2(x)\big) - F\big(x,y(x),w_1(x)\big)}{w_2(x) - w_1(x)}. \tag{66}$$

Здесь использованы обозначения

$$V = y'(x), \quad w_1(x) = w\big(x,y(x)-0\big), \quad w_2(x) = w\big(x,y(x)+0\big)$$

3°. При $f'_w(x,y,w) \neq 0$ условия устойчивости обобщенного решения по отношению к малым возмущениям начального профиля (именно такие решения физически реализуемы) имеют вид

$$f\big(x,y(x),w_2(x)\big) \leqslant V \leqslant f\big(x,y(x),w_1(x)\big). \tag{67}$$

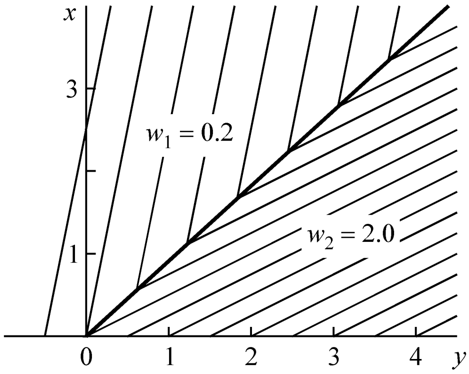

Рис. 10

Геометрический смысл этих условий заключается в том, что характеристики, выходящие из оси x (эти характеристики «несут» информацию о начальных данных), должны пересекать линию разрыва, см. рис. 7. Условия (67) являются важными; они обеспечивают единственность и допускают существование обобщенного решения.

Положения пп. 1° и 2° являются следствиями интегрального равенства (65), а условия п. 3° являются дополнительными [они не выводятся из интегрального равенства (65)]. При отказе от выполнения условий п. 3° можно строить различные решения, удовлетворящие положениям пп. 1°, 2°.

Пример 8. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (14) с начальным условием (23).

Положим

$$\overline{w}(x,y) = \begin{cases} w_1 & \text{при } y < Vx, \\ w_2 & \text{при } y > Vx, \end{cases} \qquad \text{где } V = \frac{w_1 + w_2}{2}. \tag{68}$$

Эта функция постоянна слева и справа от линии разрыва $y = Vx$, на которой выполняется условие Гюгонио (66) [поскольку здесь $F(x,y,w) = \frac{1}{2}w^2$], и удовлетворяет начальному условию (23). Поэтому $\overline{w}$ является обобщенным решением.

На рис. 10 показаны линия разрыва и характеристики, соответствующие решению (68). Видно, что характеристики «выходят» из линии разрыва и не пересекают ось x. Поэтому решение (68) не является устойчивым, оно не удовлетворяет условиям (67) и физически не реализуемо. Устойчивое решение данной задачи было построено раньше и описывается формулой (26).

Если $f'_w(x,y,w)$ — знакопеременная функция, то условия устойчивости обобщенного решения несколько усложняются и записываются так:

$$\frac{F(x,y,w_*) - F(x,y,w_2)}{w_* - w_2} \leqslant V \leqslant \frac{F(x,y,w_*) - F(x,y,w_1)}{w_* - w_1},$$
$$y = y(x), \qquad w_1 < w_* < w_2,$$

где w_* — любое значение из интервала $(w_1,\, w_2)$.

12.1.4-3. Законы сохранения. Вязкие решения.

Существуют также и другие способы определения обобщенного решения.

1°. При $G \equiv 0$ обобщенные решения можно ввести с помощью закона сохранения

$$\frac{d}{dx}\int_{y_1}^{y_2} w\,dy + F(x,y_2,w_2) - F(x,y_1,w_1) = 0, \tag{69}$$

которое считается справедливым для любых y_1 и y_2. При формулировке закона (69) были использованы краткие обозначения: $w = w(x,y)$, $w_n = w(x,y_n)$, где $n = 1,\, 2$. Можно показать, что гладкие решения закона сохранения (69) удовлетворяют дифференциальному уравнению (33), а для разрывных решений выполняется условие на разрыве (66).

2°. Вместо уравнения можно взять вспомогательное уравнение второго порядка параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial x} + f(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g(x,y,u) \qquad (\varepsilon > 0),$$

которое рассматривается с тем же начальным условием, что и уравнение (62). Обобщенное решение задачи Коши для уравнения (62) определяется как предел: $w(x,y) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} u(x,y)$. Полученная таким образом функция w часто называется вязким решением. Важно отметить, что для широкого класса функций f и g в уравнении (62) определения вязкого решения и обобщенного устойчивого решения (см. разд. 12.1.4-2) эквивалентны.

Определение непрерывного (но негладкого) вязкого обобщенного решения, основанного на пробных функциях и интегральных неравенствах, приведено разд. 14.1.3.

12.1.4-4. Конструктивный метод построения обобщенных устойчивых решений.

Рассмотрим задачу Коши для квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}F(x,y,w) = 0 \tag{70}$$

с начальным условием

$$w = \varphi(y) \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{71}$$

Считаем, что функция $F(x,y,w)$ имеет непрерывные первые производные по всем аргументам при $x \geqslant 0$, $-\infty < y < \infty$ и любых ограниченных w, и вторая производная $F_{ww} > 0$. Пусть функции $\varphi(y)$ и $\varphi'(y)$ кусочно-непрерывны при любых ограниченных значениях y.

Запишем характеристическую систему для уравнения (70):

$$y'_x = F_w(x,y,w), \qquad w'_x = -F_y(x,y,w), \tag{72}$$

где F_w и F_y — частные производные функции F по аргументам w и y.

Пусть функции

$$y(x) = Y(x,\tau,\xi,\eta), \qquad w(x) = W(x,\tau,\xi,\eta) \tag{73}$$

являются решением системы (72), удовлетворяющим краевым условиям

$$y(0) = \eta, \qquad y(\tau) = \xi. \tag{74}$$

Здесь η, ξ — произвольные числа, $\tau > 0$. Будем считать, что задача (73), (74) имеет единственное ограниченное решение.

Обобщенное устойчивое решение задачи Коши (70)–(71) определяется формулами

$$\begin{aligned} w(x,y-0) &= W\bigl(x,x,y,\xi_-(x,y)\bigr),\\ w(x,y+0) &= W\bigl(x,x,y,\xi_+(x,y)\bigr), \end{aligned} \tag{75}$$

где через $\xi_-(x,y)$ и $\xi_+(x,y)$ обозначены точная нижняя и точная верхняя грани множества значений $\{\xi = \xi_n\}$, при которых функция

$$I(x,y,\xi) = \int_0^\xi \bigl[\varphi(\eta) - W(0,x,y,\eta)\bigr]\,d\eta \tag{76}$$

принимает наименьшее значение при фиксированных значениях переменных x, y $(x > 0)$. Если функция (76) принимает наименьшее значение при единственном значении $\xi = \xi_1$, то $\xi_- = \xi_+$ и формулы (76) описывают гладкое классическое решение.

Формулы (75)–(76) были получены О. А. Олейник (1954), обобщение этих результатов на случай уравнения (63) было дано в работе А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1954). Эти и другие конструктивные методы построения обобщенных решений излагаются в книгах Б. Л. Рождественского, Н. Н. Яненко (1978), H. Rhee, R. Aris, N. R. Amundson (1986).

⊙ *Литература к разделу* 12.1.4: О. А. Олейник (1954, 1957, 1959), И. М. Гельфанд (1959), A. L. Hopf (1965), С. Н. Кружков (1966), Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко (1978), P. L. Lions (1982), M. G. Crandall, P.-L. Lions (1983), H. Rhee, R. Aris, N. R. Amundson (1986, 1989), А. И. Субботин (1991), A. I. Subbotin (1995), А. А. Меликян (1996), A. A. Melikyan (1998).