Из книги А. Д. Полянина, А. В. Манжирова, «Справочник по интегральным уравнениям». — М.: Физматлит, 2003.

9. Методы решения линейных уравнений вида $y(x) - \int_a^x K(x,t)y(t)\,dt = f(x)$

9.1. Интегральные уравнения Вольтерра второго рода

9.1-1. Предварительные замечания. Уравнения для резольвенты

В главе 9 излагаются методы решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода, которые имеют вид:

$$y(x) - \int_a^x K(x,t)y(t)\,dt = f(x), \tag{1}$$

где $y(x)$ — неизвестная функция ($a \leqslant x \leqslant b$), $K(x,t)$ — *ядро интегрального уравнения*, $f(x)$ — *свободный член* или *правая часть интегрального уравнения*. Классы функций, которым могут принадлежать $y(x)$, $f(x)$ и $K(x,t)$, определены в п. 8.1-1. В этих классах функций решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода существует и единственно.

При $f(x) \equiv 0$ уравнение (1) называют *однородным* , а при $f(x) \not\equiv 0$ — *неоднородным*.

Ядро интегрального уравнения $K(x,t)$ называется *вырожденным*, если оно представимо в виде $K(x,t) = g_1(x)h_1(t) + \cdots + g_n(x)h_n(t)$.

Ядро интегрального уравнения $K(x,t)$ называется *разностным*, если оно зависит от разности аргументов: $K(x,t) = K(x-t)$.

Замечание 1. Однородное интегральное уравнение Вольтерра второго рода имеет только тривиальное решение.

Замечание 2. Вывод о существовании и единственности решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода справедлив и для гораздо более широкого класса ядер и функций.

Замечание 3. Уравнение Вольтерра второго рода можно трактовать как уравнение Фредгольма второго рода, ядро которого $K(x,t)$ обращается в нуль при $t > x$ (см. главу 10).

Замечание 4. Случай, когда $a = -\infty$ и/или $b = \infty$, вообще говоря, не исключается, но при этом следует внимательно проверять выполнение условия квадратичной интегрируемости ядра $K(x,t)$ в квадрате $S = \{a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant t \leqslant b\}$.

Решение уравнения (1) можно представить в виде

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t)\,dt, \tag{2}$$

где *резольвента* $R(x,t)$ не зависит от свободного члена $f(x)$ и нижнего предела интегрирования a, а определяется только ядром интегрального уравнения.

Резольвента уравнения Вольтерра (1) удовлетворяет двум интегральным уравнениям

$$R(x,t) = K(x,t) + \int_t^x K(x,s)R(s,t)\,ds, \tag{3}$$

$$R(x,t) = K(x,t) + \int_t^x K(s,t)R(x,s)\,ds, \tag{4}$$

в которых интегрирование ведется по различным парам переменных ядра и резольвенты.

9.1-2. Связь между решениями интегральных уравнений

Приведем две полезные формулы, выражающие решение одного интегрального уравнение через решения других интегральных уравнений.

1°. Пусть решению уравнения Вольтерра второго рода с ядром $K(x,t)$ отвечает резольвента $R(x,t)$. Тогда решению уравнения Вольтерра второго рода с ядром $K^*(x,t) = -K(t,x)$ отвечает резольвента $R^*(x,t) = -R(t,x)$.

2°. Пусть имеются два уравнения Вольтерра второго рода с ядрами $K_1(x,t)$ и $K_2(x,t)$, которым соответствуют резольвенты $R_1(x,t)$ и $R_2(x,t)$. Тогда уравнение Вольтерра с ядром

$$K(x,t) = K_1(x,t) + K_2(x,t) - \int_t^x K_1(x,s)K_2(s,t)\,ds \tag{5}$$

имеет резольвенту

$$R(x,t) = R_1(x,t) + R_2(x,t) + \int_t^x R_1(s,t)R_2(x,s)\,ds. \tag{6}$$

Отметим, что в формулах (5) и (6) интегрирование ведется по различным парам переменных.

⊙ *Литература*: Э. Гурса (1934), Г. М. Мюнтц (1934), С. Г. Михлин (1959), Ф. Трикоми (1960), П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), Л. Я. Цлаф (1970), J. A. Cochran (1972), C. Corduneanu (1973), В. И. Смирнов (1974), В. Вольтерра (1982), A. J. Jerry (1985), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986), A. D. Polyanin, A. V. Manzhirov (1998), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000).

9.2. Уравнения с вырожденным ядром: $K(x,t) = g_1(x)h_1(t) + \dots + g_n(x)h_n(t)$

9.2-1. Уравнения с ядром $K(x,t) = \varphi(x) + \psi(x)(x-t)$

Решение уравнений Вольтерра с таким ядром можно представить в виде формулы

$$y = w''_{xx}, \tag{1}$$

где $w = w(x)$ — решение линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$w''_{xx} - \varphi(x)w'_x - \psi(x)w = f(x), \tag{2}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$w(a) = w'_x(a) = 0. \tag{3}$$

Пусть $w_1 = w_1(x)$ — нетривиальное частное решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения (2) при $f(x) \equiv 0$. Пусть $w_1(a) \neq 0$. Тогда другое нетривиальное частное решение указанного линейного однородного дифференциального уравнения $w_2 = w_2(x)$ можно записать в виде

$$w_2(x) = w_1(x)\int_a^x \frac{\Phi(t)}{[w_1(t)]^2}\,dt, \qquad \Phi(x) = \exp\Bigl[\int_a^x \varphi(s)\,ds\Bigr].$$

Решение неоднородного уравнения (2), удовлетворяющее начальным условиям (3), дается формулой

$$w(x) = w_2(x)\int_a^x \frac{w_1(t)}{\Phi(t)}f(t)\,dt - w_1(x)\int_a^x \frac{w_2(t)}{\Phi(t)}f(t)\,dt. \tag{4}$$

Подставляя выражение (4) в формулу (1), получим решение исходного интегрального уравнения

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t)\,dt,$$

где

$$\begin{aligned} R(x,t) &= [w''_2(x)w_1(t) - w''_1(x)w_2(t)]\frac{1}{\Phi(t)} = \\ &= \varphi(x)\frac{\Phi(x)}{w_1(x)}\frac{w_1(t)}{\Phi(t)} + [\varphi(x)w'_1(x) + \psi(x)w_1(x)]\frac{w_1(t)}{\Phi(t)}\int_t^x \frac{\Phi(s)}{[w_1(s)]^2}\,ds. \end{aligned}$$

Здесь $\Phi(x) = \exp\Bigl[\int_a^x \varphi(s)\,ds\Bigr]$, штрихами обозначены производные по переменной x.

Для вырожденного ядра рассматриваемого вида резольвенту можно определить по формуле

$$R(x,t) = u''_{xx},$$

где вспомогательная функция u является решением линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$u''_{xx} - \varphi(x)u'_x - \psi(x)u = 0, \tag{5}$$

удовлетворяющим следующим начальным условиям при $x = t$:

$$u\big|_{x=t} = 0, \quad u'_x\big|_{x=t} = 1. \tag{6}$$

Параметр t входит лишь в начальные условия (6), при этом само уравнение (5) не зависит от t.

Замечание 1. Ядро рассматриваемого уравнения можно записать в виде $K(x,t) = G_1(x) + tG_2(x)$, где $G_1(x) = \varphi(x) + x\psi(x)$, $G_2(x) = -\varphi(x)$.

9.2-2. Уравнения с ядром $K(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)(t - x)$

Для вырожденного ядра рассматриваемого вида резольвента определяется выражением

$$R(x,t) = -v''_{tt}, \tag{7}$$

где вспомогательная функция v является решением линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$v''_{tt} + \varphi(t)v'_t + \psi(t)v = 0, \tag{8}$$

удовлетворяющим следующим начальным условиям при $t = x$:

$$v\big|_{t=x} = 0, \quad v'_t\big|_{t=x} = 1. \tag{9}$$

Величина x входит в начальные условия (9) лишь параметрически, при этом само уравнение (8) не зависит от x.

Пусть $v_1 = v_1(t)$ — нетривиальное частное решение уравнения (8). Тогда общее решение этого дифференциального уравнения дается формулой

$$v(t) = C_1 v_1(t) + C_2 v_1(t) \int_a^t \frac{ds}{\Phi(s)[v_1(s)]^2}, \qquad \Phi(t) = \exp\Big[\int_a^t \varphi(s)\,ds\Big].$$

Удовлетворяя начальным условиям (9), находим зависимость постоянных интегрирования C_1 и C_2 от параметра x. В результате получим решение задачи (8), (9):

$$v = v_1(x)\Phi(x) \int_x^t \frac{ds}{\Phi(s)[v_1(s)]^2}. \tag{10}$$

Подставляя выражение (10) в формулу (7) и исключая вторую производную с помощью уравнения (8), найдем резольвенту

$$R(x,t) = \varphi(t)\frac{v_1(x)\Phi(x)}{v_1(t)\Phi(t)} + v_1(x)\Phi(x)[\varphi(t)v'_t(t) + \psi(t)v_1(t)] \int_x^t \frac{ds}{\Phi(s)[v_1(s)]^2}.$$

Замечание 2. Ядро рассматриваемого интегрального уравнения можно записать в виде $K(x,t) = G_1(t) + xG_2(t)$, где $G_1(t) = \varphi(t) + t\psi(t)$, $G_2(t) = -\varphi(t)$.

9.2-3. Уравнения с ядром $K(x,t) = \sum_{m=1}^n \varphi_m(x)(x - t)^{m-1}$

Для определения резольвенты $R(x,t)$ введем вспомогательную функцию

$$u(x,t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_t^x R(s,t)(x-s)^{n-1}\,ds + \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!},$$

которая при $x = t$ обращается в нуль вместе со своими $n - 2$ первыми производными по x, а производная порядка $n - 1$ при $x = t$ равна единице. Кроме того,

$$R(x,t) = u_x^{(n)}(x,t), \qquad u_x^{(n)} = \frac{d^n u(x,t)}{dx^n}. \tag{11}$$

Подставляя (11) в уравнение для резольвенты (3) из п. 9.1-1, будем иметь

$$u_x^{(n)}(x,t) = K(x,t) + \int_t^x K(x,s)u_s^{(n)}(s,t)\,ds. \tag{12}$$

Применяя к интегралу в правой части (12) формулу интегрирования по частям, получим

$$u_x^{(n)}(x,t) = K(x,t) + \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m K_s^{(m)}(x,s) u_s^{(n-m-1)}(s,t)\Big|_{s=t}^{s=x}. \tag{13}$$

Подставляя теперь в (13) выражения для $K(x,t)$ и $u(x,t)$, придем к линейному однородному обыкновенному дифференциальному уравнению n-го порядка относительно функции $u(x,t)$.

Таким образом, резольвенту $R(x,t)$ интегрального уравнения Вольтерра с вырожденным ядром указанного вида можно получить при помощи (11), где $u(x,t)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению и начальным условиям:

$$u_x^{(n)} - \varphi_1(x)u_x^{(n-1)} - \varphi_2(x)u_x^{(n-2)} - 2\varphi_3(x)u_x^{(n-3)} - \cdots - (n-1)!\,\varphi_n(x)u = 0,$$
$$u\big|_{x=t} = u'_x\big|_{x=t} = \cdots = u_x^{(n-2)}\big|_{x=t} = 0, \quad u_x^{(n-1)}\big|_{x=t} = 1.$$

Величина t входит в начальные условия лишь параметрически, при этом само уравнение не зависит от t.

Замечание 3. К ядру рассматриваемого вида элементарными преобразованиями приводится ядро $K(x,t) = \sum\limits_{m=1}^{n} \phi_m(x)t^{m-1}$.

9.2-4. Уравнения с ядром $K(x,t) = \sum_{m=1}^n \varphi_m(t)(t-x)^{m-1}$

Представим резольвенту заданного вырожденного ядра в виде

$$R(x,t) = -v_t^{(n)}(x,t), \qquad v_t^{(n)} = \frac{d^n v(x,t)}{dt^n},$$

причем вспомогательная функция $v(x,t)$ при $t = x$ обращается в нуль вместе с $n-2$ производными по t, а $n-1$-я производная по t при $t = x$ равна единице. Подставляя выражение для резольвенты в уравнение (3) из п. 9.1-1, получим

$$v_t^{(n)}(x,t) = \int_t^x K(s,t)v_s^{(n)}(x,s)\,ds - K(x,t).$$

Применим к интегралу в правой части формулу интегрирования по частям. Тогда, учитывая свойства вспомогательной функции $v(x,t)$, придем к следующей задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка:

$$v_t^{(n)} + \varphi_1(t)v_t^{(n-1)} + \varphi_2(t)v_t^{(n-2)} + 2\varphi_3(t)v_t^{(n-3)} + \cdots + (n-1)!\,\varphi_n(t)v = 0,$$
$$v\big|_{t=x} = v'_t\big|_{t=x} = \cdots = v_t^{(n-2)}\big|_{t=x} = 0, \quad v_t^{(n-1)}\big|_{t=x} = 1.$$

Величина x входит в начальные условия лишь параметрически, при этом само уравнение не зависит от x.

Замечание 4. К ядру рассматриваемого вида элементарными преобразованиями приводится ядро $K(x,t) = \sum\limits_{m=1}^{n} \phi_m(t)x^{m-1}$.

9.2-5. Уравнения с вырожденным ядром общего вида

В данном случае уравнение Вольтерра второго рода можно представить в виде

$$y(x) - \sum_{m=1}^{n} g_m(x)\int_a^x h_m(t)y(t)\,dt = f(x). \tag{14}$$

Используя обозначения

$$w_j(x) = \int_a^x h_j(t)y(t)\,dt, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{15}$$

запишем уравнение (14) следующим образом:

$$y(x) = \sum_{m=1}^{n} g_m(x)w_m(x) + f(x). \tag{16}$$

Дифференцируя выражения (15) с учетом формулы (16), приходим к системе линейных дифференциальных уравнений для определения функций $w_j = w_j(x)$:

$$w'_j = h_j(x)\Big[\sum_{m=1}^{n} g_m(x)w_m + f(x)\Big], \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

с начальными условиями

$$w_j(a) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Если найдено решение этой системы, то решение исходного интегрального уравнения (14) определяется по формуле (16) или с помощью любого из выражений

$$y(x) = \frac{w_j'(x)}{h_j(x)}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

которые получены путем дифференцирования формулы (15).

⊙ *Литература*: Э. Гурса (1934), Г. М. Мюнтц (1934), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986), A. D. Polyanin, A. V. Manzhirov (1998), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000).

9.3. Уравнения с разностным ядром: $K(x,t) = K(x-t)$

9.3-1. Метод решения, основанный на преобразовании Лапласа

Уравнения Вольтерра второго рода с ядром, зависящим от разности аргументов, имеют вид

$$y(x) - \int_0^x K(x-t)y(t)\,dt = f(x). \tag{1}$$

Применяя преобразование Лапласа $\mathfrak{L}$ к уравнению (1) и учитывая, что интеграл с ядром, зависящим от разности аргументов, по теореме о свертке (см. п. 7.2-4) преобразуется в произведение $\tilde{K}(p)\tilde{y}(p)$, приходим к уравнению для образа искомой величины

$$\tilde{y}(p) - \tilde{K}(p)\tilde{y}(p) = \tilde{f}(p). \tag{2}$$

Решение уравнения (2) определяется формулой

$$\tilde{y}(p) = \frac{\tilde{f}(p)}{1 - \tilde{K}(p)}, \tag{3}$$

которую можно записать в эквивалентном виде

$$\tilde{y}(p) = \tilde{f}(p) + \tilde{R}(p)\tilde{f}(p), \qquad \tilde{R}(p) = \frac{\tilde{K}(p)}{1 - \tilde{K}(p)}. \tag{4}$$

Применяя к (4) обратное преобразование Лапласа, получим решение уравнения (1) в виде

$$\begin{aligned} y(x) &= f(x) + \int_0^x R(x-t)f(t)\,dt, \\ R(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{R}(p)e^{px}\,dp. \end{aligned} \tag{5}$$

При использовании формулы (5) могут возникнуть технические трудности:

1°. При получении изображения $\tilde{K}(p) = \displaystyle\int_0^\infty K(x)e^{-px}\,dx$ для конкретного ядра $K(x)$.

2°. При нахождении оригинала резольвенты (5), изображение которого $\tilde{R}(p)$ находится по формуле (4).

Для вычисления соответствующих интегралов применяют таблицы прямых и обратных преобразований Лапласа [см., например, Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1969), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974)], причем во многих случаях для обратного преобразования используют методы теории функций комплексного переменного, включая теорему о вычетах (см. п. 7.1-4).

Замечание. Если нижний предел в интеграле уравнения Вольтерра с ядром, зависящим от разности аргументов, равен a, то его можно свести к уравнению (1) с помощью замены $x = \bar{x} - a$, $t = \bar{t} - a$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y(x) + A\int_0^x \sin\bigl[\lambda(x-t)\bigr]y(t)\,dt = f(x), \tag{6}$$

которое является частным случаем уравнения (1) при $K(x) = -A\sin(\lambda x)$.

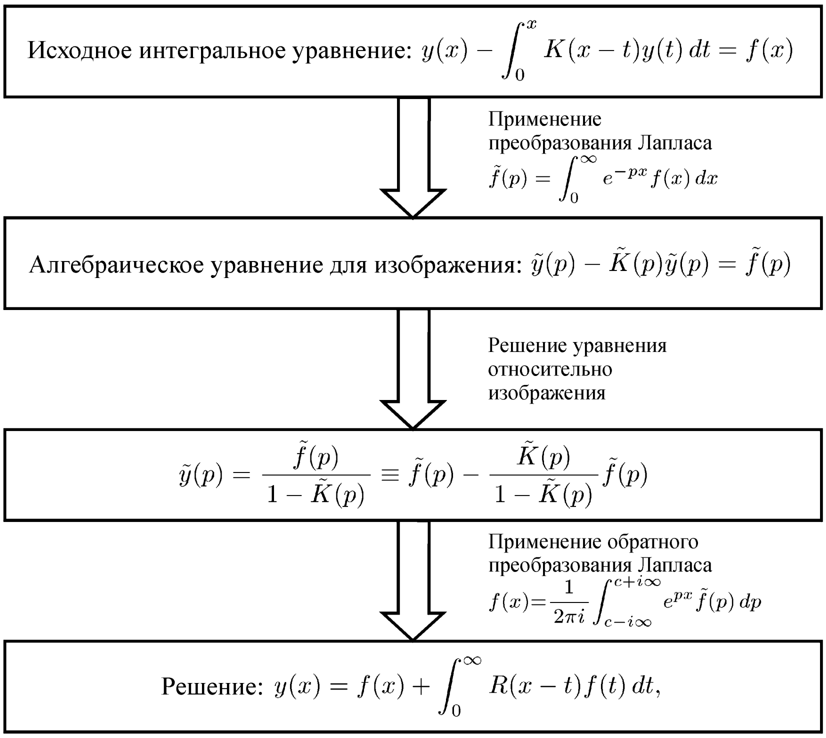

Рис. 2. Схема решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода с разностным ядром с помощью интегрального преобразования Лапласа, $R(x)$ — оригинал функции $\tilde{R}(p) = \dfrac{\tilde{K}(p)}{1-\tilde{K}(p)}$.

Сначала, используя таблицы преобразований Лапласа [Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1969, стр. 138)], получим образ ядра интегрального уравнения в виде

$$\tilde{K}(p) = -\frac{A\lambda}{p^2+\lambda^2}.$$

Затем по формуле (4) найдем образ резольвенты:

$$\tilde{R}(p) = -\frac{A\lambda}{p^2+\lambda(A+\lambda)}.$$

Используя далее таблицы обратных преобразований Лапласа [Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1969, стр. 207)], получим оригинал резольвенты

$$R(x) = \begin{cases} -\dfrac{A\lambda}{k}\sin(kx) & \text{при } \lambda(A+\lambda) > 0, \\ -\dfrac{A\lambda}{k}\operatorname{sh}(kx) & \text{при } \lambda(A+\lambda) < 0, \end{cases} \qquad \text{где} \quad k = |\lambda(A+\lambda)|^{1/2}.$$

Заметим, что в частном случае при $\lambda = -A$ получаем $R(x) = A^2x$. Подставляя эти выражения в формулу (5), находим решение интегрального уравнения (6). В частности, при $\lambda(A+\lambda) > 0$ это решение имеет вид

$$y(x) = f(x) - \frac{A\lambda}{k}\int_0^x \sin\bigl[k(x-t)\bigr]f(t)\,dt, \qquad k = \sqrt{\lambda(A+\lambda)}. \tag{7}$$

На рис. 2 приведена принципиальная схема решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода с разностным ядром с помощью интегрального преобразования Лапласа.

9.3-2. Метод, основанный на решении вспомогательного уравнения

Рассмотрим интегральное уравнение

$$Ay(x) + B\int_a^x K(x-t)y(t)\,dt = f(x). \tag{8}$$

Пусть $w = w(x)$ — решение вспомогательного более простого уравнения при $f(x) \equiv 1$, $a = 0$:

$$Aw(x) + B\int_0^x K(x-t)w(t)\,dt = 1. \tag{9}$$

Тогда решение исходного уравнения с произвольной правой частью (8) выражается через решение вспомогательного уравнения (9) с помощью формулы

$$y(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x w(x-t)f(t)\,dt = f(a)w(x-a) + \int_a^x w(x-t)f_t'(t)\,dt. \tag{10}$$

Докажем это утверждение. Перепишем выражение (10) (в котором предварительно сделано переобозначение параметра интегрирования t на s) в виде

$$y(x) = \frac{d}{dx}I(x), \qquad I(x) = \int_a^x w(x-s)f(s)\,ds, \tag{11}$$

и подставим его в левую часть уравнения (8). В результате некоторых преобразований и изменения порядка интегрирования в двойном интеграле с учетом (9) получим

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}AI(x) + B\int_a^x K(x-t)\frac{d}{dt}I(t)\,dt &= \frac{d}{dx}AI(x) + \frac{d}{dx}B\int_a^x K(x-t)I(t)\,dt = \\
&= \frac{d}{dx}\Big[A\int_a^x w(x-s)f(s)\,ds + B\int_a^x\int_a^t K(x-t)w(t-s)f(s)\,ds\,dt\Big] = \\
&= \frac{d}{dx}\Big\{\int_a^x f(s)\Big[Aw(x-s) + B\int_s^x K(x-t)w(t-s)\,dt\Big]\,ds\Big\} = \\
&= \frac{d}{dx}\Big\{\int_a^x f(s)\Big[Aw(x-s) + B\int_0^{x-s} K(x-s-\lambda)w(\lambda)\,d\lambda\Big]\,ds\Big\} = \\
&= \frac{d}{dx}\int_a^x f(s)\,ds = f(x),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

9.3-3. Сведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям

Рассмотрим специальный случай, когда образ ядра интегрального уравнения (1) можно представить в виде

$$1 - \tilde{K}(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}, \tag{12}$$

где $Q(p)$ и $R(p)$ некоторые многочлены степени n:

$$Q(p) = \sum_{k=0}^n A_k p^k, \quad R(p) = \sum_{k=0}^n B_k p^k. \tag{13}$$

В этом случае решение интегрального уравнения (1) удовлетворяет линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению n-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{k=0}^n A_k y_x^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^n B_k f_x^{(k)}(x). \tag{14}$$

Уравнение (14) кратко можно записать в операторном виде

$$Q(D)y(x) = R(D)f(x), \qquad D \equiv \frac{d}{dx}.$$

Начальные условия для уравнения (14) получаются из равенства

$$\sum_{k=0}^n A_k \sum_{s=0}^{k-1} p^{k-1-s} y_x^{(s)}(0) - \sum_{k=0}^n B_k \sum_{s=0}^{k-1} p^{k-1-s} f_x^{(s)}(0) = 0 \tag{15}$$

путем выделения членов при одинаковых степенях параметра p.

Доказательство этого утверждения проводится с помощью применения преобразования Лапласа к дифференциальному уравнению (14) и последующим сравнением полученного выражения с уравнением (2) с учетом равенства (12).

Другой метод сведения интегрального уравнения к обыкновенным дифференциальным уравнениям описан в разд. 9.7.

9.3-4. Приведение к уравнению Винера–Хопфа второго рода

Уравнение Вольтерра второго рода с разностным ядром вида

$$y(x) + \int_0^x K(x-t)y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < x < \infty, \tag{16}$$

можно привести к уравнению Винера–Хопфа в форме

$$y(x) + \int_0^\infty K_+(x-t)y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < x < \infty, \tag{17}$$

где ядро $K_+(x-t)$ дается соотношением

$$K_+(s) = \begin{cases} K(s) & \text{при } s > 0, \\ 0 & \text{при } s < 0. \end{cases}$$

Методы исследования уравнения (17) описаны в главе 11, где приведен и пример построения решения уравнения Вольтерра второго рода с разностным ядром посредством решения соответствующего уравнения Винера–Хопфа второго рода (см. п. 11.9-3).

9.3-5. Метод дробного интегрирования для уравнения Абеля

Рассмотрим обобщенное уравнение Абеля второго рода в форме

$$y(x) - \lambda \int_a^x \frac{y(t)}{(x-t)^\mu}\,dt = f(x), \qquad x > a, \tag{18}$$

где $0 < \mu < 1$. Будем считать, что $x \in [a,b]$, $f(x) \in AC$, $y(t) \in L_1$, и применим технику дробного интегрирования (см. разд. 8.5). Положив

$$\mu = 1-\beta, \qquad 0 < \beta < 1, \qquad \lambda = \frac{\nu}{\Gamma(\beta)}, \tag{19}$$

на основании (8.5.1) запишем уравнение (18) в виде

$$\bigl(1 - \nu \mathbf{I}^\beta_{a+}\bigr) y(x) = f(x), \qquad x > a. \tag{20}$$

Теперь решение обобщенного уравнения Абеля второго рода можно символически представить следующим образом:

$$y(x) = \bigl(1 - \nu \mathbf{I}^\beta_{a+}\bigr)^{-1} f(x), \qquad x > a. \tag{21}$$

Разлагая операторное выражение в скобках в ряд по степеням оператора при помощи формулы для геометрической прогрессии, получим

$$y(x) = \Bigl[1 + \sum_{n=1}^\infty \bigl(\nu \mathbf{I}^\beta_{a+}\bigr)^n\Bigr] f(x), \qquad x > a. \tag{22}$$

В развернутой записи с учетом равенства $(\mathbf{I}^\beta_{a+})^n = \mathbf{I}^{\beta n}_{a+}$ формула (22) принимает вид

$$y(x) = f(x) + \sum_{n=1}^\infty \frac{\nu^n}{\Gamma(\beta n)} \int_a^x (x-t)^{\beta n - 1} f(t)\,dt, \qquad x > a. \tag{23}$$

Поменяем в выражении (23) порядок суммирования и интегрирования, и заметим, что

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\nu^n (x-t)^{\beta n-1}}{\Gamma(\beta n)} = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^\infty \frac{\nu^n (x-t)^{\beta n}}{\Gamma(1+\beta n)}.$$

Тогда с учетом замены (19) решение обобщенного уравнения Абеля второго рода примет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t) f(t)\,dt, \qquad x > a, \tag{24}$$

где резольвента $R(x-t)$ определяется формулой

$$R(x-t) = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^\infty \frac{\bigl[\lambda \Gamma(1-\mu)(x-t)^{(1-\mu)}\bigr]^n}{\Gamma[1+(1-\mu)n]}. \tag{25}$$

Ряд в представлении резольвенты (25) удается в некоторых случаях просуммировать и получить для нее явное выражение.

Пример 2. Рассмотрим уравнение Абеля второго рода (в уравнении (18) полагаем $\mu = \frac{1}{2}$)

$$y(x) - \lambda \int_a^x \frac{y(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt = f(x), \qquad x > a. \tag{26}$$

В силу формулы (25) резольвента для уравнения (26) задается выражением

$$R(x-t) = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\lambda\sqrt{\pi(x-t)}\,\right]^n}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}n\right)}. \tag{27}$$

Известно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n/2}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}n\right)} = e^x \operatorname{erf}\sqrt{x}, \qquad \operatorname{erf} x \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt, \tag{28}$$

где $\operatorname{erf} x$ — интеграл вероятностей. Тогда на основании (27) и (28) выражение для резольвенты можно записать в форме

$$R(x-t) = \frac{d}{dx}\Big\{\exp[\lambda^2\pi(x-t)] \operatorname{erf}\left[\lambda\sqrt{\pi(x-t)}\,\right]\Big\}. \tag{29}$$

Воспользовавшись соотношениями (24) и (27), получим решение интегрального уравнения Абеля второго рода, которое имеет вид

$$y(x) = f(x) + \frac{d}{dx} \int_a^x \Big\{\exp[\lambda^2\pi(x-t)] \operatorname{erf}\left[\lambda\sqrt{\pi(x-t)}\,\right]\Big\} f(t)\,dt, \qquad x > a. \tag{30}$$

Заметим, что в рассмотренном случае решение построено в замкнутом виде.

9.3-6. Системы интегральных уравнений Вольтерра

Преобразование Лапласа можно применить для решения систем интегральных уравнений Вольтерра вида

$$y_m(x) - \sum_{k=1}^{n} \int_0^x K_{mk}(x-t) y_k(t)\,dt = f_m(x), \qquad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{31}$$

Подействуем на систему (31) преобразованием Лапласа. Тогда будем иметь

$$\tilde{y}_m(p) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{K}_{mk}(p) \tilde{y}_k(p) = \tilde{f}_m(p), \qquad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{32}$$

Решая эту систему линейных алгебраических уравнений, определим $\tilde{y}_m(p)$, и решение рассматриваемой системы уравнений примет вид

$$y_m(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{y}_m(p) e^{px}\,dp. \tag{33}$$

Преобразование Лапласа можно применить для построения решения систем уравнений Вольтерра первого рода и интегродифференциальных уравнений.

⊙ *Литература*: В. А. Диткин, А. П. Прудников (1965), П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), В. И. Смирнов (1974), K. B. Oldham, J. Spanier (1974), Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978), Ю. И. Бабенко (1986), С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987), R. Gorenflo, S. Vessella (1991).

9.4. Операторные методы решения линейных интегральных уравнений

9.4-1. Использование решения «укороченного» уравнения

Рассмотрим линейное уравнение второго рода

$$y(x) + \mathbf{L}\,[y] = f(x), \tag{1}$$

где $\mathbf{L}$ — некоторый линейный (интегральный) оператор.

Пусть решение вспомогательного «укороченного» уравнения первого рода

$$\mathbf{L}\,[u] = g(x), \tag{2}$$

может быть представлено в виде

$$u(x) = \mathbf{M}\big[\mathbf{L}[g]\big], \tag{3}$$

где $\mathbf{M}$ — некоторый известный линейный оператор. Формула (3) означает, что

$$\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{ML}.$$

Подействуем оператором $\mathbf{L}^{-1}$ на обе части уравнения (1). В результате получим

$$\mathbf{M}\big[\mathbf{L}[y]\big] + y(x) = \mathbf{M}\big[\mathbf{L}[f]\big]. \tag{4}$$

Исключая $y(x)$ из (1) и (4), приходим к следующему уравнению:

$$\mathbf{M}\,[w] - w(x) = F(x), \tag{5}$$

где использованы обозначения

$$w = \mathbf{L}\,[y], \quad F(x) = \mathbf{M}\big[\mathbf{L}[f]\big] - f(x).$$

В ряде случаев уравнение (5) оказывается проще, чем исходное уравнение (1). Это бывает, например, когда оператор $\mathbf{M}$ является константой (см. п. 11.7-2) или дифференциальным оператором:

$$\mathbf{M} = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0, \quad D \equiv \frac{d}{dx}.$$

В последнем случае уравнение (5) представляет собой обыкновенное линейное дифференциальное уравнение относительно функции w.

Если решение $w = w(x)$ уравнения (5) получено, то решение уравнения (1) дается формулой $y(x) = \mathbf{M}\big[\mathbf{L}[w]\big]$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение Абеля второго рода

$$y(x) + \lambda \int_a^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = f(x). \tag{6}$$

Для его решения будем использовать небольшую модификацию схемы, описанной выше, которая соответствует случаю $\mathbf{M} \equiv \text{const}\ \dfrac{d}{dx}$.

Перепишем уравнение (6) следующим образом:

$$\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = \frac{f(x) - y(x)}{\lambda}. \tag{7}$$

Считая правую часть известной, будем рассматривать (7) как уравнение Абеля первого рода. Его решение можно записать в виде (см. пример из п. 8.4-4)

$$y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t) - y(t)}{\lambda\sqrt{x-t}}\,dt$$

или

$$y(x) + \frac{1}{\pi\lambda}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{x-t}}\,dt = \frac{1}{\pi\lambda}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{x-t}}. \tag{8}$$

Продифференцируем обе части уравнения (6) по x, затем умножим обе части (8) на $-\pi\lambda^2$ и сложим почленно полученные выражения. В результате придем к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка для функции $y = y(x)$:

$$y'_x - \pi\lambda^2 y = F'_x(x), \tag{9}$$

где

$$F(x) = f(x) - \lambda \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{x-t}}. \tag{10}$$

Уравнение (9) следует дополнить «начальным» условием

$$y(a) = f(a), \tag{11}$$

которое является следствием (6).

Решение задачи (9)–(11) имеет вид

$$y(x) = F(x) + \pi\lambda^2 \int_a^x \exp[\pi\lambda^2(x-t)]F(t)\,dt \tag{12}$$

и определяет решение уравнения Абеля второго рода (6).

9.4-2. Использование вспомогательного уравнения второго рода

Решение уравнения Абеля второго рода (6) можно было получить также другим методом, который излагается ниже.

Рассмотрим линейное уравнение

$$y(x) - \mathbf{L}\,[y] = f(x), \tag{13}$$

где $\mathbf{L}$ — линейный оператор. Пусть решение вспомогательного уравнения

$$w(x) - \mathbf{L}^n[w] = \Phi(x), \qquad \mathbf{L}^n[w] \equiv \mathbf{L}\left[\mathbf{L}^{n-1}[w]\right], \tag{14}$$

содержащего n-ю степень оператора $\mathbf{L}$, известно и определяется формулой

$$w(x) = \mathbf{M}\,[\Phi(x)]. \tag{15}$$

Тогда решение исходного уравнения (13) имеет вид

$$y(x) = \mathbf{M}\,[\Phi(x)], \qquad \Phi(x) = \mathbf{L}^{n-1}[f] + \mathbf{L}^{n-2}[f] + \cdots + \mathbf{L}\,[f] + f(x). \tag{16}$$

Это утверждение доказывается применением оператора $\mathbf{L}^{n-1} + \mathbf{L}^{n-2} + \cdots + \mathbf{L} + 1$ к обеим частям уравнения (13) с учетом операторного равенства

$$\big(1 - \mathbf{L}\big)\big(\mathbf{L}^{n-1} + \mathbf{L}^{n-2} + \cdots + \mathbf{L} + 1\big) = 1 - \mathbf{L}^n$$

и формулы (16) для $\Phi(x)$. В уравнении (14) вместо $w(x)$ можно писать $y(x)$.

Пример 2. Используем теперь операторный метод (при $n = 2$) для решения обобщенного уравнения Абеля с показателем $3/4$:

$$y(x) - b\int_0^x \frac{y(t)\,dt}{(x-t)^{3/4}} = f(x). \tag{17}$$

Рассмотрим сначала интегральный оператор с разностным ядром

$$\mathbf{L}\,[y(x)] \equiv \int_0^x K(x-t)y(t)\,dt.$$

Посмотрим как действует $\mathbf{L}^2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2\,[y] \equiv \mathbf{L}\left[\mathbf{L}\,[y]\,\right] &= \int_0^x \int_0^t K(x-t)K(t-s)y(s)\,ds\,dt = \\ &= \int_0^x y(s)\,ds \int_s^x K(x-t)K(t-s)\,dt = \int_0^x K_2(x-s)y(s)\,ds, \\ K_2(z) &= \int_0^z K(\xi)K(z-\xi)\,d\xi. \end{aligned} \tag{18}$$

При выводе этой формулы менялся порядок интегрирования и делалась замена $\xi = t - s$.

Для ядра степенного вида

$$K(\xi) = b\xi^{\mu}$$

имеем

$$K_2(z) = b^2\,\frac{\Gamma^2(1+\mu)}{\Gamma(2+2\mu)}\,z^{1+2\mu}. \tag{19}$$

Для уравнения (17) имеем

$$\mu = -\frac{3}{4}, \quad K_2(z) = A\frac{1}{\sqrt{z}}, \quad A = \frac{b^2}{\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\tfrac{1}{4}\right).$$

Поэтому вспомогательное уравнение (14), соответствующее значению $n = 2$, имеет вид

$$y(x) - A\int_0^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = \Phi(x), \tag{20}$$

где

$$\Phi(x) = f(x) + b\int_0^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{3/4}}.$$

Уравнение (20) с точностью до переобозначений $A \to -\lambda$, $\Phi \to f$ совпадает с уравнением (6), его решение может быть получено по формуле (12).

Замечание. Из формулы (19) следует, что решение обобщенного уравнения Абеля с показателем β

$$y(x) + \lambda\int_0^x \frac{y(t)\,dt}{(x-t)^{\beta}} = f(x)$$

сводится к решению уравнения аналогичного вида с другим показателем степени $\beta_1 = 2\beta - 1$. В частности, уравнение Абеля (6), соответствующее значению $\beta = \frac{1}{2}$, сводится к решению уравнения с вырожденным ядром при $\beta_1 = 0$.

9.4-3. Метод решения «квадратных» операторных уравнений

Пусть известно решение линейного (интегрального, дифференциального и др.) уравнения

$$y(x) - \lambda \mathbf{L}\,[y] = f(x) \tag{21}$$

для произвольной правой части $f(x)$ и любого λ из интервала $(\lambda_{\min}, \lambda_{\max})$. Обозначим это решение так:

$$y = Y(f, \lambda). \tag{22}$$

Построим решение более сложного уравнения вида

$$y(x) - a\mathbf{L}\,[y] - b\mathbf{L}^2\,[y] = f(x), \tag{23}$$

где a и b — некоторые числа, $f(x)$ — произвольная функция. Для этого представим левую часть уравнения (23) в виде произведения операторов:

$$\bigl(1 - a\mathbf{L} - b\mathbf{L}^2\bigr)[y] \equiv \bigl(1 - \lambda_1\mathbf{L}\bigr)\bigl(1 - \lambda_2\mathbf{L}\bigr)[y], \tag{24}$$

где λ_1 и λ_2 — корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0. \tag{25}$$

Пусть $\lambda_{\min} < \lambda_1,\ \lambda_2 < \lambda_{\max}$.

Решим вспомогательное уравнение

$$w(x) - \lambda_2\mathbf{L}\,[w] = f(x), \tag{26}$$

которое является частным случаем уравнения (21) при $\lambda = \lambda_2$. Его решение дается формулой

$$w(x) = Y(f, \lambda_2). \tag{27}$$

Уравнение (23) с учетом (24) и (26) можно записать в виде

$$\bigl(1 - \lambda_1\mathbf{L}\bigr)\bigl(1 - \lambda_2\mathbf{L}\bigr)[y] = \bigl(1 - \lambda_2\mathbf{L}\bigr)[w]$$

или, с учетом тождества $(1 - \lambda_1\mathbf{L})(1 - \lambda_2\mathbf{L}) \equiv (1 - \lambda_2\mathbf{L})(1 - \lambda_1\mathbf{L})$, в виде

$$\bigl(1 - \lambda_2\mathbf{L}\bigr)\Bigl\{\bigl(1 - \lambda_1\mathbf{L}\bigr)[y] - w(x)\Bigr\} = 0.$$

Это равенство будет выполняться, если искомая функция $y(x)$ будет удовлетворять уравнению

$$y(x) - \lambda_1\mathbf{L}\,[y] = w(x). \tag{28}$$

Решение уравнения (28) дается формулой

$$y(x) = Y(w, \lambda_1), \quad \text{где} \quad w = Y(f, \lambda_2). \tag{29}$$

Если однородное уравнение $y(x) - \lambda_2\mathbf{L}[y] = 0$ имеет только тривиальное* решение $y \equiv 0$, то формула (29) определяет единственное решение исходного уравнения (23).

Пример 3. Рассмотрим интегральное уравнение

$$y(x) - \int_0^x \Bigl(\frac{A}{\sqrt{x-t}} + B\Bigr) y(t)\,dt = f(x).$$

Из результатов примера 2 (см. п. 9.4-2) следует, что его можно записать в виде уравнения (23):

$$y(x) - A\mathbf{L}\,[y] - \tfrac{1}{\pi}B\mathbf{L}^2\,[y] = f(x), \qquad \mathbf{L}\,[y] \equiv \int_0^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{x-t}}.$$

Поэтому решение интегрального уравнения (в квадратурах) дается формулами

$$y(x) = Y(w, \lambda_1), \quad w = Y(f, \lambda_2),$$

$$Y(f, \lambda) = F(x) + \pi\lambda^2 \int_0^x \exp\bigl[\pi\lambda^2(x-t)\bigr] F(t)\,dt, \quad F(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{x-t}},$$

где λ_1 и λ_2 — корни квадратного уравнения $\lambda^2 - A\lambda - \frac{1}{\pi}B = 0$.

Этот метод применим также для решения (в квадратурах) более общих уравнений вида

$$y(x) - \int_0^x \Bigl[\frac{A}{(x-t)^\beta} + \frac{B}{(x-t)^{2\beta-1}}\Bigr] y(t)\,dt = f(x),$$

где β — рациональное число, удовлетворяющее условию $0 < \beta < 1$ (см. пример 2 из п. 9.4-2).

---

* Если однородное уравнение $y(x) - \lambda_2\mathbf{L}[y] = 0$ имеет нетривиальные решения, то в правой части уравнения (28) вместо $w(x)$ должна стоять функция $w(x) + y_0(x)$, где y_0 — общее решение указанного однородного уравнения.

9.4-4. Решение операторных уравнений полиномиального вида

Метод, описанный в п. 9.4-3, допускает обобщение на случай операторных уравнений полиномиального вида. Будем считать, что решение линейного неоднородного уравнения (21) дается формулой (22), а соответствующее однородное уравнение имеет только тривиальное решение.

Построим решение более сложного уравнения с полиномиальной левой частью относительно оператора $\mathbf{L}$:

$$y(x) - \sum_{k=1}^{n} A_k \mathbf{L}^k [y] = f(x), \qquad \mathbf{L}^k \equiv \mathbf{L}\big(\mathbf{L}^{k-1}\big), \tag{30}$$

где A_k — некоторые числа, $f(x)$ — произвольная функция.

Обозначим $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ корни характеристического уравнения

$$\lambda^n - \sum_{k=1}^{n} A_k \lambda^{n-k} = 0. \tag{31}$$

Левую часть уравнения (30) можно представить в виде произведения операторов:

$$y(x) - \sum_{k=1}^{n} A_k \mathbf{L}^k [y] \equiv \prod_{k=1}^{n} \big(1 - \lambda_k \mathbf{L}\big)[y]. \tag{32}$$

Решение вспомогательного уравнения (26), в котором переобозначены $w \to y_{n-1}$, $\lambda_2 \to \lambda_n$, дается формулой $y_{n-1}(x) = Y(f, \lambda_n)$. Рассуждая аналогично тому, как это делалось в п. 9.4-3, получим, что решение уравнения (30) сводится к решению более простого уравнения

$$\prod_{k=1}^{n-1} \big(1 - \lambda_k \mathbf{L}\big)[y] = y_{n-1}(x), \tag{33}$$

которое имеет меньшую степень (на единицу) относительно оператора $\mathbf{L}$, чем исходное уравнение. Аналогичным образом можно показать, что уравнение (33) сводится к решению более простого уравнения вида

$$\prod_{k=1}^{n-2} \big(1 - \lambda_k \mathbf{L}\big)[y] = y_{n-2}(x), \qquad y_{n-2}(x) = Y(y_{n-1}, \lambda_{n-1}).$$

Продолжая последовательно процесс понижения порядка уравнения, придем в итоге к уравнению (28), в правой части которого стоит функция $y_1(x) = Y(y_2, \lambda_2)$. Решение этого уравнения дается формулой $y(x) = Y(y_1, \lambda_1)$.

Решение исходного уравнения (30) определяется рекуррентно с помощью формул

$$y_{k-1}(x) = Y(y_k, \lambda_k); \quad k = n, \ldots, 2, 1, \quad \text{где} \quad y_n(x) \equiv f(x), \quad y_0(x) \equiv y(x).$$

Отметим, что здесь используется убывающая последовательность $k = n, \ldots, 2, 1$.

9.4-5. Некоторые обобщения

Пусть левая часть линейного (интегрального) уравнения

$$y(x) - \mathbf{Q}[y] = f(x) \tag{34}$$

может быть представлена в виде произведения

$$y(x) - \mathbf{Q}[y] \equiv \prod_{k=1}^{n} \big(1 - \mathbf{L}_k\big)[y], \tag{35}$$

где $\mathbf{L}_k$ — линейные операторы. Будем считать, что решения вспомогательных уравнений

$$y(x) - \mathbf{L}_k[y] = f(x), \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{36}$$

известны и даются формулами

$$y(x) = Y_k\big[f(x)\big], \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{37}$$

Решение вспомогательного уравнения (36) при $k = n$, в котором переобозначено $y \to y_{n-1}$, дается формулой $y_{n-1}(x) = Y_n\big[f(x)\big]$. Рассуждая аналогично тому, как это делалось в п. 9.4-3, получим, что решение уравнения (34) сводится к решению более простого уравнения

$$\prod_{k=1}^{n-1} \big(1 - \mathbf{L}_k\big)[y] = y_{n-1}(x).$$

Продолжая последовательно процесс «понижения порядка» уравнения, придем в итоге к уравнению (36) при $k = 1$, в правой части которого стоит функция $y_1(x) = Y_2\big[y_2(x)\big]$. Решение этого уравнения дается формулой $y(x) = Y_1\big[y_1(x)\big]$.

Решение исходного уравнения (35) определяется рекуррентно с помощью формул

$$y_{k-1}(x) = Y_k\big[y_k(x)\big]; \quad k = n, \ldots, 2, 1, \quad \text{где} \quad y_n(x) \equiv f(x), \quad y_0(x) \equiv y(x).$$

Отметим, что здесь используется убывающая последовательность $k = n, \ldots, 2, 1$.

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, A. V. Manzhirov (1998), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000).

9.5. Построение решений уравнений со специальной правой частью

В этом разделе описаны способы построения решений интегральных уравнений со специальной правой частью. Эти способы основаны на использовании вспомогательных решений, зависящих от свободного параметра.

9.5-1. Общая схема

Рассмотрим линейное уравнение, которое для краткости будем записывать в виде

$$\mathbf{L}\,[y] = f_{\rm g}(x, \lambda), \tag{1}$$

где $\mathbf{L}$ — некоторый линейный (интегральный, дифференциальный и др.) оператор, который действует по переменной x и не зависит от параметра λ; $f_{\rm g}(x, \lambda)$ — конкретная функция, которая зависит от переменной x и параметра λ.

Будем считать, что решение уравнения (1) известно:

$$y = y(x, \lambda). \tag{2}$$

Пусть $\mathbf{M}$ — некоторый линейный (интегральный, дифференциальный и др.) оператор, который действует по параметру λ и не зависит от переменной x. Будем считать, что операторы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ коммутативны. Подействуем оператором $\mathbf{M}$ на обе части уравнения (1). В результате получим, что уравнение

$$\mathbf{L}\,[w] = f_M(x), \qquad f_M(x) = \mathbf{M}\,\big[f_{\rm g}(x, \lambda)\big], \tag{3}$$

имеет решение

$$w = \mathbf{M}\,\big[y(x, \lambda)\big]. \tag{4}$$

Выбирая различным образом оператор $\mathbf{M}$ можно получить решения для других правых частей уравнения (1). Исходную функцию $f_{\rm g}(x, \lambda)$ будем называть *порождающей функцией* для оператора $\mathbf{L}$.

9.5-2. Порождающая функция экспоненциального вида

Рассмотрим линейное уравнение с экспоненциальной правой частью

$$\mathbf{L}\,[y] = e^{\lambda x}. \tag{5}$$

Будем считать, что его решение известно и дается формулой (2). В таблице 4 приведены решения уравнения $\mathbf{L}\,[y] = f(x)$ с различной правой частью, которые выражаются через решение уравнения (5).

Замечание 1. При использовании указанных в таблице формул не надо знать левую часть линейного уравнения (5) (уравнение может быть интегральным, дифференциальным и др.), если известно его частное решение для экспоненциальной правой части. При этом важна лишь самая общая информация о том, что левая часть уравнения не зависит от параметра λ.

ТАБЛИЦА 4

Решения уравнения $\mathbf{L}[y] = f(x)$ с порождающей функцией экспоненциального вида

№	Правая часть $f(x)$	Решение y	Как получено
1	$e^{\lambda x}$	$y(x,\lambda)$	Исходное уравнение
2	$A_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + A_n e^{\lambda_n x}$	$A_1 y(x,\lambda_1) + \cdots + A_n y(x,\lambda_n)$	Следствие линейности
3	$Ax + B$	$A \dfrac{d}{d\lambda}\Bigl[y(x,\lambda)\Bigr]_{\lambda=0} + By(x,0)$	Следствие линейности и результатов п. 4
4	Ax^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$	$A\Bigl\{\dfrac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\Bigl[y(x,\lambda)\Bigr]\Bigr\}_{\lambda=0}$	Следствие результатов п. 6 при $\lambda = 0$
5	$\dfrac{A}{x+a}$, $a > 0$	$A\displaystyle\int_0^\infty e^{-a\lambda} y(x,-\lambda)\,d\lambda$	Интегрирование по параметру λ
6	$Ax^n e^{\lambda x}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$	$A\dfrac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\Bigl[y(x,\lambda)\Bigr]$	Дифференцирование по параметру λ
7	a^x	$y(x, \ln a)$	Следствие п. 1
8	$A\,\mathrm{ch}(\lambda x)$	$\frac{1}{2}A[y(x,\lambda) + y(x,-\lambda)]$	Линейность и связь с экспонентой
9	$A\,\mathrm{sh}(\lambda x)$	$\frac{1}{2}A[y(x,\lambda) - y(x,-\lambda)]$	Линейность и связь с экспонентой
10	$Ax^m\,\mathrm{ch}(\lambda x)$, $m = 1, 3, 5, \ldots$	$\frac{1}{2}A\dfrac{\partial^m}{\partial\lambda^m}[y(x,\lambda) - y(x,-\lambda)]$	Дифференцирование по λ, и связь с экспонентой
11	$Ax^m\,\mathrm{ch}(\lambda x)$, $m = 2, 4, 6, \ldots$	$\frac{1}{2}A\dfrac{\partial^m}{\partial\lambda^m}[y(x,\lambda) + y(x,-\lambda)]$	Дифференцирование по λ, и связь с экспонентой
12	$Ax^m\,\mathrm{sh}(\lambda x)$, $m = 1, 3, 5, \ldots$	$\frac{1}{2}A\dfrac{\partial^m}{\partial\lambda^m}[y(x,\lambda) + y(x,-\lambda)]$	Дифференцирование по λ, и связь с экспонентой
13	$Ax^m\,\mathrm{sh}(\lambda x)$, $m = 2, 4, 6, \ldots$	$\frac{1}{2}A\dfrac{\partial^m}{\partial\lambda^m}[y(x,\lambda) - y(x,-\lambda)]$	Дифференцирование по λ, и связь с экспонентой
14	$A\cos(\beta x)$	$A\,\mathrm{Re}\bigl[y(x, i\beta)\bigr]$	Выделение действительной части при $\lambda = i\beta$
15	$A\sin(\beta x)$	$A\,\mathrm{Im}\bigl[y(x, i\beta)\bigr]$	Выделение мнимой части при $\lambda = i\beta$
16	$Ax^n\cos(\beta x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$	$A\,\mathrm{Re}\Bigl\{\dfrac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\Bigl[y(x,\lambda)\Bigr]\Bigr\}_{\lambda=i\beta}$	Дифференцирование поλ, выделение действительной части при $\lambda = i\beta$
17	$Ax^n\sin(\beta x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$	$A\,\mathrm{Im}\Bigl\{\dfrac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\Bigl[y(x,\lambda)\Bigr]\Bigr\}_{\lambda=i\beta}$	Дифференцирование по λ, выделение мнимой части при $\lambda = i\beta$
18	$Ae^{\mu x}\cos(\beta x)$	$A\,\mathrm{Re}\bigl[y(x, \mu + i\beta)\bigr]$	Выделение действительной части при $\lambda = \mu + i\beta$
19	$Ae^{\mu x}\sin(\beta x)$	$A\,\mathrm{Im}\bigl[y(x, \mu + i\beta)\bigr]$	Выделение мнимой части при $\lambda = \mu + i\beta$
20	$Ax^n e^{\mu x}\cos(\beta x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$	$A\,\mathrm{Re}\Bigl\{\dfrac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\Bigl[y(x,\lambda)\Bigr]\Bigr\}_{\lambda=\mu+i\beta}$	Дифференцирование по λ, выделение действительной части при $\lambda = \mu + i\beta$
21	$Ax^n e^{\mu x}\sin(\beta x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$	$A\,\mathrm{Im}\Bigl\{\dfrac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\Bigl[y(x,\lambda)\Bigr]\Bigr\}_{\lambda=\mu+i\beta}$	Дифференцирование по λ, выделение мнимой части при $\lambda = \mu + i\beta$

Замечание 2. При использовании указанных в таблице формул необходимо проверять сходимость интегралов, входящих в полученное решение.

Пример 1. Решение уравнения с экспоненциальной правой частью

$$y(x) + \int_x^\infty K(x-t)y(t)\,dt = e^{\lambda x} \qquad (6)$$

ищем в виде $y(x,\lambda) = ke^{\lambda x}$ методом неопределенных коэффициентов. В результате получим

$$y(x,\lambda) = \frac{1}{B(\lambda)}e^{\lambda x}, \qquad B(\lambda) = 1 + \int_0^\infty K(-z)e^{\lambda z}\,dz. \tag{7}$$

Из п. 3 таблицы 4 следует, что решение уравнения

$$y(x) + \int_x^\infty K(x-t)y(t)\,dt = Ax \tag{8}$$

имеет вид

$$y(x) = \frac{A}{D}x - \frac{AC}{D^2}, \quad D = 1 + \int_0^\infty K(-z)\,dz, \quad \mathrm{C} = \int_0^\infty zK(-z)\,dz.$$

Для того чтобы такое решение существовало, должны существовать несобственные интегралы от функций $K(-z)$, $zK(-z)$. Поэтому функция $K(-z)$ должна убывать быстрее, чем z^{-2} при $z\to\infty$. В противном случае решения не существует. Интересно отметить, что для растущих по степенному закону функций $K(-z)$ при $z\to\infty$ в случае $\lambda<0$ решение уравнения (6) существует и дается формулой (7), а решения уравнения (8) не существует. Поэтому следует быть осторожным при использовании формул из таблицы 4 и проверять сходимость интегралов, входящих в решение.

Из п. 15 таблицы 4 следует, что решение уравнения

$$y(x) + \int_x^\infty K(x-t)y(t)\,dt = A\sin(\lambda x) \tag{9}$$

дается формулой

$$y(x) = \frac{A}{B_\mathrm{c}^2 + B_\mathrm{s}^2}\big[B_\mathrm{c}\sin(\lambda x) - B_\mathrm{s}\cos(\lambda x)\big],$$

где $B_\mathrm{c} = 1 + \int_0^\infty K(-z)\cos(\lambda z)\,dz$, $B_\mathrm{s} = \int_0^\infty K(-z)\sin(\lambda z)\,dz$.

9.5-3. Порождающая функция степенного вида

Рассмотрим линейное уравнение со степенной правой частью

$$\mathbf{L}\,[y] = x^\lambda. \tag{10}$$

Будем считать, что его решение известно и дается формулой (2). В таблице 5 приведены решения уравнения $\mathbf{L}\,[y] = f(x)$ с различной правой частью, которые выражаются через решение уравнения (10).

Пример 2. Решение уравнения со степенной правой частью

$$y(x) + \int_0^x \frac{1}{x}K\Big(\frac{t}{x}\Big)y(t)\,dt = x^\lambda$$

ищем в виде $y(x,\lambda) = kx^\lambda$ методом неопределенных коэффициентов. В результате получим

$$y(x,\lambda) = \frac{1}{1+B(\lambda)}x^\lambda, \qquad B(\lambda) = \int_0^1 K(t)t^\lambda\,dt.$$

Из п. 3 таблицы 5 следует, что решение уравнения с логарифмической правой частью

$$y(x) + \int_0^x \frac{1}{x}K\Big(\frac{t}{x}\Big)y(t)\,dt = A\ln x$$

имеет вид

$$y(x) = \frac{A}{1+I_0}\ln x - \frac{AI_1}{(1+I_0)^2},$$
$$I_0 = \int_0^1 K(t)\,dt, \quad I_1 = \int_0^1 K(t)\ln t\,dt.$$

ТАБЛИЦА 5

Решения уравнения $\mathbf{L}[y] = f(x)$ с порождающей функцией степенного вида

№	Правая часть $f(x)$	Решение y	Как получено
1	x^λ	$y(x,\lambda)$	Исходное уравнение
2	$\sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$	$\sum\limits_{k=0}^{n} A_k y(x,k)$	Следствие линейности
3	$A\ln x + B$	$A\dfrac{d}{d\lambda}\Big[y(x,\lambda)\Big]_{\lambda=0} + By(x,0)$	Следствие линейности и результатов п. 4
4	$A\ln^n x$, $n=0,1,2,\ldots$	$A\Big\{\dfrac{d^n}{d\lambda^n}\Big[y(x,\lambda)\Big]\Big\}_{\lambda=0}$	Следствие результатов п. 5 при $\lambda=0$
5	$Ax^n x^\lambda$, $n=0,\,1,\,2,\,\ldots$	$A\dfrac{d^n}{d\lambda^n}\Big[y(x,\lambda)\Big]$	Дифференцирование по параметру λ
6	$A\cos(\beta\ln x)$	$A\,\mathrm{Re}\big[y(x,\,i\beta)\big]$	Выделение действительной части при $\lambda=i\beta$
7	$A\sin(\beta\ln x)$	$A\,\mathrm{Im}\big[y(x,\,i\beta)\big]$	Выделение мнимой части при $\lambda=i\beta$
8	$Ax^\mu\cos(\beta\ln x)$	$A\,\mathrm{Re}\big[y(x,\,\mu+i\beta)\big]$	Выделение действительной части при $\lambda=\mu+i\beta$
9	$Ax^\mu\sin(\beta\ln x)$	$A\,\mathrm{Im}\big[y(x,\,\mu+i\beta)\big]$	Выделение мнимой части при $\lambda=\mu+i\beta$

9.5-4. Порождающая функция, содержащая синусы или косинусы

Рассмотрим линейное уравнение с синусоидальной правой частью

$$\mathbf{L}[y] = \sin(\lambda x). \tag{11}$$

Будем считать, что его решение известно и дается формулой (2). В таблице 6 приведены решения уравнения $\mathbf{L}[y] = f(x)$ с различной правой частью, которые выражаются через решение уравнения (11).

ТАБЛИЦА 6

Решения уравнения $\mathbf{L}[y] = f(x)$ с синусоидальной порождающей функцией

№	Правая часть $f(x)$	Решение y	Как получено
1	$\sin(\lambda x)$	$y(x,\lambda)$	Исходное уравнение
2	$\sum\limits_{k=1}^{n} A_k\sin(\lambda_k x)$	$\sum\limits_{k=1}^{n} A_k y(x,\lambda_k)$	Следствие линейности
3	Ax^m, $m=1,\,3,\,5,\,\ldots$	$A(-1)^{\frac{m-1}{2}}\Big[\dfrac{d^m}{d\lambda^m}y(x,\,\lambda)\Big]_{\lambda=0}$	Следствие результатов п. 5 при $\lambda=0$
4	$Ax^m\sin(\lambda x)$, $m=2,\,4,\,6,\,\ldots$	$A(-1)^{\frac{m}{2}}\dfrac{d^m}{d\lambda^m}y(x,\,\lambda)$	Дифференцирование по параметру λ
5	$Ax^m\cos(\lambda x)$, $m=1,\,3,\,5,\,\ldots$	$A(-1)^{\frac{m-1}{2}}\dfrac{d^m}{d\lambda^m}y(x,\,\lambda)$	Дифференцирование по параметру λ
6	$\mathrm{sh}(\beta x)$	$-i\,y(x,i\beta)$	Связь с гиперболическим синусом, $\lambda=i\beta$
7	$x^m\,\mathrm{sh}(\beta x)$, $m=2,\,4,\,6,\,\ldots$	$i\,(-1)^{\frac{m+2}{2}}\Big[\dfrac{d^m}{d\lambda^m}y(x,\,\lambda)\Big]_{\lambda=i\beta}$	Дифференцирование по λ, связь с гиперболическим синусом, $\lambda=i\beta$

Рассмотрим линейное уравнение с косинусоидальной правой частью

$$\mathbf{L}\,[y] = \cos(\lambda x). \tag{12}$$

Будем считать, что его решение известно и дается формулой (2). В таблице 7 приведены решения уравнения $\mathbf{L}\,[y] = f(x)$ с различной правой частью, которые выражаются через решение уравнения (12).

ТАБЛИЦА 7

Решения уравнения $\mathbf{L}\,[y] = f(x)$ с косинусоидальной порождающей функцией

№	Правая часть $f(x)$	Решение y	Как получено
1	$\cos(\lambda x)$	$y(x,\lambda)$	Исходное уравнение
2	$\sum\limits_{k=1}^{n} A_k \cos(\lambda_k x)$	$\sum\limits_{k=1}^{n} A_k y(x,\lambda_k)$	Следствие линейности
3	Ax^m, $m = 0,\,2,\,4,\,\ldots$	$A(-1)^{\frac{m}{2}} \left[\dfrac{d^m}{d\lambda^m} y(x,\,\lambda)\right]_{\lambda=0}$	Следствие результатов п. 4 при $\lambda = 0$
4	$Ax^m \cos(\lambda x)$, $m = 2,\,4,\,6,\,\ldots$	$A(-1)^{\frac{m}{2}} \dfrac{d^m}{d\lambda^m} y(x,\,\lambda)$	Дифференцирование по параметру λ
5	$Ax^m \sin(\lambda x)$, $m = 1,\,3,\,5,\,\ldots$	$A(-1)^{\frac{m+1}{2}} \dfrac{d^m}{d\lambda^m} y(x,\,\lambda)$	Дифференцирование по параметру λ
6	$\operatorname{ch}(\beta x)$	$y(x,i\beta)$	Связь с гиперболическим косинусом, $\lambda = i\beta$
7	$x^m \operatorname{ch}(\beta x)$, $m = 2,\,4,\,6,\,\ldots$	$(-1)^{\frac{m}{2}} \left[\dfrac{d^m}{d\lambda^m} y(x,\,\lambda)\right]_{\lambda=i\beta}$	Дифференцирование по λ, связь с гиперболическим косинусом, $\lambda = i\beta$

9.6. Метод модельных решений

9.6-1. Предварительные замечания*

Рассмотрим линейное уравнение, которое для краткости будем записывать в виде

$$\mathbf{L}\,[y(x)] = f(x), \tag{1}$$

где $\mathbf{L}$ — некоторый линейный (интегральный) оператор, $y(x)$ — неизвестная функция, $f(x)$ — известная функция.

Зададим пока произвольно некоторое пробное решение

$$y_0 = y_0(x,\lambda), \tag{2}$$

зависящее от вспомогательного параметра λ (считается, что оператор $\mathbf{L}$ не зависит от λ и $y_0 \not\equiv \text{const}$). Из уравнения (1) определим правую часть, которая будет соответствовать пробному решению (2):

$$f_0(x,\lambda) = \mathbf{L}\,[y_0(x,\lambda)].$$

Умножим обе части уравнения (1) при $y = y_0$ и $f = f_0$ на некоторую функцию $\varphi(\lambda)$, а затем проинтегрируем полученное равенство по λ на отрезке $[a,b]$. В результате получим

$$\mathbf{L}\,[y_\varphi(x)] = f_\varphi(x), \tag{3}$$

где

$$y_\varphi(x) = \int_a^b y_0(x,\lambda)\varphi(\lambda)\,d\lambda, \qquad f_\varphi(x) = \int_a^b f_0(x,\lambda)\varphi(\lambda)\,d\lambda. \tag{4}$$

Из формул (3), (4) следует, что для правой части $f = f_\varphi(x)$, решением исходного уравнения (1) будет $y = y_\varphi(x)$. За счет произвола в выборе функции $\varphi(\lambda)$ (и отрезка интегрирования) функцию $f_\varphi(x)$ в принципе можно сделать любой. Основная проблема здесь состоит в том, как подобрать функцию $\varphi(\lambda)$, чтобы получить заданную функцию $f_\varphi(x)$. Эту проблему можно решить, если удается найти такое пробное решение, для которого правая часть уравнения (1) будет ядром известного обратного интегрального преобразования (такое пробное решение будем обозначать $Y(x,\lambda)$ и называть *модельным решением*).

* До чтения этого раздела полезно просмотреть разд. 9.5.

9.6-2. Описание метода

Действительно, пусть $\mathfrak{P}$ — некоторое обратимое интегральное преобразование, которое любой функции-оригиналу $f(x)$ ставит в соответствии изображение $F(\lambda)$ по правилу

$$F(\lambda) = \mathfrak{P}\{f(x)\}. \tag{5}$$

Считаем, что обратное интегральное преобразование $\mathfrak{P}^{-1}$ имеет ядро $\psi(x,\lambda)$ и действует следующим образом:

$$\mathfrak{P}^{-1}\{F(\lambda)\} = f(x), \qquad \mathfrak{P}^{-1}\{F(\lambda)\} \equiv \int_a^b F(\lambda)\psi(x,\lambda)\,d\lambda. \tag{6}$$

Пределы a и b и путь интегрирования в (6) могут лежать в комплексной плоскости.

Пусть удалось найти модельное решение $Y(x,\lambda)$ вспомогательной задачи для уравнения (1), в правой части которого стоит ядро обратного преобразования $\mathfrak{P}^{-1}$:

$$\mathbf{L}\,[Y(x,\lambda)] = \psi(x,\lambda). \tag{7}$$

Умножим обе части (7) на $F(\lambda)$, а затем проинтегрируем по λ в тех же пределах, которые стоят в обратном преобразовании (6). Учитывая, что оператор $\mathbf{L}$ не зависит от λ и используя равенство $\mathfrak{P}^{-1}\,\{F(\lambda)\} = f(x)$, получим

$$\mathbf{L}\left[\int_a^b Y(x,\lambda)F(\lambda)\,d\lambda\right] = f(x).$$

Отсюда следует, что решение уравнения (1) при произвольной функции $f(x)$ выражается через решение более простого вспомогательного уравнения (7) по формуле

$$y(x) = \int_a^b Y(x,\lambda)F(\lambda)\,d\lambda, \tag{8}$$

где $F(\lambda)$ — изображение функции $f(x)$, полученное с помощью преобразования (5).

В качестве правой части вспомогательного уравнения (7) можно, например, взять экспоненциальную, степенную и тригонометрические функции, которые соответственно являются ядрами обратных преобразований Лапласа, Меллина, синус и косинус преобразований Фурье (с точность до постоянного множителя). В ряде случаев методом неопределенных коэффициентов удается сравнительно просто найти модельное решение (задав его структуру). После этого для построения решения уравнения с произвольной правой частью можно использовать формулы, выписанные далее в пп. 9.6-3–9.6-6.

9.6-3. Модельное решение для экспоненциальной правой части

Пусть удалось подобрать модельное решение $Y = Y(x,\lambda)$, соответствующее экспоненциальной правой части:

$$\mathbf{L}\,[Y(x,\lambda)] = e^{\lambda x}. \tag{9}$$

Рассмотрим два случая.

1°. *Уравнение на полуоси,* $0 \leqslant x < \infty$. Обозначим $\tilde f(p)$ изображение функции $f(x)$, полученное с помощью преобразования Лапласа:

$$\tilde f(p) = \mathfrak{L}\{f(x)\}, \qquad \mathfrak{L}\{f(x)\} \equiv \int_0^\infty f(x)e^{-px}\,dx. \tag{10}$$

Решение уравнения (1) при произвольной правой части $f(x)$ выражается через решение более простого вспомогательного уравнения с экспоненциальной правой частью (9) при $\lambda = p$ по формуле

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Y(x,p)\tilde f(p)\,dp. \tag{11}$$

2°. *Уравнение на всей оси,* $-\infty < x < \infty$. Обозначим $\tilde f(u)$ изображение функции $f(x)$, полученное с помощью преобразования Фурье:

$$\tilde f(u) = \mathfrak{F}\{f(x)\}, \qquad \mathfrak{F}\{f(x)\} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-iux}\,dx. \tag{12}$$

Решение уравнения (1) при произвольной правой части $f(x)$ выражается через решение более простого вспомогательного уравнения с экспоненциальной правой частью (9) при $\lambda = iu$ по формуле

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Y(x,\, iu)\tilde{f}(u)\, du. \tag{13}$$

Для вычисления интегралов в правых частях формул (11) и (13) используют методы теории функций комплексного переменного, включая лемму Жордана и теорему о вычетах (см. пп. 7.1-4 и 7.1-5).

Замечание 1. Модельное решение $Y(x, \lambda)$ может иметь структуру, отличную от ядра обратного преобразования Лапласа или Фурье.

Замечание 2. При использовании указанного метода не обязательно знать левую часть уравнения (1) (уравнение может быть интегральным, дифференциальным, функциональным и др.), если известно его частное решение для экспоненциальной правой части. При этом важна лишь самая общая информация, что уравнение линейно и его левая часть не зависит от параметра λ.

Замечание 3. Указанный метод может использоваться также при решении линейных интегральных (дифференциальных, интегро-дифференциальных и функциональных) уравнений со сложным аргументом у искомой функции.

Пример 1. Рассмотрим уравнение Вольтерра второго рода с разностным ядром

$$y(x) + \int_{x}^{\infty} K(x-t)y(t)\, dt = f(x). \tag{14}$$

Это уравнение нельзя решить путем непосредственного применения преобразования Лапласа, так как здесь теорема о свертке не применима.

В соответствии с методом модельных решений рассмотрим вспомогательное уравнение с экспоненциальной правой частью

$$y(x) + \int_{x}^{\infty} K(x-t)y(t)\, dt = e^{px}. \tag{15}$$

Его решение имеет вид (см. пример 1 из п. 9.5-2)

$$Y(x,p) = \frac{1}{1+\tilde{K}(-p)} e^{px}, \qquad \tilde{K}(-p) = \int_{0}^{\infty} K(-z) e^{pz}\, dz. \tag{16}$$

Отсюда с помощью формулы (11) получим решение уравнения (12) для произвольной правой части

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\tilde{f}(p)}{1+\tilde{K}(-p)} e^{px}\, dp, \tag{17}$$

где $\tilde{f}(p)$ — изображение функции $f(x)$, полученное с помощью преобразования Лапласа (10) (см. также разд. 9.11).

Отметим, что более сложным путем решение уравнения (12) было получено в книге М. Л. Краснова, А. И. Киселева, Г. И. Макаренко (1968, стр. 42, 43).

9.6-4. Модельное решение для степенной правой части

Пусть удалось подобрать модельное решение $Y = Y(x,s)$, соответствующее степенной правой части уравнения

$$\mathbf{L}\,[Y(x,s)] = x^{-s}, \qquad \lambda = -s. \tag{18}$$

Обозначим $\widehat{f}(s)$ изображение функции $f(x)$, полученное с помощью преобразования Меллина

$$\widehat{f}(s) = \mathfrak{M}\{f(x)\}, \qquad \mathfrak{M}\{f(x)\} \equiv \int_{0}^{\infty} f(x) x^{s-1}\, dx. \tag{19}$$

Решение уравнения (1) при произвольной правой части $f(x)$ выражается через решение более простого вспомогательного уравнения со степенной правой частью (18) по формуле

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Y(x,s)\widehat{f}(s)\, ds. \tag{20}$$

Для вычисления соответствующих интегралов в правой части формулы (20) используют таблицы обратных преобразований Меллина [см., например, Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1969), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974)], а также методы теории функций комплексного переменного, включая лемму Жордана и теорему о вычетах (см. пп. 7.1-4 и 7.1-5).

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$y(x) + \int_0^x \frac{1}{x} K\Big(\frac{t}{x}\Big) y(t)\,dt = f(x). \tag{21}$$

В соответствии с методом модельных решений рассмотрим вспомогательное уравнение со степенной правой частью

$$y(x) + \int_0^x \frac{1}{x} K\Big(\frac{t}{x}\Big) y(t)\,dt = x^{-s}. \tag{22}$$

Его решение имеет вид (см. пример 2 из п. 9.5-3 при $\lambda = -s$)

$$Y(x,s) = \frac{1}{1+B(s)} x^{-s}, \qquad B(s) = \int_0^1 K(t) t^{-s}\,dt. \tag{23}$$

Отсюда на основании формулы (20) получим решение уравнения (21) для произвольной правой части

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\widehat{f}(s)}{1+B(s)} x^{-s}\,ds, \tag{24}$$

где $\widehat{f}(s)$ — изображение функции $f(x)$, полученное с помощью преобразования Меллина (19).

9.6-5. Модельное решение для синусоидальной правой части

Пусть удалось подобрать модельное решение $Y = Y(x,u)$, соответствующее синусу в правой части:

$$\mathbf{L}\,[Y(x,u)] = \sin(ux), \qquad \lambda = u. \tag{25}$$

Обозначим $\check{f}_{\rm s}(u)$ изображение функции $f(x)$, полученное с помощью несимметричной формы синус-преобразования Фурье:

$$\check{f}_{\rm s}(u) = \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\rm s}\{f(x)\}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\rm s}\{f(x)\} \equiv \int_0^\infty f(x)\sin(ux)\,dx. \tag{26}$$

Решение уравнения (1) при произвольной правой части $f(x)$ выражается через решение более простого вспомогательного уравнения с синусоидальной правой частью (25) по формуле

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty Y(x,u)\check{f}_{\rm s}(u)\,du. \tag{27}$$

9.6-6. Модельное решение для косинусоидальной правой части

Пусть удалось подобрать модельное решение $Y = Y(x,u)$, соответствующее косинусу в правой части:

$$\mathbf{L}\,[Y(x,u)] = \cos(ux), \qquad \lambda = u. \tag{28}$$

Обозначим $\check{f}_{\rm c}(u)$ изображение функции $f(x)$, полученное с помощью несимметричной формы косинус-преобразования Фурье:

$$\check{f}_{\rm c}(u) = \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\rm c}\{f(x)\}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\rm c}\{f(x)\} \equiv \int_0^\infty f(x)\cos(ux)\,dx. \tag{29}$$

Решение уравнения (1) при произвольной правой части $f(x)$ выражается через решение более простого вспомогательного уравнения с косинусом в правой части (28) по формуле

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty Y(x,u)\check{f}_{\rm c}(u)\,du. \tag{30}$$

9.6-7. Некоторые обобщения

Как и ранее, будем считать, что $\mathfrak{P}$ — обратимое преобразование, которое любой функции-оригиналу $f(x)$ ставит в соответствие изображение $F(\lambda)$ по правилу (5). Обратное преобразование определяется формулой (6).

Пусть удалось найти модельное решение $Y(x,\lambda)$ следующей вспомогательной задачи для уравнения (1):

$$\mathbf{L}_x\,[Y(x,\lambda)] = \mathbf{H}_\lambda\,[\psi(x,\lambda)]. \tag{31}$$

В правой части уравнения (31) стоит некоторый обратимый линейный (интегральный, дифференциальный или функциональный) оператор, который не зависит от переменной x и действует по параметру λ на ядро обратного преобразования $\psi(x,\lambda)$, см. формулу (6). Для наглядности оператор в левой части уравнения (31) помечен индексом x (он действует по переменной x и не зависит от λ).

Подействуем на обе части (31) обратным оператором $\mathbf{H}_\lambda^{-1}$. В результате в правой части получим ядро $\psi(x,\lambda)$, а в левой части переставим операторы по правилу $\mathbf{H}_\lambda^{-1}\,\mathbf{L}_x = \mathbf{L}_x\,\mathbf{H}_\lambda^{-1}$ (это как правило можно сделать, так как операторы действуют по различным переменным). Умножим далее обе части полученного равенства на изображение $F(\lambda)$, а затем проинтегрируем по λ в тех же пределах, которые стоят в обратном преобразовании (6). В результате с учетом равенства $\mathfrak{P}^{-1}\{F(\lambda)\} = f(x)$ получим

$$\mathbf{L}_x\left[\int_a^b F(\lambda)\mathbf{H}_\lambda^{-1}[Y(x,\lambda)]\,d\lambda\right] = f(x). \tag{32}$$

Отсюда следует, что решение уравнения (1) при произвольной функции $f(x)$ в правой части выражается через решение более простого вспомогательного уравнения (31) по формуле

$$y(x) = \int_a^b F(\lambda)\mathbf{H}_\lambda^{-1}[Y(x,\lambda)]\,d\lambda, \tag{33}$$

где $F(\lambda)$ — изображение функции $f(x)$, полученное с помощью преобразования $\mathfrak{P}$ по формуле (5).

Такой подход за счет произвола в выборе оператора $\mathbf{H}_\lambda$ расширяет возможности метода модельных решений.

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, A. V. Manzhirov (1998), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000).

9.7. Метод дифференцирования интегральных уравнений

В ряде случаев дифференцирование (однократное, двукратное и т. д.) интегральных уравнений с последующим исключением интегральных членов с помощью исходного уравнения позволяет свести их к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Иногда с помощью дифференцирования удается свести рассматриваемое уравнение к более простому интегральному уравнению, решение которого известно. Ниже перечислены некоторые классы интегральных уравнений, которые сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами.

9.7-1. Ядро содержит сумму экспонент

Рассмотрим уравнение

$$y(x) + \int_a^x \Big[\sum_{k=1}^n A_k e^{\lambda_k(x-t)}\Big] y(t)\,dt = f(x). \tag{1}$$

Это уравнение в общем случае можно свести к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению n-го порядка с постоянными коэффициентами.

В широком диапазоне изменения параметров A_k, λ_k решение можно представить в виде:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \Big[\sum_{k=1}^n B_k e^{\mu_k(x-t)}\Big] f(t)\,dt,$$

где параметры решения B_k, μ_k связаны алгебраическими соотношениями с параметрами уравнения A_k, λ_k.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y(x) + \int_a^x \big[A_1 e^{\lambda_1(x-t)} + A_2 e^{\lambda_2(x-t)}\big] y(t)\,dt = f(x).$$

1°. Введем обозначения

$$I_1 = \int_a^x e^{\lambda_1(x-t)} y(t)\,dt, \qquad I_2 = \int_a^x e^{\lambda_2(x-t)} y(t)\,dt.$$

Продифференцируем дважды интегральное уравнение. В результате имеем (первым записано исходное уравнение)

$$y + A_1 I_1 + A_2 I_2 = f, \qquad f = f(x), \tag{2}$$
$$y'_x + (A_1 + A_2)y + A_1\lambda_1 I_1 + A_2\lambda_2 I_2 = f'_x, \tag{3}$$
$$y''_{xx} + (A_1 + A_2)y'_x + (A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2)y + A_1\lambda_1^2 I_1 + A_2\lambda_2^2 I_2 = f''_{xx}. \tag{4}$$

Исключая отсюда величины I_1 и I_2, приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''_{xx} + (A_1 + A_2 - \lambda_1 - \lambda_2)y'_x + (\lambda_1\lambda_2 - A_1\lambda_2 - A_2\lambda_1)y = f''_{xx} - (\lambda_1 + \lambda_2)f'_x + \lambda_1\lambda_2 f. \tag{5}$$

Подставляя значение $x = a$ в равенства (2) и (3), получим начальные условия

$$y(a) = f(a), \qquad y'_x(a) = f'_x(a) - (A_1 + A_2)f(a). \tag{6}$$

Решение дифференциального уравнения (5) с условиями (6) позволяет найти решение интегрального уравнения.

2°. Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\mu^2 + (A_1 + A_2 - \lambda_1 - \lambda_2)\mu + \lambda_1\lambda_2 - A_1\lambda_2 - A_2\lambda_1 = 0, \tag{7}$$

которое соответствует однородному дифференциальному уравнению (5) при $f(x) \equiv 0$. Структура решения интегрального уравнения зависит от знака дискриминанта квадратного уравнения (7):

$$D \equiv (A_1 - A_2 - \lambda_1 + \lambda_2)^2 + 4A_1A_2.$$

В случае $D > 0$ квадратное уравнение (7) имеет действительные (и различные) корни μ_1 и μ_2:

$$\mu_1 = \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - A_1 - A_2) + \tfrac{1}{2}\sqrt{D}, \quad \mu_2 = \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - A_1 - A_2) - \tfrac{1}{2}\sqrt{D}.$$

При этом решение исходного интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \bigl[B_1 e^{\mu_1(x-t)} + B_2 e^{\mu_2(x-t)}\bigr] f(t)\,dt,$$

где

$$B_1 = A_1\frac{\mu_1 - \lambda_2}{\mu_2 - \mu_1} + A_2\frac{\mu_1 - \lambda_1}{\mu_2 - \mu_1}, \qquad B_2 = A_1\frac{\mu_2 - \lambda_2}{\mu_1 - \mu_2} + A_2\frac{\mu_2 - \lambda_1}{\mu_1 - \mu_2}.$$

В случае $D < 0$ квадратное уравнение (7) имеет комплексно сопряженные корни

$$\mu_1 = \sigma + i\beta, \quad \mu_2 = \sigma - i\beta, \qquad \sigma = \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - A_1 - A_2), \quad \beta = \tfrac{1}{2}\sqrt{-D}.$$

При этом решение исходного интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \bigl\{B_1 e^{\sigma(x-t)}\cos[\beta(x-t)] + B_2 e^{\sigma(x-t)}\sin[\beta(x-t)]\bigr\} f(t)\,dt,$$

где

$$B_1 = -A_1 - A_2, \qquad B_2 = \frac{1}{\beta}\bigl[A_1(\lambda_2 - \sigma) + A_2(\lambda_1 - \sigma)\bigr].$$

9.7-2. Ядро содержит сумму гиперболических функций

Уравнения с разностным ядром вида

$$y(x) + \int_a^x K(x-t)y(t)\,dt = f(x), \qquad K(x) = \sum_{k=1}^m A_k \operatorname{ch}(\lambda_k x) + \sum_{k=1}^s B_k \operatorname{sh}(\mu_k x), \tag{8}$$

с помощью формул $\operatorname{ch}\beta = \frac{1}{2}(e^\beta + e^{-\beta})$ и $\operatorname{sh}\beta = \frac{1}{2}(e^\beta - e^{-\beta})$ могут быть представлены в виде уравнения (1) при $n = 2m+2s$. Поэтому они сводятся к линейным неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами.

9.7-3. Ядро содержит сумму тригонометрических функций

Уравнения с разностным ядром вида

$$y(x) + \int_a^x K(x-t)y(t)\,dt = f(x), \qquad K(x) = \sum_{k=1}^m A_k \cos(\lambda_k x), \tag{9}$$

$$y(x) + \int_a^x K(x-t)y(t)\,dt = f(x), \qquad K(x) = \sum_{k=1}^m A_k \sin(\lambda_k x), \tag{10}$$

также можно свести к линейным неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнениям $2n$-го порядка с постоянными коэффициентами.

Пример 2. Рассмотрим подробнее уравнение (10).

1°. Обозначим

$$I_k(x) = \int_a^x \sin[\lambda_k(x-t)]y(t)\,dt. \tag{11}$$

Продифференцируем (11) дважды по x. В результате имеем (штрихи обозначают производные по x)

$$I_k' = \lambda_k \int_a^x \cos[\lambda_k(x-t)]y(t)\,dt, \qquad I_k'' = \lambda_k y(x) - \lambda_k^2 \int_a^x \sin[\lambda_k(x-t)]y(t)\,dt. \tag{12}$$

Из сопоставления формул (11) и (12) получим связь между I_k'' и I_k:

$$I_k'' = \lambda_k y(x) - \lambda_k^2 I_k, \qquad I_k = I_k(x). \tag{13}$$

Интегральное уравнение с помощью (11) можно записать в виде

$$y(x) + \sum_{k=1}^n A_k I_k = f(x). \tag{14}$$

Дифференцируя (14) дважды по x, с учетом равенств (13) имеем

$$y_{xx}''(x) + \sigma_n y(x) - \sum_{k=1}^n A_k \lambda_k^2 I_k = f_{xx}''(x), \qquad \sigma_n = \sum_{k=1}^n A_k \lambda_k. \tag{15}$$

Исключая интеграл I_n из (14) и (15), получим

$$y_{xx}''(x) + (\sigma_n + \lambda_n^2)y(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(\lambda_n^2 - \lambda_k^2)I_k = f_{xx}''(x) + \lambda_n^2 f(x). \tag{16}$$

Дифференцируя равенство (16) дважды по x и исключая интеграл I_{n-1} из полученного выражения с помощью (16), придем к аналогичному равенству, в левой части которого будет стоять линейный дифференциальный оператор четвертого порядка с постоянными коэффициентами (действующий на y) и сумма вида $\sum\limits_{k=1}^{n-2} B_k I_k$. Продолжая далее с помощью двукратного дифференцирования и соотношения (13) последовательно исключать слагаемые I_{n-2}, I_{n-3}, $\ldots$, придем в итоге к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами порядка $2n$.

Начальные условия для функции $y(x)$ находятся в результате подстановки значения $x = a$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью дифференцирования.

2°. Найдем корни z_k алгебраического уравнения

$$\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k A_k}{z + \lambda_k^2} + 1 = 0, \tag{17}$$

которое после приведения к общему знаменателю сводится к задаче об определении корней характеристического многочлена n-й степени.

Пусть все корни z_k уравнения (17) действительны, различны и не равны нулю. Все корни в зависимости от их знака разобьем на две группы:

$$z_1 > 0, \quad z_2 > 0, \quad \ldots, \quad z_s > 0 \quad \text{(положительные корни)};$$
$$z_{s+1} < 0, \quad z_{s+2} < 0, \quad \ldots, \quad z_n < 0 \quad \text{(отрицательные корни)}.$$

Решение интегрального уравнения можно представить в виде

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \Big\{ \sum_{k=1}^s B_k \operatorname{sh}\bigl[\mu_k(x-t)\bigr] + \sum_{k=s+1}^n C_k \sin\bigl[\mu_k(x-t)\bigr] \Big\} f(t)\,dt, \quad \mu_k = \sqrt{|z_k|}. \tag{18}$$

Коэффициенты B_k и C_k находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^{s} \frac{B_k \mu_k}{\lambda_m^2 + \mu_k^2} + \sum_{k=s+1}^{n} \frac{C_k \mu_k}{\lambda_m^2 - \mu_k^2} - 1 = 0, \qquad \mu_k = \sqrt{|z_k|}, \qquad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{19}$$

Случай с нулевым корнем $z_s = 0$ рассматривается с помощью введения новой постоянной $D = B_s \mu_s$ и предельного перехода $\mu_s \to 0$. В результате в решении (18) вместо члена $B_s \operatorname{sh}\bigl[\mu_s(x-t)\bigr]$ возникает слагаемое $D(x-t)$, а в системе (19) появляются соответствующие слагаемые $D\lambda_m^{-2}$.

Уравнение с разностным ядром, содержащим сумму косинусов и синусов, также сводится к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами.

9.7-4. Ядро содержит комбинации различных функций

Любое уравнение с разностным ядром, содержащим линейную комбинацию слагаемых вида

$$\begin{gathered} (x-t)^m \quad (m = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots), \quad \exp\bigl[\alpha(x-t)\bigr], \\ \operatorname{ch}\bigl[\beta(x-t)\bigr], \quad \operatorname{sh}\bigl[\gamma(x-t)\bigr], \quad \cos\bigl[\lambda(x-t)\bigr], \quad \sin\bigl[\mu(x-t)\bigr], \end{gathered} \tag{20}$$

также с помощью дифференцирования может быть сведено к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Экспоненциальная, гиперболические и тригонометрические функции могут быть умножены также на $(x-t)^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Замечание. Метод дифференцирования с успехом может использоваться также для решения более сложных уравнений с неразностным ядром, к которым неприменимо преобразование Лапласа.

9.8. Сведение уравнений Вольтерра второго рода к уравнениям Вольтерра первого рода

Уравнение Вольтерра второго рода

$$y(x) - \int_a^x K(x,t)y(t)\,dt = f(x) \tag{1}$$

можно свести к уравнению Вольтерра первого рода двумя способами.

9.8-1. Первый способ

Проинтегрируем обе части уравнения (1) по x от a до x, а затем изменим порядок интегрирования в двойном интеграле. В результате приходим к уравнению Вольтерра первого рода

$$\int_a^x M(x,t)y(t)\,dt = F(x), \tag{2}$$

в котором использованы следующие обозначения:

$$M(x,t) = 1 - \int_t^x K(s,t)\,ds, \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{3}$$

9.8-2. Второй способ

Пусть выполнено условие $f(a) = 0$. Тогда уравнение (1) приводится к уравнению Вольтерра первого рода для производной искомой функции

$$\int_a^x N(x,t)y'_t(t)\,dt = f(x), \qquad y(a) = 0, \tag{4}$$

где

$$N(x,t) = 1 - \int_t^x K(x,s)\,ds. \tag{5}$$

Действительно, интегрируя по частям правую часть (4) с учетом формулы (5), приходим к уравнению (1).

Замечание. При $f(a) \neq 0$ из уравнения (1) следует, что $y(a) = f(a)$. В этом случае замена $z(x) = y(x) - f(a)$ приводит к уравнению Вольтерра второго рода

$$z(x) - \int_a^x K(x,t)z(t)\,dt = \Phi(x),$$
$$\Phi(x) = f(x) - f(a) + f(a)\int_a^x K(x,t)\,dt,$$

для правой части которого выполняется условие $\Phi(0) = 0$ и которое уже может быть сведено вторым способом к уравнению Вольтерра первого рода.

⊙ *Литература*: В. Вольтерра (1982), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986).

9.9. Метод последовательных приближений

9.9-1. Общая схема

1°. Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$y(x) - \int_a^x K(x,\,t)y(t)\,dt = f(x). \tag{1}$$

Будем считать, что $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а ядро $K(x,t)$ непрерывно при $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant x$.

Будем искать решение методом последовательных приближений. Для этого положим

$$y(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x), \tag{2}$$

где $\varphi_n(x)$ определяются по формулам

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \int_a^x K(x,\,t)f(t)\,dt,\\
\varphi_2(x) &= \int_a^x K(x,\,t)\varphi_1(t)\,dt = \int_a^x K_2(x,\,t)f(t)\,dt,\\
\varphi_3(x) &= \int_a^x K(x,\,t)\varphi_2(t)\,dt = \int_a^x K_3(x,\,t)f(t)\,dt, \quad \ldots
\end{aligned}$$

Здесь

$$K_n(x,t) = \int_a^x K(x,z)K_{n-1}(z,t)\,dz, \tag{3}$$

где $n = 2, 3, \ldots$, причем $K_1(x,t) \equiv K(x,t)$, $K_n(x,t) = 0$ при $t > x$. Функции $K_n(x,\,t)$, даваемые формулами (3), называются *итерированными ядрами*. Для них справедливо соотношение

$$K_n(x,\,t) = \int_a^x K_m(x,\,s)K_{n-m}(s,\,t)\,ds, \tag{4}$$

где m — любое натуральное число, меньшее n.

2°. Последовательные приближения можно построить и по другой, более общей схеме:

$$y_n(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)y_{n-1}(t)\,dt, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где $y_0(x)$ — какая-либо непрерывная на $[a, b]$ функция. Получаемые таким образом функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, … также непрерывны на отрезке $[a, b]$.

При сделанных выше предположениях относительно $f(x)$ и $K(x,t)$ последовательность $\{y_n(x)\}$ сходится при $n \to \infty$ к непрерывному решению $y(x)$ интегрального уравнения. Удачный выбор «нулевого» приближения $y_0(x)$ может привести к быстрой сходимости процесса.

Следует отметить, что в частном случае $y_0(x) = f(x)$ данный метод переходит в метод, изложенный в 1°.

Замечание 1. Если ядро $K(x,t)$ квадратично интегрируемо в $S = \{a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant t \leqslant b\}$ и $f(x) \in L_2(a, b)$, то последовательные приближения сходятся в среднем к решению $y(x) \in L_2(a, b)$ уравнения (1) при любом выборе начального приближения $y_0(x) \in L_2(a, b)$.

9.9-2. Формула для резольвенты

Резольвента интегрального уравнения (1) определяется через итерированные ядра формулой

$$R(x,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x,\,t), \tag{6}$$

где сходящийся ряд, стоящий в правой части, называется *рядом Неймана* ядра $K(x,t)$. Решение уравнения Вольтерра второго рода (1) может теперь быть записано в традиционной форме

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,\,t)f(t)\,dt. \tag{7}$$

Замечание 2. В случае ядра со слабой особенностью решение уравнения (1) может быть получено рассмотренным выше методом последовательных приближений. При этом ядра $K_n(x,\,t)$, начиная с некоторого значения n, непрерывны. При $\alpha < \frac{1}{2}$ непрерывным будет уже ядро $K_2(x,\,t)$.

⊙ *Литература*: У. В. Ловитт (1957), С. Г. Михлин (1959), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), В. И. Смирнов (1974), В. Вольтерра (1982).

9.10. Метод квадратур

9.10-1. Общая схема метода

Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$y(x) - \int_a^x K(x,t)y(t)\,dt = f(x) \tag{1}$$

на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, и применим для его решения метод квадратур. Будем считать ядро и правую часть уравнения непрерывными функциями.

На основании уравнения (1) найдем, что $y(a) = f(a)$. Возьмем постоянный шаг интегрирования h и рассмотрим дискретное множество точек $x_i = a + h(i-1)$, $i = 1, 2, \dots, n$. При $x = x_i$ уравнение (1) примет вид

$$y(x_i) - \int_a^{x_i} K(x_i,t)y(t)\,dt = f(x_i), \qquad i = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Заменяя интеграл в (2) квадратурной формулой (см. п. 8.7-1) и выбирая x_j $(j = 1, 2, \dots, i)$ узлами квадратуры (по переменной t), получим следующую систему уравнений:

$$y(x_i) - \sum_{j=1}^{i} A_{ij}K(x_i,x_j)y(x_j) = f(x_i) + \varepsilon_i[y], \qquad i = 2, 3, \dots, n, \tag{3}$$

где A_{ij} — коэффициенты квадратурной формулы на отрезке $[a, x_i]$, $\varepsilon_i[y]$ — ошибка аппроксимации. Полагая $\varepsilon_i[y]$ малыми и отбрасывая их, получим систему линейных алгебраических уравнений в форме

$$y_1 = f_1, \quad y_i - \sum_{j=1}^{i} A_{ij}K_{ij}y_j = f_i, \qquad i = 2, 3, \dots, n, \tag{4}$$

где $K_{ij} = K(x_i, x_j)$ $(j = 1, \dots, i)$, $f_i = f(x_i)$, y_j — приближенные значения искомой функции $y(x)$ в узлах x_i.

На основании (4) получим следующую рекуррентную формулу:

$$y_1 = f_1, \quad y_i = \frac{f_i + \sum\limits_{j=1}^{i-1} A_{ij}K_{ij}y_j}{1 - A_{ii}K_{ii}}, \qquad i = 2, 3, \dots, n, \tag{5}$$

справедливую при условии

$$1 - A_{ii}K_{ii} \neq 0, \tag{6}$$

чего всегда можно добиться за счет выбора узлов и обеспечения достаточной малости коэффициентов A_{ii}.

9.10-2. Применение формулы трапеций

В соответствии с формулой трапеций (см. п. 8.7-1), имеем

$$A_{i1} = A_{ii} = \tfrac{1}{2}h, \quad A_{i2} = \cdots = A_{i,i-1} = h, \qquad i = 2, 3, \ldots, n.$$

Использование формулы трапеций в общей схеме метода квадратур для решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода приводит к следующему пошаговому алгоритму:

$$y_1 = f_1, \quad y_i = \frac{f_i + h\sum\limits_{j=1}^{i-1} \beta_j K_{ij} y_j}{1 - \frac{1}{2}hK_{ii}}, \qquad i = 2, 3, \ldots, n,$$

$$x_i = a + (i-1)h, \quad n = \frac{b-a}{h} + 1, \quad \beta_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } j = 1, \\ 1 & \text{при } j > 1, \end{cases}$$

где обозначения совпадают с введенным в п. 9.10-1. Формула трапеций достаточно проста, эффективна и часто используется на практике. Некоторые особенности применения метода квадратур для решения интегральных уравнений с переменным пределом интегрирования отмечены в п. 8.7-3.

9.10-3. Случай вырожденного ядра

В случае решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода с произвольным ядром по мере увеличения номера шага нарастает и объем вычислений. Если же ядро оказывается вырожденным, то возможно построение алгоритмов с неизменным объемом вычислений на шаге. Действительно, для вырожденного ядра

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{m} p_k(x) q_k(t)$$

уравнение (1) можно записать в виде

$$y(x) = \sum_{k=1}^{m} p_k(x) \int_a^x q_k(t) y(t)\,dt + f(x).$$

Применение формулы трапеций позволяет получить следующее рекуррентное выражение (см. п. 9.10-2):

$$y_1 = f_1, \quad y_i = \frac{f_i + h\sum\limits_{k=1}^{m} p_{ki} \sum\limits_{j=1}^{i-1} \beta_j q_{kj} y_j}{1 - \frac{1}{2}h\sum\limits_{k=1}^{m} p_{ki} q_{ki}},$$

где y_i — приближенные значения искомой функции $y(x)$ в узлах x_i, $f_i = f(x_i)$, $p_{ki} = p_k(x_i)$, $q_{ki} = q_k(x_i)$, из которого видно, что количество вычислений на каждом шаге остается неизменным.

⊙ *Литература*: В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный (1984), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986).

9.11. Уравнения с бесконечным пределом интегрирования

Представляют также интерес интегральные уравнения второго рода с одним переменным, а другим бесконечным пределами, содержащие разностное ядро. Ядра и функции таких уравнений могут не принадлежать описанным в начале главы классам. В этом случае их исследование проводится методом модельных решений (см. разд. 9.6) или методом сведения к уравнениям типа свертки. Для определенности рассмотрим далее уравнения второго рода с переменным нижним пределом интегрирования.

9.11-1. Случай переменного нижнего предела интегрирования

Интегральное уравнение второго рода с переменным нижним пределом в случае разностного ядра имеет вид

$$y(x) + \int_x^{\infty} K(x-t) y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < x < \infty. \qquad (1)$$

Оно принципиальным образом отличается от уравнений Вольтерра второго рода, рассмотренных выше, для которых решение существует и единственно. Решение соответствующего однородного уравнения

$$y(x) + \int_x^\infty K(x-t)y(t)\,dt = 0 \tag{2}$$

может быть и нетривиальным.

Собственные функции интегрального уравнения (2) определяются корнями следующего трансцендентного (или алгебраического) уравнения относительно параметра λ:

$$\int_0^\infty K(-z)e^{-\lambda z}\,dz = -1. \tag{3}$$

Левая часть этого уравнения есть изображение функции $K(-z)$, полученное с помощью преобразования Лапласа с параметром λ.

Например, простому действительному корню λ_k уравнения (3) соответствует собственная функция $y_k(x) = \exp(-\lambda_k x)$. Общее решение однородного уравнения представляет собой линейную комбинацию (с произвольными постоянными) собственных функций уравнения (2).

Ниже в примере 1 даны общие решения конкретного уравнения типа (2) для случаев кратных и комплексных корней (3).

Общее решение интегрального уравнения (1) представляет из себя сумму общего решения однородного уравнения (2) и частного решения неоднородного уравнения (1).

Пример 1. Рассмотрим однородное интегральное уравнение Пикара–Гурса

$$y(x) + A\int_x^\infty (t-x)^n y(t)\,dt = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

которое является частным случаем уравнения (1) при $K(z) = A(-z)^n$.

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{m} C_k \exp(-\lambda_k x), \tag{5}$$

где C_k — произвольные постоянные, λ_k — корни алгебраического уравнения

$$\lambda^{n+1} + An! = 0, \tag{6}$$

удовлетворяющие условию $\operatorname{Re}\lambda_k > 0$ (m — число корней уравнения (6), для которых это условие выполняется). Уравнение (6) есть частный случай уравнения (3) при $K(z) = A(-z)^n$. Корни уравнения (6), для которых $\operatorname{Re}\lambda_k \leqslant 0$ должны быть отброшены, поскольку интеграл в (3) для них расходится.

Уравнение (6) имеет комплексные корни. Рассмотрим два случая, которые соответствуют разным знакам величины A.

1°. Пусть $A < 0$. Решение уравнения (4) имеет вид

$$y(x) = Ce^{-\lambda x}, \qquad \lambda = \left(-An!\right)^{\frac{1}{n+1}}, \tag{7}$$

где C — произвольная постоянная. Это решение единственно при $n = 0, 1, 2, 3$.

При $n \geqslant 4$, выделяя в (5) действительную и мнимую части, придем к общему решению однородного уравнения Пикара–Гурса в форме

$$y(x) = Ce^{-\lambda x} + \sum_{k=1}^{[n/4]} \exp(-\alpha_k x)\bigl[C_k^{(1)}\cos(\beta_k x) + C_k^{(2)}\sin(\beta_k x)\bigr], \tag{8}$$

где $C_k^{(1)}$, $C_k^{(2)}$ — произвольные постоянные, $[a]$ — целая часть числа a, λ определено в (7), а коэффициенты α_k и β_k даются выражениями

$$\alpha_k = |An!|^{\frac{1}{n+1}}\cos\Bigl(\frac{2\pi k}{n+1}\Bigr), \qquad \beta_k = |An!|^{\frac{1}{n+1}}\sin\Bigl(\frac{2\pi k}{n+1}\Bigr).$$

Заметим, что решение (8) содержит нечетное число слагаемых.

2°. Пусть $A > 0$. Выделяя в (5) действительную и мнимую части, получим общее решение однородного уравнения Пикара–Гурса в форме

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+2}{4}\right]} \exp(-\alpha_k x)\bigl[C_k^{(1)}\cos(\beta_k x) + C_k^{(2)}\sin(\beta_k x)\bigr], \tag{9}$$

где $C_k^{(1)}$, $C_k^{(2)}$ — произвольные постоянные, а коэффициенты α_k и β_k даются формулами

$$\alpha_k = (An!)^{\frac{1}{n+1}} \cos\Bigl(\frac{2\pi k + \pi}{n+1}\Bigr), \quad \beta_k = (An!)^{\frac{1}{n+1}} \sin\Bigl(\frac{2\pi k + \pi}{n+1}\Bigr).$$

Заметим, что решение (9) содержит четное число слагаемых. В частных случаях при $n = 0$ и $n = 1$, выражение (9) приводит к тривиальному решению $y(x) \equiv 0$.

Пример 2. Рассмотрим неоднородное интегральное уравнение Пикара–Гурса

$$y(x) + A\int_x^\infty (t-x)^n y(t)\,dt = Be^{-\mu x}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

которое является частным случаем уравнения (1) при $K(z) = A(-z)^n$ и $f(x) = Be^{-\mu x}$.

Будем считать, что $\mu > 0$. Рассмотрим два случая.

1°. Пусть $\mu^{n+1} + An! \neq 0$. Частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$\bar{y}(x) = De^{-\mu x}, \qquad D = \frac{B\mu^{n+1}}{\mu^{n+1} + An!}. \tag{11}$$

При $A < 0$, общее решение неоднородного уравнения Пикара–Гурса является суммой решений (8) и (11). При $A > 0$, общее решение уравнения (10) есть сумма решений (9) и (11).

2°. Пусть $\mu^{n+1} + An! = 0$. Поскольку μ положительно, то A должно быть отрицательным. Частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$\bar{y}(x) = Exe^{-\mu x}, \qquad E = \frac{B\mu^{n+2}}{A(n+1)!}. \tag{12}$$

Общее решение неоднородного уравнения Пикара–Гурса есть сумма решений (8) и (12).

9.11-2. Приведение к уравнению Винера–Хопфа второго рода

Уравнение (1) может быть приведено к одностороннему уравнению второго рода типа

$$y(x) - \int_0^\infty K_-(x-t)y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < x < \infty, \tag{13}$$

где ядро $K_-(x-t)$ имеет следующий вид:

$$K_-(s) = \begin{cases} 0 & \text{при } s > 0, \\ -K(s) & \text{при } s < 0. \end{cases}$$

Методы исследования уравнения (13) описаны в главе 11, где рассматриваются уравнения второго рода с постоянными пределами. Там же в п. 11.9-3 изучено уравнение второго рода с разностным ядром и переменным нижним пределом интегрирования посредством приведения его к уравнению Винера–Хопфа второго рода.

⦿ *Литература*: Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978).