Из книги А. Д. Полянина, А. В. Манжирова, «Справочник по интегральным уравнениям». — М.: Физматлит, 2003.

11. Методы решения линейных уравнений вида $y(x) - \int_a^b K(x,t)y(t)\,dt = f(x)$

11.1. Предварительные замечания

11.1-1. Уравнения Фредгольма и уравнения со слабой особенностью

Линейные интегральные уравнения второго рода с постоянными пределами интегрирования имеют форму

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)\,dt = f(x), \tag{1}$$

где $y(x)$ — неизвестная функция ($a \leqslant x \leqslant b$), $K(x,t)$ — *ядро* интегрального уравнения, $f(x)$ — некоторая известная функция, которая называется *свободным членом* или *правой частью уравнения* (1). Для удобства анализа в интегральном уравнении (1) по традиции принято выделять числовой параметр λ, который называют *параметром интегрального уравнения*. Классы рассматриваемых функций и ядер были определены ранее в пп. 10.1-1 и 10.1-2. Отметим, что уравнения с постоянными пределами интегрирования вида (1), имеющие фредгольмовы ядра или ядра со слабой особенностью, называются соответственно *уравнениями Фредгольма второго рода* или *уравнениями со слабой особенностью второго рода*.

Число λ называется *характеристическим числом* или *характеристическим значением* интегрального уравнения (1), если существует нетривиальное решение соответствующего однородного уравнения ($f(x) \equiv 0$). Само же это нетривиальное решение называется *собственной функцией* интегрального уравнения, соответствующей характеристическому числу λ. Если λ является характеристическим числом, то величина $1/\lambda$ называется *собственным числом* интегрального уравнения (1). *Правильным* или *регулярным* значением параметра λ называется такое его значение, при котором упомянутое однородное уравнение имеет только тривиальное решение. Иногда характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения Фредгольма называют характеристическими числами и собственными функциями ядра $K(x,t)$.

Ядро $K(x,t)$ интегрального уравнения (1) называется *вырожденным*, если оно имеет вид $K(x,t) = g_1(x)h_1(t) + \dots + g_n(x)h_n(t)$, разностным, если оно зависит от разности аргументов: $K(x,t) = K(x-t)$, симметричным, если оно удовлетворяет условию $K(x,t) = \mathrm{K}(t,x)$.

Интегральное уравнение, полученное из (1) заменой ядра $K(x,t)$ на $K(t,x)$, называется *союзным* с (1) или *транспонированным* к (1).

Замечание 1. Переменные t и x могут изменяться в различных интервалах (например, $a \leqslant t \leqslant b$ и $c \leqslant x \leqslant d$). Для определенности далее будем считать, что $c = a$ и $d = b$ (этого всегда можно добиться линейной подстановкой $x = \alpha\bar{x} + \beta$ с помощью надлежащего выбора постоянных α и β).

Замечание 2. Случай, когда пределы интегрирования a и/или b могут быть бесконечными, вообще говоря, не исключается, но при этом следует внимательно проверять выполнение условия квадратичной интегрируемости ядра $K(x,t)$ в квадрате $S = \{a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant t \leqslant b\}$.

11.1-2. Структура решений

Решение уравнения (1) может быть представлено в форме

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda) f(t)\,dt,$$

где *резольвента* $R(x,t;\lambda)$ не зависит от свободного члена $f(x)$ и определяется только ядром интегрального уравнения.

Резольвента уравнения Фредгольма (1) удовлетворяет двум интегральным уравнениям

$$R(x,t;\lambda) = K(x,t) + \int_a^b K(x,s)R(s,t;\lambda)\,ds,$$
$$R(x,t;\lambda) = K(x,t) + \int_a^b K(s,t)R(x,s;\lambda)\,ds,$$

в которых интегрирование ведется по различным парам переменных ядра и резольвенты.

11.1-3. Интегральные уравнения типа свертки второго рода

Интегральными уравнениями типа свертки (см. также п. 10.1-3) называются уравнения, которые при применении к ним некоторого интегрального преобразования и теоремы о свертке для этого преобразования приводятся к алгебраическим уравнениям для изображений или к краевым задачам теории аналитических функций. Рассмотрим уравнения типа свертки второго рода, связанные с преобразованием Фурье.

Интегральное уравнение второго рода с разностным ядром на всей оси (его называют иногда *уравнением типа свертки второго рода с одним ядром*) имеет вид

$$y(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)y(t)\,dt = f(x), \qquad -\infty < x < \infty, \tag{2}$$

где $f(x)$ и $K(x)$ — известные правая часть и ядро интегрального уравнения, а $y(x)$ — искомая функция.

Интегральное уравнение второго рода с разностным ядром на полуоси имеет вид

$$y(x) + \int_0^{\infty} K(x-t)y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < x < \infty. \tag{3}$$

Уравнение (3) называется также *односторонним уравнением второго рода* или *интегральным уравнением Винера–Хопфа второго рода*

Интегральное уравнение типа свертки с двумя ядрами второго рода имеет вид

$$y(x) + \int_0^{\infty} K_1(x-t)y(t)\,dt + \int_{-\infty}^{0} K_2(x-t)y(t)\,dt = f(x), \qquad -\infty < x < \infty, \tag{4}$$

где $K_1(x)$ и $K_2(x)$ — ядра интегрального уравнения (4). Класс функций и ядер для уравнений типа свертки введен ранее в п. 10.1-3.

11.1-4. Парные интегральные уравнения второго рода

Парное интегральное уравнение второго рода с разностными ядрами (типа свертки) имеет вид

$$\begin{aligned} y(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-t)y(t)\,dt &= f(x), \qquad 0 < x < \infty,\\ y(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-t)y(t)\,dt &= f(x), \qquad -\infty < x < 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где обозначения, класс функций и ядер совпадают с введенными для уравнений типа свертки в п. 10.1-3.

Парное интегральное уравнение второго рода в достаточно общем случае имеет вид

$$\begin{aligned} y(x) + \int_a^{\infty} K_1(x,t)y(t)\,dt &= f_1(x), \qquad a < x < b,\\ y(x) + \int_a^{\infty} K_2(x,t)y(t)\,dt &= f_2(x), \qquad b < x < \infty, \end{aligned} \tag{6}$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $K_1(x,t)$, $K_2(x,t)$ — известные правые части и ядра уравнения (6), а $y(x)$ — функция, подлежащая определению. Такие уравнения можно исследовать методами различных интегральных преобразований с приведением к краевым задачам теории аналитических функций, а также другими методами развитыми для парных интегральных уравнений первого рода (см., например, И. Снеддон (1955), Я. С. Уфлянд (1977)).

Интегральные уравнения, полученные из (2)–(5) заменой ядра $K(x-t)$ на $K(t-x)$, называются *союзными* с ними или *транспонированными* к ним.

Если правые части уравнений (1)–(6) тождественно равны нулю, то их называют *однородными*. Если же правые части не обращаются в нуль всюду в области их определения, то уравнения (1)–(6) называют *неоднородными*.

Замечание 3. К уравнениям (2)–(5) приводятся некоторые уравнения, ядра которых содержат произведение или отношение переменных x и t.

Замечание 4. Уравнения типа свертки (2)–(5) иногда записывают в форме, где перед интегралами ставят множитель $1/\sqrt{2\pi}$.

Замечание 5. Если класс функций и ядер для уравнений типа свертки (в частности, для уравнения Винера–Хопфа) отличается от введенного в п. 10.1-3, то это будет особо оговариваться в каждом случае (см. разд. 11.10 и 11.11).

⊙ *Литература*: Г. Виарда (1933), Э. Гурса (1934), Г. М. Мюнтц (1934), И. И. Привалов (1935), И. Г. Петровский (1951), М. Г. Крейн (1958), С. Г. Михлин (1959), Ф. Трикоми (1960), Б. Нобл (1962), П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968), М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко и др. (1969), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), Л. Я. Цлаф (1970), J. A. Cochran (1972), В. И. Смирнов (1974), А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин (1976), Л. В. Канторович, Г. П. Акилов (1977), Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978), Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь (1979), А. Г. Бутковский (1979), L. M. Delves, J. L. Mohamed (1985), A. J. Jerry (1985), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986), A. Golberg (1990), D. Porter, D. S. G. Stirling (1990), C. Corduneanu (1991), J. Kondo (1991), S. Prössdorf, B. Silbermann (1991), W. Hackbusch (1995), R. P. Kanwal (1996), K. E. Atkinson (1997), А. Д. Полянин, А. В. Манжиров (1998), A. D. Polyanin, A. V. Manzhirov (1998), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000), А. Б. Васильева, Н. А. Тихонов (2002).

11.2. Уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром

11.2-1. Простейшее вырожденное ядро

Рассмотрим интегральное уравнения Фредгольма второго рода с простейшим вырожденным ядром

$$y(x) - \lambda \int_a^b g(x)h(t)y(t)\,dt = f(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b. \tag{1}$$

Решение уравнения (1) ищем в виде

$$y(x) = f(x) + \lambda A g(x). \tag{2}$$

Подставляя выражения (2) в уравнение (1), после простых преобразований будем иметь

$$A\Big[1 - \lambda \int_a^b h(t)g(t)\,dt\Big] = \int_a^b f(t)h(t)\,dt. \tag{3}$$

Считается, что оба интеграла, входящие в (3), существуют. На основании (1)–(3), с учетом того, что единственное характеристическое число λ_1 уравнения (1) дается выражением

$$\lambda_1 = \Big[\int_a^b h(t)g(t)\,dt\Big]^{-1}, \tag{4}$$

получим следующие результаты.

1°. Если $\lambda \neq \lambda_1$, то при произвольной правой части существует единственное решение уравнения (1), которое можно записать в виде

$$y(x) = f(x) + \frac{\lambda\lambda_1 f_1}{\lambda_1 - \lambda} g(x), \qquad f_1 = \int_a^b f(t)h(t)\,dt. \tag{5}$$

2°. Если $\lambda = \lambda_1$ и $f_1 = 0$, то решение уравнения (1) можно представить в форме

$$y = f(x) + Cy_1(x), \qquad y_1(x) = g(x), \tag{6}$$

где C — произвольная постоянная, $y_1(x)$ — собственная функция, соответствующая характеристическому числу λ_1.

3°. Если $\lambda = \lambda_1$ и $f_1 \neq 0$ решения не существует.

11.2-2. Вырожденное ядро в общем случае

Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с вырожденным ядром в общем случае имеет вид

$$y(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n g_k(x)h_k(t)\right] y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 2, 3, \ldots \tag{7}$$

Перепишем уравнение (7) в форме

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} g_k(x) \int_a^b h_k(t) y(t)\, dt, \qquad n = 2, 3, \ldots \tag{8}$$

Предполагая, что уравнение (8) имеет решение, с учетом обозначения

$$A_k = \int_a^b h_k(t) y(t)\, dt \tag{9}$$

будем иметь

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k g_k(x), \tag{10}$$

из которого видно, что решение интегрального уравнения с вырожденным ядром сводится к определению постоянных A_k.

Умножим обе части равенства (10) на $h_m(x)$ и проинтегрируем по x в пределах от a до b. Тогда получим систему линейных алгебраических уравнений, которой удовлетворяют коэффициенты A_k:

$$A_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} s_{mk} A_k = f_m, \qquad m = 1, 2, \ldots, n, \tag{11}$$

где

$$s_{mk} = \int_a^b h_m(x) g_k(x)\, dx, \quad f_m = \int_a^b f(x) h_m(x)\, dx, \quad m,\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

При вычисления коэффициентов s_{mk} и f_m для конкретных вырожденных ядер можно воспользоваться таблицами интегралов из справочников И. С. Градштейна, И. М. Рыжика (1975), А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева (1981, 1983, 1986).

Если построено решение системы уравнений (11), то построено и решение интегрального уравнения с вырожденным ядром (7). Значения параметра λ, при которых определитель системы (11) обращается в нуль, являются характеристическими числами интегрального уравнения (7), причем их ровно n штук с учетом кратности.

Теперь можно сформулировать основные результаты о решении уравнения (7).

1°. Если λ — правильное, то при произвольной правой части $f(x)$ существует единственное решение интегрального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром, которое можно представить в форме (10), где коэффициенты A_k являются решением системы линейных алгебраических уравнений (11). Постоянные A_k можно определить, например, по формулам Крамера.

2°. Если λ — характеристическое и $f(x) \equiv 0$, то решение однородного уравнения с вырожденным ядром имеет вид

$$y(x) = \sum_{i=1}^{p} C_i y_i(x), \tag{13}$$

где C_i — произвольные постоянные, а $y_i(x)$ — линейно независимые собственные функции ядра, соответствующие характеристическому числу λ_i:

$$y_i(x) = \sum_{k=1}^{n} A_{k(i)} g_k(x). \tag{14}$$

Здесь постоянные $A_{k(i)}$ составляют p ($p \leqslant n$) линейно независимых решений следующей однородной системы алгебраических уравнений:

$$A_{m(i)} - \lambda \sum_{k=1}^{n} s_{mk} A_{k(i)} = 0; \qquad m = 1, 2, \ldots, n, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{15}$$

3°. Если λ — характеристическое и $f(x) \not\equiv 0$, то для разрешимости неоднородного интегрального уравнения (7) необходимо и достаточно, чтобы правая часть уравнения $f(x)$ удовлетворяла p условиям

$$\sum_{k=1}^{n} B_{k(i)} f_k = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, p, \quad p \leqslant n. \tag{16}$$

Здесь постоянные $B_{k(i)}$ составляют p линейно независимых решений однородной системы алгебраических уравнений, транспонированной к системе (15). В этом случае решение уравнения (7) имеет вид

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{i=1}^{p} C_i y_i(x), \tag{17}$$

где $y_0(x)$ — частное решение неоднородного уравнения (7), а сумма представляет собой общее решение соответствующего однородного уравнения (см. 2°).

В частности, если $f(x) \neq 0$, но все f_k равны нулю, то

$$y(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{p} C_i y_i(x). \tag{18}$$

Пример. Решим интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x\cos t + t^2 \sin x + \cos x \sin t) y(t)\,dt = x, \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi. \tag{19}$$

Введем обозначения

$$A_1 = \int_{-\pi}^{\pi} y(t)\cos t\,dt, \quad A_2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 y(t)\,dt, \quad A_3 = \int_{-\pi}^{\pi} y(t)\sin t\,dt, \tag{20}$$

где A_1, A_2, A_3 — неизвестные постоянные. Тогда уравнение (19) примет вид

$$y(x) = A_1\lambda x + A_2\lambda \sin x + A_3\lambda\cos x + x. \tag{21}$$

Подставляя выражение (21) в равенства (20), получим

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} (A_1\lambda t + A_2\lambda\sin t + A_3\lambda\cos t + t)\cos t\,dt,\\
A_2 &= \int_{-\pi}^{\pi} (A_1\lambda t + A_2\lambda\sin t + A_3\lambda\cos t + t)t^2\,dt,\\
A_3 &= \int_{-\pi}^{\pi} (A_1\lambda t + A_2\lambda\sin t + A_3\lambda\cos t + t)\sin t\,dt.
\end{aligned}$$

Вычисляя входящие в эти уравнения интегралы, получим систему алгебраических уравнений для нахождения неизвестных A_1, A_2, A_3:

$$\begin{aligned}
A_1 - \lambda\pi A_3 &= 0,\\
A_2 + 4\lambda\pi A_3 &= 0,\\
-2\lambda\pi A_1 - \lambda\pi A_2 + A_3 &= 2\pi.
\end{aligned} \tag{22}$$

Определитель этой системы отличен от нуля:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\lambda\pi \\ 0 & 1 & 4\lambda\pi \\ -2\lambda\pi & -\lambda\pi & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\lambda^2\pi^2 \neq 0.$$

Таким образом, система (22) имеет единственное решение

$$A_1 = \frac{2\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}, \quad A_2 = -\frac{8\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}, \quad A_3 = \frac{2\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}.$$

Подставляя найденные значения A_1, A_2, A_3 в (21), получим решение данного интегрального уравнения в виде

$$y(x) = \frac{2\lambda\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}(\lambda\pi x - 4\lambda\pi\sin x + \cos x) + x.$$

⊙ *Литература*: С. Г. Михлин (1959), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), И. С. Градштейн, И. М. Рыжик (1975), A. J. Jerry (1985), А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев (1981, 1983, 1986).

11.3. Решение в виде ряда по степеням параметра. Метод последовательных приближений

11.3-1. Итерированные ядра

Пусть имеем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)\,dt = f(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b. \tag{1}$$

Будем искать его решение в виде ряда по степеням параметра λ:

$$y(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \psi_n(x). \qquad (2)$$

Подставим ряд (2) в уравнение (1). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим рекуррентную систему соотношений для определения функций $\psi_n(x)$:

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &= \int_a^b K(x,t) f(t)\,dt,\\
\psi_2(x) &= \int_a^b K(x,t)\psi_1(t)\,dt = \int_a^b K_2(x,t) f(t)\,dt,\\
\psi_3(x) &= \int_a^b K(x,t)\psi_2(t)\,dt = \int_a^b K_3(x,t) f(t)\,dt, \quad \dots
\end{aligned}$$

Здесь

$$K_n(x,t) = \int_a^b K(x,z) K_{n-1}(z,t)\,dz, \qquad (3)$$

где $n = 2, 3, \dots$, причем $K_1(x,t) \equiv K(x,t)$. Функции $K_n(x,t)$, определяемые по формулам (3), называются *итерированными ядрами*. Для них справедливо соотношение

$$K_n(x,t) = \int_a^b K_m(x,s) K_{n-m}(s,t)\,ds, \qquad (4)$$

где m — любое натуральное число, меньшее n.

Итерированные ядра $K_n(x,t)$ можно непосредственно выразить через данное ядро $K(x,t)$ по формуле

$$K_n(x,t) = \underbrace{\int_a^b\!\!\int_a^b\!\cdots\!\int_a^b}_{n-1} K(x,s_1)K(s_1,s_2)\dots K(s_{n-1},t)\,ds_1\,ds_2\dots ds_{n-1}.$$

Все итерированные ядра $K_n(x,t)$, начиная с $K_2(x,t)$, будут непрерывными функциями в квадрате $S = \{a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant t \leqslant b\}$, если начальное ядро $K(x,t)$ квадратично интегрируемо в этом квадрате.

Если данное ядро $K(x,t)$ симметрично, то все итерированные ядра $K_n(x,\ t)$ тоже симметричны.

11.3-2. Метод последовательных приближений

Результаты п. 11.3-1 могут быть также получены с помощью метода последовательных приближений. Для этого следует использовать рекуррентное соотношение

$$y_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) y_{n-1}(t)\,dt, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

в котором нулевое приближение $y_0(x) = f(x)$.

11.3-3. Построение резольвенты

Резольвента интегрального уравнения (1) определяется через итерированные ядра формулой

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,t), \qquad (5)$$

где ряд, стоящий в правой части, называется *рядом Неймана* ядра $K(x,t)$. Он сходится в среднем к единственному квадратично интегрируемому решению уравнения (1), если

$$|\lambda| < \frac{1}{B}, \qquad B = \sqrt{\int_a^b\!\!\int_a^b K^2(x,t)\,dx\,dt}. \qquad (6)$$

Если, кроме того,

$$\int_a^b K^2(x,t)\,dt \leqslant A, \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

где A — некоторая постоянная, то ряд Неймана сходится на $[a, b]$ абсолютно и равномерно.

Решение уравнения Фредгольма второго рода (1) выражается формулой

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda) f(t)\,dt, \qquad a \leqslant x \leqslant b. \tag{7}$$

Неравенство (6) является существенным для сходимости ряда (5). Однако решение уравнения (1) может существовать и для значений $|\lambda| > 1/B$.

Замечание 1. Решение уравнения второго рода со слабой особенностью

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,t) y(t)\,dt = f(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

где ядро $K(x,t)$ имеет вид

$$K(x,t) = \frac{L(x,t)}{|x-t|^\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

а функция $L(x,t)$ — непрерывна в квадрате $S = \{a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant t \leqslant b\}$, можно построить методом последовательных приближений при условии

$$|\lambda| < \frac{1-\alpha}{2B^*(b-a)^{1-\alpha}}, \qquad B^* = \sup|L(x,t)|.$$

Само же уравнение со слабой особенностью можно привести к уравнению Фредгольма вида

$$y(x) - \lambda^n \int_a^b K_n(x,t) y(t)\,dt = F(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

$$F(x) = f(x) + \sum_{p=1}^{n-1} \lambda^p \int_a^b K_p(x,t) f(t)\,dt,$$

где $K_p(x,t)$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$ — p-ое итерированное ядро, причем $K_n(x,t)$ — фредгольмово при $n > \frac{1}{2}(1-\alpha)^{-1}$ и ограниченное при $n > (1-\alpha)^{-1}$.

Пример 1. Решим интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_0^1 xty(t)\,dt = f(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

методом последовательных приближений. Здесь $K(x,t) = xt$, $a = 0$, $b = 1$. Последовательно найдем

$$K_1(x,t) = xt, \quad K_2(x,t) = \int_0^1 (xz)(zt)\,dz = \frac{xt}{3},$$

$$K_3(x,t) = \frac{1}{3}\int_0^1 (xz)(zt)\,dz = \frac{xt}{3^2}, \quad \ldots, \quad K_n(x,t) = \frac{xt}{3^{n-1}}.$$

Согласно формуле (5) для резольвенты

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,t) = xt \sum_{n=1}^{\infty} \Bigl(\frac{\lambda}{3}\Bigr)^{n-1} = \frac{3xt}{3-\lambda},$$

причем $|\lambda| < 3$, и в силу формулы (7) решение данного интегрального уравнения запишется в форме

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{3xt}{3-\lambda} f(t)\,dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \lambda \neq 3.$$

В частности, при $f(x) = x$ получим

$$y(x) = \frac{3x}{3-\lambda}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \lambda \neq 3.$$

11.3-4. Ортогональные ядра

Для некоторых уравнений Фредгольма ряд Неймана (5) для резольвенты сходится при любых значениях λ. Покажем это.

Пусть имеем два ядра: $K(x,t)$ и $L(x,t)$. Будем называть эти ядра *ортогональными*, если выполняются два условия:

$$\int_a^b K(x,z)L(z,t)\,dz = 0, \qquad \int_a^b L(x,z)K(z,t)\,dz = 0, \tag{8}$$

при любых допустимых значениях x и t.

Существуют ядра, ортогональные самим себе. Для таких ядер $K_2(x,t) \equiv 0$, где $K_2(x,t)$ — второе итерированное ядро. В этом случае, все последующие итерированные ядра также равны нулю и резольвента совпадает с ядром $K(x,t)$.

Пример 2. Найдем резольвенту ядра $K(x,t)=\sin(x-2t)$, $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.
Имеем

$$\int_0^{2\pi}\sin(x-2z)\sin(z-2t)\,dz=\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\cos(x+2t-3z)-\cos(x-2t-z)]\,dz=$$
$$=\tfrac{1}{2}\left[-\tfrac{1}{3}\sin(x+2t-3z)+\sin(x-2t-z)\right]_{z=0}^{z=2\pi}=0.$$

Таким образом, в этом случае резольвента ядра равна самому ядру:

$$R(x,t;\lambda)\equiv\sin(x-2t),$$

так что ряд Неймана (5) состоит из одного члена и, очевидно, сходится при любом λ.

Замечание 2. Если ядра $M^{(1)}(x,t)$, $M^{(2)}(x,t)$, $\ldots$, $M^{(n)}(x,\,t)$ попарно ортогональны, то резольвента, соответствующая их сумме

$$K(x,t)=\sum_{m=1}^{n}M^{(m)}(x,t),$$

равна сумме резольвент, соответствующих каждому из слагаемых.

⊙ *Литература*: С. Г. Михлин (1959), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), J. A. Cochran (1972), В. И. Смирнов (1974), A. J. Jerry (1985).

11.4. Метод определителей Фредгольма

11.4-1. Формула для резольвенты

Решение уравнения Фредгольма второго рода

$$y(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)\,dt=f(x),\qquad a\leqslant x\leqslant b,\tag{1}$$

дается формулой

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,t;\lambda)f(t)\,dt,\qquad a\leqslant x\leqslant b,\tag{2}$$

где резольвента $R(x,t;\lambda)$ определяется равенством

$$R(x,t;\lambda)=\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)},\qquad D(\lambda)\neq 0.\tag{3}$$

Здесь $D(x,t;\lambda)$ и $D(\lambda)$ — степенные ряды по λ:

$$D(x,t;\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}A_n(x,t)\lambda^n,\qquad D(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}B_n\lambda^n,\tag{4}$$

коэффициенты которых определяются формулами

$$A_0(x,t)=K(x,t),$$
$$A_n(x,t)=\underbrace{\int_a^b\!\cdots\!\int_a^b}_{n}\begin{vmatrix}K(x,t)&K(x,t_1)&\cdots&K(x,t_n)\\K(t_1,t)&K(t_1,t_1)&\cdots&K(t_1,t_n)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\K(t_n,t)&K(t_n,t_1)&\cdots&K(t_n,t_n)\end{vmatrix}dt_1\ldots dt_n,\tag{5}$$
$$B_0=1,$$
$$B_n=\underbrace{\int_a^b\!\cdots\!\int_a^b}_{n}\begin{vmatrix}K(t_1,t_1)&K(t_1,t_2)&\cdots&K(t_1,t_n)\\K(t_2,t_1)&K(t_2,t_2)&\cdots&K(t_2,t_n)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\K(t_n,t_1)&K(t_n,t_2)&\cdots&K(t_n,t_n)\end{vmatrix}dt_1\ldots dt_n.\tag{6}$$

Функция $D(x,t;\lambda)$ называется *минором Фредгольма*, а $D(\lambda)$ — *определителем Фредгольма*. Ряды (4) сходятся для всех значений λ и, значит, являются целыми аналитическими функциями от λ. Резольвента $R(x,t;\lambda)$ есть аналитическая функция от λ, кроме тех значений λ, которые являются корнями $D(\lambda)$. Последние совпадают с характеристическими числами уравнения и являются полюсами резольвенты $R(x,t;\lambda)$.

Пример 1. Рассмотрим интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_0^1 xe^t y(t)\,dt = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \lambda \neq 1.$$

Имеем

$$A_0(x,t) = xe^t, \quad A_1(x,t) = \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} \\ t_1e^t & t_1e^{t_1} \end{vmatrix} dt_1 = 0, \quad A_2(x,t) = \int_0^1\!\!\int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} & xe^{t_2} \\ t_1e^t & t_1e^{t_1} & t_1e^{t_2} \\ t_2e^t & t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1\,dt_2 = 0,$$

так как определители под знаком интеграла равны нулю. Очевидно, что и все последующие $A_n(x,t)$=0. Находим коэффициенты B_n:

$$B_1 = \int_0^1 K(t_1,\,t_1)\,dt_1 = \int_0^1 t_1e^{t_1}\,dt_1 = 1, \quad B_2 = \int_0^1\!\!\int_0^1 \begin{vmatrix} t_1e^{t_1} & t_1e^{t_2} \\ t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1\,dt_2 = 0.$$

Очевидно, что и все последующие $B_n = 0$.

Согласно формулам (4) имеем

$$D(x,t;\lambda) = K(x,t) = xe^t; \qquad D(\lambda) = 1 - \lambda.$$

Таким образом,

$$R(x,t;\lambda) = \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{xe^t}{1-\lambda},$$

и решение уравнения можно записать в форме

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{xe^t}{1-\lambda} f(t)\,dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \lambda \neq 1.$$

В частности, для $f(x) = e^{-x}$ получаем

$$y(x) = e^{-x} + \frac{\lambda}{1-\lambda}x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \lambda \neq 1.$$

11.4-2. Рекуррентные соотношения

Вычисление по формулам (5) и (6) коэффициентов $A_n(x,\,t)$ и B_n рядов (4) практически возможно лишь в очень редких случаях, но из этих формул получаются следующие рекуррентные соотношения:

$$A_n(x,t) = B_n K(x,t) - n \int_a^b K(x,s) A_{n-1}(s,t)\,ds, \tag{7}$$

$$B_n = \int_a^b A_{n-1}(s,s)\,ds. \tag{8}$$

Пример. Пользуясь формулами (7) и (8), найдем резольвенту ядра $K(x,t) = x - 2t$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Действительно, $B_0 = 1$, $A_0(x,t) = x - 2t$. По формуле (8), найдем

$$B_1 = \int_0^1 (-s)\,ds = -\tfrac{1}{2}.$$

По формуле (7) получим

$$A_1(x,t) = -\frac{x-2t}{2} - \int_0^1 (x-2s)(s-2t)\,ds = -x - t + 2xt + \tfrac{2}{3}.$$

Далее будем иметь

$$B_2 = \int_0^1 \bigl(-2s + 2s^2 + \tfrac{2}{3}\bigr)\,ds = \tfrac{1}{3},$$

$$A_2(x,t) = \frac{x-2t}{3} - 2\int_0^1 (x-2s)\bigl(-s - t + 2st + \tfrac{2}{3}\bigr)\,ds = 0,$$

$$B_3 = B_4 = \cdots = 0, \quad A_3(x,t) = A_4(x,t) = \cdots = 0.$$

Следовательно,

$$D(\lambda) = 1 + \tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{6}\lambda^2; \quad D(x,t;\lambda) = x - 2t + \lambda\bigl(x + t - 2xt - \tfrac{2}{3}\bigr).$$

Резольвента данного ядра будет иметь вид

$$R(x,t;\lambda) = \frac{x - 2t + \lambda\bigl(x + t - 2xt - \frac{2}{3}\bigr)}{1 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{6}\lambda^2}.$$

⊙ *Литература*: С. Г. Михлин (1959), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), В. И. Смирнов (1974).

11.5. Теоремы и альтернатива Фредгольма

11.5-1. Теоремы Фредгольма

Теорема 1. *Уравнение Фредгольма имеет не более счетного множества характеристических чисел, которые могут сгущаться только на бесконечности.*

Теорема 2. *Если значение λ правильное, то как данное интегральное уравнение, так и союзное с ним уравнение, разрешимо при любом свободном члене и решение каждого из этих уравнений единственно. Соответствующие однородные уравнения имеют только тривиальные решения.*

Теорема 3. *Если значение λ характеристическое, то однородное интегральное уравнение, так же как и союзное с ним однородное уравнение, имеет нетривиальные решения. Число линейно независимых решений однородного интегрального уравнения конечно и равно числу линейно независимых решений однородного союзного уравнения.*

Теорема 4. *Для того чтобы неоднородное интегральное уравнение было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы его свободный член $f(x)$ удовлетворял условиям*

$$\int_a^b f(x)\psi_k(x)\,dx = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\psi_k(x)$ — совокупность всех линейно независимых решений соответствующего союзного однородного уравнения.

11.5-2. Альтернатива Фредгольма

Из теорем Фредгольма вытекает так называемая альтернатива Фредгольма , которой чаще всего пользуются при исследовании интегральных уравнений.

Альтернатива Фредгольма. *Либо неоднородное уравнение разрешимо, какова бы ни была его правая часть, либо соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальные решения.*

Первая часть альтернативы имеет место, если данное значение параметра правильное, вторая — если оно характеристическое.

Замечание. Теория Фредгольма справедлива и для интегральных уравнений второго рода со слабой особенностью.

⦿ *Литература*: С. Г. Михлин (1959), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), J. A. Cochran (1972), В. И. Смирнов (1974) A. J. Jerry (1985), D. Porter, D. S. G. Stirling (1990), C. Corduneanu (1991), J. Kondo (1991), W. Hackbusch (1995), R. P. Kanwal (1996).

11.6. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода с симметричными ядрами

11.6-1. Характеристические числа и собственные функции

Симметричными интегральными уравнениями называются уравнения, ядра которых симметричны, т. е. $K(x,t) = K(t,x)$.

Каждое симметричное ядро, не равное тождественно нулю, имеет по крайней мере одно характеристическое число.

Совокупность характеристических чисел n-го итерированного ядра при любом n совпадает с совокупностью n-ых степеней характеристических чисел первого ядра.

Собственные функции симметричного ядра, соответствующие различным характеристическим числам, ортогональны, т. е. если

$$\varphi_1(x) = \lambda_1 \int_a^b K(x,t)\varphi_1(t)\,dt, \quad \varphi_2(x) = \lambda_2 \int_a^b K(x,t)\varphi_2(t)\,dt, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2,$$

то

$$(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \qquad (\varphi, \psi) \equiv \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx.$$

Характеристические числа симметричного ядра действительны.

Собственные функции можно сделать нормированными: достаточно каждую из них разделить на ее норму. Если некоторому характеристическому числу соответствуют несколько линейно независимых собственных функций, например, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$, то каждая их линейная комбинация также является собственной функцией и эти линейные комбинации могут быть выбраны так, что полученные при этом собственные функции будут ортонормированы.

Действительно, функция

$$\psi_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\|\varphi_1\|}, \qquad \|\varphi_1\| = \sqrt{(\varphi_1, \varphi_1)},$$

имеет норму, равную единице: $\|\psi_1\| = 1$. Образуем комбинацию $\alpha\psi_1 + \varphi_2$ и выберем α так, что

$$(\alpha\psi_1 + \varphi_2,\, \psi_1) = 0,$$

т. е. возьмем

$$\alpha = -\frac{(\varphi_2, \psi_1)}{(\psi_1, \psi_1)} = -(\varphi_2, \psi_1).$$

Функция

$$\psi_2(x) = \frac{\alpha\psi_1 + \varphi_2}{\|\alpha\psi_1 + \varphi_2\|}$$

ортогональна к $\psi_1(x)$ и имеет норму, равную единице. Далее выбирается комбинация $\alpha\psi_1 + \beta\psi_2 + \varphi_3$ и постоянные α и β находятся из условий ортогональности

$$(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2 + \varphi_3,\, \psi_1) = 0, \quad (\alpha\psi_1 + \beta\psi_2 + \varphi_3,\, \psi_2) = 0.$$

С найденными таким образом коэффициентами α и β функция

$$\psi_3 = \frac{\alpha\psi_1 + \beta\psi_2 + \varphi_3}{\|\alpha\psi_1 + \beta\psi_2 + \varphi_3\|}$$

ортогональна к ψ_1, ψ_2 и имеет норму, равную единице, и т. д.

Собственные функции, соответствующие разным характеристическим числам, как было отмечено ранее, ортогональны. Отсюда вытекает, что последовательность собственных функций симметричного ядра можно сделать ортонормированной.

В дальнейшем будем считать, что последовательность собственных функций симметричного ядра ортонормирована. Выписывая последовательность характеристических чисел, будем повторять каждое из них столько раз, сколько ему соответствует линейно независимых собственных функций. Тогда можно считать, что каждому характеристическому числу соответствует только одна собственная функция, хотя среди характеристических чисел могут оказаться равные. Пронумеруем характеристические числа в порядке возрастания их абсолютных величин. Таким образом, если

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n,\ \ldots \tag{1}$$

есть последовательность характеристических чисел некоторого симметричного ядра, и ей соответствует последовательность собственных функций

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n,\ \ldots \tag{2}$$

так что

$$\varphi_n(x) - \lambda_n \int_a^b K(x,t)\varphi_n(t)\,dt = 0, \tag{3}$$

то

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \tag{4}$$

и

$$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_n| \leqslant \cdots \tag{5}$$

Если характеристических чисел бесконечно много, то по теореме 1 Фредгольма они сгущаются только на бесконечности и потому $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Совокупность всех характеристических чисел и соответствующих им ортонормированных собственных функций симметричного ядра называются *системой характеристических чисел и собственных функций* данного ядра. Система собственных функций называется *неполной*, если существует отличная от нуля квадратично интегрируемая функция, ортогональная ко всем функциям системы. В противном случае система собственных функций называется *полной*.

11.6-2. Билинейный ряд

Пусть ядро $K(x,t)$ допускает разложение в равномерно сходящийся ряд по ортонормированной системе своих собственных функций

$$K(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x)\varphi_k(t) \tag{6}$$

для каждого фиксированного значения x в случае непрерывного ядра или почти всех x в случае квадратично интегрируемого ядра.

Тогда будем иметь

$$a_k(x)=\int_a^b K(x,t)\varphi_k(t)\,dt=\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}, \tag{7}$$

и, следовательно,

$$K(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k}. \tag{8}$$

Обратно, если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k} \tag{9}$$

сходится равномерно, то

$$K(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k}.$$

Имеет место следующее утверждение: билинейный ряд (9) сходится в среднем к ядру $K(x,t)$.

Если симметричное ядро $K(x,t)$ имеет лишь конечное число характеристических чисел, то оно вырожденное, так как в этом случае

$$K(x,t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k}. \tag{10}$$

Ядро $K(x,t)$ называется *положительно определенным*, если для всех функций $\varphi(x)$, отличных от тождественного нуля,

$$\int_a^b\!\!\int_a^b K(x,t)\varphi(x)\varphi(t)\,dx\,dt>0,$$

и лишь для $\varphi(x)\equiv 0$ указанный выше квадратический функционал равен нулю. Такое ядро имеет только положительные характеристические числа. Аналогично определяется *отрицательно определенное ядро*.

Всякое симметричное непрерывное положительно определенное (или отрицательно определенное) ядро разлагается по собственным функциям в билинейный ряд, абсолютно и равномерно сходящийся относительно переменных x,t.

Утверждение остается верным, если допустить, что ядро имеет конечное число отрицательных (соответственно положительных) характеристических чисел.

Если ядро уравнения $K(x,t)$ симметрично, непрерывно в $S=\{a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant t\leqslant b\}$ и имеет в квадрате S равномерно ограниченные частные производные, то оно разлагается по собственным функциям в равномерно сходящийся билинейный ряд.

11.6-3. Теорема Гильберта–Шмидта

Если функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x)=\int_a^b K(x,t)g(t)\,dt, \tag{11}$$

где $K(x,t)$ — квадратично интегрируемое ядро, $g(t)$ — некоторая квадратично интегрируемая функция, то $f(x)$ может быть представлена своим рядом Фурье относительно ортонормированной системы собственных функций ядра $K(x,t)$:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(x), \tag{12}$$

где

$$a_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx, \qquad k = 1, 2, \dots$$

Если, кроме того,

$$\int_a^b K^2(x,t)\,dt \leqslant A < \infty, \tag{13}$$

то ряд (12) сходится абсолютно и равномерно для каждой функции $f(x)$ вида (11).

Замечание 1. В теореме Гильберта–Шмидта полнота системы собственных функций не предполагается.

11.6-4. Билинейные ряды итерированных ядер

По определению итерированных ядер

$$K_m(x,t) = \int_a^b K(x,z)K_{m-1}(z,t)\,dz, \qquad m = 2, 3, \dots \tag{14}$$

Коэффициенты Фурье $a_k(t)$ ядра $K_m(x,t)$, рассматриваемого как функция x, относительно ортонормированной системы собственных функций ядра $K(x,t)$ равны

$$a_k(t) = \int_a^b K_m(x,t)\varphi_k(x)\,dx = \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k^m}. \tag{15}$$

Применение теоремы Гильберта–Шмидта к (14) дает

$$K_m(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k^m}, \qquad m = 2, 3, \dots \tag{16}$$

В формуле (16) сумма ряда понимается как предел в среднем. Если же дополнительно выполняется неравенство (13), то в формуле (16) ряд сходится равномерно.

11.6-5. Решение неоднородного уравнения

Представим интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)\,dt = f(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b, \tag{17}$$

где значение λ правильное, в виде

$$y(x) - f(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)\,dt \tag{18}$$

и применим теорему Гильберта–Шмидта к функции $y(x) - f(x)$:

$$y(x) - f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\varphi_k(x),$$

$$A_k = \int_a^b [y(x) - f(x)]\varphi_k(x)\,dx = \int_a^b y(x)\varphi_k(x)\,dx - \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx = y_k - f_k.$$

Тогда с учетом разложения (8) будем иметь

$$\lambda \int_a^b K(x,t)y(t)\,dt = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{\lambda_k}\varphi_k(x)$$

и, таким образом,

$$\lambda \frac{y_k}{\lambda_k} = y_k - f_k, \quad y_k = \frac{\lambda_k f_k}{\lambda_k - \lambda}, \quad A_k = \frac{\lambda f_k}{\lambda_k - \lambda}. \tag{19}$$

Следовательно,

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda}\varphi_k(x). \tag{20}$$

Если же значение λ характеристическое, т. е.

$$\lambda = \lambda_p = \lambda_{p+1} = \dots = \lambda_q, \tag{21}$$

то при $k \neq p, p+1, \dots, q$ члены (20) сохраняют свой вид. При $k = p, p+1, \dots, q$ из формулы (19) следует $f_k = A_k(\lambda - \lambda_k)/\lambda$ и в силу (21) $f_p = f_{p+1} = \dots = f_q = 0$. Последнее означает, что

$$\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx = 0$$

при $k = p, p+1, \dots, q$, т. е. свободный член уравнения должен быть ортогональным к собственным функциям, соответствующим характеристическому числу λ.

Решения уравнения (17) в этом случае имеют вид

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda}\varphi_k(x) + \sum_{k=p}^{q} C_k\varphi_k(x), \tag{22}$$

где в первой из сумм (22) должны быть опущены члены при $k = p, p+1, \dots, q$, для которых одновременно обращаются в нуль f_k и $\lambda - \lambda_k$. Коэффициенты во второй сумме C_k — произвольные постоянные.

Замечание 2. Аналогично проделанному выше можно на основании билинейного разложения (8) и теоремы Гильберта–Шмидта построить решение симметричного интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$\int_a^b K(x,t)y(t)\,dt = f(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

в следующей форме:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k\lambda_k\varphi_k(x),$$

причем необходимыми и достаточными условиями существования и единственности такого решения из $L_2(a,b)$ являются полнота системы собственных функций $\varphi_k(x)$ ядра $K(x,t)$ и сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2\lambda_k^2$, где λ_k — соответствующие характеристические числа.

Следует отметить, что проверка последнего условия для конкретных уравнений затруднительна. Обычно при решении уравнений Фредгольма первого рода пользуются методами, изложенными в главе 10.

11.6-6. Альтернатива Фредгольма для симметричных уравнений

Полученные результаты можно объединить в следующей альтернативной форме.

Симметричное интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)y(t)\,dt = f(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b, \tag{23}$$

при заданном λ либо имеет для всякой произвольной функции $f(x) \in L^2(a,\,b)$ одно и только одно квадратично интегрируемое решение, (в частности, $y = 0$ для $f = 0$), либо соответствующее однородное уравнение имеет конечное число r линейно независимых решений $Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_r(x)$, $r > 0$.

Во втором случае неоднородное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда заданная функция $f(x)$ ортогональна всем функциям $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, $\dots$, $Y_r(x)$ на отрезке $[a,b]$. При этом решение определяется с точностью до аддитивной линейной комбинации $A_1Y_1(x) + A_2Y_2(x) + \dots + A_rY_r(x)$, где A_i $(i = 1, 2, \dots, r)$ — произвольные постоянные.

11.6-7. Резольвента симметричного ядра

Решение уравнения Фредгольма второго рода (23) можно записать в виде

$$y(x) = f(x) + \lambda\int_a^b R(x,t;\lambda)f(t)\,dt, \tag{24}$$

где резольвента $R(x,t;\lambda)$ имеет вид

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k - \lambda}. \tag{25}$$

Здесь совокупности $\varphi_k(x)$ и λ_k составляют системы собственных функций и характеристических чисел уравнения (23). Из формулы (25) вытекает, что резольвента симметричного ядра имеет только простые полюсы.

11.6-8. Экстремальные свойства характеристических чисел

Введем обозначения

$$(u,w) = \int_a^b u(x)w(x)\,dx, \quad \|u\|^2 = (u,u),$$

$$(Ku,u) = \int_a^b\!\!\int_a^b K(x,t)u(x)u(t)\,dx\,dt,$$

где (u,w) — *скалярное произведение* функций $u(x)$ и $w(x)$, $\|u\|$ — *норма* функции $u(x)$, а (Ku,u) — *квадратичная форма* порожденная ядром $K(x,t)$.

Пусть λ_1 — наименьшее по абсолютной величине характеристическое число симметричного ядра $K(x,t)$ и пусть $y_1(x)$ — соответствующая этому числу собственная функция. Тогда

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \max_{y\not\equiv 0} \frac{|(Ky,y)|}{\|y\|^2}. \tag{26}$$

Максимум правой части достигается при $y = y_1(x)$.

Пусть λ_1, λ_2, …, λ_n — первые n характеристических чисел симметричного ядра $K(x,t)$ (в порядке возрастания их абсолютных величин), а $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — соответствующие им ортонормированные собственные функции. Тогда для характеристического числа λ_{n+1}, следующего за λ_n, справедлива формула

$$\frac{1}{|\lambda_{n+1}|} = \max \frac{|(Ky,y)|}{\|y\|^2}, \tag{27}$$

причем максимум берется на множестве функций y, отличных от тождественного нуля и ортогональных к собственным функциям $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$(y, y_j) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{28}$$

Максимум правой части (27) достигается при $y = y_{n+1}$, где $y_{n+1} = y_{n+1}(x)$ — собственная функция, соответствующая характеристическому числу λ_{n+1} и ортогональная к $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Замечание 3. Для положительно определенного ядра $K(x,t)$ знак модуля в соотношениях (26) и (27) может быть опущен.

11.6-9. Интегральные уравнения, приводимые к симметричным

Уравнение вида

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\rho(t)y(t)\,dt = f(x), \tag{29}$$

где $K(x,t)$ — симметричное ядро и непрерывная функция $\rho(t) > 0$ на $[a,b]$, можно привести к симметричному. Действительно, умножая обе части (29) на $\sqrt{\rho(x)}$ и вводя новую искомую функцию $z(x) = \sqrt{\rho(x)}\,y(x)$, придем к интегральному уравнению

$$z(x) - \lambda \int_a^b L(x,t)z(t)\,dt = f(x)\sqrt{\rho(x)}, \qquad L(x,t) = K(x,t)\sqrt{\rho(x)\rho(t)}, \tag{30}$$

где $L(x,t)$ — симметричное ядро.

11.6-10. Кососимметричное интегральное уравнение

Кососимметричным интегральным уравнением называется уравнение, ядро которого кососимметрично, т. е. в уравнении

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)\,dt = f(x) \tag{31}$$

ядро $K(x,t)$ обладает следующим свойством:

$$K(t,x) = -K(x,t). \tag{32}$$

Уравнение (31) с кососимметричным ядром (32) имеет по крайней мере одно характеристическое число и все его характеристические числа — чисто мнимые.

⊙ *Литература*: Э. Гурса (1934), Р. Курант, Д. Гильберт (1951), С. Г. Михлин (1959), Ф. Трикоми (1960), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), J. A. Cochran (1972), В. И. Смирнов (1974), A. J. Jerry (1985), D. Porter, D. S. G. Stirling (1990), C. Corduneanu (1991), J. Kondo (1991), W. Hackbusch (1995), R. P. Kanwal (1996).

11.7. Операторный метод решения интегральных уравнений второго рода

11.7-1. Простейшая схема

Рассмотрим линейное уравнение второго рода специального вида

$$y(x) - \lambda \mathbf{L}\,[y] = f(x), \tag{1}$$

где $\mathbf{L}$ — некоторый линейный (интегральный) оператор, удовлетворяющий условию $\mathbf{L}^2 = k$, $k = \text{const}$.

Подействуем оператором $\mathbf{L}$ на обе части уравнения (1). В результате получим

$$\mathbf{L}\,[y] - k\lambda y(x) = \mathbf{L}\,[f(x)]. \tag{2}$$

Исключая из (1) и (2) слагаемое $\mathbf{L}\,[y]$, находим решение:

$$y(x) = \frac{1}{1 - k\lambda^2}\bigl\{f(x) + \lambda \mathbf{L}\,[f]\bigr\}. \tag{3}$$

Замечание. В разд. 9.4 описаны различные обобщения указанного метода.

11.7-2. Решение уравнений второго рода на полуоси

1°. Рассмотрим уравнение

$$y(x) - \lambda \int_0^\infty \cos(xt) y(t)\,dt = f(x). \tag{4}$$

Оператор $\mathbf{L}$ в данном случае с точностью до постоянного сомножителя совпадает с косинус-преобразованием Фурье:

$$\mathbf{L}\,[y] = \int_0^\infty \cos(xt) y(t)\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathfrak{F}_\mathrm{c}[y] \tag{5}$$

и действует по правилу $\mathbf{L}^2 = k$, где $k = \frac{\pi}{2}$ (см. п. 7.5-1).

Решение получим по формуле (3) с учетом равенства (5):

$$y(x) = \frac{2}{2 - \pi\lambda^2}\left[f(x) + \lambda \int_0^\infty \cos(xt) f(t)\,dt\right], \quad \lambda \neq \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}. \tag{6}$$

2°. Рассмотрим уравнение

$$y(x) - \lambda \int_0^\infty t J_\nu(xt) y(t)\,dt = f(x), \tag{7}$$

где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$.

Оператор $\mathbf{L}$ здесь с точностью до постоянного сомножителя совпадает с преобразованием Ханкеля:

$$\mathbf{L}\,[y] = \int_0^\infty t J_\nu(xt) y(t)\,dt \tag{8}$$

и действует по правилу $\mathbf{L}^2 = 1$ (см. п. 7.6-1).

Решение получим по формуле (3) при $k = 1$ с учетом равенства (8):

$$y(x) = \frac{1}{1 - \lambda^2}\left[f(x) + \lambda \int_0^\infty t J_\nu(xt) f(t)\,dt\right], \qquad \lambda \neq \pm 1. \tag{9}$$

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, A. V. Manzhirov (1998), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000).

11.8. Метод интегральных преобразований и метод модельных решений

11.8-1. Уравнение с разностным ядром на всей оси

Рассмотрим интегральное уравнение типа свертки второго рода с одним ядром

$$y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)y(t)\,dt = f(x), \qquad -\infty < x < \infty, \tag{1}$$

где $f(x)$ и $K(x)$ — известные правая часть и ядро интегрального уравнения, а $y(x)$ — искомая функция. Применим к уравнению (1) альтернативное преобразование Фурье. Тогда с учетом теоремы о свертке (см. п. 7.4-4)

$$\mathcal{Y}(u)[1 + \mathcal{K}(u)] = \mathcal{F}(u). \tag{2}$$

Таким образом, с помощью преобразования Фурье решение исходного интегрального уравнения (1) приводится к решению алгебраического уравнения (2) для изображения искомого решения. Решение уравнения (2) имеет вид

$$\mathcal{Y}(u) = \frac{\mathcal{F}(u)}{1 + \mathcal{K}(u)}. \tag{3}$$

Формула (3) выражает изображение решения исходного интегрального уравнения через изображения заданных функций — ядра и правой части уравнения. Само решение может быть получено при помощи обратного преобразования Фурье:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{Y}(u) e^{-iux}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(u)}{1 + \mathcal{K}(u)}\, e^{-iux}\,du. \tag{4}$$

Формула (4) фактически решает задачу, однако она не всегда удобна для использования, так как требует вычисления изображения $\mathcal{F}(u)$ для каждой правой части $f(x)$. Во многих случаях более удобным оказывается представление решения неоднородного интегрального уравнения через резольвенту исходного уравнения. Чтобы получить требуемое представление, заметим, что формула (3) может быть преобразована к виду

$$\mathcal{Y}(u) = [1 - \mathcal{R}(u)]\mathcal{F}(u), \qquad \mathcal{R}(u) = \frac{\mathcal{K}(u)}{1 + \mathcal{K}(u)}. \tag{5}$$

На основании (5) при помощи обратного преобразования Фурье и теоремы о свертке (для изображений) получим

$$y(x) = f(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} R(x-t)f(t)\,dt, \tag{6}$$

где резольвента $R(x-t)$ интегрального уравнения (1) задается соотношением

$$R(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{K}(u)}{1 + \mathcal{K}(u)} e^{-iux}\,du. \tag{7}$$

Таким образом, для определения решения исходного интегрального уравнения (1) достаточно найти функцию $R(x)$ по формуле (7).

Функция $R(x)$ представляет собой решение уравнения (1) при специальном виде функции $f(x)$. Действительно, из формул (3) и (5) следует, что при $\mathcal{Y}(u) = \mathcal{R}(u)$ функция $\mathcal{F}(u)$ равна $\mathcal{K}(u)$. Это означает, что решением уравнения (1) при $f(x) \equiv K(x)$ является функция $y(x) \equiv R(x)$, т. е. резольвента уравнения (1) удовлетворяет интегральному уравнению

$$R(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)R(t)\,dt = K(x), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{8}$$

Отметим, что для вычисления прямых и обратных преобразований Фурье можно воспользоваться соответствующими таблицами из книг Г. Бейтмена, А. Эрдейи (1969), В. А. Диткина, А. П. Прудникова (1965, 1974).

Пример. Решим интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \exp\bigl(\alpha|x-t|\bigr) y(t)\,dt = f(x), \qquad -\infty < x < \infty, \tag{9}$$

которое вытекает из уравнения (1) при конкретном ядре $K(x-t)$, задаваемом выражением

$$K(x) = -\sqrt{2\pi}\,\lambda e^{-\alpha|x|}, \qquad \alpha > 0. \tag{10}$$

Найдем функцию $R(x)$, для чего вычислим

$$\mathcal{K}(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\alpha|x|} e^{iux}\,dx = -\frac{2\alpha\lambda}{u^2+\alpha^2}. \tag{11}$$

Тогда по формуле (5)

$$\mathcal{R}(u) = \frac{\mathcal{K}(u)}{1+\mathcal{K}(u)} = -\frac{2\alpha\lambda}{u^2+\alpha^2-2\alpha\lambda}, \tag{12}$$

откуда

$$R(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(u)e^{-iux}\,du = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\lambda}{u^2+\alpha^2-2\alpha\lambda}e^{-iux}\,du. \tag{13}$$

Положим, что $\lambda < \frac{1}{2}\alpha$. Тогда интеграл (13) имеет смысл и может быть вычислен с помощью теории вычетов путем применения леммы Жордана (см. пп. 7.1-4 и 7.1-5). После некоторых выкладок найдем

$$R(x) = -\sqrt{2\pi}\,\frac{\alpha\lambda}{\sqrt{\alpha^2-2\alpha\lambda}}\exp\bigl(-|x|\sqrt{\alpha^2-2\alpha\lambda}\,\bigr) \tag{14}$$

и, окончательно, в соответствии с (6) получим

$$y(x) = f(x) + \frac{\alpha\lambda}{\sqrt{\alpha^2-2\alpha\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\bigl(-|x-t|\sqrt{\alpha^2-2\alpha\lambda}\,\bigr)f(t)\,dt, \quad -\infty < x < \infty. \tag{15}$$

11.8-2. Уравнение с ядром $K(x,t) = t^{-1}Q(x/t)$ на полуоси

Рассмотрим здесь уравнение на полуоси

$$y(x) - \int_0^{\infty} \frac{1}{t}Q\Bigl(\frac{x}{t}\Bigr)y(t)\,dt = f(x). \tag{16}$$

Для решения будем использовать преобразование Меллина, которое определяется следующим образом (см. также разд. 7.3):

$$\widehat{f}(s) = \mathfrak{M}\{f(x), s\} \equiv \int_0^{\infty} f(x)x^{s-1}\,dx, \tag{17}$$

где $s = \sigma + i\tau$ — комплексная переменная ($\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$), $\widehat{f}(s)$ — изображение функции $f(x)$. Далее для краткости преобразование Меллина будем обозначать $\mathfrak{M}\{f(x)\} \equiv \mathfrak{M}\{f(x), s\}$.

По известному изображению $\widehat{f}(s)$ оригинал находится с помощью обратного преобразования Меллина

$$f(x) = \mathfrak{M}^{-1}\{\widehat{f}(s)\} \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \widehat{f}(s)x^{-s}\,ds, \qquad \sigma_1 < c < \sigma_2, \tag{18}$$

где путь интегрирования расположен параллельно мнимой оси комплексной плоскости s, а интеграл понимается в смысле главного значения.

Применяя преобразование Меллина к уравнению (16) и учитывая, что интеграл с таким ядром преобразуется в произведение про правилу (см. п. 7.3-2)

$$\mathfrak{M}\Bigl\{\int_0^{\infty} \frac{1}{t}Q\Bigl(\frac{x}{t}\Bigr)y(t)\,dt\Bigr\} = \widehat{Q}(s)\widehat{y}(s),$$

приходим к уравнению для изображения искомой величины $\widehat{y}(s)$:

$$\widehat{y}(s) - \widehat{Q}(s)\widehat{y}(s) = \widehat{f}(s).$$

Решение этого уравнения определяется формулой

$$\widehat{y}(s) = \frac{\widehat{f}(s)}{1-\widehat{Q}(s)}. \tag{19}$$

Применяя к (19) обратное преобразование Меллина (18), получим решение исходного интегрального уравнения

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\widehat{f}(s)}{1-\widehat{Q}(s)}x^{-s}\,ds. \tag{20}$$

Это решение можно записать также с помощью резольвенты в виде

$$y(x) = f(x) + \int_0^\infty \frac{1}{t} N\Big(\frac{x}{t}\Big) f(t)\,dt, \tag{21}$$

где приняты обозначения

$$N(x) = \mathfrak{M}^{-1}\{\widehat{N}(s)\}, \qquad \widehat{N}(s) = \frac{\widehat{Q}(s)}{1-\widehat{Q}(s)}. \tag{22}$$

При использовании указанного аналитического метода решения могут возникнуть технические трудности: 1) при получении изображения для заданного ядра $K(x)$ и 2) при нахождении оригинала решения по его изображению $\widehat{y}(s)$. Для вычисления соответствующих интегралов применяют таблицы прямых и обратных преобразований Меллина [см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1969), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974)]. Во многих случаях сначала используют связь между преобразованием Меллина и преобразованиями Фурье и Лапласа:

$$\mathfrak{M}\{f(x),s\} = \mathfrak{F}\{f(e^x), is\} = \mathfrak{L}\{f(e^x), -s\} + \mathfrak{L}\{f(e^{-x}), s\}, \tag{23}$$

а затем применяют таблицы прямых и обратных преобразований Фурье и Лапласа.

Замечание 1. Уравнение

$$y(x) - \int_0^\infty H\Big(\frac{x}{t}\Big) x^\alpha t^{-\alpha-1} y(t)\,dt = f(x) \tag{24}$$

можно записать в форме (16), если обозначить $K(z) = z^\alpha H(z)$.

11.8-3. Уравнение с ядром $K(x,t) = t^\beta Q(xt)$ на полуоси

Рассмотрим уравнение на полуоси

$$y(x) - \int_0^\infty t^\beta Q(xt) y(t)\,dt = f(x). \tag{25}$$

Для решения будем использовать преобразование Меллина. Умножая обе части (25) на x^{s-1} и интегрируя по x от нуля до бесконечности, получим

$$\int_0^\infty y(x)x^{s-1}\,dx - \int_0^\infty y(t)t^\beta\,dt \int_0^\infty Q(xt)x^{s-1}\,dx = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}\,dx. \tag{26}$$

Сделаем замену $z = xt$. В результате получим

$$\widehat{y}(s) - \widehat{Q}(s)\int_0^\infty y(t)t^{\beta-s}\,dt = \widehat{f}(s). \tag{27}$$

Учитывая равенство

$$\int_0^\infty y(t)t^{\beta-s}\,dt = \widehat{y}(1+\beta-s),$$

перепишем уравнение (27) в следующем виде:

$$\widehat{y}(s) - \widehat{Q}(s)\widehat{y}(1+\beta-s) = \widehat{f}(s). \tag{28}$$

Заменяя s в соотношении (28) на $1+\beta-s$, имеем

$$\widehat{y}(1+\beta-s) - \widehat{Q}(1+\beta-s)\widehat{y}(s) = \widehat{f}(1+\beta-s). \tag{29}$$

Исключая из равенств величину $\widehat{y}(1+\beta-s)$ и разрешая полученное уравнение относительно $\widehat{y}(s)$, находим изображение искомого решения

$$\widehat{y}(s) = \frac{\widehat{f}(s) + \widehat{Q}(s)\widehat{f}(1+\beta-s)}{1-\widehat{Q}(s)\widehat{Q}(1+\beta-s)}. \tag{30}$$

По формуле обращения Меллина получим решение интегрального уравнения (25) в виде

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\widehat{f}(s) + \widehat{Q}(s)\widehat{f}(1+\beta-s)}{1-\widehat{Q}(s)\widehat{Q}(1+\beta-s)} x^{-s}\,ds. \tag{31}$$

Замечание 2. Уравнение

$$y(x) - \int_0^\infty H(xt)x^p t^q y(t)\,dt = f(x)$$

можно записать в форме (25), если обозначить $Q(z) = z^p H(z)$, $\beta = q - p$.

11.8-4. Метод модельных решений для уравнений на всей оси

Проиллюстрируем возможности обобщенной модификации метода модельных решений (см. разд. 9.6) на примере уравнения

$$Ay(x) + \int_{-\infty}^{\infty} Q(x+t)e^{\beta t} y(t)\,dt = f(x), \tag{32}$$

где $Q = Q(z)$, $f(x)$ — произвольные функции, A, β — произвольные постоянные, удовлетворяющие некоторым ограничениям.

Для наглядности вместо исходного уравнения (32) будем писать

$$\mathbf{L}\,[y(x)] = f(x). \tag{33}$$

В качестве пробного решения возьмем экспоненту

$$y_0 = e^{px}. \tag{34}$$

Подставляя (34) в левую часть уравнения (33), после некоторых преобразований получим

$$\mathbf{L}\,[e^{px}] = Ae^{px} + q(p)e^{-(p+\beta)x}, \qquad \text{где} \quad q(p) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(z)e^{(p+\beta)z}\,dz. \tag{35}$$

Правую часть (35) можно рассматривать как функциональное уравнение относительно ядра обратного преобразования Лапласа e^{px}. Для его решения заменим p в (35) на $-p-\beta$. В результате получим

$$\mathbf{L}\,[e^{-(p+\beta)x}] = Ae^{-(p+\beta)x} + q(-p-\beta)e^{px}. \tag{36}$$

Умножим обе части равенства (35) на A, а обе части равенства (36) на $-q(p)$ и сложим почленно полученные выражения. В результате имеем

$$\mathbf{L}\,[Ae^{px} - q(p)e^{-(p+\beta)x}] = [A^2 - q(p)q(-p-\beta)]e^{px}. \tag{37}$$

Поделив обе части (37) на постоянную $A^2 - q(p)q(-p-\beta)$, получим исходное модельное решение

$$Y(x,p) = \frac{Ae^{px} - q(p)e^{-(p+\beta)x}}{A^2 - q(p)q(-p-\beta)}, \qquad \mathbf{L}\,[Y(x,p)] = e^{px}. \tag{38}$$

Здесь $-\infty < x < \infty$, поэтому следует положить $p = iu$ и воспользоваться формулами из п. 9.6-3. Тогда решение уравнения (32) для произвольной функции $f(x)$ можно записать в виде

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Y(x,iu)\tilde{f}(u)\,du, \qquad \tilde{f}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}\,dx. \tag{39}$$

⊙ *Литература*: П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), В. И. Смирнов (1974), Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978), А. Д. Полянин, А. В. Манжиров (1997), A. D. Polyanin, A. V. Manzhirov (1998), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000).

11.9. Метод Карлемана для интегральных уравнений типа свертки второго рода

11.9-1. Уравнение Винера–Хопфа второго рода

В приложениях часто встречаются уравнения типа свертки второго рода вида*

$$y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} K(x-t)y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < x < \infty, \tag{1}$$

где ядро $K(x)$ определено на всей действительной оси.

* Перед чтением этого раздела рекомендуется ознакомится с разд. 10.4 и 10.5.

Доопределим (1) на отрицательной полуоси путем введения односторонних функций

$$y_+(x) = \begin{cases} y(x) & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad y_-(x) = 0 \ \text{ при } \ x > 0.$$

Тогда получим уравнение

$$y_+(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)y_+(t)\,dt = y_-(x) + f_+(x), \qquad -\infty < x < \infty, \tag{2}$$

которое совпадает с (1) при $x > 0$.

Вспомогательная функция $y_-(x)$ введена для того, чтобы доопределить левую часть уравнения (2) при $x < 0$. Заметим, что $y_-(x)$ в области $x < 0$ неизвестна и находится в процессе решения задачи.

Переходя в равенстве (2) к интегралам Фурье (см. пп. 7.4-3, 10.4-1, 10.4-2), получим задачу Римана в форме

$$\mathcal{Y}^+(u) = \frac{\mathcal{Y}^-(u)}{1+\mathcal{K}(u)} + \frac{\mathcal{F}^+(u)}{1+\mathcal{K}(u)}, \qquad -\infty < u < \infty. \tag{3}$$

1°. Предположим, что выполнено условие нормальности, т. е.

$$1 + \mathcal{K}(u) \neq 0,$$

и запишем задачу Римана в ее обычной форме

$$\mathcal{Y}^+(u) = \mathcal{D}(u)\mathcal{Y}^-(u) + \mathcal{H}(u), \qquad -\infty < u < \infty, \tag{4}$$

где

$$\mathcal{D}(u) = \frac{1}{1+\mathcal{K}(u)}, \quad \mathcal{H}(u) = \frac{\mathcal{F}(u)}{1+\mathcal{K}(u)}. \tag{5}$$

Задача Римана (4) равносильна уравнению (1): они одновременно разрешимы или неразрешимы, имеют в общих решениях одинаковое число произвольных постоянных. Если индекс задачи Римана

$$\nu = \operatorname{Ind} \frac{1}{1+\mathcal{K}(u)}, \tag{6}$$

который иногда называют *индексом уравнения Винера–Хопфа второго рода* положителен, то однородное уравнение (1) $(f(x) \equiv 0)$ имеет ровно ν линейно независимых решений, а неоднородное уравнение безусловно разрешимо, и его решение зависит от ν произвольных комплексных постоянных.

В случае $\nu \leqslant 0$ однородное уравнение не имеет отличных от нуля решений. Неоднородное уравнение при $\nu = 0$ безусловно разрешимо, причем решение единственно. Когда индекс ν отрицателен, условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(u)\,du}{\mathcal{X}^+(u)[1+\mathcal{K}(u)](u+i)^k} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, -\nu, \tag{7}$$

необходимы и достаточны для разрешимости неоднородного уравнения (см. п. 10.4-4).

Во всех случаях, когда решение уравнения (1) существует, его можно найти по формуле

$$y(x) = y_+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{Y}^+(u)e^{-iux}\,du, \qquad x > 0, \tag{8}$$

где $\mathcal{Y}^+(u)$ — построенное по схеме из п. 10.4-4 (см. рис. 3) решение задачи Римана (4) и (5).

Отметим, что в формуле (8) явно присутствует только функция $\mathcal{Y}^+(u)$, которая связана с $\mathcal{Y}^-(u)$ соотношением (4).

2°. Исследуем теперь исключительный случай интегрального уравнения (1), когда нарушается условие нормальности для задачи Римана (3) (см. пп. 10.4-6 и 10.4-7). В этом случае отсутствуют нули коэффициента $D(u) = [1+\mathcal{K}(u)]^{-1}$ и порядок его на бесконечности $\eta = 0$. Общее решение краевой задачи (3) можно получить по формулам (63) из п. 10.4-7 при $\alpha_i = 0$. Решение исходного интегрального уравнения (1) определится из решения краевой задачи по формуле (8).

На рис. 4 изображена схема решения интегральных уравнений Винера–Хопфа (см. также п. 10.5-1).

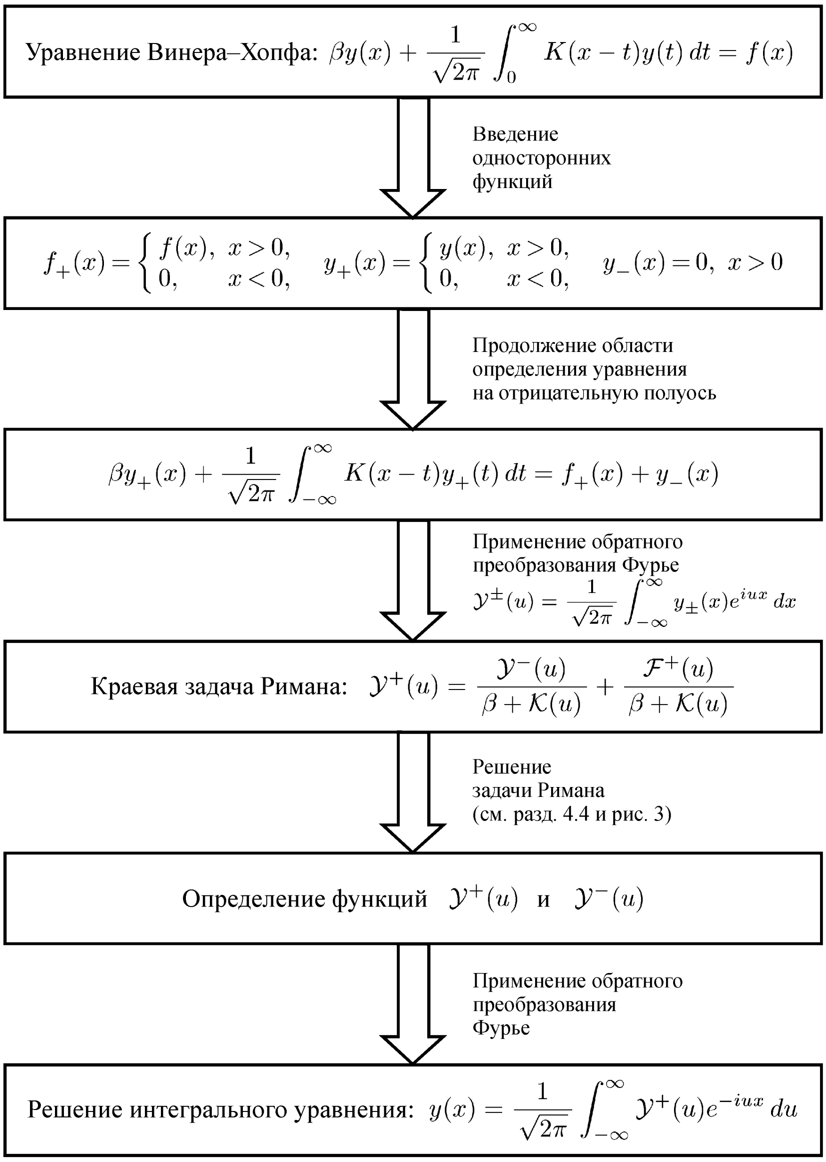

Рис. 4. Схема решения интегральных уравнений Винера–Хопфа. При $\beta = 0$ имеем уравнение первого рода, при $\beta = 1$ — уравнение второго рода.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y(x) + \int_0^\infty (a + b|x-t|)e^{-|x-t|}y(t)\,dt = f(x), \qquad x > 0, \tag{9}$$

где постоянные a и b вещественны и $b \neq 0$. Ядро $K(x-t)$ в уравнении (1) дается выражением

$$K(x) = \sqrt{2\pi}\,(a + b|x|)e^{-|x|}.$$

Найдем изображение ядра:

$$\mathcal{K}(u) = \int_{-\infty}^\infty (a + b|x|)e^{-|x|+iux}\,dx = 2\,\frac{u^2(a-b)+a+b}{(u^2+1)^2}.$$

Отсюда

$$1+\mathcal{K}(u) = \frac{P(u)}{(u^2+1)^2}, \qquad P(z) = z^4 + 2(a-b+1)z^2 + 2a + 2b + 1.$$

Исходя из условия нормальности, предполагаем, что постоянные a и b таковы, что многочлен $P(z)$ не имеет вещественных корней. Пусть $\alpha + i\beta$ — корень биквадратного уравнения $P(z) = 0$, причем $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Тогда, в силу вещественности коэффициентов уравнения, величины $(\alpha - i\beta)$, $(-\alpha + i\beta)$ и $(-\alpha - i\beta)$ будут тремя остальными корнями. Также в силу вещественности функция $1 + \mathcal{K}(u)$ имеет нулевой индекс, так что решение уравнения (9) существует и единственно.

Разлагая на множители, находим $1 + \mathcal{K}(u) = \mathcal{X}^-(u)/\mathcal{X}^+(u)$, где

$$\mathcal{X}^+(u) = \frac{(u+i)^2}{(u+\alpha+i\beta)(u-\alpha+i\beta)}, \quad \mathcal{X}^-(u) = \frac{(u-\alpha-i\beta)(u+\alpha-i\beta)}{(u-i)^2}.$$

Используя этот результат, представим краевое условие (4), (5) в виде

$$\frac{\mathcal{Y}^+(u)}{\mathcal{X}^+(u)} - \frac{(u-i)^2\mathcal{F}^+(u)}{(u-\alpha-i\beta)(u+\alpha-i\beta)} = \frac{\mathcal{Y}^-(u)}{\mathcal{X}^-(u)}, \qquad -\infty < u < \infty. \tag{10}$$

Применяя теорему об аналитическом продолжении и обобщенную теорему Лиувилля (см. п. 10.4-3), получаем возможность приравнять обе части равенства величине

$$\frac{\mathrm{C}_1}{u-\alpha-i\beta} + \frac{\mathrm{C}_2}{u+\alpha-i\beta},$$

где постоянные C_1 и C_2 подлежат определению. Отсюда

$$\mathcal{Y}^+(u) = \mathcal{X}^+(u)\Bigl(\frac{(u-i)^2\mathcal{F}^+(u)}{(u-\alpha-i\beta)(u+\alpha-i\beta)} + \frac{\mathrm{C}_1}{u-\alpha-i\beta} + \frac{\mathrm{C}_2}{u+\alpha-i\beta}\Bigr). \tag{11}$$

Для устранения полюсов $(\alpha + i\beta)$ и $(-\alpha + i\beta)$ необходимо и достаточно положить

$$C_1 = -\frac{(\alpha+i\beta-i)^2\mathcal{F}^+(\alpha+i\beta)}{2\alpha}, \quad C_2 = -\frac{(-\alpha+i\beta-i)^2\mathcal{F}^+(-\alpha+i\beta)}{-2\alpha}. \tag{12}$$

Ввиду громоздкости переход от изображения (11) к оригиналу осуществим в два этапа. Сначала найдем оригинал слагаемого

$$\mathcal{Y}_1(u) = \mathcal{X}^+(u)\frac{(u-i)^2\mathcal{F}^+(u)}{(u-\alpha-i\beta)(u+\alpha-i\beta)} = \frac{1}{1+\mathcal{K}(u)}\mathcal{F}^+(u) = \mathcal{F}^+(u) + \mathcal{R}(u)\mathcal{F}^+(u).$$

Здесь

$$\mathcal{R}(u) = -\frac{2u^2(a-b)+2a+2b}{[u^2-(\alpha+i\beta)^2][u^2-(\alpha-i\beta)^2]} = \frac{\mu}{u^2-(\alpha+i\beta)^2} + \frac{\bar{\mu}}{u^2-(\alpha-i\beta)^2},$$

$$\mu = i\frac{(\alpha+i\beta)^2(a-b)+a+b}{2\alpha\beta}.$$

Найдем оригинал первой дроби:

$$\mathbf{F}^{-1}\Bigl\{\frac{\mu}{u^2-(\alpha+i\beta)^2}\Bigr\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\mu}{\beta-i\alpha}e^{-(\beta-i\alpha)|x|}.$$

Оригинал второй дроби запишем в виде

$$\mathbf{F}^{-1}\Bigl\{\frac{\bar{\mu}}{u^2-(\alpha-i\beta)^2}\Bigr\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\bar{\mu}}{\beta+i\alpha}e^{-(\beta+i\alpha)|x|}. \tag{13}$$

Таким образом,

$$R(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\rho\bigl(e^{i\theta+i\alpha|x|} + e^{-i\theta-i\alpha|x|}\bigr)e^{-\beta|x|} = \sqrt{2\pi}\,\rho e^{-\beta|x|}\cos(\theta+\alpha|x|)$$

и

$$y_1(x) = f(x) + \rho\int_0^\infty e^{-\beta|x-t|}\cos(\theta+\alpha|x-t|)f(t)\,dt, \qquad x>0, \quad \rho e^{i\theta} = \frac{\mu}{\beta-i\alpha}. \tag{14}$$

Заметим, что одновременно мы нашли резольвенту $R(x-t)$ интегрального уравнения на всей оси

$$y_0(x) + \int_{-\infty}^\infty (a+b|x-t|)e^{-|x-t|}y_0(t)\,dt = f_0(x), \qquad -\infty < x < \infty.$$

Теперь рассмотрим оставшуюся часть изображения (11):

$$\mathcal{Y}_2(u) = \mathcal{X}^+(u)\Big(\frac{\mathrm{C}_1}{u-\alpha-i\beta} + \frac{\mathrm{C}_2}{u+\alpha-i\beta}\Big).$$

Вычислив интегралы

$$\mathbf{F}^{-1}\{\mathcal{Y}_2(u)\} = \frac{C_1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(u+i)^2e^{-iux}\,du}{(u+i\beta-\alpha)(u+i\beta+\alpha)(u-\alpha-i\beta)} + \\ + \frac{C_2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(u+i)^2e^{-iux}\,du}{(u+i\beta-\alpha)(u+i\beta+\alpha)(u+\alpha-i\beta)}$$

с помощью теории вычетов (см. пп. 7.1-4 и 7.1-5) и подставив вместо постоянных C_1 и C_2 их значения (12), получим при $x>0$

$$y_2(x) = \frac{[\alpha+(\beta-1)^2]^2}{4\alpha^2\beta}\int_0^{\infty} e^{-\beta(x+t)}\cos[\alpha(x-t)]f(t)\,dt + \\ + \frac{\rho_*}{4\alpha^2}\int_0^{\infty} e^{-\beta(x+t)}\cos[\psi+\alpha(x+t)]f(t)\,dt, \qquad \rho_* e^{i\psi} = \frac{(\beta-1-i\alpha)^4}{8\alpha^2(\beta-i\alpha)}. \tag{15}$$

Так как $\mathcal{Y}^+(u) = \mathcal{Y}_1(u)+\mathcal{Y}_2(u)$, то искомое решение будет суммой функций (14) и (15).

11.9-2. Интегральное уравнение второго рода с двумя ядрами

Рассмотрим интегральное уравнение типа свертки второго рода с двумя ядрами в форме ($-\infty < x < \infty$)

$$y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} K_1(x-t)y(t)\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} K_2(x-t)y(t)\,dt = f(x). \tag{16}$$

Заметим, что каждое из ядер $K_1(x)$ и $K_2(x)$ задано на всей вещественной оси. Представляя искомую функцию в виде разности односторонних:

$$y(x) = y_+(x) - y_-(x), \tag{17}$$

запишем уравнение в виде

$$y_+(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-t)y_+(t)\,dt - y_-(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-t)y_-(t)\,dt = f(x). \tag{18}$$

Переходя от оригиналов к изображениям при помощи интегрального преобразования Фурье (см. п. 7.4-3), получим

$$[1+\mathcal{K}_1(u)]\mathcal{Y}^+(u) - [1+\mathcal{K}_2(u)]\mathcal{Y}^-(u) = \mathcal{F}(u). \tag{19}$$

Откуда будем иметь

$$\mathcal{Y}^+(u) = \frac{1+\mathcal{K}_2(u)}{1+\mathcal{K}_1(u)}\mathcal{Y}^-(u) + \frac{\mathcal{F}(u)}{1+\mathcal{K}_1(u)}. \tag{20}$$

Здесь $\mathcal{K}_1(u)$, $\mathcal{K}_2(u)$ и $\mathcal{F}(u)$ — интегралы Фурье известных функций. Неизвестные изображения $\mathcal{Y}^+(u)$ и $\mathcal{Y}^-(u)$ являются краевыми значениями функций, аналитических соответственно в верхней и нижней полуплоскостях. Таким образом, получена краевая задача Римана.

1°. Предположим, что выполнены условия нормальности, т. е.

$$1+\mathcal{K}_1(u) \neq 0, \quad 1+\mathcal{K}_2(u) \neq 0,$$

и запишем задачу Римана в ее обычной форме (см. п. 10.4-4):

$$\mathcal{Y}^+(u) = \mathcal{D}(u)\mathcal{Y}^-(u) + \mathcal{H}(u), \qquad -\infty < u < \infty, \tag{21}$$

где

$$\mathcal{D}(u) = \frac{1+\mathcal{K}_2(u)}{1+\mathcal{K}_1(u)}, \quad \mathcal{H}(u) = \frac{\mathcal{F}(u)}{1+\mathcal{K}_1(u)}. \tag{22}$$

Задача Римана (21), (22) равносильна уравнению (16): они одновременно разрешимы или неразрешимы и имеют в общих решениях одинаковое число произвольных постоянных.

Если индекс

$$\nu = \operatorname{Ind}\frac{1+\mathcal{K}_2(u)}{1+\mathcal{K}_1(u)} \tag{23}$$

положителен, то однородное уравнение (16) ($f(x) \equiv 0$) имеет ровно ν линейно независимых решений, а неоднородное уравнение безусловно разрешимо, и его решение зависит от ν произвольных комплексных постоянных.

В случае $\nu \leqslant 0$ однородное уравнение не имеет отличных от нуля решений. Неоднородное уравнение при $\nu = 0$ безусловно разрешимо, причем решение единственно. Когда индекс ν отрицателен, условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(u)\,du}{\mathcal{X}^+(u)[1+\mathcal{K}_1(u)](u+i)^k} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, -\nu, \tag{24}$$

необходимы и достаточны для разрешимости неоднородного уравнения.

Во всех случаях, когда решение уравнения (16) существует, его можно найти по формуле

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{Y}^+(u) - \mathcal{Y}^-(u)] e^{-iux}\,du, \qquad -\infty < x < \infty, \tag{25}$$

где $\mathcal{Y}^+(u)$, $\mathcal{Y}^-(u)$ — построенное по схеме из п. 10.4-4 (см. рис. 3) решение задачи Римана (21), (22).

Итак, решение уравнения (16) равносильно решению краевой задачи Римана и сводится к вычислению некоторого числа интегралов Фурье.

2°. Исследуем теперь исключительный случай интегрального уравнения (16). Допустим, что функции $1 + \mathcal{K}_1(u)$, $1 + \mathcal{K}_2(u)$ могут иметь нули, причем эти нули могут быть как в различных, так и в совпадающих точках контура. Напишем разложение этих функций, выделив совпадающие нули:

$$\begin{aligned} 1 + \mathcal{K}_1(u) &= \prod_{j=1}^{s} (u - b_j)^{\beta_j} \prod_{k=1}^{p} (u - d_k)^{\gamma_k} \mathcal{K}_{11}(u), \\ 1 + \mathcal{K}_2(u) &= \prod_{i=1}^{r} (u - a_i)^{\alpha_i} \prod_{k=1}^{p} (u - d_k)^{\gamma_k} \mathcal{K}_{12}(u), \qquad \sum_{k=1}^{p} \gamma_k = l. \end{aligned} \tag{26}$$

Здесь $a_i \neq b_j$, но возможно, что отдельные точки d_k ($k = 1, 2, \ldots, p$) могут совпадать либо с a_i, либо с b_j. Это будет соответствовать тому случаю, когда функции $1 + \mathcal{K}_1(u)$ и $1 + \mathcal{K}_2(u)$ имеют общий нуль разной кратности. Мы не выделяем такие точки особо, потому что их наличие не оказывает влияния на условия разрешимости и число решений задачи.

Из равенства (19) и условия конечности на контуре решения вытекает, что для разрешимости задачи, а следовательно, и уравнения (16), необходимо, чтобы $\mathcal{F}(u)$ во всех точках d_k обращалась в нуль порядка γ_k, т. е. $\mathcal{F}(u)$ должна иметь вид

$$\mathcal{F}(u) = \prod_{k=1}^{p} (u - d_k)^{\gamma_k} \mathcal{F}_1(u).$$

Для этого необходимо выполнение $\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_p = l$ условий

$$\mathcal{F}_u^{(j_k)}(d_k) = 0, \qquad j_k = 0, 1, \ldots, \gamma_k - 1, \tag{27}$$

или, что все равно, условий

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) x^{j_k} e^{id_k x}\,dx = 0. \tag{28}$$

Так как функции $\mathcal{K}_1(u)$ и $\mathcal{K}_2(u)$ обращаются в нуль на бесконечности, то бесконечно удаленная точка является обыкновенной точкой $\mathcal{D}(u)$.

Допустим, что условия (28) выполнены. Тогда краевую задачу Римана (20) можно записать в виде (см. пп. 10.4-6 и 10.4-7)

$$\mathcal{Y}^+(u) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{r} (u - a_i)^{\alpha_i} \mathcal{R}_+(u) \mathcal{R}_-(u)}{\prod\limits_{j=1}^{s} (u - b_j)^{\beta_j} \mathcal{Q}_+(u) \mathcal{Q}_-(u)} \mathcal{D}_2(u) \mathcal{Y}^-(u) + \frac{\mathcal{H}_1(u)}{\prod\limits_{j=1}^{s} (u - b_j)^{\beta_j}}. \tag{29}$$

Найдя в этом исключительном случае ее общее решение, получим общее решение исходного уравнения по формуле (25).

Сформулируем выводы об условиях разрешимости и числе решений уравнения (16). Для разрешимости уравнения (16) необходимо, чтобы преобразование Фурье свободного члена уравнения удовлетворяло l условиям (27). Если эти условия выполнены, то при $\nu - n > 0$ задача (20) и интегральное уравнение (16) имеют ровно $\nu - n$ линейно независимых решений. При $\nu - n \leqslant 0$ многочлен $P_{\nu-n-1}(z)$ следует положить тождественно равным нулю, причем от свободного члена в случае $\nu - n < 0$ необходимо потребовать выполнения еще $n - \nu$ условий. При выполнении последних интегральное уравнение будет иметь единственное решение.

Пример. Рассмотрим уравнение (16), для которого

$$K_1(x) = \begin{cases} -(1+\alpha)\sqrt{2\pi}\,e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad K_2(x) = \begin{cases} -(1+\beta)\sqrt{2\pi}\,e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ -\sqrt{2\pi}\,e^{x}, & x < 0, \end{cases}$$

где α и β — вещественные постоянные. Тогда $K_1(x-t) = 0$ для $x < t$ и $K_2(x-t) = 0$ для $x < t$. Следовательно, заданное уравнение имеет форму

$$\begin{aligned} &y(x) - (1+\alpha)\int_0^x e^{-(x-t)}y(t)\,dt - (1+\beta)\int_{-\infty}^0 e^{-(x-t)}y(t)\,dt = 0, && x > 0, \\ &y(x) - (1+\beta)\int_{-\infty}^x e^{-(x-t)}y(t)\,dt = -\sqrt{2\pi}\,e^{x}, && x < 0. \end{aligned}$$

Вычислим интегралы Фурье

$$\mathcal{K}_1(u) = -(1+\alpha)\int_0^\infty e^{-x}e^{iux}\,dx = -\frac{i(1+\alpha)}{u+i}, \qquad \mathcal{K}_2(u) = -\frac{i(1+\beta)}{u+i},$$

$$\mathcal{F}(u) = \frac{i}{u-i}, \qquad \mathcal{D}(u) = \frac{u-i\beta}{u-i\alpha}.$$

Краевое условие запишем в виде

$$\mathcal{Y}^+(u) = \frac{u-i\beta}{u-i\alpha}\mathcal{Y}^-(u) + \frac{i(u+i)}{(u-i)(u-i\alpha)}. \tag{30}$$

Решение задачи Римана будет различным в зависимости от знаков α и β.

1°. Пусть $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. В этом случае $\nu = \operatorname{Ind}\mathcal{D}(u) = 0$. В левой и правой частях краевого условия стоят функции, аналитически продолжимые соответственно в верхнюю и нижнюю полуплоскости. Применяя непосредственно теорему об аналитическом продолжении и обобщенную теорему Лиувилля (см. п. 10.4-3), будем иметь

$$\mathcal{Y}^+(z) = 0, \quad \frac{z-i\beta}{z-i\alpha}\mathcal{Y}^-(z) + \frac{i(z+i)}{(z-i)(z-i\alpha)} = 0.$$

Отсюда

$$y_+(x) = 0, \quad y(x) = -y_-(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \frac{i(u+i)}{(u-i)(u-i\beta)}e^{-iux}\,du.$$

Вычисляя последний интеграл в предположении $\beta \neq 1$, по теореме о вычетах (см. пп. 7.1-4 и 7.1-5) получим

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0, \\ -\dfrac{\sqrt{2\pi}}{1-\beta}\left[2e^x - (1+\beta)e^{\beta x}\right] & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

В случае $\beta = 1$ имеем

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0, \\ -\sqrt{2\pi}\,e^x(1+2x) & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

2°. Пусть $\alpha < 0$ и $\beta < 0$. Здесь по-прежнему $\nu = 0$, $\mathcal{X}^+(z) = (z-i\beta)(z-i\alpha)^{-1}$, $\mathcal{X}^-(z) = 1$. Группируя члены, содержащие краевые значения аналитических в каждой из полуплоскостей функций и применяя затем теорему об аналитическом продолжении и обобщенную теорему Лиувилля (см. п. 10.4-3), найдем

$$\frac{\mathcal{Y}^+(z)}{\mathcal{X}^+(z)} + \frac{\beta+1}{i(\beta-1)}\,\frac{1}{z-i\beta} = \frac{\mathcal{Y}^-(z)}{\mathcal{X}^-(z)} + \frac{2}{i(\beta-1)}\,\frac{1}{z-i} = 0.$$

Отсюда

$$\mathcal{Y}^+(z) = \frac{\beta+1}{\beta-1}\,\frac{i}{z-i\alpha}, \quad \mathcal{Y}^-(z) = \frac{2i}{\beta-1}\,\frac{1}{z-i},$$

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \left[\mathcal{Y}^+(u) - \mathcal{Y}^-(u)\right]e^{-iux}\,du = \begin{cases} \sqrt{2\pi}\,\dfrac{\beta+1}{\beta-1}e^{\alpha x} & \text{при } x > 0, \\ \dfrac{2\sqrt{2\pi}}{\beta-1}\,e^{x} & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

3°. Пусть $\alpha < 0$ и $\beta > 0$, тогда $\nu = 1$. В этом случае, краевое условие (30) запишем в виде

$$\mathcal{Y}^+(u) + \frac{i(1+\alpha)}{1-\alpha}\,\frac{1}{u-i\alpha} = \frac{u-i\beta}{u-i\alpha}\mathcal{Y}^-(u) - \frac{2i}{1-\alpha}\,\frac{1}{u-i}.$$

Применяя теорему об аналитическом продолжении и обобщенную теорему Лиувилля (см. п. 10.4-3) получим, что

$$\mathcal{Y}^+(z) + \frac{i(1+\alpha)}{1-\alpha}\,\frac{1}{z-i\alpha} = \frac{z-i\beta}{z-i\alpha}\mathcal{Y}^-(z) - \frac{2i}{1-\alpha}\,\frac{1}{z-i} = \frac{C}{z-i\alpha}.$$

Поэтому

$$\mathcal{Y}^+(z) = \Bigl(C - i\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\Bigr)\frac{1}{z-i\alpha}, \quad \mathcal{Y}^-(z) = \frac{C}{z-i\beta} - \frac{2i}{1-\alpha}\,\frac{z-i\alpha}{(z-i)(z-i\beta)},$$

где C — произвольная постоянная. Теперь при помощи обратного преобразования Фурье, получим общее решение интегрального уравнения в форме

$$y(x) = \begin{cases} -\sqrt{2\pi}\Bigl(iC + \dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\Bigr)e^{\alpha x} & \text{при } x > 0, \\ -\sqrt{2\pi}\Bigl[iC + \dfrac{2(\alpha-\beta)}{(1-\alpha)(1-\beta)}\Bigr]e^{\beta x} - \dfrac{2\sqrt{2\pi}}{1-\beta}e^x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

4°. Пусть $\alpha > 0$ и $\beta < 0$, тогда $\nu = -1$. По теореме Лиувилля (см. п. 10.4-3)

$$\mathcal{Y}^+(z) = \frac{z-i\beta}{z-i\alpha}\mathcal{Y}^-(z) + \frac{i(z+i)}{(z-i)(z-i\alpha)} = 0,$$

так что

$$\mathcal{Y}^+(z) = 0, \qquad \mathcal{Y}^-(z) = -\frac{i(z+i)}{(z-i)(z-i\beta)}.$$

Из выражения для $\mathcal{Y}^-(z)$ видно, что особенность функции $\mathcal{Y}^-(z)$ в точке $i\beta$ исчезнет, если положить $\beta = -1$. Последнее равенство и будет условием разрешимости задачи Римана. В этом случае имеем единственное решение

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{u-i}\,e^{-iux}\,du = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0, \\ -\sqrt{2\pi}\,e^x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Замечание 1. К рассмотренным в п. 11.9-2 уравнениям приводятся некоторые уравнения, в ядра которых входят не разности, а другие их комбинации: произведения или, чаще, отношения. Так, например, уравнение

$$Y(\xi) + \int_0^1 \frac{1}{\tau}N_1\Bigl(\frac{\xi}{\tau}\Bigr)Y(\tau)\,d\tau + \int_1^\infty \frac{1}{\tau}N_2\Bigl(\frac{\xi}{\tau}\Bigr)Y(\tau)\,d\tau = g(\xi), \qquad \xi > 0, \tag{31}$$

становится обычным уравнением с двумя ядрами, если сделать следующие замены функций и их аргументов: $\xi = e^x$, $\tau = e^t$, $N_1(\xi) = K_1(x)$, $N_2(\xi) = K_2(x)$, $g(\xi) = f(x)$, $Y(\xi) = y(x)$.

11.9-3. Уравнения типа свертки с переменным пределом интегрирования

1°. Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x K(x-t)y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 \leqslant x < T, \tag{32}$$

где промежуток $[0, T)$ может быть как конечным, так и бесконечным. В отличие от уравнения (1), где ядро задается на всей оси, здесь ядро задается на положительной полуоси.

Уравнение (32) можно рассматривать как частный случай одностороннего уравнения (1) из п. 11.9-1. Для этого достаточно записать его в виде

$$y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty K_+(x-t)y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < x < \infty,$$

приводящемся к следующей краевой задаче:

$$\mathcal{Y}^+(u) = \frac{\mathcal{Y}^-(u)}{1+\mathcal{K}^+(u)} + \frac{\mathcal{F}^+(u)}{1+\mathcal{K}^+(u)}.$$

Здесь коэффициент $[1+\mathcal{K}^+(u)]^{-1}$ задачи есть функция, аналитически продолжимая в верхнюю полуплоскость, за исключением конечного числа возможных полюсов, являющихся нулями функции $1+\mathcal{K}^+(z)$ (считаем, что на действительной оси $1+\mathcal{K}^+(z)\neq 0$). Поэтому индекс ν задачи всегда неположителен, $\nu \leqslant 0$. Переписав задачу в виде $[1+\mathcal{K}^+(u)]\mathcal{Y}^+(u) = \mathcal{Y}^-(u) + \mathcal{F}^+(u)$, видим, что $\mathcal{Y}^-(u) \equiv 0$, так что

$$\mathcal{Y}^+(u) = \frac{\mathcal{F}^+(u)}{1+\mathcal{K}^+(u)}. \tag{33}$$

Рассмотрим следующие случаи.

1.1. Функция $1+\mathcal{K}^+(z)$ не имеет нулей в верхней полуплоскости (это означает, что $\nu = 0$). Следовательно, уравнение (32) при любой правой части $f(x)$ имеет единственное решение, которое можно выразить через резольвенту:

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x R(x-t) f(t)\, dt, \qquad x > 0, \tag{34}$$

где

$$R(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{K}^+(u)}{1+\mathcal{K}^+(u)} e^{-iux}\, du.$$

1.2. Функция $1+\mathcal{K}^+(z)$ имеет нули в точках $z = a_1, a_2, \ldots, a_m$ верхней полуплоскости (тогда $\nu < 0$, причем ν равно взятому со знаком минус суммарному порядку нулей). Могут представиться две возможности:

(a) Функция $\mathcal{F}^+(z)$ в точках $a_1, a_2, \ldots, a_m$ обращается в нуль, причем порядки этих нулей не ниже порядков нулей функции $1+\mathcal{K}^+(z)$. В этом случае функция $\mathcal{F}^+(z)[1+\mathcal{K}^+(z)]^{-1}$ опять не будет иметь полюсов, так что по-прежнему уравнение имеет единственное решение (34).

Предложение $d^k\mathcal{F}^+(a_j)/dz^k = 0$ об обращении $\mathcal{F}^+(z)$ в нуль равносильно условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ia_j t} t^k\, dt = 0, \qquad k = 0, \ldots, \eta_j - 1, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{35}$$

где η_j — кратность нуля функции $1+\mathcal{K}^+(z)$ в точке a_j. Условия (35) накладываются уже непосредственно на правую часть уравнения.

(b) Функция $\mathcal{F}^+(z)$ не обращается в нуль в точках $a_1, a_2, \ldots, a_m$ или обращается с кратностями, меньшими, чем $1+\mathcal{K}^+(z)$. Тогда функция $\mathcal{F}^+(z)[1+\mathcal{K}^+(z)]^{-1}$ имеет полюсы, и поэтому функция (33) не принадлежит условленному классу. Уравнение (32) не имеет решений в выбранном классе функций. В рассматриваемом случае условия (35) не выполняются.

Последний результат не противоречит известному факту, что уравнение Вольтерра всегда имеет единственное решение. Уравнение (32) принадлежит классу уравнений типа Вольтерра и поэтому в случае (b) будет также разрешимо, но в более широком пространстве функций с показательным ростом.

2°. Другим простым частным случаем уравнения (1) из п. 11.9-1 будет уравнение с переменным нижним пределом:

$$y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} K(x-t) y(t)\, dt = f(x), \qquad 0 < x < \infty. \tag{36}$$

Это соответствует случаю, когда в уравнении (1) функция $K(x)$ будет левой односторонней: $K(x) = K_-(x)$. Задача Римана при условии $1+\mathcal{K}^-(u) \neq 0$ примет вид

$$\mathcal{Y}^+(u) = \frac{\mathcal{Y}^-(u)}{1+\mathcal{K}^-(u)} + \frac{\mathcal{F}^+(u)}{1+\mathcal{K}^-(u)}. \tag{37}$$

2.1. Функция $1+\mathcal{K}^-(z)$ не имеет нулей в нижней полуплоскости. Это означает, что оригиналом функции $\mathcal{Y}^-(u)[1+\mathcal{K}^-(u)]^{-1}$ служит левая односторонняя, а последняя не окажет влияния при $x > 0$ на соотношение между оригиналами равенства (37). Итак, введя для удобства функцию

$$\mathcal{R}^-(u) = -\frac{\mathcal{K}^-(u)}{1+\mathcal{K}^-(u)},$$

применяя к обеим частям равенства (37) обратное преобразование Фурье и полагая $x > 0$, получим единственное решение уравнения (36)

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} R_-(x-t) f(t)\, dt, \qquad x > 0.$$

2.2. В нижней полуплоскости у функции $1 + \mathcal{K}^-(z)$ есть нули. Так как эта функция на всей вещественной оси, в том числе и на бесконечности, отлична от нуля, то число ее нулей конечно. Задача Римана (37) имеет положительный индекс, как раз равный числу нулей функции в нижней полуплоскости (нули считаются столько раз, какова их кратность):

$$\nu = \operatorname{Ind} \frac{1}{1+\mathcal{K}^-(u)} = -\operatorname{Ind}[1+\mathcal{K}^-(u)] = \eta_1 + \cdots + \eta_n > 0.$$

Здесь η_k — кратности нулей z_k функции $1+\mathcal{K}^-(z)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть

$$\frac{C_{1k}}{z-z_k} + \frac{C_{2k}}{(z-z_k)^2} + \cdots + \frac{C_{\eta_k k}}{(z-z_k)^{\eta_k}}$$

есть главная часть разложения функции $\mathcal{Y}^-(z)[1+\mathcal{K}^-(z)]^{-1}$ в ряд Лорана по степеням $(z-z_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда равенство (37) можно представить в виде

$$\mathcal{Y}^+(u) = \frac{\mathcal{F}^+(u)}{1+\mathcal{K}^-(u)} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{\eta_k} \frac{C_{jk}}{(z-z_k)^j} + \cdots, \tag{38}$$

где многоточие означает функцию, оригинал которой равен нулю при $x > 0$. Переходя в равенстве (38) к оригиналам, при $x > 0$ получим

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty R_-(x-t) f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n} P_k(x) e^{-iz_k x}, \qquad x > 0. \tag{39}$$

Здесь $P_k(x)$ — многочлены степеней $\eta_k - 1$. Можно проверить, что (39) будет решением уравнения (36) при произвольных коэффициентах многочленов. Так как число линейно независимых решений однородного уравнения (36) равно индексу, то найденное решение (39) будет общим решением неоднородного уравнения.

11.9-4. Парное уравнение типа свертки второго рода

Рассмотрим парное интегральное уравнение второго рода

$$\begin{aligned} y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-t) y(t)\,dt &= f(x), \qquad 0 < x < \infty, \\ y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-t) y(t)\,dt &= f(x), \qquad -\infty < x < 0, \end{aligned} \tag{40}$$

где функция $y(x)$ является искомой.

Для применения преобразования Фурье (см. пп. 7.4-3, 10.4-1, 10.4-2) доопределим оба условия в уравнении (40), формально записав их для всех действительных значений x. Этого можно достигнуть путем введения в правые части новых неизвестных функций. Последние должны быть выбраны так, чтобы они не нарушали заданных на полуосях условий. Следовательно, верхнее условие (40) должно быть дополнено слагаемым, которое обращается в нуль на положительной полуоси, а нижнее — слагаемым, равным нулю на отрицательной. Таким образом, парное уравнение может быть записано в форме

$$\begin{aligned} y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-t) y(t)\,dt &= f(x) + \xi_-(x), \\ y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-t) y(t)\,dt &= f(x) + \xi_+(x), \end{aligned} \qquad -\infty < x < \infty, \tag{41}$$

где $\xi_\pm(x)$ — пока неизвестные правая и левая односторонние функции.

Воспользовавшись интегральным преобразованием Фурье, получим

$$[1+\mathcal{K}_1(u)]\mathcal{Y}(u) = \mathcal{F}(u) + \Xi^-(u), \quad [1+\mathcal{K}_2(u)]\mathcal{Y}(u) = \mathcal{F}(u) + \Xi^+(u). \tag{42}$$

Здесь неизвестными являются три функции $\mathcal{Y}(u)$, $\Xi^+(u)$ и $\Xi^-(u)$.

Теперь можно на основании (42) найти

$$\mathcal{Y}(u) = \frac{\mathcal{F}(u) + \Xi^-(u)}{1+\mathcal{K}_1(u)} = \frac{\mathcal{F}(u) + \Xi^+(u)}{1+\mathcal{K}_2(u)} \tag{43}$$

и, исключая при помощи равенства (43) функцию $\mathcal{Y}(u)$ из соотношений (42), получить краевую задачу Римана в виде

$$\Xi^+(u) = \frac{1+\mathcal{K}_2(u)}{1+\mathcal{K}_1(u)}\Xi^-(u) + \frac{\mathcal{K}_2(u)-\mathcal{K}_1(u)}{1+\mathcal{K}_1(u)}\mathcal{F}(u), \qquad -\infty < u < \infty. \tag{44}$$

1°. Предположим, что выполнены условия нормальности, т. е.

$$1+\mathcal{K}_1(u) \neq 0, \quad 1+\mathcal{K}_2(u) \neq 0,$$

и запишем теперь задачу Римана (44) в ее обычной форме (см. п. 10.4-4)

$$\Xi^+(u) = \mathcal{D}(u)\Xi^-(u) + \mathcal{H}(u), \qquad -\infty < u < \infty, \tag{45}$$

где

$$\mathcal{D}(u) = \frac{1+\mathcal{K}_2(u)}{1+\mathcal{K}_1(u)}, \quad \mathcal{H}(u) = \frac{\mathcal{K}_2(u)-\mathcal{K}_1(u)}{1+\mathcal{K}_1(u)}\mathcal{F}(u). \tag{46}$$

Задача Римана (45), (46) равносильна уравнению (40): они одновременно разрешимы или неразрешимы, имеют в общих решениях одинаковое число произвольных постоянных.

Если индекс

$$\nu = \operatorname{Ind}\frac{1+\mathcal{K}_2(u)}{1+\mathcal{K}_1(u)} \tag{47}$$

положителен, то однородное уравнение (40) ($f(x) \equiv 0$) имеет ровно ν линейно независимых решений, а неоднородное уравнение безусловно разрешимо, и его решение зависит от ν произвольных комплексных постоянных.

В случае $\nu \leqslant 0$ однородное уравнение не имеет отличных от нуля решений. Неоднородное уравнение при $\nu = 0$ безусловно разрешимо, причем решение единственно. Когда индекс ν отрицателен, условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{K}_2(u)-\mathcal{K}_1(u)}{\mathcal{X}^+(u)[1+\mathcal{K}_1(u)]}\mathcal{F}(u)\frac{du}{(u+i)^k} = 0, \qquad k = 1, 2, \dots, -\nu, \tag{48}$$

необходимы и достаточны для разрешимости неоднородного уравнения.

Во всех случаях, когда решение уравнения (40) существует, его можно найти по формуле

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(u)+\Xi^-(u)}{1+\mathcal{K}_1(u)}e^{-iux}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(u)+\Xi^+(u)}{1+\mathcal{K}_2(u)}e^{-iux}\,du, \tag{49}$$

где $\Xi^+(u)$, $\Xi^-(u)$ — построенное по схеме из п. 10.4-4 (см. рис. 3) решение задачи Римана (45), (46).

2°. Исследуем теперь исключительный случай интегрального уравнения (40). Допустим, что функции $1+\mathcal{K}_1(u)$, $1+\mathcal{K}_2(u)$ могут иметь нули, причем эти нули могут быть как в различных, так и в совпадающих точках контура. Возьмем разложение этих функций, выделив совпадающие нули в форме (26), и далее повторим все рассуждения, проведенные для уравнения типа свертки второго рода с двумя ядрами. Найдя в этом исключительном случае общее решение краевой задачи Римана (44) (см. п. 10.4-7), получим общее решение исходного уравнения (40) по формуле (49).

Выводы об условиях разрешимости и числе решений уравнения (40) аналогичны сделанным для уравнения с двумя ядрами в п. 11.9-2.

Замечание 2. Рассмотренные в разд. 11.9 уравнения иногда называют *характеристическими уравнениями типа свертки*.

⊙ *Литература*: Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978).

11.10. Метод Винера–Хопфа

11.10-1. Некоторые замечания

Пусть существует преобразование Фурье функции $y(x)$ (см. п. 7.4-3):

$$\mathcal{Y}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y(x)e^{izx}\,dx. \tag{1}$$

Будем считать, что параметр z, входящий в преобразование (1), может принимать и комплексные значения. Исследуем свойства функции $\mathcal{Y}(z)$, рассматриваемой как функция комплексной переменной z. Для этого представим функцию $y(x)$ в виде*

$$y(x) = y^+(x) + y^-(x), \tag{2}$$

где функции $y^+(x)$ и $y^-(x)$ соответственно равны

$$y^+(x) = \begin{cases} y(x) & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \qquad y^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0, \\ y(x) & \text{при } x < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Изображение $\mathcal{Y}(z)$ функции $y(x)$ при этом, очевидно, равно сумме изображений $\mathcal{Y}_+(z)$, $\mathcal{Y}_-(z)$ функций $y^+(x)$ и $y^-(x)$. Выясним аналитические свойства функции $\mathcal{Y}(z)$, установив аналитические свойства функций $\mathcal{Y}_+(z)$ и $\mathcal{Y}_-(z)$. Рассмотрим функцию $y^+(x)$, задаваемую соотношениями (3). Ее изображением является

$$\mathcal{Y}_+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty y^+(x) e^{izx}\,dx. \tag{4}$$

Можно показать, что если функция $y^+(x)$ удовлетворяет условию

$$|y^+(x)| < M e^{v_- x} \quad \text{при} \quad x \to \infty, \tag{5}$$

где M — некоторая постоянная, то функция $\mathcal{Y}_+(z)$, определенная формулой (4), является аналитической функцией комплексной переменной $z = u + iv$ в области $\operatorname{Im} z > v_-$, причем в этой области $\mathcal{Y}_+(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$. Можно также показать, что функции $y^+(x)$ и $\mathcal{Y}_+(z)$ связаны следующим соотношением:

$$y^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+iv}^{\infty+iv} \mathcal{Y}_+(z) e^{-izx}\,dz, \tag{6}$$

где интегрирование производится по любой прямой $\operatorname{Im} z = v > v_-$, параллельной действительной оси на комплексной плоскости z.

При $v_- < 0$ (т. е. для убывающих на бесконечности функций $y(x)$) область аналитичности функции $\mathcal{Y}_+(z)$ содержит действительную ось и в формуле (6) можно проводить интегрирование вдоль действительной оси. Если $v_- > 0$ (т. е. функция $y^+(x)$ растет на бесконечности, но не быстрее, чем экспонента с линейным показателем), то область аналитичности функции $\mathcal{Y}_+(z)$ лежит над действительной осью комплексной плоскости z (при этом на действительной оси интеграл (4) может расходиться). Аналогично, если функция $y^-(x)$ из соотношений (3), удовлетворяет условию

$$|y^-(x)| < M e^{v_+ x} \quad \text{при} \quad x \to -\infty, \tag{7}$$

то ее изображение, функция

$$\mathcal{Y}_-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 y^-(x) e^{izx}\,dx, \tag{8}$$

является аналитической функцией комплексной переменной z и в области $\operatorname{Im} z < v_+$. Функция $y^-(x)$ выражается через функцию $\mathcal{Y}_-(z)$ с помощью соотношения

$$y^-(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+iv}^{\infty+iv} \mathcal{Y}_-(z) e^{-izx}\,dz, \qquad \operatorname{Im} z = v < v_+. \tag{9}$$

Если $v_+ > 0$, то область аналитичности функции $\mathcal{Y}_-(z)$ содержит действительную ось.

Очевидно, при $v_- < v_+$ функция $\mathcal{Y}(z)$, определенная по формуле (1), является аналитической функцией комплексной переменной z в полосе $v_- < \operatorname{Im} z < v_+$. При этом функции $y(x)$ и $\mathcal{Y}(z)$ связаны обратным преобразованием Фурье:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+iv}^{\infty+iv} \mathcal{Y}(z) e^{-izx}\,dz, \tag{10}$$

где интегрирование производится по любой прямой, параллельной действительной оси комплексной плоскости z, лежащей в полосе $v_- < \operatorname{Im} z < v_+$. В частности, при $v_- < 0$ и $v_+ > 0$ функция $\mathcal{Y}(z)$ является аналитической в полосе, содержащей действительную ось комплексной плоскости z.

---

* Введенные в этом разделе функции $y^\pm(x)$ и $\mathcal{Y}_\pm(x)$ не следует путать с функциями $y_\pm(x)$ и $\mathcal{Y}^\pm(x)$, введенными в п. 10.4-2 и использовавшимися при решении краевой задачи Римана на действительной оси.

Пример 1. Функция $K(x) = e^{-\alpha|x|}$ при $\alpha > 0$ обладает изображением

$$\mathcal{K}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + z^2},$$

являющимся аналитической функцией комплексной переменной z в полосе $-\alpha < \operatorname{Im} z < \alpha$, содержащей действительную ось.

11.10-2. Однородное уравнение Винера–Хопфа второго рода

Рассмотрим однородное интегральное уравнение Винера–Хопфа второго рода в форме

$$y(x) = \int_0^\infty K(x-t)y(t)\,dt, \tag{11}$$

где функция $K(x)$ задана на всей действительной оси. Решение этого уравнения, очевидно, находится с точностью до произвольного множителя. Он может быть найден из дополнительных условий задачи, например условий нормировки.

Будем считать, что уравнение (11) определяет функцию $y(x)$ для всех значений переменной x, как положительных, так и отрицательных. Введем функции $y^-(x)$ и $y^+(x)$ по формулам (3). Очевидно, $y(x) = y^+(x) + y^-(x)$, и уравнение (11) можно переписать в виде

$$y^+(x) = \int_0^\infty K(x-t)y^+(t)\,dt, \qquad x > 0 \tag{12}$$

$$y^-(x) = \int_0^\infty K(x-t)y^+(t)\,dt, \qquad x < 0. \tag{13}$$

То есть функция $y^+(x)$ определяется из решения интегрального уравнения (12), а функция $y^-(x)$ выражается через функции $y^+(x)$ и $K(x)$ с помощью формулы (13). При этом имеет место соотношение

$$y^+(x) + y^-(x) = \int_{-\infty}^\infty K(x-t)y^+(t)\,dt, \tag{14}$$

эквивалентное исходному уравнению (11).

Пусть функция $K(x)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} |K(x)| &< Me^{v_- x} \quad \text{при} \quad x \to \infty, \\ |K(x)| &< Me^{v_+ x} \quad \text{при} \quad x \to -\infty, \end{aligned} \tag{15}$$

где $v_- < 0$, $v_+ > 0$. Тогда функция

$$\mathcal{K}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty K(x)e^{izx}\,dx, \tag{16}$$

является аналитической в полосе $v_- < \operatorname{Im} z < v_+$.

Будем искать решение уравнения (11), удовлетворяющее условию

$$|y^+(x)| < M_1 e^{\mu x} \quad \text{при} \quad x \to \infty, \tag{17}$$

где $\mu < v_+$ (такое решение существует). При этом интегралы в правых частях соотношений (12) и (13), как можно проверить, являются сходящимися, причем для функции $y^-(x)$ имеет место оценка

$$|y^-(x)| < M_2 e^{v_+ x} \quad \text{при} \quad x \to -\infty. \tag{18}$$

Из условий (17) и (18) следует, что изображения $\mathcal{Y}_+(z)$ и $\mathcal{Y}_-(z)$ функций $y^+(x)$ и $y^-(x)$ являются аналитическими функциями комплексной переменной z при $\operatorname{Im} z > \mu$ и $\operatorname{Im} z < v_+$ соответственно.

Перейдем к решению интегрального уравнения (11) или эквивалентного ему уравнения (14), для чего воспользуемся преобразованием Фурье. С помощью теоремы о свертке (см. п. 7.4-4) на основании (14) получим

$$\mathcal{Y}_+(z) + \mathcal{Y}_-(z) = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{K}(z)\mathcal{Y}_+(z),$$

или

$$\mathcal{W}(z)\mathcal{Y}_+(z) + \mathcal{Y}_-(z) = 0, \tag{19}$$

где

$$\mathcal{W}(z) = 1 - \sqrt{2\pi}\,\mathcal{K}(z) \neq 0. \tag{20}$$

Итак, с помощью преобразования Фурье удалось перейти от исходного интегрального уравнения к алгебраическому уравнению для изображений. Однако теперь в уравнение (19) входят уже две неизвестные функции. Вообще говоря, из одного алгебраического уравнения нельзя однозначно определить две неизвестные функции. Метод Винера–Хопфа позволяет решить эту задачу для определенного класса функций. Он в первую очередь связан с изучением областей аналитичности входящих в уравнение функций и специальным представлением этого уравнения. Основная идея метода Винера–Хопфа заключается в следующем.

Пусть уравнение (19) представимо в виде

$$\mathcal{W}_+(z)\mathcal{Y}_+(z) = -\mathcal{W}_-(z)\mathcal{Y}_-(z), \tag{21}$$

где левая часть является аналитической в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > \mu$, а правая — аналитической в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < v_+$, причем $\mu < v_+$, так что существует общая полоса аналитичности этих функций $\mu < \operatorname{Im} z < v_+$. Тогда в силу единственности аналитического продолжения можно утверждать, что существует единственная целая функция комплексной переменной, совпадающая с левой частью (21) в верхней и правой частью (21) в нижней полуплоскости соответственно. Если при этом известно, что функции, входящие в (21), растут на бесконечности не быстрее, чем конечная степень z, то в силу обобщенной теоремы Лиувилля (см. п. 10.4-3) данная целая функция есть полином. В частности, в случае ограниченной на бесконечности функции получим

$$\mathcal{W}_+(z)\mathcal{Y}_+(z) = -\mathcal{W}_-(z)\mathcal{Y}_-(z) = \mathrm{const}\,. \tag{22}$$

Отсюда функции $\mathcal{Y}_+(z)$ и $\mathcal{Y}_-(z)$ определяются однозначно.

Итак, применим данную схему к решению уравнения (19). Из проведенных выше рассмотрений следует, что области аналитичности функций $\mathcal{Y}_+(z)$, $\mathcal{Y}_-(z)$ и $\mathcal{W}(z) = 1 - \sqrt{2\pi}\,\mathcal{K}(z)$ соответственно представляют собой верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > \mu$, нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z < v_+$ и полосу $v_- < \operatorname{Im} z < v_+$. Тем самым это уравнение справедливо в полосе* $\mu < \operatorname{Im} z < v_+$, являющейся общей областью аналитичности всех входящих в это уравнение функций. Для преобразования уравнения (19) к виду (21) предположим, что возможно разложение функции $\mathcal{W}(z)$:

$$\mathcal{W}(z) = \frac{\mathcal{W}_+(z)}{\mathcal{W}_-(z)}, \tag{23}$$

где функции $\mathcal{W}_+(z)$ и $\mathcal{W}_-(z)$ являются аналитическими при $\operatorname{Im} z > \mu$ и $\operatorname{Im} z < v_+$ соответственно. Кроме того, предположим, что в областях своей аналитичности эти функции на бесконечности растут не быстрее, чем z^n, где n — некоторое положительное целое число. Представление (23) аналитической функции $\mathcal{W}(z)$ часто называют ее факторизацией.

Итак, в результате факторизации исходное уравнение приведено к виду (21). Из предыдущих рассмотрений следует, что оно определяет некоторую целую функцию комплексной переменной z.

Так как $\mathcal{Y}_\pm(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$, а $\mathcal{W}_\pm(z)$ растут на бесконечности, как z^n, то данная целая функция может быть лишь полиномом $\mathcal{P}_{n-1}(z)$ степени не выше $n-1$.

Если функции $\mathcal{W}_\pm(z)$ растут на бесконечности, лишь как первая степень переменной z, то из соотношений (22) в силу теоремы Лиувилля следует, что соответствующая целая функция есть постоянная C. Тогда для неизвестных $\mathcal{Y}_+(z)$ и $\mathcal{Y}_-(z)$ получим выражения

$$\mathcal{Y}_+(z) = \frac{C}{\mathcal{W}_+(z)}, \quad \mathcal{Y}_-(z) = -\frac{C}{\mathcal{W}_-(z)}, \tag{24}$$

определяющие изображения искомого решения с точностью до постоянного множителя, который может быть найден хотя бы из условий нормировки. В общем случае выражения

$$\mathcal{Y}_+(z) = \frac{\mathcal{P}_{n-1}(z)}{\mathcal{W}_+(z)}, \quad \mathcal{Y}_-(z) = -\frac{\mathcal{P}_{n-1}(z)}{\mathcal{W}_-(z)}, \tag{25}$$

определяют изображения искомого решения интегрального уравнения (11) с точностью до неопределенных постоянных, которые можно найти из дополнительных условий задачи. Само решение определяется с помощью обратного преобразования Фурье (6), (9) и (10).

* Для определенности положим $\mu > v_-$. В противном случае общей областью аналитичности будет полоса $v_- < \operatorname{Im} z < v_+$.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$y(x) = \lambda \int_0^\infty e^{-|x-t|} y(t)\,dt, \qquad 0 < \lambda < \infty, \tag{26}$$

ядро которого имеет вид $K(x) = \lambda e^{-|x|}$.

Найдем изображение функции $K(x)$:

$$\mathcal{K}(z) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{izx}\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\lambda}{z^2+1}. \tag{27}$$

Функция $\mathcal{K}(z)$ является аналитической функцией комплексной переменной z в полосе $-1 < \operatorname{Im} z < 1$. Представим выражение

$$\mathcal{W}(z) = 1 - \sqrt{2\pi}\,\mathcal{K}(z) = \frac{z^2 - 2\lambda + 1}{z^2+1} \tag{28}$$

в виде (23), где

$$\mathcal{W}_+(z) = \frac{z^2 - 2\lambda + 1}{z+i}, \quad \mathcal{W}_-(z) = z - i. \tag{29}$$

Функция $\mathcal{W}_+(z)$ является аналитической и отличной от нуля функцией z в области $\operatorname{Im} z > \operatorname{Im} \sqrt{2\lambda - 1}$. При $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ эта область определяется условием $\operatorname{Im} z > \sqrt{1-2\lambda}$, причем $\sqrt{1-2\lambda} \leqslant \mu < 1$. При $\lambda > \frac{1}{2}$ функция $\mathcal{W}_+(z)$ является аналитической и отличной от нуля в области $\operatorname{Im} z > 0$. Функция $\mathcal{W}_-(z)$, очевидно, представляет собой отличную от нуля аналитическую функцию в области $\operatorname{Im} z < 1$. Поэтому при $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ обе функции удовлетворяют требуемым условиям в полосе $\mu < \operatorname{Im} z < 1$.

При $\lambda > \frac{1}{2}$ общей областью аналитичности функций $\mathcal{W}_+(z)$ и $\mathcal{W}_-(z)$ является полоса $0 < \operatorname{Im} z < 1$. Таким образом, необходимая факторизация функции (28) произведена.

Рассмотрим выражения $\mathcal{Y}_\pm(z)\mathcal{W}_\pm(z)$. Так как $\mathcal{Y}_\pm(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$, а $\mathcal{W}_\pm(z)$, согласно (29), растут на бесконечности, как первая степень z, то целая функция $\mathcal{P}_{n-1}(z)$, совпадающая с $\mathcal{Y}_+(z)\mathcal{W}_+(z)$ при $\operatorname{Im} z > \mu$ и с $\mathcal{Y}_-(z)\mathcal{W}_-(z)$ при $\operatorname{Im} z < 1$, может быть лишь полиномом нулевой степени. Поэтому

$$\mathcal{Y}_+(z)\mathcal{W}_+(z) = C. \tag{30}$$

Отсюда

$$\mathcal{Y}_+(z) = C\,\frac{z+i}{z^2 - 2\lambda + 1} \tag{31}$$

и, согласно (6),

$$y^+(x) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+iv}^{\infty+iv} \frac{z+i}{z^2 - 2\lambda + 1} e^{-izx}\,dz, \tag{32}$$

где $\mu < v < 1$.

Замкнув контур интегрирования при $x > 0$ дугой полуокружности в нижней полуплоскости и оценив интеграл по этой дуге с помощью леммы Жордана (см. пп. 7.1-4 и 7.1-5), после ряда вычислений получим

$$y^+(x) = C\Big[\cos(\sqrt{2\lambda - 1}\,x) + \frac{\sin(\sqrt{2\lambda - 1}\,x)}{\sqrt{2\lambda - 1}}\Big], \tag{33}$$

где C — постоянная. При $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ это решение экспоненциально возрастает с ростом x, при $\frac{1}{2} < \lambda < \infty$ — ограничено на бесконечности.

11.10-3. Общая схема метода. Проблема факторизации

В общем случае задача, решаемая методом Винера–Хопфа, сводится к следующей. Требуется определить функции $\mathcal{Y}_+(z)$ и $\mathcal{Y}_-(z)$ комплексной переменной z, аналитические соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > v_-$ и $\operatorname{Im} z < v_+$ $(v_- < v_+)$, стремящиеся к нулю при $|z| \to \infty$ в своих областях аналитичности и удовлетворяющие в полосе $(v_- < \operatorname{Im} z < v_+)$ функциональному уравнению

$$A(z)\mathcal{Y}_+(z) + B(z)\mathcal{Y}_-(z) + C(z) = 0. \tag{34}$$

Здесь $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$ — заданные функции комплексной переменной z, аналитические в полосе $v_- < \operatorname{Im} z < v_+$, причем $A(z)$ и $B(z)$, отличны от нуля в этой полосе.

Основная идея решения этой задачи основана на возможности факторизации выражения $A(z)/B(z)$, т. е. возможности представления его в виде

$$\frac{A(z)}{B(z)} = \frac{\mathcal{W}_+(z)}{\mathcal{W}_-(z)}, \tag{35}$$

где функции $\mathcal{W}_+(z)$ и $\mathcal{W}_-(z)$ являются аналитическими и отличными от нуля соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > v'_-$ и $\operatorname{Im} z < v'_+$, причем полосы $v_- < \operatorname{Im} z < v_+$ и $v'_- < \operatorname{Im} z < v'_+$ имеют общую часть. Тогда с помощью (35) уравнение (34) можно переписать в виде

$$\mathcal{W}_+(z)\mathcal{Y}_+(z) + \mathcal{W}_-(z)\mathcal{Y}_-(z) + \mathcal{W}_-(z)\frac{C(z)}{B(z)} = 0. \tag{36}$$

Если последнее слагаемое в (36) можно представить в виде

$$\mathcal{W}_-(z)\frac{C(z)}{B(z)} = \mathcal{D}_+(z) + \mathcal{D}_-(z), \tag{37}$$

где функции $\mathcal{D}_+(z)$ и $\mathcal{D}_-(z)$ являются аналитическими в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > v''_-$ и $\operatorname{Im} z < v''_+$ соответственно, и все три полосы $v_- < \operatorname{Im} z < v_+$, $v'_- < \operatorname{Im} z < v'_+$ и $v''_- < \operatorname{Im} z < v''_+$ имеют общую часть — полосу $v^0_- < \operatorname{Im} z < v^0_+$, то в этой полосе имеет место функциональное уравнение

$$\mathcal{W}_+(z)\mathcal{Y}_+(z) + \mathcal{D}_+(z) = -\mathcal{W}_-(z)\mathcal{Y}_-(z) - \mathcal{D}_-(z). \tag{38}$$

Левая часть (38) представляет собой функцию, аналитическую в полуплоскости $v^0_- < \operatorname{Im} z$, правая — функцию, аналитическую в области $\operatorname{Im} z < v^0_+$. Из равенства этих функций в полосе $v^0_- < \operatorname{Im} z < v^0_+$ следует, что существует единственная целая функция, совпадающая соответственно с левой и правой частями (38) в областях их аналитичности. Если все функции, входящие в правые части (35) и (37), растут на бесконечности в своих областях аналитичности не быстрее, чем z^n, то из условия $\mathcal{Y}_\pm(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$ следует, что эта целая функция является полиномом $\mathcal{P}_{n-1}(z)$ степени не выше $n-1$. Тем самым равенства

$$\mathcal{Y}_+(z) = \frac{\mathcal{P}_{n-1}(z) - \mathcal{D}_+(z)}{\mathcal{W}_+(z)}, \qquad \mathcal{Y}_-(z) = \frac{-\mathcal{P}_{n-1}(z) - \mathcal{D}_-(z)}{\mathcal{W}_-(z)} \tag{39}$$

определяют искомые функции с точностью до постоянных. Последние могут быть найдены из дополнительных условий задачи.

Применение метода Винера–Хопфа основано на представлениях (35) и (37). Если функция $\mathcal{G}(z)$ является аналитической в полосе $v_- < \operatorname{Im} z < v_+$, причем в этой полосе $\mathcal{G}(z)$ равномерно стремится к нулю при $|z| \to \infty$, то в данной полосе возможно представление

$$\mathcal{G}(z) = \mathcal{G}_+(z) + \mathcal{G}_-(z), \tag{40}$$

где функция $\mathcal{G}_+(z)$ — аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Im} z > v_-$, а функция $\mathcal{G}_-(z)$ — в полуплоскости $\operatorname{Im} z < v_+$, причем

$$\mathcal{G}_+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+iv'_-}^{\infty+iv'_-} \frac{\mathcal{G}(\tau)}{\tau - z}\,d\tau, \qquad v_- < v'_- < \operatorname{Im} z < v_+, \tag{41}$$

$$\mathcal{G}_-(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+iv'_+}^{\infty+iv'_+} \frac{\mathcal{G}(\tau)}{\tau - z}\,d\tau, \qquad v_- < \operatorname{Im} z < v'_+ < v_+. \tag{42}$$

Интегралы (41) и (42), как интегралы, зависящие от параметра, определяют аналитические функции комплексной переменной z при условии, что точка z не лежит на контуре интегрирования.

В частности, $\mathcal{G}_+(z)$ является аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Im} z > v'_-$, а $\mathcal{G}_-(z)$ — в полуплоскости $\operatorname{Im} z > v'_+$.

Кроме того, если функция $\mathcal{H}(z)$ является аналитической и отличной от нуля в полосе $v_- < \operatorname{Im} z < v_+$, причем $\mathcal{H}(z)$ равномерно в этой полосе стремится к единице при $|z| \to \infty$, то в данной полосе имеет место представление

$$\mathcal{H}(z) = \mathcal{H}_+(z)\mathcal{H}_-(z), \tag{43}$$

$$\mathcal{H}_+(z) = \exp\Big[\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+iv'_-}^{\infty+iv'_-} \frac{\ln\mathcal{H}(\tau)}{\tau - z}\,d\tau\Big], \qquad v_- < v'_- < \operatorname{Im} z < v_+, \tag{44}$$

$$\mathcal{H}_-(z) = \exp\Big[-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+iv'_+}^{\infty+iv'_+} \frac{\ln\mathcal{H}(\tau)}{\tau - z}\,d\tau\Big], \qquad v_- < \operatorname{Im} z < v'_+ < v_+, \tag{45}$$

где функции $\mathcal{H}_+(z)$ и $\mathcal{H}_-(z)$ являются аналитическими и отличными от нуля соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > v_-$ и $\operatorname{Im} z < v_+$. Представление (43) называется факторизацией функции $\mathcal{H}(z)$.

11.10-4. Неоднородное уравнение Винера–Хопфа второго рода

Рассмотрим уравнение Винера–Хопфа второго рода

$$y(x) - \int_0^\infty K(x-t)y(t)\,dt = f(x). \tag{46}$$

Будем предполагать, что ядро уравнения $K(x)$ и его правая часть $f(x)$ удовлетворяют условиям (15), и будем искать решение $y^+(x)$ уравнения (46), для которого выполняется условие (17).

Тогда, проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям при выводе функционального уравнения (19) для однородного интегрального уравнения, получаем, что в случае уравнения (46) в полосе $\mu < \operatorname{Im} z < v_+$ должно удовлетворяться функциональное уравнение

$$\mathcal{Y}_+(z) + \mathcal{Y}_-(z) = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{K}(z)\mathcal{Y}_+(z) + \mathcal{F}_+(z) + \mathcal{F}_-(z) \tag{47}$$

или

$$\mathcal{W}(z)\mathcal{Y}_+(z) + \mathcal{Y}_-(z) - \mathcal{F}(z) = 0, \tag{48}$$

где $\mathcal{W}(z)$, как и в случае однородного уравнения подчинена условию (20).

Заметим теперь, что уравнение (48) является частным случаем уравнения (34). Функция $\mathcal{W}(z)$ в полосе $v_- < \operatorname{Im} z < v_+$ является аналитической и равномерно стремится к единице при $|z| \to \infty$, так как $|\mathcal{K}(z)| \to 0$ при $|z| \to \infty$. Тогда ее можно представить в виде (см. (43)–(45))

$$\mathcal{W}(z) = \frac{\mathcal{W}_+(z)}{\mathcal{W}_-(z)}, \tag{49}$$

где $\mathcal{W}_+(z)$ является аналитической функцией в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > v_-$, а $\mathcal{W}_-(z)$ — в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < v_+$, причем функции $\mathcal{W}_\pm(z)$ растут на бесконечности не быстрее, чем z^n.

На основании представления (49) уравнение (48) принимает вид

$$\mathcal{W}_+(z)\mathcal{Y}_+(z) + \mathcal{W}_-(z)\mathcal{Y}_-(z) - \mathcal{W}_-(z)\mathcal{F}_-(z) - \mathcal{W}_-(z)\mathcal{F}_+(z) = 0. \tag{50}$$

Для приведения уравнения (50) к виду (38) достаточно разложить последнее слагаемое:

$$\mathcal{F}_+(z)\mathcal{W}_-(z) = \mathcal{D}_+(z) + \mathcal{D}_-(z), \tag{51}$$

на сумму функций $\mathcal{D}_+(z)$ и $\mathcal{D}_-(z)$, являющихся аналитическими в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > \mu$ и $\operatorname{Im} z < v_+$ соответственно.

Для обоснования возможности представления (51) заметим, что $\mathcal{F}_+(z)$ является аналитической функцией в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > v_-$ и равномерно стремится к нулю при $|z| \to \infty$. Функция $\mathcal{W}_-(z)$ является аналитической в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < v_+$, и по способу ее построения можно так провести факторизацию (49), чтобы $\mathcal{W}_-(z)$ оставалась ограниченной в полосе $v_- < \operatorname{Im} z < v_+$ при $|z| \to \infty$. Отсюда следует (см. (40)–(42)), что для функции $\mathcal{F}_+(z)\mathcal{W}_-(z)$ в полосе $v_- < \operatorname{Im} z < v_+$ выполнены все условия, достаточные для обоснования представления (51).

Проведенные рассуждения позволяют с учетом того, что функции $\mathcal{W}_\pm(z)$ растут на бесконечности не быстрее, чем z^n, представить изображения решения неоднородного интегрального уравнения (46) в виде

$$\mathcal{Y}_+(z) = \frac{\mathcal{P}_{n-1}(z) + \mathcal{D}_+(z)}{\mathcal{W}_+(z)}, \quad \mathcal{Y}_-(z) = \frac{-\mathcal{P}_{n-1}(z) + \mathcal{W}_-(z)\mathcal{F}_-(z) + \mathcal{D}_-(z)}{\mathcal{W}_-(z)}. \tag{52}$$

Само решение может быть получено из (52) с помощью формул обратного преобразования Фурье (6), (9) и (10).

11.10-5. Исключительный случай уравнения Винера–Хопфа второго рода

Рассмотрим исключительный случай уравнения Винера–Хопфа второго рода, когда функция $\mathcal{W}(z) = 1 - \sqrt{2\pi}\,\mathcal{K}(z)$ имеет конечное число нулей N (с учетом их кратности) в полосе $v_- < \operatorname{Im} z < v_+$. Возможность факторизации сохраняется и в этом случае. Для этого достаточно ввести вспомогательную функцию

$$\mathcal{W}_1(z) = \ln\Big[(z^2+b^2)^{N/2}\mathcal{W}(z)\prod_i (z-z_i)^{-\alpha_i}\Big], \tag{53}$$

где α_i — кратность нулей z_i, а постоянная $b > \{|v_-|, |v_+|\}$ выбирается из условия, чтобы функция, стоящая под знаком логарифма, не имела дополнительных нулей в полосе $v_- < \operatorname{Im} z < v_+$.

Однако в исключительном случае метод Винера–Хопфа приводит к результату только тогда, когда число нулей функции $\mathcal{W}(z)$ четно. Это связано с тем, что только в случае четного числа нулей можно добиться необходимого для применения метода Винера–Хопфа поведения функции $(z^2 + b^2)^{N/2}$ на бесконечности (см. Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978), стр. 144–146). Последнее обстоятельство не мешает широкому использованию метода Винера–Хопфа для решения прикладных задач, где обычно ядро интегрального уравнения $K(x)$ является четной функцией, и поэтому все проводимые рассуждения безупречны.

Замечание 1. Уравнение Винера–Хопфа второго рода для функций, убывающих на бесконечности, приводится к краевой задаче Римана на действительной оси (см. п. 11.9-1). Тогда предположения о четности числа нулей функции $\mathcal{W}(z)$ или четности ядра интегрального уравнения $K(x)$ в исключительном случае несущественны.

Замечание 2. Полное решение уравнения Винера–Хопфа второго рода для функций, растущих на бесконечности, приведено в упомянутой книге Ф. Д. Гахова, Ю. И. Черского (1978).

Замечание 3. Метод Винера–Хопфа можно использовать и для решения интегральных уравнений Винера–Хопфа первого рода при условии четности ядер этих уравнений.

⊙ *Литература*: Б. Нобл (1962), А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов (1970), В. И. Смирнов (1974), Ф. Д. Гахов (1977), Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978).

11.11. Метод Крейна для уравнения Винера–Хопфа

11.11-1. Некоторые замечания. Проблема факторизации

Рассмотрим уравнение Винера–Хопфа второго рода

$$y(x) - \int_0^\infty K(x-t)y(t)\,dt = f(x), \quad 0 \leqslant x < \infty, \tag{1}$$

где $f(x)$, $y(x) \in L_1(0,\infty)$ и $K(x) \in L_1(-\infty,\infty)$. Будем использовать классы функций, представимых как изображения преобразования Фурье (альтернативного преобразования Фурье в несимметричной форме, см. п. 7.4-3) функций из $L_1(-\infty,\infty)$, $L_1(0,\infty)$ и $L_1(-\infty,0)$. Для краткости вместо этих символов будем просто писать L, L_+ и L_-. Пусть функции $h(x)$, $h_1(x)$, и $h_2(x)$ принадлежат соответственно L, L_+ и L_-, тогда их изображения можно представить в форме

$$\check{\mathcal{H}}(u) = \int_{-\infty}^\infty h(x)e^{iux}\,dx, \quad \check{\mathcal{H}}_1(u) = \int_0^\infty h_1(x)e^{iux}\,dx, \quad \check{\mathcal{H}}_2(u) = \int_{-\infty}^0 h_2(x)e^{iux}\,dx.$$

Через Q, Q_+ и Q_- обозначим классы функций, представимых соответственно в виде

$$\check{\mathcal{W}}(u) = 1 + \check{\mathcal{H}}(u), \quad \check{\mathcal{W}}_1(u) = 1 + \check{\mathcal{H}}_1(u), \quad \check{\mathcal{W}}_2(u) = 1 + \check{\mathcal{H}}_2(u), \tag{2}$$

где функции из Q_+ или Q_-, рассматриваемые как функции комплексной переменной $z = u + iv$, аналитичны при $\operatorname{Im} z > 0$ или $\operatorname{Im} z < 0$ и непрерывны вплоть до вещественной оси.

Пусть $T(x)$ принадлежит L, а $\check{\mathcal{T}}(u)$ — ее изображение, причем

$$1 - \check{\mathcal{T}}(u) \neq 0, \quad \operatorname{Ind}[1 - \check{\mathcal{T}}(u)] = \frac{1}{2\pi}\Big\{\arg[1 - \check{\mathcal{T}}(u)]\Big\}_{-\infty}^{\infty} = 0, \quad -\infty < u < \infty, \tag{3}$$

тогда существует такое $q(x) \in L$, что

$$\ln[1 - \check{\mathcal{T}}(u)] = \int_{-\infty}^\infty q(x)e^{iux}\,dx. \tag{4}$$

Из этой формулы непосредственно следует, что $\ln[1 - \check{\mathcal{T}}(u)] \to 0$ при $u \to \pm\infty$.

Далее будем использовать *факторизацию* непрерывных на промежутке $-\infty \leqslant u \leqslant \infty$ функций $\check{\mathcal{M}}(u)$ класса Q. Под этим будем понимать представление функции $\check{\mathcal{M}}(u)$ в виде произведения

$$\check{\mathcal{M}}(u) = \check{\mathcal{M}}_+(u)\Big(\frac{u-i}{u+i}\Big)^k \check{\mathcal{M}}_-(u), \tag{5}$$

где $\check{\mathcal{M}}_-(z)$ и $\check{\mathcal{M}}_+(z)$ — аналитические функции в соответствующих полуплоскостях $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$, непрерывные вплоть до вещественной оси. Кроме того,

$$\check{\mathcal{M}}_+(z) \neq 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z \geqslant 0 \qquad \text{и} \quad \check{\mathcal{M}}_-(z) \neq 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z \leqslant 0. \tag{6}$$

Из (5) можно заключить, что

$$k = \operatorname{Ind} \check{\mathcal{M}}(u).$$

Факторизация (5) называется *канонической*, если $k = 0$.

В дальнейшем будем рассматривать лишь функции вида

$$\check{\mathcal{M}}(u) = 1 - \check{\mathcal{T}}(u), \tag{7}$$

такие что $\check{\mathcal{M}}(\pm\infty) = 1$. Можно также считать, что

$$\check{\mathcal{M}}_+(\pm\infty) = \check{\mathcal{M}}_-(\pm\infty) = 1. \tag{8}$$

Сформулируем основные результаты, касающиеся проблемы факторизации.

Для того чтобы функция (7) допускала каноническую факторизацию, необходимо и достаточно наличия двух условий:

$$\check{\mathcal{M}}(u) \neq 0, \qquad \operatorname{Ind} \check{\mathcal{M}}(u) = 0. \tag{9}$$

При этом каноническая факторизация единственна. Кроме того, при выполнении условий (9) существует функция $M(x)$ из L такая, что

$$\check{\mathcal{M}}(u) = \exp\Big[\int_{-\infty}^{\infty} M(x) e^{iux}\, dx\Big], \tag{10}$$

$$\check{\mathcal{M}}_+(u) = \exp\Big[\int_0^{\infty} M(x) e^{iux}\, dx\Big], \quad \check{\mathcal{M}}_-(u) = \exp\Big[\int_{-\infty}^{0} M(x) e^{iux}\, dx\Big]. \tag{11}$$

Отсюда следует, что $\check{\mathcal{M}}(u) \in Q$ и $\check{\mathcal{M}}_\pm(u) \in Q_\pm$. Множители в канонической факторизации определяются также следующими формулами:

$$\ln \check{\mathcal{M}}_+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \check{\mathcal{M}}(\tau)}{\tau - z}\, d\tau, \qquad \operatorname{Im} z > 0, \tag{12}$$

$$\ln \check{\mathcal{M}}_-(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \check{\mathcal{M}}(\tau)}{\tau - z}\, d\tau, \qquad \operatorname{Im} z < 0. \tag{13}$$

В общем случае факторизации имеет место следующее предложение. Для того чтобы функция (7) допускала факторизацию (5), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\check{\mathcal{M}}(u) \neq 0, \qquad -\infty < u < \infty.$$

В этом случае равенство (5) можно переписать в виде

$$\Big(\frac{u - i}{u + i}\Big)^{-k} \check{\mathcal{M}}(u) = \check{\mathcal{M}}_-(u) \check{\mathcal{M}}_+(u), \qquad -\infty < u < \infty.$$

Последнее означает каноническую факторизацию для функции

$$\check{\mathcal{M}}_1(u) = \Big(\frac{u - i}{u + i}\Big)^{-k} \check{\mathcal{M}}(u).$$

Следовательно, для множителей $\check{\mathcal{M}}_\pm(u)$ справедливы формулы (10)–(13), если в них заменить $\check{\mathcal{M}}(u)$ на $\check{\mathcal{M}}_1(u)$.

Вернемся теперь к уравнению (1), для которого

$$\check{\mathcal{K}}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{iux}\, dx. \tag{14}$$

11.11-2. Решение уравнения Винера–Хопфа второго рода

Теорема 1. *Для того чтобы уравнение (1) при любом $f(x)$ из L_+ имело одно и только одно решение из L_+, необходимы и достаточны следующие условия:*

$$1-\check{\mathcal{K}}(u)\neq 0, \qquad -\infty<u<\infty, \tag{15}$$

$$\nu=-\operatorname{Ind}[1-\check{\mathcal{K}}(u)]=0. \tag{16}$$

Теорема 2. *Если выполнено условие (15), то неравенство $\nu>0$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы однородное уравнение*

$$y(x)-\int_0^\infty K(x-t)y(t)\,dt=0 \tag{17}$$

имело в L_+ отличные от нуля решения. Множество этих решений имеет базис, состоящий из ν функций $\varphi_k(x)$ ($k=1,2,\ldots,\nu$), стремящихся к нулю при $x\to\infty$ и связанных между собою следующими соотношениями:

$$\varphi_k(x)=\int_0^x \varphi_{k+1}(t)\,dt, \quad k=1,2,\ldots,\nu-1, \quad \varphi_\nu(x)=\int_0^x \psi(t)\,dt+C, \tag{18}$$

где C — некоторая отличная от нуля постоянная, а функции $\varphi_k(t)$ и $\psi(t)$ принадлежат L_+.

Теорема 3. *Если выполнено условие (15) и $\nu>0$, то при любом $f(x)\in L_+$ уравнение (1) имеет бесчисленное множество решений из L_+.*

Если же $\nu<0$, то при данном $f(x)\in L_+$ уравнение (1) либо вовсе не имеет решений из L_+, либо имеет единственное решение. Для того чтобы имел место последний случай, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\int_0^\infty f(x)\psi_k(x)\,dx=0, \qquad k=1,2,\ldots,|\nu|, \tag{19}$$

где $\psi_k(x)$ — какой-либо базис множества всех решений транспонированного однородного уравнения

$$\psi(x)-\int_0^\infty K(t-x)\psi(t)\,dt=0. \tag{20}$$

1°. Если выполнены условия (15), (16), то имеется единственная факторизация:

$$[1-\check{\mathcal{K}}(u)]^{-1}=\check{\mathcal{M}}_+(u)\check{\mathcal{M}}_-(u), \tag{21}$$

причем

$$\check{\mathcal{M}}_+(u)=1+\int_0^\infty R_+(t)e^{iut}\,dt, \quad \check{\mathcal{M}}_-(u)=1+\int_0^\infty R_-(t)e^{-iut}\,dt. \tag{22}$$

Резольвента определяется формулой

$$R(x,t)=R_+(x-t)+R_-(t-x)+\int_0^\infty R_+(x-s)R_-(t-s)\,ds \tag{23}$$

где $0\leqslant x<\infty$, $0\leqslant t<\infty$, $R_+(x)=0$ и $R_-(x)=0$ при $x<0$, так что при $f(x)$ из L_+ решение уравнения определяется выражением

$$y(x)=f(x)+\int_0^\infty R(x,t)f(t)\,dt. \tag{24}$$

Формулу (23) можно записать в следующем виде:

$$R(x,t)=R(x-t,\,0)+R(0,\,t-x)+\int_0^\infty R(x-s,\,0)R(0,\,t-s)\,ds. \tag{25}$$

Если $K(x-t)=K(t-x)$, то формула (25) имеет вид

$$R(x,t)=R(|x-t|,0)+\int_0^{\min(x,t)} R(x-s,0)R(t-s,0)\,ds. \tag{26}$$

Отметим, что $R_+(x) = R(x,0)$ и $R_-(x) = R(0,x)$ — единственные в классе L_+ решения уравнений следующего вида ($0 \leqslant x < \infty$):

$$R_+(x) + \int_0^\infty K(x-t)R_+(t)\,dt = K(x),$$
$$R_-(x) + \int_0^\infty K(t-x)R_-(t)\,dt = K(-x). \tag{27}$$

2°. Положим, что выполнено условие (15), но

$$\nu = -\operatorname{Ind}[1 - \check{\mathcal{K}}(u)] > 0.$$

В этом случае функция $[1-\check{\mathcal{K}}(u)]^{-1}$ допускает следующую факторизацию:

$$[1-\check{\mathcal{K}}(u)]^{-1} = \check{\mathcal{G}}_-(u)\Big(\frac{u-i}{u+i}\Big)^\nu \check{\mathcal{G}}_+(u), \qquad -\infty < u < \infty. \tag{28}$$

Для функций $\check{\mathcal{M}}_-(u)$ и $\check{\mathcal{M}}_+(u)$, определенных равенствами

$$\check{\mathcal{M}}_-(u) = \check{\mathcal{G}}_-(u) \quad \text{и} \quad \check{\mathcal{M}}_+(u) = \Big(\frac{u-i}{u+i}\Big)^\nu \check{\mathcal{G}}_+(u), \tag{29}$$

имеет место представление (22) и формула (23) для резольвенты.

Кроме того, для $k = 1, 2, \ldots, \nu$ имеют место представления

$$\frac{i^k \check{\mathcal{M}}_+(u)}{(u-i)^k} = \int_0^\infty g_k(x)e^{iux}\,dx, \tag{30}$$

причем $g_k(x)$ — решения однородного уравнения (17). Через них можно, естественно, выразить и решения $\varphi_k(x)$, упомянутые в теореме 2.

3°. Если $\nu = -\operatorname{Ind}[1-\check{\mathcal{K}}(u)] < 0$, то у транспонированного уравнения

$$y(x) - \int_0^\infty K(t-x)y(t)\,dt = f(x) \tag{31}$$

индекс $-\nu > 0$. Если формула (28) определяет факторизацию для уравнения (1), то для транспонированного уравнения имеем факторизацию

$$[1-\check{\mathcal{K}}(u)]^{-1} = \check{\mathcal{M}}_-(-u)\check{\mathcal{M}}_+(-u),$$

причем $\check{\mathcal{M}}_-(-u)$ играет роль $\check{\mathcal{M}}_+(u)$ и $\check{\mathcal{M}}_+(-u)$ — роль $\check{\mathcal{M}}_-(u)$.

11.11-3. Формула Хопфа–Фока

Приведем здесь полезную формулу, позволяющую выразить решение уравнения (1) для произвольной правой части $f(x)$ через решение более простого вспомогательного интегрального уравнения с правой частью экспоненциального вида.

Пусть в уравнении (1)

$$f(x) = e^{i\zeta x}, \quad \operatorname{Im}\zeta > 0, \quad y(x) = y_\zeta(x) \tag{32}$$

и, кроме того, выполнены условия (15), (16). Тогда

$$y_\zeta(x) = e^{i\zeta x} + \int_0^\infty R(x,t)e^{i\zeta t}\,dt, \tag{33}$$

где $R(x,t)$ имеет вид (25). После некоторых преобразований можно получить, что

$$y_\zeta(x) = \check{\mathcal{M}}_-(-\zeta)\Big[1 + \int_0^x R(t,0)e^{-i\zeta t}\,dt\Big]e^{i\zeta x}. \tag{34}$$

Полагая $x = 0$ в (34), будем иметь

$$y_\zeta(0) = \check{\mathcal{M}}_-(-\zeta), \tag{35}$$

причем при четной функции $K(x)$, описывающей ядро интегрального уравнения

$$y_\zeta(0) = \check{\mathcal{M}}_+(\zeta). \tag{36}$$

Располагая формулой (34), можно получить решение уравнения (1) и в общем случае $f(x)$ (см. также разд. 9.6):

$$y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \check{\mathcal{F}}_+(-\zeta)y_\zeta(x)\,d\zeta, \qquad \check{\mathcal{F}}_+(u) = \int_0^\infty f(x)e^{iux}\,dx. \tag{37}$$

Замечание 1. Все полученные в разд. 11.11 результаты, касающиеся уравнения Винера–Хопфа второго рода справедливы также для непрерывных, квадратично суммируемых и ряда других классов функций, которые подробно обсуждаются в работе М. Г. Крейна (1958) и книге C. Corduneanu (1973).

Замечание 2. Решение уравнения Винера–Хопфа в других классах функций может быть построено и в исключительном случае, когда $1 - \check{\mathcal{K}}(u) = 0$ (см. пп. 11.9-1 и 11.10-5).

⊙ *Литература*: В. А. Фок (1942), М. Г. Крейн (1958), П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968), C. Corduneanu (1973), В. И. Смирнов (1974).

11.12. Методы решения уравнений с разностным ядром на конечном отрезке

11.12-1. Метод Крейна

Рассмотрим метод построения точных аналитических решений линейных интегральных уравнений с произвольной правой частью. Метод основан на построении двух вспомогательных решений более простых уравнений с правой частью равной единице. Вспомогательные решения используются для построения решения исходного уравнения при произвольной правой части.

1°. Пусть дано уравнение

$$y(x) - \int_a^b K(x,t)y(t)\,dt = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{1}$$

Одновременно с (1) будем рассматривать два вспомогательных уравнения, зависящих от параметра ξ $(a \leqslant \xi \leqslant b)$:

$$\begin{aligned} w(x,\xi) - \int_a^\xi K(x,t)w(t,\xi)\,dt = 1,\\ w^*(x,\xi) - \int_a^\xi K(t,x)w^*(t,\xi)\,dt = 1, \end{aligned} \tag{2}$$

где $a \leqslant x \leqslant \xi$. Пусть для любого ξ вспомогательные уравнения (2) имеют единственные непрерывные решения $w(x,\xi)$ и $w^*(x,\xi)$, удовлетворяющие условию $w(\xi,\xi)w^*(\xi,\xi) \neq 0$ $(a \leqslant \xi \leqslant b)$. Тогда для любой непрерывной функции $f(x)$ единственное непрерывное решение уравнения (1) может быть получено по формуле

$$y(x) = F(b)w(x,b) - \int_x^b w(x,\xi)F'_\xi(\xi)\,d\xi, \quad F(\xi) = \frac{1}{m(\xi)}\frac{d}{d\xi}\int_a^\xi w^*(t,\xi)f(t)\,dt, \tag{3}$$

где

$$m(\xi) = w(\xi,\xi)w^*(\xi,\xi).$$

Формула (3) позволяет строить решение уравнения (1) с произвольной правой частью $f(x)$ с помощью решений двух более простых вспомогательных уравнений (2) (зависящих от параметра ξ) с постоянной правой частью равной единице.

2°. Рассмотрим теперь уравнение с ядром, зависящим от разности аргументов:

$$y(x) + \int_a^b K(x-t)y(t)\,dt = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{4}$$

Считается, что $K(x)$ — четная функция, интегрируемая на отрезке $[a-b, b-a]$. Одновременно с (4) будем рассматривать вспомогательное уравнение, зависящее от параметра ξ $(a \leqslant \xi \leqslant b)$:

$$w(x,\xi) + \int_a^\xi K(x-t)w(t,\xi)\,dt = 1, \quad a \leqslant x \leqslant \xi. \tag{5}$$

Пусть для любого ξ вспомогательное уравнение (5) имеет единственное непрерывное решение $w(x,\xi)$. Тогда для любой непрерывной функции $f(x)$ решение уравнения (4) может быть получено по формуле (3), если в ней положить $w^*(x,t) = w(x,t)$.

Укажем здесь еще одну полезную формулу для уравнения с ядром, зависящим от разности аргументов:

$$y(x) + \int_{-a}^a K(x-t)y(t)\,dt = f(x), \quad -a \leqslant x \leqslant a. \tag{6}$$

Считается, что $K(x)$ — четная функция, интегрируемая на отрезке $[-2a,\ 2a]$. Одновременно с (6) будем рассматривать вспомогательное уравнение, зависящее от параметра ξ $(0 < \xi \leqslant a)$:

$$w(x,\xi) + \int_{-\xi}^\xi K(x-t)w(t,\xi)\,dt = 1, \quad -\xi \leqslant x \leqslant \xi. \tag{7}$$

Пусть для любого ξ вспомогательное уравнение (7) имеет единственное непрерывное решение $w(x,\xi)$. Тогда для любой непрерывной функции $f(x)$ решение уравнения (6) может быть получено по формуле

$$\begin{aligned} y(x) = \frac{1}{2M(a)}\Big[\frac{d}{da}\int_{-a}^{a} w(t,a)f(t)\,dt\Big]w(x,a) - \\ - \frac{1}{2}\int_{|x|}^{a} w(x,\xi)\frac{d}{d\xi}\Big[\frac{1}{M(\xi)}\frac{d}{d\xi}\int_{-\xi}^{\xi} w(t,\xi)f(t)\,dt\Big]\,d\xi - \\ - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int_{|x|}^{a}\frac{w(x,\xi)}{M(\xi)}\Big[\int_{-\xi}^{\xi} w(t,\xi)\,df(t)\Big]\,d\xi, \end{aligned} \qquad (8)$$

где $M(\xi) = w^2(\xi,\xi)$, а последний внутренний интеграл берется по Стилтьесу.

11.12-2. Ядра с рациональными преобразованиями Фурье

Рассмотрим уравнение вида

$$y(x) - \int_0^T K(x-t)y(t)\,dt = f(x), \qquad (9)$$

где $0 \leqslant x \leqslant T < \infty$. Если ядро $K(x)$ интегрируемо в промежутке $[-T,T]$, то к этому уравнению применима теория Фредгольма.

Поскольку в уравнение входят значения ядра $K(x)$ лишь для $[-T,T]$, то можно продолжить ядро любым образом вне этого отрезка. Пусть ядро продолжено на всю ось с сохранением интегрируемости. Тогда в пространстве $L_2(0,T)$ уравнение (9) в общем случае сводится к краевой задаче теории аналитических функций (задаче Римана) для двух пар неизвестных функций.

Если преобразование Фурье ядра

$$\check{\mathcal{K}}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x)e^{iux}\,dx$$

рационально, то уравнение (9) решается в замкнутом виде. Пусть $1-\check{\mathcal{K}}(u) \neq 0$ $(-\infty < u < \infty)$. Тогда изображение решения интегрального уравнения (9) дается формулой

$$\check{\mathcal{Y}}(u) = \frac{1}{1-\check{\mathcal{K}}(u)}\big[\check{\mathcal{F}}(u) - \check{\mathcal{W}}^{+}(u) - e^{-iTu}\check{\mathcal{W}}^{-}(u)\big], \qquad (10)$$

в которой

$$\check{\mathcal{W}}^{\pm}(u) = \sum_n \sum_{k=1}^{p_n^{\pm}} \frac{M_{nk}^{\pm}}{(u-b_n^{\pm})^k},$$

где b_n^+ и b_n^- — полюсы функции $1-\check{\mathcal{K}}(u)$, лежащие соответственно в верхней и нижней полуплоскости, $p_n^{\pm}$ — их кратности. Постоянные $M_{nk}^{\pm}$ могут быть определены из условий

$$\begin{aligned} &\frac{d^s}{du^s}\big[\check{\mathcal{W}}^{+}(u) + e^{-iTu}\check{\mathcal{W}}^{-}(u) - \check{\mathcal{F}}(u)\big]_{u=a_n^+} = 0, \qquad && s = 0,1,\ldots,q_n^+ - 1,\\ &\frac{d^s}{du^s}\big[\check{\mathcal{W}}^{+}(u) + e^{-iTu} - \check{\mathcal{F}}(u)\big]_{u=a_n^-} = 0, && s = 0,1,\ldots,q_n^- - 1, \end{aligned}$$

где a_n^+ и a_n^- — нули функции $1-\check{\mathcal{K}}(u)$, лежащие соответственно в верхней и нижней полуплоскости, $q_n^{\pm}$ — их кратности. Постоянные $M_{nk}^{\pm}$ можно определять также с помощью подстановки решения в исходное уравнение. Решение интегрального уравнения (9) получается обращением формулы (10).

11.12-3. Сведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям

1°. Рассмотрим специальный случай, когда образ ядра интегрального уравнения (9), полученный с помощью преобразования Фурье, можно представить в виде

$$\check{\mathcal{K}}(u) = \frac{\check{\mathcal{M}}(u)}{\check{\mathcal{N}}(u)}, \qquad (11)$$

где $\check{\mathcal{M}}(u)$ и $\check{\mathcal{N}}(u)$ некоторые многочлены степеней m и n соответственно:

$$\check{\mathcal{M}}(u) = \sum_{k=0}^{m} A_k u^k, \quad \check{\mathcal{N}}(u) = \sum_{k=0}^{n} B_k u^k. \tag{12}$$

В этом случае решение интегрального уравнения (9) (если оно существует) удовлетворяет линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению m-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\check{\mathcal{M}}\Big(i\frac{d}{dx}\Big)y(x) = \check{\mathcal{N}}\Big(i\frac{d}{dx}\Big)f(x), \qquad 0 < x < T. \tag{13}$$

Решение уравнения (13) содержит m произвольных постоянных, которые определяются подстановкой решения в исходное уравнение (9). При этом для определения постоянных получается система линейных алгебраических уравнений.

2°. Рассмотрим уравнение Фредгольма второго рода с разностным ядром, содержащим сумму экспонент:

$$y(x) + \int_a^b \Big(\sum_{k=1}^{n} A_k e^{\lambda_k|x-t|}\Big)y(t)\,dt = f(x). \tag{14}$$

Это уравнение в общем случае можно свести к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению $2n$-го порядка с постоянными коэффициентами.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y(x) + \int_a^b e^{\lambda|x-t|}g(t)y(t)\,dt = f(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

которое при $g(t) \equiv \mathrm{const}$ будет частным случаем уравнения (14).

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$y(x) + \int_a^x e^{\lambda(x-t)}g(t)y(t)\,dt + \int_x^b e^{\lambda(t-x)}g(t)y(t)\,dt = f(x). \tag{15}$$

Дифференцируя (15) дважды по x, имеем

$$y''_{xx}(x) + 2\lambda g(x)y(x) + \lambda^2\int_a^x e^{\lambda(x-t)}g(t)y(t)\,dt + \lambda^2\int_x^b e^{\lambda(t-x)}g(t)y(t)\,dt = f''_{xx}(x). \tag{16}$$

Исключая из (15) и (16) интегральные члены, приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для функции $y = y(x)$:

$$y''_{xx} + 2\lambda g(x)y - \lambda^2 y = f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x). \tag{17}$$

2°. Выведем граничные условия для уравнения (17). Будем считать, что пределы интегрирования удовлетворяют условиям $-\infty < a < b < \infty$. Полагая в (15) $x = a$ и $x = b$, имеем два следствия:

$$\begin{aligned} y(a) + e^{-\lambda a}\int_a^b e^{\lambda t}g(t)y(t)\,dt &= f(a),\\ y(b) + e^{\lambda b}\int_a^b e^{-\lambda t}g(t)y(t)\,dt &= f(b). \end{aligned} \tag{18}$$

Выразим из уравнения (17) произведение $g(x)y$ через y''_{xx} и f''_{xx} и подставим в (18). После интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} e^{\lambda b}\varphi'_x(b) - e^{\lambda a}\varphi'_x(a) &= \lambda e^{\lambda a}\varphi(a) + \lambda e^{\lambda b}\varphi(b),\\ e^{-\lambda b}\varphi'_x(b) - e^{-\lambda a}\varphi'_x(a) &= \lambda e^{-\lambda a}\varphi(a) + \lambda e^{-\lambda b}\varphi(b), \end{aligned} \qquad \varphi(x) = y(x) - f(x).$$

Отсюда после некоторых преобразований найдем граничные условия для функции $y(x)$:

$$\varphi'_x(a) + \lambda\varphi(a) = 0, \quad \varphi'_x(b) - \lambda\varphi(b) = 0; \qquad \varphi(x) = y(x) - f(x). \tag{19}$$

Уравнение (17) вместе с граничными условиями (19) описывает решение исходного интегрального уравнения. При $g(t) \equiv \mathrm{const}$ соответствующее решение приведено в книге А. Д. Полянина, А. В. Манжирова (1998, стр. 261).

3°. Уравнения с разностным ядром, содержащим сумму гиперболических функций:

$$y(x) + \int_a^b K(x-t)y(t)\,dt = f(x), \qquad K(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{sh}\big(\lambda_k|x|\big) \tag{20}$$

также с помощью дифференцирования сводятся к линейным неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнениям $2n$-го порядка с постоянными коэффициентами.

4°. Уравнения с разностным ядром, содержащим сумму тригонометрических функций:

$$y(x) + \int_a^b K(x-t)y(t)\,dt = f(x), \qquad K(x) = \sum_{k=1}^n A_k \sin\bigl(\lambda_k |x|\bigr) \tag{21}$$

также можно свести к линейным неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнениям $2n$-го порядка с постоянными коэффициентами.

⊙ *Литература*: W. B. Davenport, W. L. Root (1958), И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн (1967), П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968), А. Д. Полянин, А. В. Манжиров (1998), A. D. Polyanin, A. V. Manzhirov (1998), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000).

11.13. Метод замены ядра вырожденным

11.13-1. Аппроксимация ядра

Для приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$y(x) - \int_a^b K(x,t)y(t)\,dt = f(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b, \tag{1}$$

где функции $f(x)$ и $K(x,t)$ для простоты будем считать непрерывными, ядро $K(x,t)$ заменяют близким к нему вырожденным ядром

$$K_{(n)}(x,t) = \sum_{k=0}^n g_k(x)h_k(t). \tag{2}$$

Укажем несколько способов такой замены. Если ядро $K(x,t)$ достаточное число раз дифференцируемо по x на отрезке $[a,b]$, то в качестве вырожденного ядра $K_{(n)}(x,t)$ можно взять конечный отрезок ряда Тейлора:

$$K_{(n)}(x,t) = \sum_{m=0}^n \frac{(x-x_0)^m}{m!} K_x^{(m)}(x_0,t), \tag{3}$$

где x_0 — некоторая точка отрезка $[a,b]$. Аналогичный прием можно применить также, если $K(x,t)$ достаточное число раз дифференцируема по t на отрезке $[a,b]$.

Для построения вырожденного ядра можно также использовать конечный отрезок двойного ряда Тейлора:

$$K_{(n)}(x,t) = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n a_{pq}(x-x_0)^p(t-t_0)^q, \tag{4}$$

где

$$a_{pq} = \frac{1}{p!\,q!}\,\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial t^q} K(x,t)\bigg|_{\substack{x=x_0\\ t=t_0}}, \qquad a \leqslant x_0 \leqslant b, \quad a \leqslant t_0 \leqslant b.$$

Непрерывное ядро $K(x,t)$ допускает также аппроксимацию тригонометрическим полиномом периода $2l$, где $l = b-a$.

Например, можно положить

$$K_{(n)}(x,t) = \frac{1}{2}a_0(t) + \sum_{k=1}^n a_k(t)\cos\Bigl(\frac{k\pi x}{l}\Bigr), \tag{5}$$

где $a_k(t)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ — коэффициенты ряда Фурье:

$$a_k(t) = \frac{2}{l}\int_a^b K(x,t)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx. \tag{6}$$

Аналогичное разложение получается, если поменять ролями переменные x и t. Можно также использовать конечный отрезок двойного ряда Фурье, полагая, например,

$$a_k(t) \approx \frac{1}{2}a_{k0} + \sum_{m=1}^n a_{km}\cos\Bigl(\frac{m\pi t}{l}\Bigr), \qquad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{7}$$

из формул (5)–(7) имеем

$$K_{(n)}(x,t) = \frac{1}{4}a_{00} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_{k0}\cos\Bigl(\frac{k\pi x}{l}\Bigr) + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} a_{0m}\cos\Bigl(\frac{m\pi t}{l}\Bigr) + \\ + \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_{km}\cos\Bigl(\frac{k\pi x}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{m\pi t}{l}\Bigr),$$

где

$$a_{km} = \frac{4}{l^2}\int_a^b\!\!\int_a^b K(x,t)\cos\Bigl(\frac{k\pi x}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{m\pi t}{l}\Bigr)\,dx\,dt. \tag{8}$$

Существуют и другие приемы аппроксимации ядра $K(x,t)$.

11.13-2. Приближенное решение

Если $K_{(n)}(x,t)$ есть вырожденное ядро, аппроксимирующее ядро $K(x,t)$, и функция $f_n(x)$ близка к $f(x)$, то решение $y_n(x)$ интегрального уравнения

$$y_n(x) - \int_a^b K_{(n)}(x,t)y_n(t)\,dt = f_n(x) \tag{9}$$

можно рассматривать как приближение решения $y(x)$ уравнения (1).

Пусть справедлива следующая оценка погрешности:

$$\int_a^b |K(x,t) - K_{(n)}(x,t)|\,dt \leqslant \varepsilon, \qquad |f(x) - f_n(x)| \leqslant \delta,$$

и резольвента $R_n(x,t)$ для уравнения (9) такова, что

$$\int_a^b |R_n(x,t)|\,dt \leqslant M_n$$

при $a \leqslant x \leqslant b$, причем выполнено неравенство

$$q = \varepsilon(1 + M_n) < 1.$$

Тогда уравнение (1) имеет единственное решение $y(x)$ и

$$|y(x) - y_n(x)| \leqslant \varepsilon\frac{N(1+M_n)^2}{1-q} + \delta, \qquad N = \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|. \tag{10}$$

Пример. Найдем приближенное решение уравнения

$$y(x) - \int_0^{1/2} e^{-x^2t^2}y(t)\,dt = 1. \tag{11}$$

Пользуясь разложением в двойной ряд Тейлора, ядро

$$K(x,t) = e^{-x^2t^2}$$

заменяем приближенным вырожденным ядром

$$K_{(2)}(x,t) = 1 - x^2t^2 + \tfrac{1}{2}x^4t^4.$$

Отсюда вместо уравнения (11) получаем

$$y_2(x) = 1 + \int_0^{1/2}\bigl(1 - x^2t^2 + \tfrac{1}{2}x^4t^4\bigr)y_2(t)\,dt. \tag{12}$$

Следовательно,

$$y_2(x) = 1 + A_1 + A_2x^2 + A_3x^4, \tag{13}$$

где

$$A_1 = \int_0^{1/2} y_2(x)\,dx, \quad A_2 = -\int_0^{1/2} x^2y_2(x)\,dx, \quad A_3 = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} x^4y_2(x)\,dx. \tag{14}$$

На основании формул (13) и (14) получим систему трех уравнений с тремя неизвестными, решив которую, с точностью до четырех значащих цифр будем иметь

$$A_1 = 0{,}9930, \quad A_2 = -0{,}0833, \quad A_3 = 0{,}0007.$$

Следовательно,

$$y(x) \approx y_2(x) = 1{,}9930 - 0{,}0833\,x^2 + 0{,}0007\,x^4, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \tfrac{1}{2}. \tag{15}$$

Оценку погрешности приближенного решения (15) можно произвести по формуле (10).

⊙ *Литература*: С. Г. Михлин (1959), Л. В. Канторович, В. И. Крылов (1962), Б. П. Демидович, И. А. Марон, Е. З. Шувалова (1963), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968).

11.14. Метод Бейтмена

11.14-1. Общая схема метода

Может оказаться полезной часто не только замена данного ядра вырожденным, но и приближенное его представление в виде суммы ядра, для которого резольвента известна, и вырожденного ядра. Для ядер последнего вида резольвента может быть дана в конечном виде.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) - \lambda \int_a^b k(x,t) y(t)\,dt = f(x) \tag{1}$$

с ядром $k(x,t)$, резольвента которого $r(x,t;\lambda)$ известна, т. е. решение (1) может быть представлено в форме

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b r(x,t;\lambda) f(t)\,dt. \tag{2}$$

Тогда для интегрального уравнения с ядром

$$K(x,t) = \frac{1}{\Delta(a_{ij})} \begin{vmatrix} k(x,t) & g_1(x) & \cdots & g_n(x) \\ h_1(t) & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_n(t) & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \Delta(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

где $g_i(x)$, $h_i(t)$ и a_{ij} $(i,j = 1,2,\ldots,n)$ — произвольные функции и произвольные числа соответственно, резольвента дается в виде

$$R(x,t;\lambda) = \frac{1}{\Delta(a_{ij}+\lambda b_{ij})} \begin{vmatrix} r(x,t;\lambda) & \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \psi_1(t) & a_{11}+\lambda b_{11} & \cdots & a_{1n}+\lambda b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_n(t) & a_{n1}+\lambda b_{n1} & \cdots & a_{nn}+\lambda b_{nn} \end{vmatrix}, \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered} \varphi_k(x) = g_k(x) + \lambda \int_a^b r(x,t;\lambda) g_k(t)\,dt, \quad \psi_k(x) = h_k(x) + \lambda \int_a^b r(x,t;\lambda) h_k(t)\,dt, \\ b_{ij} = \int_a^b g_j(x) h_i(x)\,dx, \qquad k,i,j = 1,2,\ldots,n. \end{gathered} \tag{5}$$

11.14-2. Некоторые частные случаи

Предположим, что

$$K(x,t) = k(x,t) - \sum_{k=1}^n g_k(x) h_k(t), \tag{6}$$

т. е. в формуле (3) $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $a_{ii} = 1$. Резольвента для этого случая примет вид

$$\begin{gathered} R(x,t;\lambda) = \frac{1}{\Delta_*} \begin{vmatrix} r(x,t;\lambda) & \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \psi_1(t) & 1+\lambda b_{11} & \cdots & \lambda b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_n(t) & \lambda b_{n1} & \cdots & 1+\lambda b_{nn} \end{vmatrix}, \\ \Delta_* = \begin{vmatrix} 1+\lambda b_{11} & \lambda b_{12} & \cdots & \lambda b_{1n} \\ \lambda b_{21} & 1+\lambda b_{22} & \cdots & \lambda b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda b_{n1} & \lambda b_{n2} & \cdots & 1+\lambda b_{nn} \end{vmatrix}. \end{gathered} \tag{7}$$

Пусть, кроме того, $k(x,t) = 0$, т. е. ядро $K(x,t)$ — вырожденное:

$$K(x,t) = -\sum_{k=1}^n g_k(x) h_k(t). \tag{8}$$

В данном случае, очевидно, что $r(x,t;\lambda) = 0$, и ввиду (7)

$$\varphi_k(x) = g_k(x), \quad \psi_k(x) = h_k(x), \quad b_{ij} = \int_a^b g_j(x)h_i(x)\,dx.$$

Поэтому резольвента принимает вид

$$R(x,t;\lambda) = \frac{1}{\Delta_*}\begin{vmatrix} 0 & g_1(x) & \cdots & g_n(x) \\ h_1(t) & 1+\lambda b_{11} & \cdots & \lambda b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_n(t) & \lambda b_{n1} & \cdots & 1+\lambda b_{nn} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Рассмотрим интегральное уравнение с некоторым ядром $Q(x,t)$. Выберем произвольно в промежутке (a,b) точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $t_1, t_2, \ldots, t_n$, и положим в равенстве (3)

$$k(x,t) = 0, \quad g_k(x) = Q(x,t_k), \quad h_k(t) = -Q(x_k,t), \quad a_{ij} = Q(x_i,t_j).$$

Тогда, очевидно, $r(x,t;\lambda) = 0$ и ядро $K(x,t)$ принимает вид

$$K(x,t) = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 0 & Q(x,t_1) & \cdots & Q(x,t_n) \\ Q(x_1,t) & Q(x_1,t_1) & \cdots & Q(x_1,t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q(x_n,t) & Q(x_n,t_1) & \cdots & Q(x_n,t_n) \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} Q(x_1,t_1) & \cdots & Q(x_1,t_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q(x_n,t_1) & \cdots & Q(x_n,t_n) \end{vmatrix}.$$

Выражение для ядра удобно записать в виде

$$K(x,t) = Q(x,t) - \frac{1}{D}\begin{vmatrix} Q(x,t) & Q(x,t_1) & \cdots & Q(x,t_n) \\ Q(x_1,t) & Q(x_1,t_1) & \cdots & Q(x_1,t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q(x_n,t) & Q(x_n,t_1) & \cdots & Q(x_n,t_n) \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Это ядро вырожденное и обладает тем свойством, что совпадает с $Q(x,t)$ на прямых $x = x_i$, $t = t_j$ $(i,j = 1,2,\ldots,n)$. Действительно, если положить $x = x_i$ или $t = t_j$, то определитель, стоящий в числителе второго члена, будет иметь две одинаковых строки или столбца и, следовательно, обратится в нуль, а поэтому

$$K(x_i,t) = Q(x_i,t), \quad K(x,t_j) = Q(x,t_j).$$

Такое совпадение на $2n$ прямых позволяет рассчитывать на то, что $K(x,t)$ близко к $Q(x,t)$, а решение уравнения с ядром $K(x,t)$ — к решению уравнения с ядром $Q(x,t)$. Следует заметить, что если $Q(x,t)$ вырожденное, т. е. имеет вид

$$Q(x,t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)h_k(t), \tag{11}$$

то определитель в числителе тождественно равен нулю, а потому в этом случае

$$K(x,t) \equiv Q(x,t). \tag{12}$$

Для ядра $K(x,t)$ резольвента может быть составлена на основании следующих равенств:

$$\begin{aligned} &r(x,t;\lambda) = 0, \quad \varphi_i(x) = g_i(x) = Q(x,t_i), \quad \psi_j(t) = h_j(t) = -Q(x_j,t), \\ &b_{ij} = -\int_a^b Q(x,t_j)Q(x_i,x)\,dx = -Q_2(x_i,t_j), \qquad i,j = 1,2,\ldots,n, \end{aligned} \tag{13}$$

где $Q_2(x,t)$ — второе итерированное ядро для $Q(x,t)$:

$$Q_2(x,y) = \int_a^b Q(x,s)Q(s,t)\,ds,$$

и, следовательно,

$$R(x,t;\lambda) = \frac{1}{D_\lambda}\begin{vmatrix} 0 & Q(x,t_1) & \cdots & Q(x,t_n) \\ Q(x_1,t) & Q(x_1,t_1) - \lambda Q_2(x_1,t_1) & \cdots & Q(x_1,t_n) - \lambda Q_2(x_1,t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q(x_n,t) & Q(x_n,t_1) - \lambda Q_2(x_n,t_1) & \cdots & Q(x_n,t_n) - \lambda Q_2(x_n,t_n) \end{vmatrix}, \tag{14}$$

где

$$D_\lambda = D - \lambda D_2, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} Q_2(x_1,t_1) & \cdots & Q_2(x_1,t_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_2(x_n,t_1) & \cdots & Q_2(x_n,t_n) \end{vmatrix}.$$

С помощью резольвенты $R(x,t;\lambda)$ можно получить приближенное решение уравнения с ядром $Q(x,t)$. В частности, приближенные значения для собственных значений λ этого ядра найдем, приравнивая нулю определитель D_λ, стоящий в знаменателе (14).

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y(x) - \lambda \int_0^1 Q(x,t)y(t)\,dt = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{15}$$

$$Q(x,t) = \begin{cases} x(t-1) & \text{при } x \leqslant t, \\ t(x-1) & \text{при } x \geqslant t. \end{cases}$$

Найдем его характеристические числа. Для этого воспользуемся формулой (14), где для второго итерированного ядра будем иметь

$$Q_2(x,t) = \int_0^1 Q(x,s)Q(s,t)\,ds = \begin{cases} \frac{1}{6}x(1-t)(2t-x^2-t^2) & \text{при } x \leqslant t, \\ \frac{1}{6}t(1-x)(2x-x^2-t^2) & \text{при } x \geqslant t. \end{cases}$$

Выберем равноотстоящие точки x_i и t_j и возьмем $n=5$, тогда

$$x_1 = t_1 = \tfrac{1}{6}, \quad x_2 = t_2 = \tfrac{2}{6}, \quad x_3 = t_3 = \tfrac{3}{6}, \quad x_4 = t_4 = \tfrac{4}{6}, \quad x_5 = t_5 = \tfrac{5}{6}.$$

Приравняем нулю определитель, стоящий в знаменателе (14). Тогда после некоторых преобразований придем к уравнению

$$130\mu^5 - 441\mu^4 + 488\mu^3 - 206\mu^2 + 30\mu - 1 = 0 \quad (\tilde\lambda = 216\mu),$$

которое можно записать в форме

$$(\mu-1)(2\mu-1)(5\mu-1)(13\mu^2-22\mu+1) = 0. \tag{16}$$

После решения (16) найдем

$$\tilde\lambda_1 = 10{,}02, \quad \tilde\lambda_2 = 43{,}2, \quad \tilde\lambda_3 = 108, \quad \tilde\lambda_4 = 216, \quad \tilde\lambda_5 = 355{,}2.$$

Точные величины характеристических значений рассматриваемого уравнения известны:

$$\lambda_1 = \pi^2 = 9{,}869\ldots, \quad \lambda_2 = (2\pi)^2 = 39{,}478\ldots, \quad \lambda_3 = (3\pi)^2 = 88{,}826\ldots,$$

следовательно, ошибка при определении первого собственного значения 2%, второго — 9%, третьего — 20%.

Результат можно улучшить выбором другой совокупности точек x_i и y_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$. Однако при таком числе ординат очень высокая точность не может быть достигнута, так как само ядро $Q(x,t)$ имеет особенность: производная его разрывна при $x = t$ вследствие чего невозможна хорошая аппроксимация его такими ядрами.

⦿ *Литература*: H. Bateman (1922), Э. Гурса (1934), Л. В. Канторович, В. И. Крылов (1962).

11.15. Метод коллокации

11.15-1. Общие замечания

Запишем интегральное уравнение Фредгольма второго рода в форме

$$\varepsilon[y(x)] \equiv y(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)\,dt - f(x) = 0. \tag{1}$$

Будем искать приближенное решение уравнения (1) в виде функции вида

$$Y_n(x) = \Phi(x, A_1, A_2, \ldots, A_n) \tag{2}$$

со свободными параметрами A_1, A_2, …, A_n. Подставляя выражение (2) в уравнение (1), получим невязку

$$\varepsilon[Y_n(x)] = Y_n(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)Y_n(t)\,dt - f(x). \tag{3}$$

Если $y(x)$ является точным решением, то невязка $\varepsilon[y(x)]$ равна нулю. Поэтому стараются подобрать параметры A_1, A_2, $\ldots$, A_n так, чтобы невязка $\varepsilon[y(x)]$ была бы в определенном смысле возможно малой. Минимизировать невязку $\varepsilon[y(x)]$ можно различными способами. Обычно для простоты выкладок берут функцию $Y_n(x)$, линейно зависящую от параметров A_1, $A_2, \ldots, A_n$. Найдя параметры $A_1, A_2, \ldots, A_n$, получают приближенное решение (2). Если

$$\lim_{n\to\infty} Y_n(x) = y(x), \tag{4}$$

то можно, взяв достаточно большое число параметров A_1, A_2, $\ldots$, A_n, найти решение $y(x)$ с любой наперед заданной степенью точности.

Перейдем теперь к изложению одного из конкретных методов построения приближенного решения $Y_n(x)$.

11.15-2. Приближенное решение

Положим

$$Y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} A_i\varphi_i(x), \tag{5}$$

где $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$ — известные *координатные функции* и A_1, A_2, $\ldots$, A_n — неопределенные коэффициенты, причем функции $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ линейно независимы. Заметим, что в частности, можно положить $\varphi_0(x) = f(x)$ или $\varphi_0(x) \equiv 0$. Подставляя выражение (5) в левую часть уравнения (1), получим невязку

$$\varepsilon[Y_n(x)] = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} A_i\varphi_i(x) - f(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)\Big[\varphi_0(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i\varphi_i(t)\Big]\,dt,$$

или

$$\varepsilon[Y_n(x)] = \psi_0(x,\lambda) + \sum_{i=1}^{n} A_i\psi_i(x,\lambda), \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}\psi_0(x,\lambda) &= \varphi_0(x) - f(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi_0(t)\,dt,\\ \psi_i(x,\lambda) &= \varphi_i(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi_i(t)\,dt, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.\end{aligned} \tag{7}$$

Согласно методу коллокации потребуем, чтобы невязка $\varepsilon[Y_n(x)]$ обращалась в нуль в заданной системе *точек коллокации* x_1, x_2, $\ldots$, x_n из отрезка $[a,b]$, т. е. полагаем, что

$$\varepsilon[Y_n(x_j)] = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где

$$a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n \leqslant b.$$

Обычно полагают $x_1 = a$ и $x_n = b$.

Отсюда, на основании формулы (6) для определения коэффициентов A_1, A_2, $\ldots$, A_n получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} A_i\psi_i(x_j,\lambda) = -\psi_0(x_j,\lambda), \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Если определитель системы (8):

$$\det[\psi_i(x_j,\lambda)] = \begin{vmatrix} \psi_1(x_1,\lambda) & \psi_1(x_2,\lambda) & \cdots & \psi_1(x_n,\lambda)\\ \psi_2(x_1,\lambda) & \psi_2(x_2,\lambda) & \cdots & \psi_2(x_n,\lambda)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \psi_n(x_1,\lambda) & \psi_n(x_2,\lambda) & \cdots & \psi_n(x_n,\lambda)\end{vmatrix} \neq 0,$$

то из системы (8) можно однозначно определить A_1, A_2, $\ldots$, A_n и, следовательно, найти приближенное решение $Y_n(x)$ по формуле (5).

11.15-3. Собственные функции уравнения

Приравнивая нулю определитель системы (8), получим уравнение

$$\det[\psi_i(x_j,\lambda)] = 0,$$

которое, вообще говоря, позволяет найти приближенные значения характеристических чисел $\tilde{\lambda}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ядра $K(x,t)$.

Если положить

$$f(x) \equiv 0, \quad \varphi_0(x) \equiv 0, \quad \lambda = \tilde{\lambda}_k,$$

то вместо системы (8) будем иметь однородную систему

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{A}_i^{(k)} \psi_i(x_j, \tilde{\lambda}_k) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Определив ненулевые решения $\tilde{A}_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ системы (9), получим для ядра $K(x,t)$ приближенные собственные функции

$$\tilde{Y}_n^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{A}_i^{(k)} \varphi_i(x),$$

отвечающие его характеристическому числу $\lambda_k \approx \tilde{\lambda}_k$.

Пример. Методом коллокации решить уравнение

$$y(x) - \int_0^1 \frac{t^2 y(t)}{x^2 + t^2}\,dt = x \operatorname{arctg}\frac{1}{x}. \tag{10}$$

Положим

$$Y_2(x) = A_1 + A_2 x.$$

Подставляя это выражение в уравнение (10), получим невязку

$$\varepsilon[Y_2(x)] = -A_1 x \operatorname{arctg}\frac{1}{x} + A_2\Big[x - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}\ln\Big(1 + \frac{1}{x^2}\Big)\Big] - x \operatorname{arctg}\frac{1}{x}.$$

Выбирая точки коллокации $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и учитывая, что

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0} x^2 \ln\Big(1 + \frac{1}{x^2}\Big) = 0,$$

для определения коэффициентов A_1 и A_2 будем иметь систему:

$$\begin{aligned} 0 \times A_1 - \tfrac{1}{2}A_2 &= 0,\\ -\tfrac{\pi}{4}A_1 + \tfrac{1}{2}(1 + \ln 2)A_2 &= \tfrac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем $A_2 = 0$ и $A_1 = -1$. Таким образом,

$$Y_2(x) = -1. \tag{11}$$

Найденное решение (11), как легко проверить, является точным.

⊙ *Литература*: Л. Коллатц (1958), Б. П. Демидович, И. А. Марон, Е. З. Шувалова (1963), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986).

11.16. Метод наименьших квадратов

11.16-1. Описание метода

Для уравнения

$$\varepsilon[y(x)] \equiv y(x) - \lambda \int_a^b K(x,t) y(t)\,dt - f(x) = 0, \tag{1}$$

аналогично методу коллокации, полагаем

$$Y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} A_i \varphi_i(x), \tag{2}$$

где $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$ — известные функции и A_1, A_2, $\ldots$, A_n — неопределенные коэффициенты, причем $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ линейно независимы.

Подставляя (2) в левую часть уравнения (1), получим невязку

$$R[Y_n(x)] = \psi_0(x,\lambda) + \sum_{i=1}^{n} A_i\psi_i(x,\lambda), \tag{3}$$

где $\psi_0(x,\lambda)$ и $\psi_i(x,\lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ определяются формулами (7) из п. 11.15-2.

Согласно методу наименьших квадратов, коэффициенты A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ отыскиваются из условия минимума интеграла

$$I = \int_a^b \{\varepsilon[Y_n(x)]\}^2\,dx = \int_a^b \Big[\psi_0(x,\lambda) + \sum_{i=1}^{n} A_i\psi_i(x,\lambda)\Big]^2\,dx. \tag{4}$$

Это требование приводит к системе алгебраических уравнений

$$\frac{\partial I}{\partial A_j} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

откуда на основании (4), дифференцируя по параметрам A_1, $\ldots$, A_n под знаком интеграла, будем иметь

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial I}{\partial A_j} = \int_a^b \psi_j(x,\lambda)\Big[\psi_0(x,\lambda) + \sum_{i=1}^{n} A_i\psi_i(x,\lambda)\Big]\,dx = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

С помощью обозначений типа

$$c_{ij}(\lambda) = \int_a^b \psi_i(x,\lambda)\psi_j(x,\lambda)\,dx \tag{7}$$

систему (6) можно записать в виде

$$\begin{array}{c} c_{11}(\lambda)A_1 + c_{12}(\lambda)A_2 + \cdots + c_{1n}(\lambda)A_n = -c_{10}(\lambda), \\ c_{21}(\lambda)A_1 + c_{22}(\lambda)A_2 + \cdots + c_{2n}(\lambda)A_n = -c_{20}(\lambda), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}(\lambda)A_1 + c_{n2}(\lambda)A_2 + \cdots + c_{nn}(\lambda)A_n = -c_{n0}(\lambda). \end{array} \tag{8}$$

Заметим, что если $\varphi_0(x) \equiv 0$, то $\psi_0(x) = -f(x)$. Кроме того, так как $c_{ij}(\lambda) = c_{ji}(\lambda)$, то матрица системы (8) симметричная.

11.16-2. Построение собственных функций

Метод наименьших квадратов применяется и для определения характеристических чисел и собственных функций ядра $K(x,t)$. Действительно, полагая $f(x) \equiv 0$ и $\varphi_0(x) \equiv 0$, откуда $\psi_0(x) \equiv 0$, определим приближенные значения характеристических чисел из алгебраического уравнения

$$\det[c_{ij}(\lambda)] = 0. \tag{9}$$

После этого приближенные собственные функции находятся из однородной системы (8), где вместо λ подставлено соответствующее приближенное значение.

Пример. Методом наименьших квадратов найти приближенное решение уравнения

$$y(x) = x^2 + \int_{-1}^{1} \operatorname{sh}(x+t)y(t)\,dt \tag{10}$$

Для приближенного решения полагаем $Y_2(x) = x^2 + A_2x + A_1$. Отсюда

$$\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = x, \quad \varphi_0(x) = x^2.$$

Учитывая, что

$$\int_{-1}^{1} \operatorname{sh}(x+t)\,dt = a\operatorname{sh}x, \quad \int_{-1}^{1} t\operatorname{sh}(x+t)\,dt = b\operatorname{sh}x, \quad \int_{-1}^{1} t^2\operatorname{sh}(x+t)\,dt = c\operatorname{sh}x,$$
$$a = 2\operatorname{sh}1 = 2{,}3504, \quad b = 2e^{-1} = 0{,}7358, \quad c = 6\operatorname{sh}1 - 4\operatorname{ch}1 = 0{,}8788,$$

на основании формул (7) из п. 11.15-2 имеем

$$\psi_1 = 1 - a\,\mathrm{sh}\,x, \quad \psi_2 = x - b\,\mathrm{ch}\,x, \quad \psi_0 = -c\,\mathrm{sh}\,x.$$

Далее находим (с точностью до четырех значащих цифр после запятой)

$$c_{11} = 2 + a^2\bigl(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,2 - 1\bigr) = 6{,}4935, \quad c_{22} = \tfrac{2}{3} + b^2\bigl(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,2 + 1\bigr) = 2{,}1896,$$
$$c_{12} = -4(ae^{-1} + b\,\mathrm{sh}\,1) = -8e^{-1}\,\mathrm{sh}\,1 = -3{,}4586,$$
$$c_{10} = ac\bigl(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,2 - 1\bigr) = 1{,}6800, \quad c_{20} = -2ce^{-1} = -0{,}6466,$$

и получаем систему для определения коэффициентов A_1 и A_2

$$6{,}4935A_1 - 3{,}4586A_2 = -1{,}6800,$$
$$-3{,}4586A_1 + 2{,}1896A_2 = 0{,}6466.$$

Отсюда имеем $A_1 = -0{,}5423$, $A_2 = -0{,}5613$. Таким образом,

$$Y_2(x) = x^2 - 0{,}5613x - 0{,}5423. \tag{11}$$

Так как в уравнении (10) ядро

$$K(x,t) = \mathrm{sh}(x+t) = \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,t + \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,t$$

вырожденное, то можно получить точное решение:

$$y(x) = x^2 + \alpha\,\mathrm{sh}\,x + \beta\,\mathrm{ch}\,x, \tag{12}$$
$$\alpha = \frac{6\,\mathrm{sh}\,1 - 4\,\mathrm{ch}\,1}{2 - \bigl(\frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,2\bigr)^2} = -0{,}6821, \quad \beta = \alpha\bigl(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,2 - 1\bigr) = -0{,}5548.$$

Из сравнения формул (11) и (12) заключаем, что приближенное решение $Y_2(x)$ близко к точному $y(x)$, если $|x|$ — малая величина. На концах $x = \pm 1$ расхождение $|y(x) - Y_2(x)|$ довольно значительно.

⊙ *Литература*: Л. В. Канторович, В. И. Крылов (1962), Б. П. Демидович, И. А. Марон, Е. З. Шувалова (1963), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968).

11.17. Метод Бубнова–Галеркина

11.17-1. Описание метода

Пусть

$$\varepsilon[y(x)] \equiv y(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)\,dt - f(x) = 0. \tag{1}$$

Аналогично предыдущему, будем искать приближенное решение уравнения (1) в виде конечной суммы

$$Y_n(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} A_i\varphi_i(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

где $\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ — некоторые известные линейно независимые функции (координатные функции) и A_1, A_2, …, A_n — неопределенные коэффициенты. Подставляя выражение (2) в левую часть уравнения (1), получим невязку

$$\varepsilon[Y_n(x)] = \sum_{j=1}^{n} A_j\Bigl[\varphi_j(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi_j(t)\,dt\Bigr] - \lambda\int_a^b K(x,t)f(t)\,dt. \tag{3}$$

Согласно методу Бубнова–Галеркина, искомые коэффициенты A_i определяются из условия ортогональности невязки ко всем координатным функциям $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$. Это дает систему уравнений

$$\int_a^b \varepsilon[Y_n(x)]\varphi_i(x)\,dx = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

или в силу (3)

$$\sum_{j=1}^{n} (\alpha_{ij} - \lambda\beta_{ij})A_j = \lambda\gamma_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

где

$$\alpha_{ij} = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx, \quad \beta_{ij} = \int_a^b\!\!\int_a^b K(x,t)\varphi_i(x)\varphi_j(t)\,dt\,dx,$$
$$\gamma_i = \int_a^b\!\!\int_a^b K(x,t)\varphi_i(x)f(t)\,dt\,dx.$$

Если определитель системы (4)

$$D(\lambda) = \det[\alpha_{ij} - \lambda\beta_{ij}]$$

отличен от нуля, то из этой системы можно однозначно определить коэффициенты A_1, A_2, …, A_n. Тогда формула (2) дает приближенное решение интегрального уравнения (1).

11.17-2. Характеристические числа уравнения

Из уравнения $D(\lambda) = 0$ находятся приближенные характеристические числа $\tilde{\lambda}_1$, $\tilde{\lambda}_2$, …, $\tilde{\lambda}_n$ уравнения. Найдя ненулевые решения однородной линейной системы

$$\sum_{j=1}^{n}(\alpha_{ij} - \tilde{\lambda}_k\beta_{ij})\tilde{A}_j^{(k)} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

можно построить приближенные собственные функции $\tilde{Y}_n^{(k)}(x)$, соответствующие характеристическим числам $\tilde{\lambda}_k$:

$$\tilde{Y}_n^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{A}_i^{(k)}\varphi(x).$$

Можно показать, что метод Бубнова–Галеркина равносилен замене исходного ядра $K(x,t)$ некоторым вырожденным ядром $K_{(n)}(x,t)$. Поэтому для приближенного решения $Y_n(x)$ имеется оценка погрешности, аналогичная приведенной в п. 11.13-2.

Пример. Найдем первые два характеристических числа интегрального уравнения

$$\varepsilon[y(x)] \equiv y(x) - \lambda\int_0^1 K(x,t)y(t)\,dt = 0,$$

где

$$K(x,t) = \begin{cases} t & \text{при } t \leqslant x, \\ x & \text{при } t > x. \end{cases} \tag{5}$$

На основании (5) имеем

$$\varepsilon[y(x)] = y(x) - \lambda\Bigl\{\int_0^x ty(t)\,dt + \int_x^1 xy(t)\,dt\Bigr\}.$$

Положим $Y_2(x) = A_1x + A_2x^2$. Тогда

$$\begin{aligned}\varepsilon[Y_2(x)] &= A_1x + A_2x^2 - \lambda\bigl[\tfrac{1}{3}A_1x^3 + \tfrac{1}{4}A_2x^4 + x\bigl(\tfrac{1}{2}A_1 + \tfrac{1}{3}A_2\bigr) - \bigl(\tfrac{1}{2}A_1x^3 + \tfrac{1}{3}A_2x^4\bigr)\bigr] = \\ &= A_1\bigl[\bigl(1 - \tfrac{1}{2}\lambda\bigr)x + \tfrac{1}{6}\lambda x^3\bigr] + A_2\bigl(-\tfrac{1}{3}\lambda x + x^2 + \tfrac{1}{12}\lambda x^4\bigr).\end{aligned}$$

Ортогонализуя невязку $\varepsilon[Y_2(x)]$, будем иметь систему

$$\int_0^1 \varepsilon[Y_2(x)]x\,dx = 0,$$
$$\int_0^1 \varepsilon[Y_2(x)]x^2\,dx = 0,$$

или однородную систему двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} A_1(120 - 48\lambda) + A_2(90 - 35\lambda) &= 0 \\ A_1(630 - 245\lambda) + A_2(504 - 180\lambda) &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Приравнивая нулю определитель системы (6), получим уравнение для определения характеристических чисел:

$$D(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} 120 - 48\lambda & 90 - 35\lambda \\ 630 - 245\lambda & 504 - 180\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда

$$\lambda^2 - 26{,}03\lambda + 58{,}15 = 0. \tag{7}$$

Из уравнения (7) будем иметь

$$\tilde{\lambda}_1 = 2{,}462\ldots \quad \text{и} \quad \tilde{\lambda}_2 = 23{,}568\ldots$$

Для сравнения укажем точные характеристические числа

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{4}\pi^2 = 2{,}467\ldots \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \tfrac{9}{4}\pi^2 = 22{,}206\ldots,$$

полученные из решения краевой задачи, эквивалентной исходному уравнению:

$$y''_{xx}(x) + \lambda y(x) = 0; \qquad y(0) = 0, \quad y'_x(1) = 0.$$

Таким образом, погрешность $\tilde{\lambda}_1$ равна примерно 0,2%, а $\tilde{\lambda}_2$ — 6%.

⊙ *Литература*: Л. В. Канторович, В. И. Крылов (1962), Б. П. Демидович, И. А. Марон, Е. З. Шувалова (1963), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986).

11.18. Метод квадратур

11.18-1. Общая схема для уравнений Фредгольма второго рода

Сведение задачи решения интегральных уравнений к решению систем алгебраических уравнений, получаемых заменой интегралов конечными суммами, является одним из самых эффективных методов. Метод квадратур относится к аппроксимационным методам. Он широко распространен в практике, поскольку достаточно универсален в отношении принципа построения алгоритмов решения как линейных, так и нелинейных уравнений.

Так же как это было в случае уравнений Вольтерра, в основе метода лежит некоторая квадратурная формула (см. п. 8.7-1):

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{j=1}^n A_j \varphi(x_j) + \varepsilon_n[\varphi], \tag{1}$$

где x_j — узлы квадратурной формулы, A_j — известные коэффициенты, не зависящие от функции $\varphi(x)$, $\varepsilon_n[\varphi]$ — ошибка замены интеграла суммой (остаточный член квадратурной формулы).

Если в линейном неоднородном интегральном уравнении Фредгольма второго рода

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,t) y(t)\,dt = f(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b, \tag{2}$$

принять $x = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то получим исходное для данного метода соотношение

$$y(x_i) - \lambda \int_a^b K(x_i,t) y(t)\,dt = f(x_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

из которого после замены интеграла конечной суммой получается система уравнений:

$$y(x_i) - \lambda \sum_{j=1}^n A_j K(x_i, x_j) y(x_j) = f(x_i) + \lambda \varepsilon_n[y]. \tag{4}$$

После отбрасывания в ней малой величины $\lambda\varepsilon_n[y]$ для отыскания приближенных значений y_i решения $y(x)$ в узлах $x_1, x_2, \ldots, x_n$ получается система линейных алгебраических уравнений

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^n A_j K_{ij} y_j = f_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

где $K_{ij} = K(x_i, x_j)$, $f_i = f(x_i)$.

Решение системы (5) дает значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$, по которым путем интерполяции находится приближенное решение интегрального уравнения (2) на всем отрезке $[a, b]$. При этом в качестве приближенного решения можно принять функцию, полученную линейной интерполяцией, т. е. совпадающую с y_i в точках x_i и линейную в каждом из промежутков $[x_i, x_{i+1}]$. Кроме того, в качестве аналитического выражения приближенного решения уравнения принимается функция

$$\tilde{y}(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^n A_j K(x, x_j) y_j, \tag{6}$$

также имеющая в узлах $x_1, x_2, \ldots, x_n$ значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

11.18-2. Построение собственных функций

Метод квадратур применяется также для решения однородных уравнений Фредгольма второго рода. В этом случае система (5) становится однородной ($f_i \equiv 0$) и имеет нетривиальное решение лишь в том случае, когда ее определитель $D(\lambda)$ равен нулю. Алгебраическое уравнение $D(\lambda) = 0$ степени n относительно λ позволяет найти корни $\tilde\lambda_1$, $\tilde\lambda_2$, …, $\tilde\lambda_n$, представляющие собой приближенные значения n характеристических чисел уравнения. Подстановка любого из значений $\tilde\lambda_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ в (5) при $f_i \equiv 0$ приводит к системе уравнений

$$y_i^{(k)} - \tilde\lambda_k \sum_{j=1}^n A_j K_{ij} y_j^{(k)} = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

ненулевые решения которой $y_i^{(k)}$ позволяют получить приближенные выражения для собственных функций интегрального уравнения:

$$\tilde y_k(x) = \tilde\lambda_k \sum_{j=1}^n A_j K(x, x_j) y_j^{(k)}.$$

Если λ не равно ни одному из корней $\tilde\lambda_k$, то неоднородная система линейных алгебраических уравнений (5) имеет единственное решение. Однородная система уравнений (5) в этом же случае имеет только тривиальное решение.

11.18-3. Особенности применения квадратурных формул

Точность получаемых решений существенно зависит от гладкости ядра и свободного члена. При выборе квадратурной формулы необходимо учитывать, что чем более точную формулу предполагается применить, тем большие требования должны быть предъявлены к гладкости ядра, решения и правой части.

Если правая часть или ядро имеют особенности, то целесообразно предварительно преобразовать исходное уравнение с целью получения более точного приближенного решения. При этом применяются следующие приемы.

Если особенности имеет правая часть $f(x)$, а ядро гладкое, то можно вместо $y(x)$ ввести неизвестную функцию $z(x) = y(x) - f(x)$, использование которой в исходном уравнении позволяет получить уравнение

$$z(x) - \lambda \int_a^b K(x,t) z(t)\,dt = \lambda \int_a^b K(x,t) f(t)\,dt,$$

в котором правая часть сглажена, а следовательно, и решение $z(x)$ будет более гладким. По найденной функции $z(x)$ легко найти искомое решение $y(x)$.

В тех случаях, когда ядро $K(x,t)$ или его производные по t имеют разрывы на диагонали $x = t$, решаемое уравнение целесообразно записать в эквивалентном виде:

$$y(x)\Big[1 - \lambda \int_a^b K(x,t)\,dt\Big] - \lambda \int_a^b K(x,t)[y(t) - y(x)]\,dt = f(x),$$

где подынтегральная функция во втором интеграле не имеет особенностей, поскольку на диагонали $x = t$ разность $y(t) - y(x)$ обращается в нуль, а вычисление интеграла $\displaystyle\int_a^b K(x,t)\,dt$ выполняется без искомых функций и часто возможно в явном виде.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y(x) - \tfrac{1}{2} \int_0^1 xty(t)\,dt = \tfrac{5}{6}x.$$

Выберем узлы $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 1$ и вычислим в них значения правой части $f(x) = \frac{5}{6}x$ и ядра $K(x,t) = xt$:

$$f(0) = 0, \quad f\big(\tfrac{1}{2}\big) = \tfrac{5}{12}, \quad f(1) = \tfrac{5}{6},$$
$$K(0,0) = 0, \quad K\big(0, \tfrac{1}{2}\big) = 0, \quad K(0,1) = 0, \quad K\big(\tfrac{1}{2}, 0\big) = 0, \quad K\big(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\big) = \tfrac{1}{4},$$
$$K\big(\tfrac{1}{2}, 1\big) = \tfrac{1}{2}, \quad K(1,0) = 0, \quad K\big(1, \tfrac{1}{2}\big) = \tfrac{1}{2}, \quad K(1,1) = 1.$$

Используя квадратурную формулу Симпсона (см. п. 8.7-1)

$$\int_0^1 F(x)\,dx \approx \tfrac{1}{6}\big[F(0) + 4F\big(\tfrac{1}{2}\big) + F(1)\big]$$

для определения приближенных значений y_i $(i = 1, 2, 3)$ решения $y(x)$ в узлах x_i, получим систему

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, \\ \tfrac{11}{12} y_2 - \tfrac{1}{24} y_3 &= \tfrac{5}{12}, \\ -\tfrac{2}{12} y_2 + \tfrac{11}{12} y_3 &= \tfrac{5}{6}, \end{aligned}$$

решением которой являются $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{1}{2}$, $y_3 = 1$. Приближенное решение в соответствии с выражением (6) можно представить в виде

$$\tilde{y}(x) = \tfrac{5}{6}x + \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{6}\big(0 + 4 \times \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2}x + 1 \times 1 \times x\big) = x.$$

Легко видеть, что оно совпадает с точным решением.

⦿ *Литература*: Н. С. Бахвалов (1973), В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный (1984), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986).

11.19. Системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода

11.19-1. Некоторые замечания

Система интегральных уравнений Фредгольма второго рода имеет вид

$$y_i(x) - \lambda \sum_{j=1}^{n} \int_a^b K_{ij}(x,t) y_j(t)\,dt = f_i(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Предположим, что ядра $K_{ij}(x,t)$ непрерывны или квадратично интегрируемы в квадрате $S = \{a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant t \leqslant b\}$, а свободные члены $f_i(x)$ непрерывны или квадратично интегрируемы на $[a, b]$. От искомых функций $y_i(x)$ также потребуем, чтобы они были на $[a, b]$ непрерывны либо квадратично интегрируемы. На такие системы полностью распространяется теория, развитая для уравнений Фредгольма второго рода. Так, можно показать, что для системы уравнений (1) последовательные приближения сходятся в среднем к решению этой системы, если λ удовлетворяет неравенству

$$|\lambda| < \frac{1}{B_*}, \tag{2}$$

где

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int_a^b\!\!\int_a^b |K_{ij}(x,t)|^2\,dx\,dt = B_*^2 < \infty. \tag{3}$$

Если ядра $K_{ij}(x,t)$ удовлетворяют еще и условию

$$\int_a^b K_{ij}^2(x,t)\,dt \leqslant A_{ij}, \qquad a \leqslant x \leqslant b, \tag{4}$$

где A_{ij} — некоторые постоянные, то последовательные приближения сходятся абсолютно и равномерно.

Если все ядра $K_{ij}(x,t)$ вырожденные, то система (1) сводится к линейной алгебраической системе. Можно установить, что для системы интегральных уравнений Фредгольма справедливы все теоремы Фредгольма.

11.19-2. Метод преобразования системы уравнений в одно уравнение

Систему уравнений (1) можно преобразовать в одно интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Действительно, определим функции $Y(x)$ и $F(x)$ на $[a,\ nb - (n-1)a]$, положив

$$Y(x) = y_i\big(x - (i-1)(b-a)\big), \quad F(x) = f_i\big(x - (i-1)(b-a)\big)$$

при

$$(i-1)b - (i-2)a \leqslant x \leqslant ib - (i-1)a.$$

Ядро интегрального уравнения $K(x,t)$ зададим в квадрате

$$S_n = \{a \leqslant x \leqslant nb - (n-1)a,\ a \leqslant t \leqslant nb - (n-1)a\},$$

положив
$$K(x,t) = K_{ij}\big(x - (i-1)(b-a),\, t - (j-1)(b-a)\big)$$
при
$$(i-1)b - (i-2)a \leqslant x \leqslant ib - (i-1)a, \quad (j-1)b - (j-2)a \leqslant t \leqslant jb - (j-1)a.$$

Теперь система (1) записывается в виде одного уравнения Фредгольма
$$Y(x) - \lambda \int_a^{nb-(n-1)a} K(x,t)Y(t)\,dt = F(x), \qquad a \leqslant x \leqslant nb - (n-1)a.$$

Если ядра $K_{ij}(x,t)$ квадратично интегрируемы в квадрате $S = \{a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant t \leqslant b\}$, а свободные члены $f_i(x)$ — на $[a,b]$, то ядро $K(x,t)$ квадратично интегрируемо в новом квадрате S_n, а свободный член $F(x)$ квадратично интегрируем на $[a,\, nb-(n-1)a]$.

Если выполнено условие (4), то ядро $K(x,t)$ удовлетворяет следующему неравенству:
$$\int_a^b K^2(x,t)\,dt \leqslant A_*, \qquad a < x < nb - (n-1)a,$$
где A_* — некоторая постоянная.

⊙ *Литература*: С. Г. Михлин (1959).

11.20. Метод регуляризации для некоторых уравнений второго рода

11.20-1. Основное уравнение и теоремы Нетера

Рассмотрим интегральное уравнение второго рода в форме
$$y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty K_1(x-t)y(t)\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 K_2(x-t)y(t)\,dt + {} \\ + \int_{-\infty}^\infty M(x,t)y(t)\,dt = f(x), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{1}$$

Будем считать, что функции $y(x)$, $f(x)$ и ядра $K_1(x)$, $K_2(x)$, $M(x,t)$ таковы, что их изображения, полученные при помощи интегрального преобразования Фурье, принадлежат $L_2(-\infty,\infty)$ и удовлетворяют условию Гёльдера, причем для ядра $M(x,t)$ — по каждой переменной. Кроме того,
$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty |M(x,t)|^2\,dx\,dt < \infty.$$

Можно заметить, что уравнение (1) при $M(x,t) \equiv 0$ переходит в изученное ранее в п. 11.9-2 интегральное уравнение типа свертки с двумя ядрами.

Союзное с (1) однородное уравнение имеет вид
$$\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty K_1(t-x)\varphi(t)\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 K_2(t-x)\varphi(t)\,dt + {} \\ + \int_{-\infty}^\infty M(t,x)y(t)\,dt = 0, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{2}$$

Будем считать, что выполнены условия нормальности (см. п.11.9-2), т. е.
$$1 + \mathcal{K}_1(u) \neq 0, \quad 1 + \mathcal{K}_2(u) \neq 0, \qquad -\infty < u < \infty. \tag{3}$$

Теорема 1. *Числа линейно независимых решений однородного уравнения (1) ($f(x) \equiv 0$) и союзного с ним однородного уравнения (2) конечны.*

Теорема 2. *Для разрешимости неоднородного уравнения (1) необходимы и достаточны условия*
$$\int_{-\infty}^\infty f(t)\varphi_k(t)\,dt = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{4}$$
где $\varphi_k(x)$ — конечное число всех линейно независимых решений союзного однородного уравнения (2).

Теорема 3. *Разность числа линейно независимых решений однородного уравнения (1) и числа линейно независимых решений однородного союзного уравнения (2) равна индексу*
$$\nu = \operatorname{Ind} \frac{1 + \mathcal{K}_2(u)}{1 + \mathcal{K}_1(u)} = \frac{1}{2\pi} \Big[\arg \frac{1 + \mathcal{K}_2(u)}{1 + \mathcal{K}_1(u)}\Big]_{-\infty}^{\infty}. \tag{5}$$

11.20-2. Регуляризующие операторы

Одним из методов как теоретического исследования, так и практического решения рассматриваемых уравнений является их регуляризация, т. е. приведение к уравнению Фредгольма второго рода.

Обозначим через $\mathbf{K}$ оператор, определенный левой частью уравнения (1):

$$\mathbf{K}[y(x)] \equiv y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty K_1(x-t)y(t)\,dt + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 K_2(x-t)f(t)\,dt + \int_{-\infty}^\infty M(x,t)y(t)\,dt, \tag{6}$$

и введем еще один аналогичный оператор

$$\mathbf{L}[\omega(x)] \equiv \omega(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty L_1(x-t)\omega(t)\,dt + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 L_2(x-t)\omega(t)\,dt + \int_{-\infty}^\infty Q(x,t)\omega(t)\,dt. \tag{7}$$

Найдем оператор $\mathbf{L}$ такой, чтобы произведение $\mathbf{LK}$ определялось левой частью уравнения Фредгольма второго рода с ядром $K(x,t)$:

$$\mathbf{LK}[y(x)] \equiv y(x) + \int_{-\infty}^\infty K(x,t)y(t)\,dt, \quad \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty |K(x,t)|^2\,dx\,dt < \infty. \tag{8}$$

Оператор $\mathbf{L}$ называется *регуляризующим слева* или *левым регуляризатором.*

Для того чтобы оператор $\mathbf{K}$ интегрального уравнения (1) имел регуляризующий слева оператор $\mathbf{L}$ вида (7), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия нормальности (3).

Если условия (3) выполнены, то регуляризующий слева оператор $\mathbf{L}$ имеет вид

$$\mathbf{L}[\omega(x)] \equiv \omega(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty R_1(x-t)\omega(t)\,dt - \\ - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 R_2(x-t)\omega(t)\,dt + \int_{-\infty}^\infty Q(x,t)\omega(t)\,dt, \tag{9}$$

где резольвенты $R_1(x-t)$ и $R_2(x-t)$ ядер $K_1(x-t)$ и $K_2(x-t)$ задаются выражениями (см. п. 11.8-1)

$$R_j(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathcal{K}_j(u)}{1+\mathcal{K}_j(u)} e^{-iux}\,du, \quad \mathcal{K}_j(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty K_j(x)e^{iux}\,dx, \tag{10}$$

где $j = 1, 2$, а функция $Q(x,t)$ может быть любой, удовлетворяющей условию

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty |Q(x,t)|^2\,dx\,dt < \infty.$$

При условии (3) оператор $\mathbf{L}$, определенный формулой (9), для оператора $\mathbf{K}$ является одновременно и регуляризующим справа:

$$\mathbf{KL}[y(x)] \equiv y(x) + \int_{-\infty}^\infty K_*(x,t)y(t)\,dt, \tag{11}$$

где функция $K_*(x,t)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty |K_*(x,t)|^2\,dx\,dt < \infty.$$

11.20-3. Метод регуляризации

Пусть дано уравнение в виде

$$\mathbf{K}[y(x)] = f(x), \qquad -\infty < x < \infty, \tag{12}$$

где оператор $\mathbf{K}$ определен выражением (6).

Существует несколько способов его регуляризации, т. е. приведения к уравнению Фредгольма. Во-первых, можно привести это уравнение к уравнению с ядром Коши. Регуляризовав последнее одним из способов, изложенных в разд. 13.4, можно считать цель достигнутой. Этот путь приемлем, если удается найти по заданным функциям $K_1(x)$, $K_2(x)$, $M(x,t)$ и $f(x)$ простые выражения для их интегралов Фурье. В противном случае естественно проводить регуляризацию уравнения (12) непосредственно, без перехода к изображениям.

Регуляризация слева уравнения (12) заключается в применении к обеим его частям построенного в предыдущем пункте регуляризующего оператора $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{LK}[y(x)] = \mathbf{L}[f(x)]. \tag{13}$$

В силу (8) уравнение (13) есть уравнение Фредгольма

$$y(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)y(t)\,dt = \mathbf{L}[f(x)]. \tag{14}$$

Итак, уравнение (12) регуляризацией слева преобразуется в уравнение Фредгольма с той же неизвестной функцией $y(x)$ и известной правой частью $\mathbf{L}[f(x)]$. Известно, что регуляризация слева не приводит к потере решений: среди решений регуляризованного уравнения содержатся все решения исходного уравнения (12). Однако в общем случае не всякое решение регуляризованного уравнения будет решением исходного.

Регуляризация справа заключается в подстановке в уравнение (12) вместо искомой функции выражения

$$y(x) = \mathbf{L}[\omega(x)], \tag{15}$$

где $\omega(x)$ — новая неизвестная функция. В результате приходим к интегральному уравнению,

$$\mathbf{KL}[\omega(x)] = f(x), \tag{16}$$

которое в силу (10) также является фредгольмовым:

$$\mathbf{KL}[\omega(x)] \equiv \omega(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K_*(x,t)\omega(t)\,dt = f(x), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{17}$$

Таким образом, от уравнения (12) относительно неизвестной функции $y(x)$ удалось перейти к интегральному уравнению Фредгольма относительно новой неизвестной функции $\omega(x)$. Решив уравнение Фредгольма (17), по формуле (15) найдем решение исходного уравнения (12). Регуляризация справа не может привести к посторонним решениям, но известно, что она может привести к потере решений.

Представляет значительный теоретический и практический интерес решение вопроса о *равносильной регуляризации*, когда не происходит ни потери решений, ни появления посторонних «решений».

Для того чтобы уравнение (12) допускало равносильную регуляризацию слева при любой правой части $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы индекс ν, определенный формулой (5), был неотрицательным числом. В качестве равносильно регуляризующего оператора можно взять оператор $\mathbf{L}^\circ$, определенный выражением

$$\mathbf{L}^\circ[\omega(x)] \equiv \omega(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} R_1(x-t)\omega(t)\,dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} R_2(x-t)\omega(t)\,dt.$$

Итак, уравнение Фредгольма

$$\mathbf{L}^\circ\mathbf{K}[y(x)] = \mathbf{L}^\circ[f(x)], \tag{18}$$

в случае $\nu \geqslant 0$ имеет те и только те решения, какие имеет уравнение (12). В случае, когда индекс ν число неположительное, оператор $\mathbf{L}^\circ$ осуществляет равносильную регуляризацию справа уравнения (12) при любой правой части $f(x)$. Действительно, при $\nu \leqslant 0$, найдя решение уравнения Фредгольма

$$\mathbf{KL}^\circ[\omega(x)] = f(x),$$

по формуле $y(x) = \mathbf{L}^\circ[\omega(x)]$ можно получить все решения исходного уравнения (12).

Известен еще один способ регуляризации Карлемана–Векуа, основывающийся на решении соответствующего характеристического уравнения. Уравнение (12) формально записывается в виде уравнения с двумя ядрами

$$\begin{gathered} y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} K_1(x-t)y(t)\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} K_2(x-t)y(t)\,dt = f_1(x), \\ f_1(x) = f(x) - \int_{-\infty}^{\infty} M(x,t)y(t)\,dt. \end{gathered} \tag{19}$$

Затем, функция $f_1(x)$ временно считается известной, и решается уравнение (19) (см. п. 11.9-2). Анализ формулы, полученной в результате для функции $y(x)$, показывает, что эта формула при $\nu = 0$ является интегральным уравнением Фредгольма с неизвестной $y(x)$. В случае $\nu > 0$ полученное уравнение будет содержать ν произвольных постоянных. При отрицательном индексе ν к уравнению добавляются условия разрешимости.

⊙ *Литература*: Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978).