Из книги А. Д. Полянина «Справочник по линейным уравнениям математической физики». — М.: Физматлит, 2001.

4.5.1. Уравнение вида $s(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl[p(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr] - q(x)w + \Phi(x,t)$

Считаем, что функции s, p, p'_x, q — непрерывны и выполняются неравенства $s > 0$, $p > 0$ при $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$.

4.5.1-1. Общие формулы для решения линейных неоднородных краевых задач.

Решение данного уравнения с общими начальными условиями

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) \quad \text{при} \quad t = 0,\\ \partial_t w &= f_1(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

и произвольными линейными неоднородными граничными условиями

$$\begin{aligned} a_1 \partial_x w + b_1 w &= g_1(t) \quad \text{при} \quad x = x_1,\\ a_2 \partial_x w + b_2 w &= g_2(t) \quad \text{при} \quad x = x_2 \end{aligned} \tag{2}$$

можно записать в виде суммы

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} \Phi(\xi,\tau)\mathcal{G}(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau +\\ &+ \frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1}^{x_2} s(\xi) f_0(\xi)\mathcal{G}(x,\xi,t)\,d\xi + \int_{x_1}^{x_2} s(\xi) f_1(\xi)\mathcal{G}(x,\xi,t)\,d\xi +\\ &+ p(x_1)\int_0^t g_1(\tau)\Lambda_1(x,t-\tau)\,d\tau + p(x_2)\int_0^t g_2(\tau)\Lambda_2(x,t-\tau)\,d\tau. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь модифицированная функция Грина определяется по формуле

$$\mathcal{G}(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(x)y_n(\xi)\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_n}\,\bigr)}{\|y_n\|^2\sqrt{\lambda_n}}, \qquad \|y_n\|^2 = \int_{x_1}^{x_2} s(x) y_n^2(x)\,dx, \tag{4}$$

где λ_n и $y_n(x)$ — собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned} &[p(x)y'_x]'_x + [\lambda s(x) - q(x)]y = 0,\\ &a_1 y'_x + b_1 y = 0 \quad \text{при} \quad x = x_1,\\ &a_2 y'_x + b_2 y = 0 \quad \text{при} \quad x = x_2. \end{aligned} \tag{5}$$

Функции $\Lambda_1(x,t)$ и $\Lambda_2(x,t)$, входящие в подынтегральные выражения двух последних слагаемых в решении (3), выражаются через функцию Грина (4). Соответствующие формулы будут указаны далее при исследовании конкретных краевых задач.

Общие свойства задачи Штурма — Лиувилля (5):

1°. Существует бесконечное множество собственных значений $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$, причем $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$ (поэтому может быть лишь конечное число отрицательных собственных значений).

2°. Собственные функции $y_n(x)$ и $y_m(x)$ при $n \neq m$ ортогональны между собой с весом $s(x)$ на отрезке $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$:

$$\int_{x_1}^{x_2} s(x) y_n(x) y_m(x)\,dx = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m.$$

3°. При выполнении условий

$$q(x) \geqslant 0, \quad a_1 b_1 \leqslant 0, \quad a_2 b_2 \geqslant 0 \tag{6}$$

отрицательных собственных значений нет. Если $q \equiv 0$, $b_1 = b_2 = 0$, то наименьшим собственным значением будет $\lambda_1 = 0$, которому отвечает собственная функция $\varphi_1 = \text{const}$. В остальных случаях при выполнении условий (6) все собственные значения положительны.

Замечание. Более подробно свойства задачи Штурма — Лиувилля (5) описаны в разд. 1.8.9. Там же приведены асимптотические и приближенные формулы для собственных значений и собственных функций.

4.5.1-2. Первая краевая задача (случай $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = b_2 = 1$).

Решение первой краевой задачи для данного уравнения с начальными условиями (1) и граничными условиями

$$w = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = x_1,$$
$$w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = x_2$$

дается формулами (3)–(4), где

$$\Lambda_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial \xi}\mathcal{G}(x,\xi,t)\Big|_{\xi=x_1}, \quad \Lambda_2(x,t) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\mathcal{G}(x,\xi,t)\Big|_{\xi=x_2}.$$

4.5.1-3. Вторая краевая задача (случай $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 = b_2 = 0$).

Решение второй краевой задачи для данного уравнения с начальными условиями (1) и граничными условиями

$$\partial_x w = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = x_1,$$
$$\partial_x w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = x_2$$

дается формулами (3)–(4), где

$$\Lambda_1(x,t) = -\mathcal{G}(x,x_1,t), \quad \Lambda_2(x,t) = \mathcal{G}(x,x_2,t).$$

4.5.1-4. Третья краевая задача (случай $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$).

Решение третьей краевой задачи для данного уравнения с начальными условиями (1) и граничными условиями (2) при $a_1 = a_2 = 1$ дается формулами (3)–(4), где

$$\Lambda_1(x,t) = -\mathcal{G}(x,x_1,t), \quad \Lambda_2(x,t) = \mathcal{G}(x,x_2,t).$$

4.5.1-5. Смешанная краевая задача (случай $a_1 = b_2 = 0$, $a_2 = b_1 = 1$).

Решение смешанной краевой задачи для данного уравнения с начальными условиями (1) и граничными условиями

$$w = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = x_1,$$
$$\partial_x w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = x_2$$

дается формулами (3)–(4), где

$$\Lambda_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial \xi}\mathcal{G}(x,\xi,t)\Big|_{\xi=x_1}, \quad \Lambda_2(x,t) = \mathcal{G}(x,x_2,t).$$

4.5.1-6. Смешанная краевая задача (случай $a_1 = b_2 = 1$, $a_2 = b_1 = 0$).

Решение смешанной краевой задачи для данного уравнения с начальными условиями (1) и граничными условиями

$$\partial_x w = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = x_1,$$
$$w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = x_2$$

дается формулами (3)–(4), где

$$\Lambda_1(x,t) = -\mathcal{G}(x,x_1,t), \quad \Lambda_2(x,t) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\mathcal{G}(x,\xi,t)\Big|_{\xi=x_2}.$$

⊙ *Литература к разделу 4.5.1*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 48–51, 191–194), В. С. Владимиров (1971, стр. 471–473), А. Д. Полянин (2000 *a*).