Из книги А. Д. Полянина «Справочник по линейным уравнениям математической физики». — М.: Физматлит, 2001.

1.8.9. Уравнения вида $s(x)\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl[p(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr] - q(x)w + \Phi(x,t)$.

Уравнения этого вида часто встречаются в теории тепло- и массопереноса и химической технологии. Далее считается, что функции s, p, p'_x, q — непрерывны, $s>0$, $p>0$ и $x_1\leqslant x\leqslant x_2$.

1.8.9-1. Общие формулы для решения линейных неоднородных краевых задач.

Решение данного уравнения с начальным условием

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t=0 \tag{1}$$

и произвольными линейными неоднородными граничными условиями

$$\begin{aligned} a_1\partial_x w + b_1 w &= g_1(t) \quad \text{при} \quad x=x_1,\\ a_2\partial_x w + b_2 w &= g_2(t) \quad \text{при} \quad x=x_2 \end{aligned} \tag{2}$$

можно записать в виде суммы

$$\begin{aligned} w(x,t) = \int_0^t\int_{x_1}^{x_2}\Phi(\xi,\tau)\mathcal{G}(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau + \int_{x_1}^{x_2}s(\xi)f(\xi)\mathcal{G}(x,\xi,t)\,d\xi +\\ + p(x_1)\int_0^t g_1(\tau)\Lambda_1(x,t-\tau)\,d\tau + p(x_2)\int_0^t g_2(\tau)\Lambda_2(x,t-\tau)\,d\tau. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь модифицированная функция Грина определяется по формуле

$$\mathcal{G}(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)y_n(\xi)}{\|y_n\|^2}\exp(-\lambda_n t), \qquad \|y_n\|^2 = \int_{x_1}^{x_2}s(x)y_n^2(x)\,dx, \tag{4}$$

где λ_n и $y_n(x)$ — собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned} [p(x)y'_x]'_x + [\lambda s(x) - q(x)]y = 0,\\ a_1 y'_x + b_1 y = 0 \quad \text{при} \quad x=x_1,\\ a_2 y'_x + b_2 y = 0 \quad \text{при} \quad x=x_2. \end{aligned} \tag{5}$$

Функции $\Lambda_1(x,t)$ и $\Lambda_2(x,t)$, входящие в подынтегральные выражения двух последних слагаемых в решении (3), выражаются через функцию Грина (4). Соответствующие формулы будут указаны далее при исследовании конкретных краевых задач в разд. 1.8.9-3 — 1.8.9-7.

1.8.9-2. Общие свойства задачи Штурма — Лиувилля (5).

1°. Существует бесконечное множество собственных значений. Все собственные значения вещественны и могут быть упорядочены $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\cdots$, причем $\lambda_n\to\infty$ при $n\to\infty$ (поэтому может быть лишь конечное число отрицательных собственных значений). Каждое собственное значение имеет кратность 1.

2°. Собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя. Каждая собственная функция $y_n(x)$ имеет в открытом интервале (x_1,x_2) ровно $n-1$ нулей.

3°. Собственные функции $y_n(x)$ и $y_m(x)$ при $n\neq m$ ортогональны между собой с весом $s(x)$ на отрезке $x_1\leqslant x\leqslant x_2$:

$$\int_{x_1}^{x_2}s(x)y_n(x)y_m(x)\,dx = 0 \quad \text{при} \quad n\neq m.$$

4°. Произвольная функция $F(x)$, имеющая непрерывную производную и удовлетворяющая граничным условиям задачи Штурма — Лиувилля, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}F_n y_n(x), \quad F_n = \frac{1}{\|y_n\|^2}\int_{x_1}^{x_2}s(x)F(x)y_n(x)\,dx,$$

где формула для $\|y_n\|^2$ приведена в (4).

5°. При выполнении условий

$$q(x) \geqslant 0, \quad a_1 b_1 \leqslant 0, \quad a_2 b_2 \geqslant 0 \tag{6}$$

отрицательных собственных значений нет. Если $q \equiv 0$, $b_1 = b_2 = 0$, то наименьшим собственным значением будет $\lambda_1 = 0$, которому отвечает собственная функция $\varphi_1 = \text{const}$. В остальных случаях при выполнении условий (6) все собственные значения положительны.

6°. Для собственных значений справедлива асимптотическая формула при $n \to \infty$:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{\Delta^2} + O(1), \quad \Delta = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{s(x)}{p(x)}}\, dx. \tag{7}$$

В разд. 1.8.9-3 — 1.8.9-7 будут описаны также специальные свойства задачи Штурма — Лиувилля, которые зависят от вида граничных условий.

Замечание. Уравнение (5) сводится к случаю $p(x) \equiv 1$, $s(x) \equiv 1$ с помощью подстановки

$$\zeta = \int \sqrt{\frac{s(x)}{p(x)}}\, dx, \quad u(\zeta) = \bigl[p(x)s(x)\bigr]^{1/4} y(x).$$

При этом граничные условия преобразуются в граничные условия аналогичного вида.

1.8.9-3. Первая краевая задача (случай $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = b_2 = 1$).

Решение первой краевой задачи с начальным условием (1) и граничными условиями

$$w = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = x_1,$$
$$w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = x_2$$

дается формулами (3)–(4), где

$$\Lambda_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{G}(x,\xi,t)\Big|_{\xi = x_1}, \quad \Lambda_2(x,t) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{G}(x,\xi,t)\Big|_{\xi = x_2}.$$

Отметим некоторые специальные свойства задачи Штурма — Лиувилля:

1°. При $n \to \infty$ для оценки собственных значений λ_n можно использовать асимптотику (7). При этом для собственных функций $y_n(x)$ справедлива формула

$$\frac{y_n(x)}{\|y_n\|} = \left[\frac{4}{\Delta^2 p(x) s(x)}\right]^{1/4} \sin\left[\frac{\pi n}{\Delta} \int_{x_1}^{x} \sqrt{\frac{s(x)}{p(x)}}\, dx\right] + O\Bigl(\frac{1}{n}\Bigr), \quad \Delta = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{s(x)}{p(x)}}\, dx.$$

2°. При $q \geqslant 0$ для наименьшего собственного значения имеет место оценка сверху (принцип Рэлея):

$$\lambda_1 \leqslant \frac{\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \bigl[p(x)(z'_x)^2 + q(x)z^2\bigr]\, dx}{\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} s(x) z^2\, dx}, \tag{8}$$

где $z = z(x)$ — любая дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям $z(x_1) = z(x_2) = 0$. Знак равенства в (8) достигается при $z = y_1(x)$, где $y_1(x)$ — собственная функция задачи Штурма — Лиувилля, соответствующая собственному значению λ_1. Для получения конкретных оценок в правой части (8) можно положить $z = (x - x_1)(x_2 - x)$ или $z = \sin\Bigl[\dfrac{\pi(x - x_1)}{x_2 - x_1}\Bigr]$.

3°. Пусть выполнены неравенства

$$0 < p_{\min} \leqslant p(x) \leqslant p_{\max}, \quad 0 < q_{\min} \leqslant q(x) \leqslant q_{\max}, \quad 0 < s_{\min} \leqslant s(x) \leqslant s_{\max}.$$

Тогда для собственных значений справедливы двусторонние оценки:

$$\frac{p_{\min}}{s_{\max}} \frac{\pi^2 n^2}{(x_2 - x_1)^2} + \frac{q_{\min}}{s_{\max}} \leqslant \lambda_n \leqslant \frac{p_{\max}}{s_{\min}} \frac{\pi^2 n^2}{(x_2 - x_1)^2} + \frac{q_{\max}}{s_{\min}}.$$

4°. В инженерных расчетах для определения собственных значений можно использовать приближенную формулу

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{\Delta^2} + \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \frac{q(x)}{s(x)}\, dx, \quad \Delta = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{s(x)}{p(x)}}\, dx. \tag{9}$$

Эта формула обеспечивает точный результат при $p(x)s(x) = \mathrm{const}$, $q(x)/s(x) = \mathrm{const}$ (в частности, при постоянных коэффициентах уравнения $p = p_0$, $q = q_0$, $s = s_0$) и дает правильную асимптотику (7) для любых $p(x)$, $q(x)$, $s(x)$. Кроме того, при $p(x) = \mathrm{const}$, $s(x) = \mathrm{const}$ формула (9) дает правильных два первых члена разложения при $n \to \infty$ [сказанное справедливо также при выполнении условия $p(x)s(x) = \mathrm{const}$].

5°. Пусть $p(x) = s(x) = 1$ и функция $q = q(x)$ имеет непрерывную производную. Асимптотические формулы для собственных значений λ_n и собственных функций $y_n(x)$ при $n \to \infty$:

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{x_2 - x_1} + \frac{1}{\pi n} Q(x_1, x_2) + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

$$y_n(x) = \sin \frac{\pi n(x-x_1)}{x_2-x_1} - \frac{1}{\pi n}\Big[(x_1-x)Q(x,x_2) + (x_2-x)Q(x_1,x)\Big] \cos \frac{\pi n(x-x_1)}{x_2-x_1} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

где

$$Q(u,v) = \frac{1}{2}\int_u^v q(x)\,dx. \qquad (10)$$

1.8.9-4. Вторая краевая задача (случай $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 = b_2 = 0$).

Решение второй краевой задачи с начальным условием (1) и граничными условиями

$$\partial_x w = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = x_1,$$
$$\partial_x w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = x_2$$

дается формулами (3)–(4), где

$$\Lambda_1(x,t) = -\mathcal{G}(x, x_1, t), \quad \Lambda_2(x,t) = \mathcal{G}(x, x_2, t).$$

Отметим некоторые специальные свойства задачи Штурма — Лиувилля:

1°. При $q > 0$ для наименьшего собственного значения имеет место оценка сверху (8), где $z = z(x)$ — любая дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям $z'_x(x_1) = z'_x(x_2) = 0$. Знак равенства в (8) достигается при $z = y_1(x)$, где $y_1(x)$ — собственная функция задачи Штурма — Лиувилля, соответствующая собственному значению λ_1.

2°. Пусть $p(x) = s(x) = 1$ и функция $q = q(x)$ имеет непрерывную производную. Асимптотические формулы для собственных значений λ_n и собственных функций $y_n(x)$ при $n \to \infty$:

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi(n-1)}{x_2 - x_1} + \frac{1}{\pi(n-1)} Q(x_1, x_2) + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

$$\begin{aligned} y_n(x) = {} & \cos \frac{\pi(n-1)(x-x_1)}{x_2 - x_1} + \frac{1}{\pi(n-1)}\Big[(x_1 - x)Q(x, x_2) + {} \\ & + (x_2 - x)Q(x_1, x)\Big] \sin \frac{\pi(n-1)(x-x_1)}{x_2 - x_1} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \end{aligned}$$

где функция $Q(u,v)$ определяется по формуле (10).

1.8.9-5. Третья краевая задача (случай $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$).

Решение третьей краевой задачи с начальным условием (1) и граничными условиями (2) при $a_1 = a_2 = 1$ дается формулами (3)–(4), где

$$\Lambda_1(x,t) = -\mathcal{G}(x, x_1, t), \quad \Lambda_2(x,t) = \mathcal{G}(x, x_2, t).$$

Пусть $p(x) = s(x) = 1$ и функция $q = q(x)$ имеет непрерывную производную. Асимптотические формулы для собственных значений λ_n и собственных функций $y_n(x)$ при $n \to \infty$:

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi(n-1)}{x_2 - x_1} + \frac{1}{\pi(n-1)}\big[Q(x_1, x_2) - b_1 + b_2\big] + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

$$\begin{aligned} y_n(x) = {} & \cos \frac{\pi(n-1)(x-x_1)}{x_2 - x_1} + \frac{1}{\pi(n-1)}\Big\{(x_1 - x)\big[Q(x, x_2) + b_2\big] + {} \\ & + (x_2 - x)\big[Q(x_1, x) - b_1\big]\Big\} \sin \frac{\pi(n-1)(x-x_1)}{x_2 - x_1} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \end{aligned}$$

где функция $Q(u,v)$ определяется по формуле (10).

1.8.9-6. Смешанная краевая задача (случай $a_1 = b_2 = 0$, $a_2 = b_1 = 1$).

Решение смешанной краевой задачи с начальным условием (1) и граничными условиями

$$w = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = x_1,$$
$$\partial_x w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = x_2$$

дается формулами (3)–(4), где

$$\Lambda_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial \xi}\mathcal{G}(x,\xi,t)\Big|_{\xi=x_1}, \quad \Lambda_2(x,t) = \mathcal{G}(x,x_2,t).$$

Отметим некоторые специальные свойства задачи Штурма — Лиувилля:

1°. При $q \geqslant 0$ для наименьшего собственного значения имеет место оценка сверху (8), где $z = z(x)$ — любая дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям $z(x_1) = 0$ и $z'_x(x_2) = 0$. Знак равенства в (8) достигается при $z = y_1(x)$, где $y_1(x)$ — собственная функция задачи Штурма — Лиувилля, соответствующая собственному значению λ_1.

2°. Пусть $p(x) = s(x) = 1$ и функция $q = q(x)$ имеет непрерывную производную. Асимптотические формулы для собственных значений λ_n и собственных функций $y_n(x)$ при $n \to \infty$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\lambda_n} &= \frac{\pi(2n-1)}{2(x_2-x_1)} + \frac{2}{\pi(2n-1)}Q(x_1,x_2) + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),\\
y_n(x) &= \sin\frac{\pi(2n-1)(x-x_1)}{2(x_2-x_1)} - \frac{2}{\pi(2n-1)}\Big[(x_1-x)Q(x,x_2) +\\
&\quad + (x_2-x)Q(x_1,x)\Big]\cos\frac{\pi(2n-1)(x-x_1)}{2(x_2-x_1)} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),
\end{aligned}$$

где функция $Q(u,v)$ определяется по формуле (10).

1.8.9-7. Смешанная краевая задача (случай $a_1 = b_2 = 1$, $a_2 = b_1 = 0$).

Решение смешанной краевой задачи с начальным условием (1) и граничными условиями

$$\partial_x w = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = x_1,$$
$$w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = x_2$$

дается формулами (3)–(4), где

$$\Lambda_1(x,t) = -\mathcal{G}(x,x_1,t), \quad \Lambda_2(x,t) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\mathcal{G}(x,\xi,t)\Big|_{\xi=x_2}.$$

Отметим некоторые специальные свойства задачи Штурма — Лиувилля:

1°. При $q \geqslant 0$ для наименьшего собственного значения имеет место оценка сверху (8), где $z = z(x)$ — любая дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям $z'_x(x_1) = 0$ и $z(x_2) = 0$. Знак равенства в (8) достигается при $z = y_1(x)$, где $y_1(x)$ — собственная функция задачи Штурма — Лиувилля, соответствующая собственному значению λ_1.

2°. Пусть $p(x) = s(x) = 1$ и функция $q = q(x)$ имеет непрерывную производную. Асимптотические формулы для собственных значений λ_n и собственных функций $y_n(x)$ при $n \to \infty$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\lambda_n} &= \frac{\pi(2n-1)}{2(x_2-x_1)} + \frac{2}{\pi(2n-1)}Q(x_1,x_2) + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),\\
y_n(x) &= \cos\frac{\pi(2n-1)(x-x_1)}{2(x_2-x_1)} + \frac{2}{\pi(2n-1)}\Big[(x_1-x)Q(x,x_2) +\\
&\quad + (x_2-x)Q(x_1,x)\Big]\sin\frac{\pi(2n-1)(x-x_1)}{2(x_2-x_1)} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),
\end{aligned}$$

где функция $Q(u,v)$ определяется по формуле (10).

⦿ *Литература к разделу 1.8.9*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 48–51, 191–194), С. Гулд (1970), Э. Камке (1971, стр. 263–265), В. С. Владимиров (1971, стр. 473–474), А. Г. Костюченко, И. С. Саргсян (1979, стр. 42–56), Б. М. Левитан, И. С. Саргсян (1988), Л. Д. Акуленко, С. В. Нестеров (1997), В. А. Винокуров, В. А. Садовничий (2000), А. Д. Полянин (2000 *a, c*).