Из книги А. Д. Полянина «Справочник по линейным уравнениям математической физики». — М.: Физматлит, 2001.

Введение. Некоторое определения, формулы, методы и решения

0.1. Классификация уравнений с частными производными второго порядка

0.1.1. Уравнения с двумя независимыми переменными

0.1.1-1. Примеры уравнений, встречающихся в приложениях.

Выделяют три основных типа дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, решения которых имеют характерные качественные различия.

Простейший пример уравнения *параболического типа* — уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \tag{1}$$

где переменная t играет роль времени, а переменная x — пространственной координаты. Отметим, что в уравнении (1) имеется только один член со старшими производными.

Простейший пример уравнения *гиперболического типа* — волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \tag{2}$$

где переменная t играет роль времени, а переменная x — пространственной координаты. Отметим, что члены со старшими производными в уравнении (2) имеют разные знаки.

Простейший пример уравнения *эллиптического типа* — уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \tag{3}$$

где переменные x и y играют роль пространственных координат. Отметим, что члены со старшими производными в уравнении (3) имеют одинаковые знаки.

Любое линейное уравнение второго порядка в частных производных с двумя независимыми переменными с помощью подходящих преобразований может быть приведено к более простому уравнению, у которого будет одна из трех комбинаций старших производных, указанных выше в конкретных примерах (1), (2) и (3).

0.1.1-2. Типы уравнений. Уравнения характеристик.

Рассмотрим линейное уравнение с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными*

$$a(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F\Big(x,y,w,\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y}\Big), \tag{4}$$

где a, b, c — некоторые функции от x и y, имеющие непрерывные производные до второго порядка включительно.

Уравнение (4) в точке (x, y) принадлежит к

параболическому типу,	если $b^2 - ac = 0$;
гиперболическому типу,	если $b^2 - ac > 0$;
эллиптическому типу,	если $b^2 - ac < 0$.

* Правая часть уравнения (4) может быть нелинейной. Классификация и процедура приведения таких уравнений к каноническому виду определяются только левой частью уравнения.

Для того, чтобы привести уравнение (4) к каноническому виду, надо записать уравнение характеристик

$$a\,dy^2 - 2b\,dx\,dy + c\,dx^2 = 0,$$

которое распадается на два уравнения

$$a\,dy - \bigl(b + \sqrt{b^2 - ac}\,\bigr)\,dx = 0, \tag{5}$$

$$a\,dy - \bigl(b - \sqrt{b^2 - ac}\,\bigr)\,dx = 0, \tag{6}$$

и найти их общие интегралы.

0.1.1-3. Канонический вид уравнений параболического типа, $b^2 - ac = 0$.

Уравнения (5) и (6) в этом случае совпадают и имеют один общий интеграл

$$\varphi(x, y) = C.$$

Переходя от x, y к новым независимым переменным ξ, η по формулам

$$\xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \eta(x, y),$$

где $\eta = \eta(x, y)$ — любая дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию невырожденности якобиана $\dfrac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}$ в рассматриваемой области, приведем уравнение (4) к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = F_1\Bigl(\xi, \eta, w, \frac{\partial w}{\partial \xi}, \frac{\partial w}{\partial \eta}\Bigr). \tag{7}$$

В качестве функции η можно выбрать $\eta = x$ или $\eta = y$.

Видно, что преобразованное уравнение (7), как и уравнение теплопроводности (1), имеет только один член со старшей производной.

Замечание. В вырожденном случае, когда функция F_1 не зависит от производной $\partial_\xi w$, уравнение (7) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение относительно переменной η, в котором ξ играет роль параметра.

0.1.1-4. Канонический вид уравнений гиперболического типа, $b^2 - ac > 0$.

Общие интегралы

$$\varphi(x, y) = C_1, \qquad \psi(x, y) = C_2$$

уравнений (5) и (6) будут вещественными и различными. Они определяют два различных семейства вещественных характеристик.

Переходя от x, y к новым независимым переменным ξ, η по формулам

$$\xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y),$$

приведем уравнение (4) к каноническому виду (первая каноническая форма)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = F_2\Bigl(\xi, \eta, w, \frac{\partial w}{\partial \xi}, \frac{\partial w}{\partial \eta}\Bigr).$$

Преобразование

$$\xi = t + z, \qquad \eta = t - z$$

приводит полученное уравнение к другому каноническому виду (вторая каноническая форма)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = F_3\Bigl(t, z, w, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial z}\Bigr),$$

где $F_3 = 4F_2$. Левая часть этого уравнения с точностью до переобозначений совпадает с левой частью волнового уравнения (2).

ТАБЛИЦА 1
Классификация уравнений со многими независимыми переменными.

Тип уравнения (8) в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x_0}$	Коэффициенты канонической формы (11)
Параболический (в широком смысле)	Хотя бы один коэффициент c_i равен нулю
Гиперболический (в широком смысле)	Все c_i отличны от нуля и некоторые c_i имеют разные знаки
Эллиптический	Все c_i отличны от нуля и имеют одинаковые знаки

0.1.1-5. Канонический вид уравнений эллиптического типа, $b^2 - ac < 0$.

Общие интегралы уравнений (5) и (6) в этом случае будут комплексно сопряженными и определяют два семейства мнимых характеристик.

Пусть общий интеграл уравнения (5) имеет вид

$$\varphi(x,y) + i\psi(x,y) = C, \qquad i^2 = -1,$$

где $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ — вещественные функции.

Переходя от x, y к новым независимым переменным ξ, η по формулам

$$\xi = \varphi(x,y), \qquad \eta = \psi(x,y),$$

приведем уравнение (4) к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = F_4\Big(\xi, \eta, w, \frac{\partial w}{\partial \xi}, \frac{\partial w}{\partial \eta}\Big).$$

Левая часть этого уравнения с точностью до переобозначений совпадает с левой частью уравнения Лапласа (3).

0.1.2. Уравнения со многими независимыми переменными

Рассмотрим уравнение с частными производными второго порядка с n независимыми переменными $x_1, \ldots, x_n$ вида

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = F\Big(\mathbf{x}, w, \frac{\partial w}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial x_n}\Big), \tag{8}$$

где a_{ij} — некоторые функции, имеющие непрерывные производные по всем переменным до второго порядка включительно, $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$. [Правая часть уравнения (8) может быть нелинейной. Для классификации нужна только левая часть уравнения.]

Уравнению (8) в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ ставится в соответствие квадратичная форма

$$Q = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x}_0)\xi_i\xi_j. \tag{9}$$

Квадратичную форму (9) при помощи подходящего линейного невырожденного преобразования

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik}\eta_k \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{10}$$

можно привести к каноническому виду

$$Q = \sum_{i=1}^{n} c_i \eta_i^2, \tag{11}$$

где коэффициенты c_i принимают значения 1, -1 и 0. Число отрицательных и нулевых коэффициентов формы (11) не зависит от способа приведения этой формы к каноническому виду.

В табл. 1 указаны основные признаки, по которым происходит классификация уравнений со многими независимыми переменными.

Пусть все коэффициенты уравнения (8) при старших производных постоянны: $a_{ij} = \text{const}$. Вводя новые независимые переменные $y_1, \ldots, y_n$ по формулам $y_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_{ik} x_k$, где β_{ik} — коэффициенты линейного преобразования (10), приводим уравнение (8) к каноническому виду

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2} = F_1\Big(\mathbf{y}, w, \frac{\partial w}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial y_n}\Big). \tag{12}$$

Здесь c_i — те же самые коэффициенты, что и в квадратичной форме (11), $\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$.

Замечание 1. Из уравнений параболического типа принято выделять уравнения параболические в узком смысле [когда только один из коэффициентов c_k равен нулю, а остальные c_i одинаковы; при этом в правую часть уравнения (12) должна входить частная производная первого порядка по переменной x_k].

Замечание 2. Уравнения гиперболического типа в свою очередь делятся на уравнения нормального гиперболического типа (когда все коэффициенты c_i кроме одного имеют одинаковые знаки) и ультрагиперболического типа (имеется больше одного положительного и больше одного отрицательного коэффициента c_i).

Конкретные уравнения параболического, эллиптического и гиперболического типов со многими независимыми переменными будут рассматриваться далее в разд. 0.2.

⦿ *Литература к разделу 0.1*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 21–30), С. Л. Соболев (1966, стр. 39–51), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 11–22), А. В. Бицадзе (1978, стр. 15–29), S. J. Farlow (1982, стр. 174–182, 331–339), Zauderer (1983, стр. 78–85, 91–97), D. Zwillinger (1989, стр. 22–29).

0.2. Основные задачи математической физики

0.2.1. Начальные и граничные условия. Задача Коши. Краевые задачи

Каждое уравнение математической физики описывает бесконечное множество качественно аналогичных явлений или процессов. Это обстоятельство является следствием того, что дифференциальные уравнения имеют бесконечное множество частных решений. Конкретное решение, описывающее рассматриваемое физическое явление, выделяется из множества частных решений данного дифференциального уравнения с помощью начальных и граничных условий.

Далее будем рассматривать линейные уравнения в n-мерном евклидовом пространстве $\mathcal{R}^n$ или в открытой (не включающей границу) пространственной области $V \in \mathcal{R}^n$ с достаточно гладкой границей $S = \partial V$.

0.2.1-1. Уравнения параболического типа. Начальное и граничное условия.

В общем случае линейное уравнение с частными производными второго порядка параболического типа с n независимыми переменными можно записать так:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - L_{\mathbf{x},t}[w] = \Phi(\mathbf{x}, t), \tag{1}$$

где

$$L_{\mathbf{x},t}[w] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial w}{\partial x_i} + c(\mathbf{x}, t) w, \tag{2}$$

$$\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}, \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x}, t) \xi_i \xi_j \geqslant \sigma \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \sigma > 0.$$

Уравнения параболического типа описывают неустановившиеся тепловые, диффузионные и другие процессы, которые зависят от времени t.

Уравнение (1) называется однородным, если $\Phi(\mathbf{x}, t) \equiv 0$.

Задача Коши ($t \geqslant 0$, $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$). Требуется найти функцию w, удовлетворяющую уравнению (1) при $t > 0$ и начальному условию

$$w = f(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{3}$$

*Краевая задача** ($t \geqslant 0$, $\mathbf{x} \in V$). Требуется найти функцию w, удовлетворяющую уравнению (1) при $t > 0$, начальному условию (3) и граничному условию

$$\Gamma_{\mathbf{x},t}[w] = g(\mathbf{x}, t) \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S \qquad (t > 0). \tag{4}$$

В общем случае $\Gamma_{\mathbf{x},t}$ представляет собой линейный дифференциальный оператор первого порядка по пространственным переменным, коэффициенты которого зависят от $\mathbf{x}$ и t. Основные типы граничных условий будут описаны далее в разд. 0.2.2.

Начальное условие (3) называется однородным, если $f(\mathbf{x}) \equiv 0$. Граничное условие (4) называется однородным, если $g(\mathbf{x}, t) \equiv 0$.

0.2.1-2. Уравнения гиперболического типа. Начальные и граничное условия.

Рассмотрим линейное уравнение с частными производными второго порядка гиперболического типа с n независимыми переменными общего вида

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varphi(\mathbf{x}, t)\frac{\partial w}{\partial t} - L_{\mathbf{x},t}[w] = \Phi(\mathbf{x}, t), \tag{5}$$

где линейный дифференциальный оператор $L_{\mathbf{x},t}$ определяется выражением (2). Уравнения гиперболического типа описывают неустановившиеся волновые процессы, которые зависят от времени t.

Уравнение (5) называется однородным, если $\Phi(\mathbf{x}, t) \equiv 0$.

Задача Коши ($t \geqslant 0$, $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$). Требуется найти функцию w, удовлетворяющую уравнению (5) при $t > 0$ и начальным условиям

$$\begin{aligned} w &= f_0(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0, \\ \partial_t w &= f_1(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Краевая задача ($t \geqslant 0$, $\mathbf{x} \in V$). Требуется найти функцию w, удовлетворяющую уравнению (5) при $t > 0$, начальным условиям (6) и граничному условию (4).

Начальные условия (6) называются однородными, если $f_0(\mathbf{x}) \equiv 0$, $f_1(\mathbf{x}) \equiv 0$.

Задача Гурса. На характеристиках уравнения гиперболического типа с двумя независимыми переменными задаются значения искомой функции w.

0.2.1-3. Уравнения эллиптического типа. Граничные условия.

В общем случае линейное уравнение с частными производными второго порядка эллиптического типа с n независимыми переменными можно записать так:

$$-L_{\mathbf{x}}[w] = \Phi(\mathbf{x}), \tag{7}$$

где

$$L_{\mathbf{x}}[w] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x})\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\mathbf{x})\frac{\partial w}{\partial x_i} + c(\mathbf{x})w, \tag{8}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x})\xi_i\xi_j \geqslant \sigma \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \sigma > 0.$$

Уравнения эллиптического типа описывают установившиеся тепловые, диффузионные и другие процессы, которые не зависят от времени.

Уравнение (7) называется однородным, если $\Phi(\mathbf{x}) \equiv 0$.

Краевая задача. Требуется найти функцию w, удовлетворяющую уравнению (7) и граничному условию

$$\Gamma_{\mathbf{x}}[w] = g(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S. \tag{9}$$

В общем случае $\Gamma_{\mathbf{x}}$ представляет собой линейный дифференциальный оператор первого порядка. Различные типы граничных условий описаны далее в разд. 0.2.2.

Граничное условие (9) называется однородным, если $g(\mathbf{x}) \equiv 0$. Краевая задача (7)–(9) называется однородной, если $\Phi \equiv 0$, $g \equiv 0$.

* *Краевые задачи* для уравнений параболического и гиперболического типов нередко называют *смешанными задачами*.

0.2.2. Первая, вторая, третья и смешанная краевые задачи

Для любых (параболических, гиперболических и эллиптических) уравнений в частных производных второго порядка в зависимости от вида граничных условий (4) [см. также аналогичное условие (9)] принято выделять четыре основных типа краевых задач. Для простоты здесь ограничимся случаем, когда коэффициенты a_{ij} уравнений (1), (5) имеют специальный вид

$$a_{ij}(\mathbf{x},t) = a(\mathbf{x},t)\delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при} \;\; i=j, \\ 0 & \text{при} \;\; i\neq j. \end{cases}$$

Такая ситуация наиболее часто встречается в приложениях и используется для описания различных явлений (процессов) в изотропных средах.

Первая краевая задача. На границе области S функция $w(\mathbf{x},t)$ принимает заданные значения:

$$w(\mathbf{x},t) = g_1(\mathbf{x},t) \quad \text{при} \quad \mathbf{x}\in S. \tag{10}$$

Вторая краевая задача. На границе области S задается производная по (внешней) нормали:

$$\frac{\partial w}{\partial N} = g_2(\mathbf{x},t) \quad \text{при} \quad \mathbf{x}\in S. \tag{11}$$

В задачах теплопереноса, где w — температура, левая часть граничного условия (11) пропорциональна тепловому потоку, приходящемуся на единицу поверхности S.

Третья краевая задача. На границе области S задана линейная связь между искомой функцией и ее производной по нормали:

$$\frac{\partial w}{\partial N} + k(\mathbf{x},t)w = g_3(\mathbf{x},t) \quad \text{при} \quad \mathbf{x}\in S. \tag{12}$$

Обычно принимается, что $k(\mathbf{x},t) = \text{const}$. В задачах массопереноса, где w — концентрация, граничное условие (12) при $g_3 \equiv 0$ описывает поверхностную химическую реакцию первого порядка.

Смешанные краевые задачи. В этом случае на разных участках границы S задаются условия различных типов, перечисленных выше.

При $g_1 \equiv 0$, $g_2 \equiv 0$, $g_3 \equiv 0$ соответствующие граничные условия (10), (11), (12) будут однородными.

⊙ *Литература к разделу 0.2*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972).

0.3. Свойства и частные решения линейных уравнений

0.3.1. Линейные однородные уравнения

0.3.1-1. Предварительные замечания.

Для краткости в данном разделе линейные однородные уравнения с частными производными будем записывать так:

$$\mathfrak{L}[w] = 0. \tag{1}$$

Для линейных уравнений второго порядка параболического и гиперболического типов линейный дифференциальный оператор $\mathfrak{L}[w]$ определяется соответственно левой частью уравнений (1) и (5) из разд. 0.2.1. Далее считается, что уравнение (1) — произвольное линейное однородное уравнение с частными производными любого порядка по переменным $t, x_1, \ldots, x_n$ с достаточно гладкими коэффициентами.

Линейный оператор $\mathfrak{L}$ обладает свойствами

$$\mathfrak{L}[w_1 + w_2] = \mathfrak{L}[w_1] + \mathfrak{L}[w_2],$$
$$\mathfrak{L}[Aw] = A\mathfrak{L}[w], \quad A = \text{const}.$$

Произвольное линейное однородное уравнение (1) имеет тривиальное решение $w \equiv 0$.

Функция w называется классическим решением, если она при подстановке в уравнение (1) обращает его в тождество и все ее частные производные, которые входят в уравнение (1), непрерывны (данное понятие напрямую связано с рассматриваемой областью изменения независимых переменных). Далее вместо «классическое решение» обычно будем писать просто «решение».

0.3.1-2. Использование частных решений для построения других частных решений.

Отметим некоторые свойства частных решений линейных однородных уравнений.

1°. Пусть $w_1 = w_1(\mathbf{x},t)$, $w_2 = w_2(\mathbf{x},t)$, $\ldots$, $w_k = w_k(\mathbf{x},t)$ — любые частные решения однородного уравнения (1). Тогда линейная комбинация

$$w = A_1w_1 + A_2w_2 + \cdots + A_kw_k \tag{2}$$

с произвольными постоянными A_1, A_2, $\ldots$, A_k также является решением данного уравнения (в физике это свойство называют *принципом линейной суперпозиции*).

Если имеется бесконечная последовательность решений $\{w_k\}$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k$ независимо от его сходимости, называют формальным решением. Если решения w_k классические, ряд сходится равномерно и его сумма имеет необходимые частные производные, то сумма ряда будет классическим решением уравнения (1).

2°. Пусть коэффициенты дифференциального оператора $\mathfrak{L}$ не зависят от времени t. Если уравнение (1) имеет частное решение $\tilde{w} = \tilde{w}(\mathbf{x},t)$, то решениями уравнения (1) будут также частные производные этой функции по времени*

$$\frac{\partial\tilde{w}}{\partial t},\quad \frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial t^2},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^k\tilde{w}}{\partial t^k},\quad \ldots$$

3°. Пусть коэффициенты дифференциального оператора $\mathfrak{L}$ не зависят от пространственных переменных $x_1,\ldots,x_n$. Если уравнение (1) имеет частное решение $\tilde{w} = \tilde{w}(\mathbf{x},t)$, то решениями уравнения (1) будут также любые частные производные от этого решения по пространственным переменным:

$$\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x_1},\quad \frac{\partial\tilde{w}}{\partial x_2},\quad \frac{\partial\tilde{w}}{\partial x_3},\quad \frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x_1^2},\quad \frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x_1\partial x_2},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^{k+m}\tilde{w}}{\partial x_2^k\partial x_3^m},\quad \ldots$$

Если коэффициенты оператора $\mathfrak{L}$ не зависят только от одной пространственной переменной, например x_1, и уравнение (1) имеет частное решение $\tilde{w} = \tilde{w}(\mathbf{x},t)$, то решениями этого уравнения будут частные производные от функции $\tilde{w}$ по переменной x_1:

$$\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x_1},\quad \frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x_1^2},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^k\tilde{w}}{\partial x_1^k},\quad \ldots$$

4°. Пусть коэффициенты оператора $\mathfrak{L}$ постоянны и уравнение (1) имеет частное решение $\tilde{w} = \tilde{w}(\mathbf{x},t)$. Тогда решениями данного уравнения будут также любые частные производные от этого решения по времени и пространственным переменным (включая и смешанные производные):

$$\frac{\partial\tilde{w}}{\partial t},\quad \frac{\partial\tilde{w}}{\partial x_1},\quad \frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x_2^2},\quad \frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial t\partial x_1},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^k\tilde{w}}{\partial x_3^k},\quad \ldots$$

5°. Пусть частное решение уравнения (1) зависит от параметра μ, т. е. $\tilde{w} = \tilde{w}(\mathbf{x},t;\mu)$, а коэффициенты оператора $\mathfrak{L}$ не зависят от этого параметра (но могут зависеть от времени и пространственных переменных). Тогда другие решения уравнения (1) можно получить путем дифференцирования данного решения по параметру μ:

$$\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\mu},\quad \frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\mu^2},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^k\tilde{w}}{\partial\mu^k},\quad \ldots$$

Пусть постоянные $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ принадлежат области допустимых значений параметра μ. Тогда сумма

$$w = A_1\tilde{w}(\mathbf{x},t;\mu_1) + A_2\tilde{w}(\mathbf{x},t;\mu_2) + \cdots + A_k\tilde{w}(\mathbf{x},t;\mu_k), \tag{3}$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_k$ — произвольные постоянные, также является решением линейного однородного уравнения (1). Указанная сумма может содержать как конечное, так и бесконечное число слагаемых.

6°. Другой эффективный способ построения частных решений заключается в следующем. Частное решение $\tilde{w}(\mathbf{x},t;\mu)$, зависящее от параметра μ (как и ранее, считается, что коэффициенты оператора $\mathfrak{L}$ не зависят от μ) сначала умножается на произвольную функцию $\varphi(\mu)$,

* Здесь и далее предполагается, что частное решение $\tilde{w}$ достаточное число раз дифференцируемо по соответствующим временной или пространственным переменным (или параметрам).

ТАБЛИЦА 2
Линейные однородные дифференциальные уравнения с частными производными, которые допускают решения с разделяющимися переменными.

№	Вид уравнения (1)	Вид частных решений
1	Коэффициенты уравнения постоянны	$w(\mathbf{x},t)=A\exp(\lambda t+\beta_1x_1+\cdots+\beta_nx_n)$, $\lambda,\beta_1,\ldots,\beta_n$ связаны алгебраическим соотношением
2	Коэффициенты уравнения не зависят от времени t	$w(\mathbf{x},t)=e^{\lambda t}\psi(\mathbf{x})$, λ — произвольная постоянная, $\mathbf{x}=\{x_1,\ldots,x_n\}$
3	Коэффициенты уравнения не зависят от переменных $x_1,\ldots,x_n$	$w(\mathbf{x},t)=\exp(\beta_1x_1+\cdots+\beta_nx_n)\psi(t)$, $\beta_1,\ldots,\beta_n$ — произвольные постоянные
4	Коэффициенты уравнения не зависят от переменных $x_1,\ldots,x_k$	$w(\mathbf{x},t)=\exp(\beta_1x_1+\cdots+\beta_kx_k)\psi(t,x_{k+1},\ldots,x_n)$, $\beta_1,\ldots,\beta_k$ — произвольные постоянные
5	$\mathfrak{L}[w]=L_t[w]+L_{\mathbf{x}}[w]$, оператор L_t зависит только от t, оператор $L_{\mathbf{x}}$ зависит только от $\mathbf{x}$	$w(\mathbf{x},t)=\varphi(t)\psi(\mathbf{x})$, $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению $L_t[\varphi]+\lambda\varphi=0$, $\psi(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению $L_{\mathbf{x}}[\psi]-\lambda\psi=0$
6	$\mathfrak{L}[w]=L_t[w]+L_1[w]+\cdots+L_n[w]$, оператор L_t зависит только от t, оператор L_k зависит только от x_k	$w(\mathbf{x},t)=\varphi(t)\psi_1(x_1)\ldots\psi_n(x_n)$, $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению $L_t[\varphi]+\lambda\varphi=0$, $\psi_k(x_k)$ удовлетворяет уравнению $L_k[\psi_k]+\beta_k\psi_k=0$, $\lambda+\beta_1+\cdots+\beta_n=0$
7	$\mathfrak{L}[w]=f_0(x_1)L_t[w]+\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x_1)L_k[w]$, оператор L_t зависит только от t, оператор L_k зависит только от x_k	$w(\mathbf{x},t)=\varphi(t)\psi_1(x_1)\ldots\psi_n(x_n)$, $L_t[\varphi]+\lambda\varphi=0$, $L_k[\psi_k]+\beta_k\psi_k=0,\quad k=2,\ldots,n$, $f_1(x_1)L_1[\psi_1]-\bigl[\lambda f_0(x_1)+\sum\limits_{k=2}^{n}\beta_kf_k(x_1)\bigr]\psi_1=0$
8	$\mathfrak{L}[w]=\dfrac{\partial w}{\partial t}+L_{1,t}[w]+\cdots+L_{n,t}[w]$, где $L_{k,t}[w]=\sum\limits_{s=0}^{m_k}f_{ks}(x_k,t)\dfrac{\partial^s w}{\partial x_k^s}$	$w(\mathbf{x},t)=\psi_1(x_1,t)\psi_2(x_2,t)\ldots\psi_n(x_n,t)$, $\dfrac{\partial\psi_k}{\partial t}+L_{k,t}[\psi_k]=\lambda_k(t)\psi_k,\quad k=1,\,\ldots,\,n$, $\lambda_1(t)+\lambda_2(t)+\cdots+\lambda_n(t)=0$

а затем полученное выражение интегрируется по параметру μ по некоторому отрезку $[\alpha,\beta]$. В результате получают новую функцию

$$\int_\alpha^\beta \tilde{w}(\mathbf{x},t;\mu)\varphi(\mu)\,d\mu,$$

которая также является решением исходного линейного однородного уравнения.

Свойства, описанные в пп. 1°–6°, позволяют получать с помощью одних частных решений другие частные решения линейных однородных уравнений математической физики.

0.3.1-3. Решения с разделяющимися переменными.

Многие линейные однородные дифференциальные уравнения с частными производными имеют решения, которые можно представить в виде произведения функций разных аргументов. Такие решения называют решениями с разделяющимися переменными.

В табл. 2 указаны наиболее распространенные типы линейных однородных дифференциальных уравнений со многими независимыми переменными, которые допускают решения с разделяющимися переменными. Линейные комбинации частных решений, соответствующих различным значениям параметров разделения λ, β_1, …, β_n, также будут решениями рассматриваемых уравнений. Для краткости вместо линейный дифференциальный оператор пишется оператор.

В случае уравнений с постоянными коэффициентами (см. первую строку табл. 2) параметры разделения должны удовлетворять алгебраическому уравнению

$$D(\lambda,\, \beta_1,\, \ldots, \beta_n) = 0, \tag{4}$$

которое получается в результате подстановки данного решения в уравнение (1). В физических приложениях уравнение (4) обычно называют дисперсионным уравнением. Любые n из $n+1$ параметра разделения в (4) можно считать произвольными.

Отметим, что уравнения с постоянными коэффициентами имеют также более сложные решения, указанные во второй и третьей строках табл. 2 (см. последний столбец).

В восьмой строке табл. 2 рассмотрен случай неполного разделения переменных, когда решение разделяется по пространственным переменным $x_1, \ldots, x_n$, то не разделяется по времени t.

Замечание. Для стационарных уравнений, которые не зависят от времени t, в 1, 6 и 7 строках табл. 2 следует положить $\lambda = 0$, $L_t[w] \equiv 0$, $\varphi(t) \equiv 1$.

0.3.1-4. Решения в виде бесконечного степенного ряда по переменной t.

1°. Уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = M[w],$$

где M — произвольный линейный дифференциальный оператор второго (любого) порядка, зависящий только от пространственных переменных, имеет формальное решение в виде ряда

$$w(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} M^k[f(\mathbf{x})], \qquad M^k[f] = M\bigl[M^{k-1}[f]\bigr],$$

где $f(\mathbf{x})$ — произвольная бесконечно дифференцируемая функция. Это решение удовлетворяет начальному условию $w(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x})$.

2°. Уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = M[w],$$

где M — линейный дифференциальный оператор, описанный в п. 1°, имеет формальное решение в виде суммы двух рядов

$$w(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} M^k[f(\mathbf{x})] + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} M^k[g(\mathbf{x})],$$

где $f(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$ — произвольные бесконечно дифференцируемые функции. Это решение удовлетворяет начальным условиям: $w(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x})$, $\partial_t w(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x})$.

0.3.2. Линейные неоднородные уравнения

0.3.2-1. Простейшие свойства линейных неоднородных уравнений.

Для краткости линейные неоднородные уравнения с частными производными будем записывать так:

$$\mathfrak{L}[w] = \Phi(\mathbf{x}, t), \tag{5}$$

где линейный дифференциальный оператор $\mathfrak{L}$ описан после уравнения (1).

Отметим простейшие свойства частных решений неоднородного уравнения (5).

1°. Если известно частное решение $\tilde{w}_\Phi(\mathbf{x}, t)$ неоднородного уравнения (5) и частное решение $\tilde{w}_0(\mathbf{x}, t)$ соответствующего однородного уравнения (1), то сумма

$$A\tilde{w}_0(\mathbf{x}, t) + \tilde{w}_\Phi(\mathbf{x}, t),$$

где A — произвольная постоянная, также будет решением неоднородного уравнения (5). Справедливо более общее утверждение: общее решение неоднородного уравнения (5) является суммой общего решения соответствующего однородного уравнения (1) и любого частного решения неоднородного уравнения (5).

2°. Пусть w_1 и w_2 — решения линейных неоднородных уравнений с одинаковой левой и разными правыми частями, т. е.

$$\mathfrak{L}[w_1] = \Phi_1(\mathbf{x}, t), \qquad \mathfrak{L}[w_2] = \Phi_2(\mathbf{x}, t).$$

Тогда функция $w = w_1 + w_2$ будет решением уравнения

$$\mathfrak{L}[w] = \Phi_1(\mathbf{x}, t) + \Phi_2(\mathbf{x}, t).$$

0.3.2-2. Фундаментальные и частные решения стационарных уравнений.

Рассмотрим линейное стационарное неоднородное уравнение второго порядка

$$L_{\mathbf{x}}[w] = \Phi(\mathbf{x}). \tag{6}$$

Здесь $L_{\mathbf{x}}$ — линейный дифференциальный оператор второго (любого) порядка общего вида, коэффициенты которого зависят от $\mathbf{x}$, где $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$.

Фундаментальным решением, соответствующим оператору $L_{\mathbf{x}}$, называется обобщенная функция* $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, которая удовлетворяет уравнению со специальной правой частью

$$L_{\mathbf{x}}[\mathscr{E}] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \tag{7}$$

Здесь $\delta(\mathbf{x})$ — n-мерная дельта-функция, величина $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_n\}$ входит в уравнение (7) как n-мерный свободный параметр. Считается, что $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^n$.

Основные свойства n-мерной дельта-функции:

1. $\delta(\mathbf{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\dots\delta(x_n)$,
2. $\displaystyle\int_{\mathcal{R}^n} \Phi(\mathbf{y})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x})$,

где $\delta(x_k)$ — одномерные дельта-функции, $\Phi(\mathbf{x})$ — любая непрерывная функция, $d\mathbf{y} = dy_1 \dots dy_n$.

Для уравнений с постоянными коэффициентами фундаментальное решение всегда существует. Его можно найти с помощью n-мерного преобразования Фурье [см. В. С. Владимиров (1971, стр. 192–194)].

Частное решение линейного стационарного неоднородного уравнения (6) для произвольной непрерывной функции $\Phi(\mathbf{x})$ выражается с помощью фундаментального решения $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в виде интеграла

$$w(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{R}^n} \Phi(\mathbf{y})\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}. \tag{8}$$

Замечание 1. Фундаментальное решение $\mathscr{E}$ не единственно, оно определяется с точностью до слагаемого $w_0 = w_0(\mathbf{x})$, являющегося произвольным решением однородного уравнения $L_{\mathbf{x}}[w_0] = 0$.

Замечание 2. Для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами фундаментальное решение имеет вид $\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathscr{E}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$.

Замечание 3. Часто перед правыми частями уравнений (6) и (7) ставят знак «минус». В этом случае остается справедливой формула (8).

Замечание 4. Частное решение линейных нестационарных неоднородных уравнений можно выразить через фундаментальное решение задачи Коши, см. разд. 0.6.

⊙ *Литература к разделу 0.3*: Л. Хермандер (1965, 1986), Г. Корн, Т. Корн (1968), В. С. Владимиров (1971, 1976), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972), D. Zwillinger (1989), А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998).

0.4. Метод разделения переменных

0.4.1. Общее описание метода разделения переменных

0.4.1-1. Схема решения линейных краевых задач методом разделения переменных.

Многие линейные задачи математической физики решаются методом разделения переменных. На рис. 1 изображена схема применения этого метода для решения нестационарных краевых задач, описываемых линейными однородными уравнениями второго порядка параболического

* Теория обобщенных функций излагается в книгах В. С. Владимирова (1971, 1976).

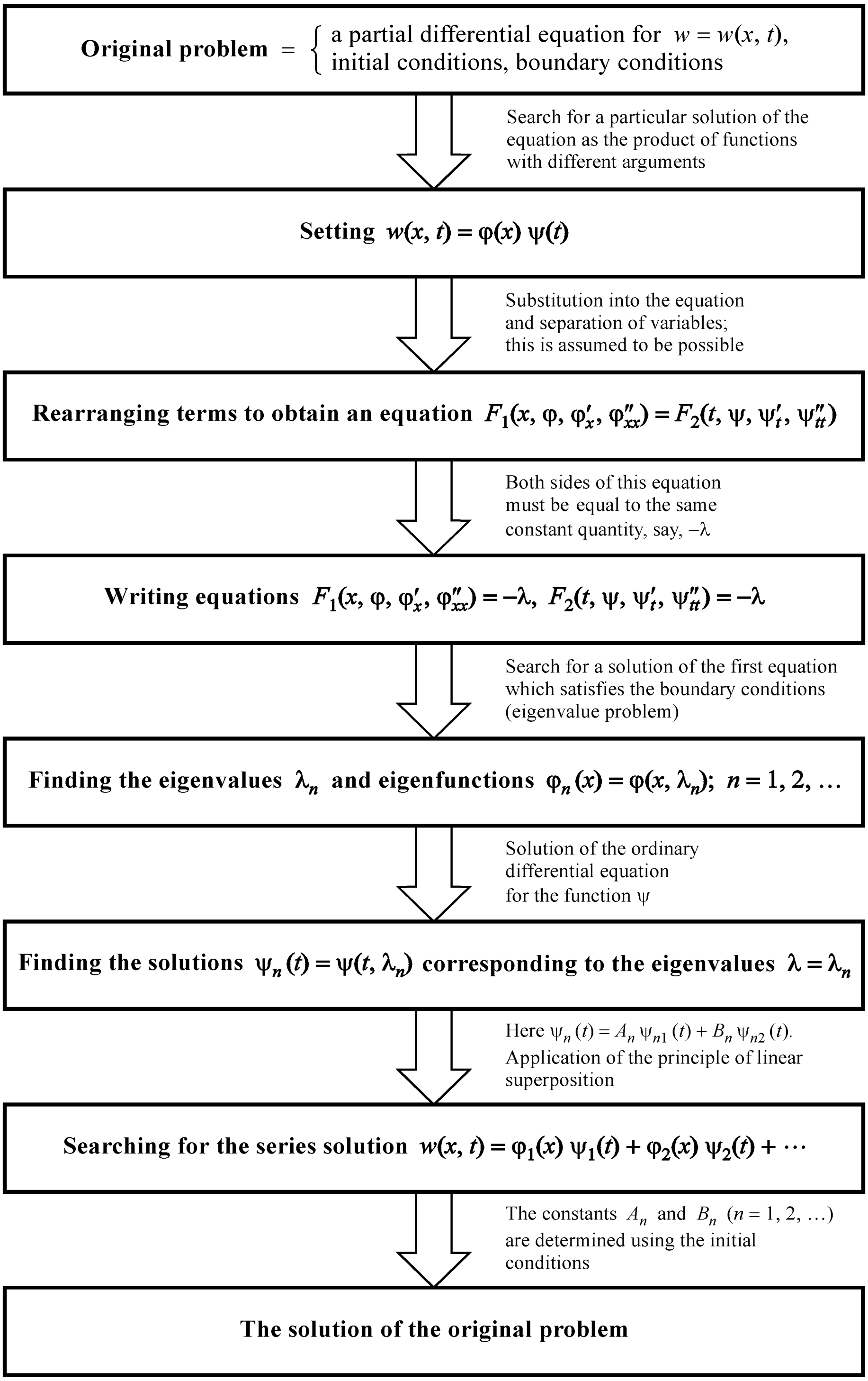

Рис. 1. Схема решения линейных краевых задач методом разделения переменных (для уравнений параболического типа функция F_2 не зависит от ψ''_{tt} и $B_n = 0$).

и гиперболического типов* с однородными граничными условиями и неоднородными начальными условиями. Для простоты рассматриваются задачи с двумя независимыми переменными x и t, где $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ и $t \geqslant 0$.

Задачи, которые можно решить методом разделения переменных по указанной схеме, описываются линейными однородными дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка

$$\alpha(t)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta(t)\frac{\partial w}{\partial t} = a(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial w}{\partial x} + \bigl[c(x) + \gamma(t)\bigr]w \qquad (1)$$

с линейными однородными граничными условиями

$$\begin{aligned} s_1\partial_x w + k_1 w = 0 \quad &\text{при} \quad x = x_1,\\ s_2\partial_x w + k_2 w = 0 \quad &\text{при} \quad x = x_2 \end{aligned} \qquad (2)$$

и произвольными начальными условиями

$$w = f_0(x) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad (3)$$

$$\partial_t w = f_1(x) \quad \text{при} \quad t = 0. \qquad (4)$$

Для уравнений параболического типа, которым соответствует $\alpha(t) \equiv 0$ в (1), выставляется только одно начальное условие (3).

Опишем теперь более подробно основные этапы применения метода разделения переменных. Будем считать, что коэффициенты уравнения (1) и граничных условий (2) удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} &\alpha(t),\ \beta(t),\ \gamma(t),\ a(x),\ b(x),\ c(x) \ \text{— непрерывные функции},\\ &\alpha(t) \geqslant 0, \quad 0 < a(x) < \infty, \quad |s_1| + |k_1| > 0, \quad |s_2| + |k_2| > 0. \end{aligned}$$

0.4.1-2. Поиск частных решений. Получение уравнений и граничных условий.

Метод основан на поиске частных решений уравнения (1) в виде произведения функций разных аргументов

$$w(x,t) = \varphi(x)\,\psi(t). \qquad (5)$$

После разделения переменных и элементарных преобразований для функций $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ получим линейные обыкновенные дифференциальные уравнения

$$a(x)\varphi''_{xx} + b(x)\varphi'_x + [\lambda + c(x)]\varphi = 0, \qquad (6)$$

$$\alpha(t)\psi''_{tt} + \beta(t)\psi'_t + [\lambda - \gamma(t)]\psi = 0, \qquad (7)$$

в которые входит свободный параметр λ. В обозначениях, принятых на рис. 1, уравнения (6) и (7) записываются так: $\varphi F_1(x,\varphi,\varphi'_x,\varphi''_{xx}) + \lambda\varphi = 0$ и $\psi F_2(t,\psi,\psi'_t,\psi''_{tt}) + \lambda\psi = 0$.

Подставив (5) в (2), получим граничные условия для функции $\varphi = \varphi(x)$:

$$\begin{aligned} s_1\varphi'_x + k_1\varphi = 0 \quad &\text{при} \quad x = x_1,\\ s_2\varphi'_x + k_2\varphi = 0 \quad &\text{при} \quad x = x_2. \end{aligned} \qquad (8)$$

Линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение (6) вместе с линейными однородными граничными условиями (8) представляет собой задачу на собственные значения.

0.4.1-3. Решение задачи на собственные значения. Ортогональность собственных функций.

Пусть $\tilde\varphi_1 = \tilde\varphi_1(x,\lambda)$ и $\tilde\varphi_2 = \tilde\varphi_2(x,\lambda)$ — линейно независимые частные решения уравнения (6). Тогда общее решение этого уравнения можно представить в виде линейной комбинации

$$\varphi = C_1\tilde\varphi_1(x,\lambda) + C_2\tilde\varphi_2(x,\lambda), \qquad (9)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Подставим решение (9) в граничные условия (8). В результате для определения коэффициентов C_1 и C_2 получим линейную однородную алгебраическую систему

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(\lambda)C_1 + \varepsilon_{12}(\lambda)C_2 = 0,\\ \varepsilon_{21}(\lambda)C_1 + \varepsilon_{22}(\lambda)C_2 = 0, \end{aligned} \qquad (10)$$

* Метод разделения переменных используется также для решения стационарных краевых задач, описываемых линейными уравнениями эллиптического типа [см. Г. Н. Положий (1964, стр. 417–422), В. Я. Арсенин (1974, стр. 117–120)].

где $\varepsilon_{ij}(\lambda) = \big[s_i(\tilde\varphi_j)'_x + k_i\tilde\varphi_j\big]_{x=x_i}$. Чтобы система (10) имела нетривиальные решения, ее определитель должен быть равен нулю:

$$\varepsilon_{11}(\lambda)\varepsilon_{22}(\lambda) - \varepsilon_{12}(\lambda)\varepsilon_{21}(\lambda) = 0. \tag{11}$$

Решая трансцендентное уравнение (11) находим собственные значения $\lambda = \lambda_n$, где $n = 1,\,2,\,\ldots$ При этих значениях существуют нетривиальные решения уравнения (6):

$$\varphi_n(x) = \varepsilon_{12}(\lambda_n)\tilde\varphi_1(x,\lambda_n) - \varepsilon_{11}(\lambda_n)\tilde\varphi_2(x,\lambda_n), \tag{12}$$

которые называются собственными функциями (эти функции определяется с точностью до постоянного множителя).

Для удобства дальнейшего анализа уравнение (6) представим в виде

$$[p(x)\varphi'_x]'_x + [\lambda\rho(x) - q(x)]\varphi = 0, \tag{13}$$

где функции $p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ определяются по формулам

$$p(x) = \exp\Big[\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx\Big],\quad q(x) = -\frac{c(x)}{a(x)}\exp\Big[\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx\Big],\quad \rho(x) = \frac{1}{a(x)}\exp\Big[\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx\Big]. \tag{14}$$

Из исходных предположений (см. конец разд. 0.4.1-1) следует, что $p(x)$, $p'_x(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ — непрерывные функции, $p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$.

Относительно задачи на собственные значения (13), (8) известно следующее:

1. Все собственные значения λ_1, λ_2, … вещественны и $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$. (Поэтому может быть лишь конечное число отрицательных собственных значений.)

2. Система собственных функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, … является ортогональной на отрезке $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ с весовой функцией $\rho(x)$, т. е.

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m. \tag{15}$$

3. При выполнении условий

$$q(x) \geqslant 0,\quad s_1k_1 \leqslant 0,\quad s_2k_2 \geqslant 0, \tag{16}$$

отрицательных собственных значений нет. Если $q \equiv 0$, $k_1 = k_2 = 0$, то наименьшим собственным значением будет $\lambda_1 = 0$, которому отвечает собственная функция $\varphi_1 = \mathrm{const}$. В остальных случаях при выполнении условий (16) все собственные значения положительны [первое неравенство в (16) выполняется, если $c(x) \leqslant 0$].

В разд. 1.8.9 приведены некоторые формулы для оценки собственных значений λ_n и собственных функций $\varphi_n(x)$.

0.4.2. Решение краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов

0.4.2-1. Решение краевых задач для уравнений параболического типа.

Для уравнений параболического типа в (1) и (7) следует положить $\alpha(t) \equiv 0$. Кроме того будем считать, что $\beta(t) > 0$, $\gamma(t) < \min \lambda_n$.

Сначала находим решения уравнения (7), соответствующие собственным значениям $\lambda = \lambda_n$ и удовлетворяющие условиям нормировки $\psi_n(0) = 1$:

$$\psi_n(t) = \exp\left[\int_0^t \frac{\gamma(\xi) - \lambda_n}{\beta(\xi)}\,d\xi\right]. \tag{17}$$

Решение исходной нестационарной краевой задачи (1)–(3) для уравнения параболического типа ищется в виде

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\varphi_n(x)\,\psi_n(t), \tag{18}$$

где A_n — постоянные коэффициенты, а функции $w_n(x,t) = \varphi_n(x)\,\psi_n(t)$ представляют собой частные решения вида (5), которые удовлетворяют граничным условиям (2). В силу принципа линейной суперпозиции ряд (18) также будет решением исходного уравнения с частными производными, удовлетворяющим граничным условиям.

Для определения коэффициентов A_n подставим ряд (18) в начальное условие (3). В результате имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(x) = f_0(x).$$

Умножим обе части этого равенства на $\rho(x)\varphi_n(x)$ и проинтегрируем полученное выражение по x на отрезке $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Учитывая свойства (15), находим коэффициенты

$$A_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\varphi_n(x) f_0(x)\, dx, \quad \|\varphi_n\|^2 = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\varphi_n^2(x)\, dx. \tag{19}$$

Формула для определения весовой функции $\rho(x)$ приведена в (14).

Формулы (18), (12), (17), (19) дают формальное решение нестационарной краевой задачи (1)–(3) при $\alpha(t) \equiv 0$.

Пример 1. Пусть $\beta(t) = 1$ и $\gamma(t) = 0$. Подставляя эти значения в формулу (17), имеем

$$\psi_n(t) = \exp(-\lambda_n t). \tag{20}$$

Если функция $f_0(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и выполнены условия согласования (см. разд. 0.4.2-3), то ряд (18) сходится и допускает почленное дифференцирование (однократное по t и двукратное по x). Формулы (18), (12), (19), (20) в этом случае дают классическое гладкое решение задачи (1)–(3). [Если гладкость функции $f_0(x)$ меньше указанной или не выполняются условия согласования, то ряд (18) может сходится к разрывной функции и будет давать только обобщенное решение.]

0.4.2-2. Решение краевых задач для уравнений гиперболического типа.

Для уравнений гиперболического типа решение краевой задачи (1)–(4) ищется в виде

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \bigl[A_n \psi_{n1}(t) + B_n \psi_{n2}(t)\bigr]. \tag{21}$$

Здесь A_n и B_n — постоянные коэффициенты, а $\psi_{n1}(t)$, $\psi_{n2}(t)$ — частные решения линейного уравнения (7) для функции ψ (при $\lambda = \lambda_n$), которые удовлетворяют условиям

$$\psi_{n1}(0) = 1, \quad \psi'_{n1}(0) = 0; \qquad \psi_{n2}(0) = 0, \quad \psi'_{n2}(0) = 1. \tag{22}$$

Подставим решение (21) в начальные условия (3)–(4). В результате имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(x) = f_0(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} B_n \varphi_n(x) = f_1(x).$$

Умножим эти равенства на $\rho(x)\varphi_n(x)$ и проинтегрируем полученные выражения по x на отрезке $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Учитывая свойства (15), находим коэффициенты ряда (21):

$$A_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\varphi_n(x) f_0(x)\, dx, \quad B_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\varphi_n(x) f_1(x)\, dx, \tag{23}$$

где формула для вычисления величины $\|\varphi_n\|$ приведена в (19).

Формулы (21), (12), (23) дают формальное решение нестационарной краевой задачи (1)–(4) при $\alpha(t) > 0$.

Пример 2. Пусть $\alpha(t) = 1$, $\beta(t) = \gamma(t) = 0$, $\lambda_n > 0$. Решения уравнения (7), удовлетворяющие условиям (22), имеют вид

$$\psi_{n1}(t) = \cos\bigl(\sqrt{\lambda_n}\, t\bigr), \quad \psi_{n2}(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \sin\bigl(\sqrt{\lambda_n}\, t\bigr). \tag{24}$$

Если функции $f_0(x)$ и $f_1(x)$ имеют соответственно три и две непрерывные производные и выполнены условия согласования (см. разд. 0.4.2-3), то ряд (21) сходится и допускает двукратное почленное дифференцирование. Формулы (21), (12), (23), (24) в этом случае дают классическое гладкое решение задачи (1)–(4).

0.4.2-3. Условия согласования граничных и начальных условий.

Уравнения параболического типа, $\alpha(t) \equiv 0$. Пусть функция w имеет непрерывную производную по t и две непрерывных производных по x и является решением задачи (1)–(3). Тогда должны выполняться условия согласования граничных условий (2) и начального условия (3):

$$[s_1 f_0' + k_1 f_0]_{x=x_1} = 0, \quad [s_2 f_0' + k_2 f_0]_{x=x_2} = 0. \tag{25}$$

В двух случаях должны выполняться также дополнительные условия согласования

$$\begin{aligned} &[a(x) f_0'' + b(x) f_0']_{x=x_1} = 0 \quad \text{при} \quad s_1 = 0, \\ &[a(x) f_0'' + b(x) f_0']_{x=x_2} = 0 \quad \text{при} \quad s_2 = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Здесь штрихами обозначены производные по x.

Уравнения гиперболического типа. Пусть функция w является дважды непрерывно дифференцируемым решением задачи (1)–(4). Тогда должны выполняться условия (25) и (26), к которым следует добавить условия согласования граничных условий (2) и начального условия (4):

$$[s_1 f_1' + k_1 f_1]_{x=x_1} = 0, \quad [s_2 f_1' + k_2 f_1]_{x=x_2} = 0.$$

0.4.2-4. Линейные неоднородные уравнения с неоднородными граничными условиями.

Уравнения параболического типа, $\alpha(t) \equiv 0$. Решение краевой задачи, описываемой линейным однородным уравнением параболического типа (1) с линейными однородными граничными условиями (2) и неоднородным начальным условием (3), дается формулами (18), (12), (17), (19). Это решение можно записать в виде

$$w(x,t) = \int_{x_1}^{x_2} G(x,y,t,0) f_0(y)\, dy.$$

Здесь $G(x,y,t,\tau)$ — функция Грина, которая определяется по формуле

$$G(x,y,t,\tau) = \rho(y) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\|\varphi_n\|^2} \psi_n(t,\tau), \tag{27}$$

где $\psi_n = \psi_n(t,\tau)$ — решение уравнения (7) при $\alpha(t) \equiv 0$, $\lambda = \lambda_n$, которое удовлетворяет начальному условию

$$\psi_n = 1 \quad \text{при} \quad t = \tau.$$

Функцию $\psi_n(t,\tau)$ можно найти по формуле (17), где нижний предел интегрирования должен быть равен τ (вместо нуля).

Решение более общих краевых задач, описываемых соответствующими линейными неоднородными уравнениями с неоднородными граничными и начальными условиями, проще всего получить с помощью функции Грина (27) по формуле (6) из разд. 0.7.1.

Уравнения гиперболического типа. Решение краевой задачи, описываемой линейным однородным уравнением гиперболического типа (1) с линейными однородными граничными условиями (2) и полуоднородными начальными условиями (3)–(4) при $f_0(x) \equiv 0$, дается формулами (21), (12), (23) при $A_n = 0$ ($n = 1,\ 2,\ \ldots$). Это решение можно записать в виде

$$w(x,t) = \int_{x_1}^{x_2} G(x,y,t,0) f_1(y)\, dy.$$

Здесь $G(x,y,t,\tau)$ — функция Грина, которая определяется по формуле (27), где $\psi_n = \psi_n(t,\tau)$ — решение уравнения (7) для функции ψ при $\lambda = \lambda_n$, которое удовлетворяет начальным условиям

$$\psi_n = 0 \quad \text{при} \quad t = \tau, \qquad \psi_n' = 1 \quad \text{при} \quad t = \tau.$$

В частном случае $\alpha(t) = 1$, $\beta(t) = \gamma(t) = 0$ имеем $\psi_n(t,\tau) = \lambda_n^{-1/2} \sin\bigl[\lambda_n^{1/2}(t-\tau)\bigr]$.

Решение более общих краевых задач, описываемых соответствующими линейными неоднородными уравнениями с неоднородными граничными и начальными условиями, проще всего получить с помощью функции Грина (27) по формуле (14) из разд. 0.7.2.

⦿ *Литература к разделу 0.4*: И. Г. Петровский (1961), В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), E. Butkov (1968), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972), D. Zwillinger (1989).

0.5. Метод интегральных преобразований

0.5.1. Основные интегральные преобразования

Для решения линейных задач математической физики широко используются различные интегральные преобразования.

Интегральные преобразования имеют вид

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_a^b \varphi(x,\lambda) f(x)\,dx.$$

Функция $f(x)$ называется оригиналом, $\tilde{f}(\lambda)$ — изображением функции $f(x)$, $\varphi(x,\lambda)$ — ядром интегрального преобразования. Пределы интегрирования a и b — действительные числа (обычно $a=0$, $b=\infty$ или $a=-\infty$, $b=\infty$).

Соответствующие формулы обращения

$$f(x) = \int_{\mathcal{L}} \psi(x,\lambda)\tilde{f}(\lambda)\,d\lambda$$

позволяют по заданному изображению $\tilde{f}(\lambda)$ восстановить оригинал $f(x)$. Контур интегрирования $\mathcal{L}$ может лежать как на действительной оси, так и в комплексной плоскости.

Наиболее распространенные интегральные преобразования указаны в табл. 3 (об ограничениях, накладываемых на функции и параметры преобразований, см. в литературе, приведенной в конце разд. 0.5).

ТАБЛИЦА 3
Основные интегральные преобразования.

Название	Интегральное преобразование	Формула обращения
Преобразование Лапласа	$\widetilde{f}(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt$	$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt}\widetilde{f}(p)\,dp$
Преобразование Фурье	$\widetilde{f}(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux}f(x)\,dx$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\widetilde{f}(u)\,du$
Синус-преобразование Фурье	$\widetilde{f}_{\mathrm{s}}(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin(xu)f(x)\,dx$	$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin(xu)\widetilde{f}_{\mathrm{s}}(u)\,du$
Косинус-преобразование Фурье	$\widetilde{f}_{\mathrm{c}}(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos(xu)f(x)\,dx$	$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos(xu)\widetilde{f}_{\mathrm{c}}(u)\,du$
Преобразование Меллина	$\widehat{f}(s)=\int_0^\infty x^{s-1}f(x)\,dx$	$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s}\widehat{f}(s)\,ds$
Преобразование Ханкеля	$\widehat{f}_\nu(u)=\int_0^\infty xJ_\nu(xu)f(x)\,dx$	$f(x)=\int_0^\infty uJ_\nu(xu)\widehat{f}_\nu(u)\,du$
Преобразование Мейера	$\widehat{f}(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sqrt{sx}\,K_\nu(sx)f(x)\,dx$	$f(x)=\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sqrt{sx}\,I_\nu(sx)\widehat{f}(s)\,ds$

Обозначения: $i^2=-1$, $J_\mu(x)$ и $Y_\mu(x)$ — функции Бесселя первого и второго рода, $I_\mu(x)$ и $K_\mu(x)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода.

Наиболее распространенными интегральными преобразованиями являются преобразования Лапласа и Фурье. Ниже дано краткое описание этих интегральных преобразований.

0.5.2. Преобразование Лапласа и его применение в математической физике

0.5.2-1. Преобразование Лапласа. Обратное преобразование Лапласа.

Преобразование Лапласа для произвольной (комплекснозначной) функции $f(t)$ действительного переменного t ($t \geqslant 0$) определяется следующим образом:

$$\tilde{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt, \tag{1}$$

где $p = s + i\sigma$ — комплексная переменная, $i^2 = -1$.

Преобразование Лапласа существует для непрерывных и кусочно-непрерывных функций, удовлетворяющих условию $|f(t)| < Me^{\sigma_0 t}$, где $M > 0$ и $\sigma_0 \geqslant 0$ — некоторые числа. Далее считаем, что в указанной оценке взято наименьшее из возможных чисел σ_0, которое называется показателем роста функции $f(t)$. Для всякого оригинала $f(t)$ функция $\tilde{f}(p)$ определена в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией.

По известному изображению $\tilde{f}(p)$ оригинал $f(t)$ находится с помощью обратного преобразования Лапласа

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(p)e^{pt}\,dp, \tag{2}$$

где путь интегрирования расположен параллельно мнимой оси комплексной плоскости справа от всех особых точек функции $\tilde{f}(p)$, что соответствует $c > \sigma_0$.

Интеграл в (2) понимается в смысле главного значения:

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(p)e^{pt}\,dp = \lim_{\omega\to\infty}\int_{c-i\omega}^{c+i\omega} \tilde{f}(p)e^{pt}\,dp.$$

В области $t < 0$ формула (2) дает $f(t) \equiv 0$.

Формула (2) справедлива для непрерывных функций. Если в точке $t = t_0 > 0$ функция $f(t)$ имеет конечный разрыв первого рода, то правая часть формулы (2) в этой точке дает значение $\frac{1}{2}[f(t_0 - 0) + f(t_0 + 0)]$ (при $t_0 = 0$ первый член в квадратных скобках должен быть опущен).

Преобразование Лапласа (1) и формулу обращения (2) кратко будем обозначать так:

$$\tilde{f}(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}, \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(p)\}.$$

0.5.2-2. Основные свойства преобразования Лапласа.

В табл. 4 приведены основные формулы соответствия оригиналов и изображений преобразования Лапласа. В табл. 5 указаны преобразования Лапласа некоторых функций.

ТАБЛИЦА 4
Основные свойства преобразования Лапласа.

№	Оригинал	Изображение	Операция
1	$af_1(t) + bf_2(t)$	$a\tilde{f}_1(p) + b\tilde{f}_2(p)$	Линейность
2	$f(t/a),\ a > 0$	$a\tilde{f}(ap)$	Изменение масштаба
3	$t^n f(t);\ n = 1, 2, \ldots$	$(-1)^n \tilde{f}_p^{(n)}(p)$	Дифференцирование изображения
4	$e^{at} f(t)$	$\tilde{f}(p-a)$	Смещение в комплексной плоскости
5	$f'_t(t)$	$p\tilde{f}(p) - f(+0)$	Дифференцирование
6	$f_t^{(n)}(t)$	$p^n\tilde{f}(p) - \sum\limits_{k=1}^{n} p^{n-k} f_t^{(k-1)}(+0)$	Дифференцирование
7	$t^m f_t^{(n)}(t),\ \ m \geqslant n$	$(-1)^m \bigl[p^n \tilde{f}(p)\bigr]_p^{(m)}$	Дифференцирование
8	$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{p}\tilde{f}(p)$	Интегрирование
9	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau$	$\tilde{f}_1(p)\tilde{f}_2(p)$	Свертка

ТАБЛИЦА 5
Преобразования Лапласа некоторых функций.

№	Оригинал, $f(t)$	Изображение, $\tilde{f}(p)$	Замечания
1	1	$\dfrac{1}{p}$	—
2	t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$n=1,\,2,\,\ldots$
3	t^a	$\Gamma(a+1)p^{-a-1}$	$a>-1$
4	e^{-at}	$(p+a)^{-1}$	—
5	$t^a e^{-bt}$	$\Gamma(a+1)(p+b)^{-a-1}$	$a>-1$
6	$\operatorname{sh}(at)$	$\dfrac{a}{p^2-a^2}$	—
7	$\operatorname{ch}(at)$	$\dfrac{p}{p^2-a^2}$	—
8	$\ln t$	$-\dfrac{1}{p}(\ln p+\mathcal{C})$	$\mathcal{C}=0{,}5772\ldots$ — постоянная Эйлера
9	$\sin(at)$	$\dfrac{a}{p^2+a^2}$	—
10	$\cos(at)$	$\dfrac{p}{p^2+a^2}$	—
11	$\operatorname{erfc}\Bigl(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\Bigr)$	$\dfrac{1}{p}\exp\bigl(-a\sqrt{p}\bigr)$	$a\geqslant 0$
12	$J_0(at)$	$\dfrac{1}{\sqrt{p^2+a^2}}$	$J_0(x)$ — функция Бесселя

Существуют подробные таблицы прямых и обратных преобразований Лапласа (см. литературу в конце разд. 0.5), в которых сведены вместе конкретные функции и их изображения. Эти таблицы удобно использовать для решения линейных дифференциальных и интегральных уравнений.

Отметим важный случай, когда изображение является рациональной функцией вида

$$\tilde{f}(p)=\frac{R(p)}{Q(p)},$$

где $Q(p)$ и $R(p)$ — многочлены переменной p, причем степень многочлена $Q(p)$ больше степени многочлена $R(p)$. Считаем, что все нули знаменателя простые, т. е. справедливо равенство $Q(p)\equiv \mathrm{const}\,(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)\ldots(p-\lambda_n)$. Тогда оригинал можно определить по формуле

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{R(\lambda_k)}{Q'(\lambda_k)}\exp(\lambda_k t),$$

где штрихом обозначены производные.

0.5.2-3. Решение задач математической физики с помощью преобразования Лапласа.

На рис. 2 изображена схема применения преобразования Лапласа для решения линейных краевых задач, описываемых уравнениями параболического и гиперболического типов с двумя независимыми переменными, коэффициенты которых не зависят от t.

Важно отметить, что с помощью преобразования Лапласа исходная задача для уравнения с частными производными сводится к более простой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром p. При этом производные по времени t заменяются соответствующими алгебраическими выражениями с учетом начальных условий (см. свойства 5 или 6 в табл. 4).

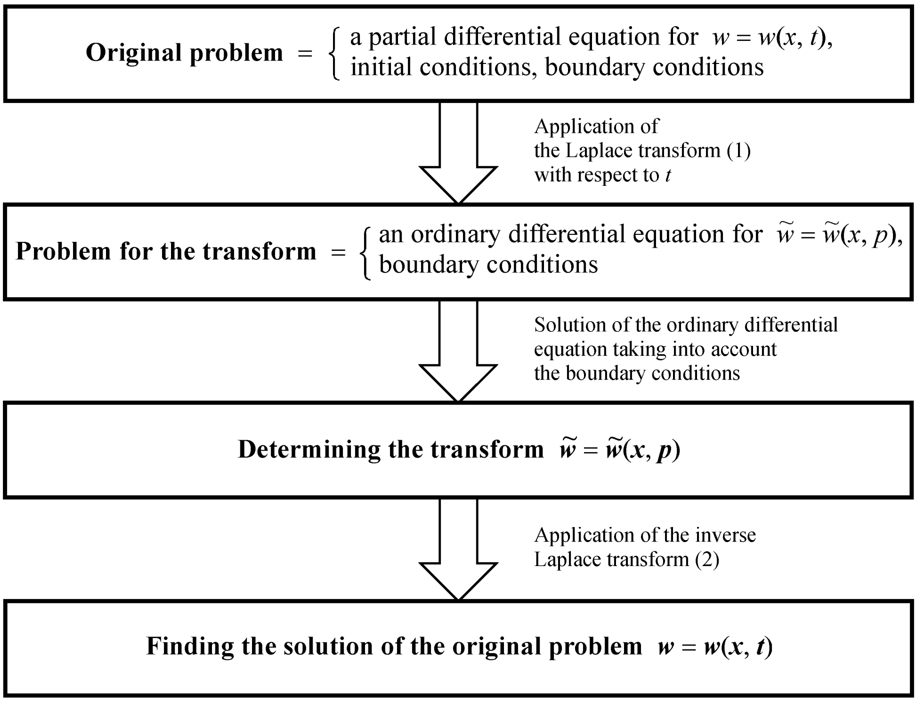

Рис. 2. Схема решения линейных краевых задач с помощью преобразования Лапласа.

Пример 1. Рассмотрим задачу для уравнения теплопроводности

$$
\begin{array}{lll}
& \partial_t w = \partial_{xx} w, & (x > 0,\ t > 0), \\
w = 0 & \text{при} \quad t = 0 & (\text{начальное условие}), \\
w = w_0 & \text{при} \quad x = 0 & (\text{граничное условие}), \\
w \to 0 & \text{при} \quad x \to \infty & (\text{граничное условие}).
\end{array}
$$

Для решения используем преобразование Лапласа по времени t. Полагая $\tilde{w} = \mathcal{L}\{w\}$ и учитывая соотношения

$$\mathcal{L}\{\partial_t w\} = p\tilde{w} - w|_{t=0} = p\tilde{w} \quad [\text{использовано свойство 5 из табл. 4 и начальное условие}],$$
$$\mathcal{L}\{w_0\} = w_0 \mathcal{L}\{1\} = w_0/p \quad [\text{использовано свойство 1 из табл. 4 и равенство } \mathcal{L}\{1\} = 1/p],$$

приходим к задаче для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с параметром p:

$$
\begin{array}{lll}
& \tilde{w}''_{xx} - p\tilde{w} = 0, & \\
\tilde{w} = w_0/p & \text{при} \quad x = 0 & (\text{граничное условие}), \\
\tilde{w} \to 0 & \text{при} \quad x \to \infty & (\text{граничное условие}).
\end{array}
$$

Интегрируя уравнение, получим общее решение $\tilde{w} = A_1(p)e^{-x\sqrt{p}} + A_2(p)e^{x\sqrt{p}}$. Удовлетворяя граничным условиям, определим постоянные $A_1(p) = w_0/p$, $A_2(p) = 0$. В результате находим изображение

$$\tilde{w} = \frac{w_0}{p} e^{-x\sqrt{p}}.$$

Применим к обеим частям этого равенства обратное преобразование Лапласа. Оригинал правой части определим с помощью табл. 5 (см. строку № 11 при $a = x$). В итоге получим решение исходной задачи

$$w = w_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right).$$

ТАБЛИЦА 6
Основные свойства преобразования Фурье.

№	Оригинал	Изображение	Операция
1	$af_1(x)+bf_2(x)$	$a\tilde{f}_1(u)+b\tilde{f}_2(u)$	Линейность
2	$f(x/a),\ a>0$	$a\tilde{f}(au)$	Изменение масштаба
3	$x^n f(x);\ n=1,2,\ldots$	$i^n\tilde{f}_u^{(n)}(u)$	Дифференцирование изображения
4	$f''_{xx}(x)$	$-u^2\tilde{f}(u)$	Дифференцирование
5	$f_x^{(n)}(x)$	$(iu)^n\tilde{f}(u)$	Дифференцирование
6	$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)f_2(x-\xi)\,d\xi$	$\tilde{f}_1(u)\tilde{f}_2(u)$	Свертка

0.5.3. Преобразование Фурье и его применение в математической физике

0.5.3-1. Преобразование Фурье и его свойства.

Преобразование Фурье определяется следующим образом:

$$\tilde{f}(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}\,dx, \qquad i^2=-1. \tag{3}$$

Эта формула имеет смысл для любой функции $f(x)$, абсолютно интегрируемой на интервале $(\infty,+\infty)$. Преобразование Фурье (3) кратко будем обозначать так: $\tilde{f}(u)=\mathcal{F}\{f(x)\}$.

По известному изображению $\tilde{f}(u)$ оригинал $f(x)$ находится с помощью обратного преобразования Фурье

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(u)e^{iux}\,du, \tag{4}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Формулу обращения (4) кратко будем обозначать так: $f(x)=\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f}(u)\}$.

Формула (4) справедлива для непрерывных функций. Если в точке $x=x_0$ функция $f(x)$ имеет конечный разрыв первого рода, то правая часть формулы (4) в этой точке дает значение $\frac{1}{2}\big[f(x_0-0)+f(x_0+0)\big]$.

В табл. 6 приведены основные формулы соответствия оригиналов и изображений преобразования Фурье.

0.5.3-2. Решение задач математической физики с помощью преобразования Фурье.

Преобразование Фурье обычно используется для решения краевых задач, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с частными производными, коэффициенты которых не зависят от пространственной переменной x $(-\infty<x<\infty)$.

Схема решения линейных краевых задач с помощью преобразования Фурье аналогична схеме, используемой при решении задач с помощью преобразования Лапласа. При преобразовании Фурье производные по переменной x в уравнении заменяются соответствующими алгебраическими выражениями (см. свойства 4 или 5 в табл. 6). В случае двух независимых переменных задача для уравнения с частными производными сводится к более простой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром u. Решив эту задачу, находят изображение. Затем, используя обратное преобразование Фурье, получают решение исходной краевой задачи.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\partial_t w=\partial_{xx} w \qquad (-\infty<x<\infty),$$
$$w=f(x) \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{(начальное условие)}.$$

Для решения используем преобразование Фурье по пространственной переменной x. Полагая $\tilde{w}=\mathcal{F}\{w\}$ и учитывая соотношение $\mathcal{F}\{\partial_{xx}w\}=-u^2\tilde{w}$ (см. свойство 4 в табл. 6) приходим к задаче для линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с параметром u:

$$\tilde{w}'_t+u^2\tilde{w}=0,$$
$$w=\tilde{f}(u) \quad \text{при} \quad t=0,$$

где $\tilde{f}(u)$ определяется формулой (3). Решив эту задачу, находим изображение

$$\tilde{w} = \tilde{f}(u)e^{-u^2 t}.$$

Применим к обеим частям этого равенства обратное преобразование Фурье. После некоторых вычислений получим решение исходной задачи:

$$w = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(u)e^{-u^2 t} e^{iux}\, du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-iu\xi} d\xi\right] e^{-u^2 t + iux} du =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2 t + iu(x-\xi)} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \exp\Bigl[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\Bigr]\, d\xi.$$

Здесь на последнем этапе была использована формула $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2u^2 + bu)\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{|a|} \exp\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)$.

Преобразование Фурье допускает n-мерное обобщение:

$$\tilde{f}(\mathbf{u}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathcal{R}^n} f(\mathbf{x})e^{-i(\mathbf{u}\cdot\mathbf{x})}\, d\mathbf{x}, \qquad (\mathbf{u}\cdot\mathbf{x}) = u_1x_1 + \cdots + u_nx_n, \tag{5}$$

где $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$, $\tilde{f}(\mathbf{u}) = f(u_1, \ldots, u_n)$, $d\mathbf{x} = dx_1 \ldots dx_n$.

Соответствующее обратное преобразование Фурье имеет вид

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathcal{R}^n} \tilde{f}(\mathbf{u})e^{i(\mathbf{u}\cdot\mathbf{x})}\, d\mathbf{u}, \qquad d\mathbf{u} = du_1 \ldots du_n.$$

Преобразование Фурье (5) часто используется в теории линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами ($\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$).

⊙ *Литература к разделу 0.5*: И. Снеддон (1955), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1965, 1974), Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1969, 1970), J. W. Miles (1971), Г. Дёч (1971), А. В. Бицадзе (1978, стр. 246–265), B. Davis (1978), Yu. A. Brychkov, A. P. Prudnikov (1989), D. Zwillinger (1989), W. H. Beyer (1991), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999).

0.6. Представление решения задачи Коши через фундаментальное решение

0.6.1. Задача Коши для уравнений параболического типа

0.6.1-1. Общая формула для решения задачи Коши.

Пусть $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$, где $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ и $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^n$.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение параболического типа с произвольной правой частью

$$\frac{\partial w}{\partial t} - L_{\mathbf{x},t}[w] = \Phi(\mathbf{x}, t), \tag{1}$$

где линейный дифференциальный оператор второго порядка $L_{\mathbf{x},t}$ определяется выражением (2) из разд. 0.2.1.

Решение задачи Коши для уравнения (1) с произвольным начальным условием

$$w = f(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0$$

можно представить в виде суммы двух интегралов

$$w(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_{\mathcal{R}^n} \Phi(\mathbf{y}, \tau)\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau)\, d\mathbf{y}\, d\tau + \int_{\mathcal{R}^n} f(\mathbf{y})\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, 0)\, d\mathbf{y}, \qquad d\mathbf{y} = dy_1 \ldots dy_n.$$

Здесь $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau)$ — фундаментальное решение задачи Коши, которое при $t > \tau \geqslant 0$ удовлетворяет линейному однородному уравнению

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} - L_{\mathbf{x},t}[\mathscr{E}] = 0 \tag{2}$$

с неоднородным начальным условием специального вида

$$\mathscr{E} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \text{при} \quad t = \tau. \tag{3}$$

В задачу (2)–(3) величины τ и $\mathbf{y}$ входят как свободные параметры, а $\delta(\mathbf{x}) = \delta(x_1) \ldots \delta(x_n)$ — n-мерная дельта-функция.

Замечание 1. Если коэффициенты дифференциального оператора $L_{\mathbf{x},t}$ в (2) не зависят от времени t, то фундаментальное решение задачи Коши имеет вид $\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau) = \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau)$.

Замечание 2. Для дифференциального оператора $L_{\mathbf{x},t}$ с постоянными коэффициентами фундаментальное задачи Коши решение имеет вид $\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau) = \mathscr{E}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau)$.

0.6.1-2. Фундаментальное решение, допускающее неполное разделение переменных.

Рассмотрим специальный случай, когда дифференциальный оператор $L_{\mathbf{x},t}$ в уравнении (1) можно представить в виде суммы

$$L_{\mathbf{x},t}[w] = L_{1,t}[w] + \dots + L_{n,t}[w], \tag{4}$$

где каждое слагаемое зависит только от одной пространственной координаты и времени

$$L_{k,t}[w] \equiv a_k(x_k,t)\frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} + b_k(x_k,t)\frac{\partial w}{\partial x_k} + c_k(x_k,t)w, \qquad k = 1,\,\dots,\,n.$$

Уравнения этого вида часто встречаются в приложениях. Фундаментальное решение задачи Коши для n-мерного уравнения (1) с оператором (4) можно представить в виде произведения

$$\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau) = \prod_{k=1}^{n} \mathscr{E}_k(x_k,y_k,t,\tau), \tag{5}$$

где $\mathscr{E}_k = \mathscr{E}_k(x_k,y_k,t,\tau)$ — фундаментальные решения, которые удовлетворяют одномерным уравнениям

$$\frac{\partial \mathscr{E}_k}{\partial t} - L_{k,t}[\mathscr{E}_k] = 0 \qquad (k = 1,\,\dots,\,n)$$

с начальными условиями

$$\mathscr{E}_k = \delta(x_k - y_k) \quad \text{при} \quad t = \tau.$$

В данном случае фундаментальное решение задачи Коши (5) допускает неполное разделение переменных (оно разделяется по пространственным переменным $x_1,\,\dots,\,x_n$, но не разделяется по времени t).

0.6.2. Задача Коши для уравнений гиперболического типа

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение гиперболического типа с произвольной правой частью

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varphi(\mathbf{x},t)\frac{\partial w}{\partial t} - L_{\mathbf{x},t}[w] = \Phi(\mathbf{x},t) \tag{6}$$

где линейный дифференциальный оператор второго порядка $L_{\mathbf{x},t}$ определяется выражением (2) из разд. 0.2.1, $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$.

Решение задачи Коши для уравнения (6) с общими начальными условиями

$$w = f_0(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0,$$
$$\partial_t w = f_1(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0$$

можно представить в виде суммы

$$w(\mathbf{x},t) = \int_0^t \int_{\mathcal{R}^n} \Phi(\mathbf{y},\tau)\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\,d\mathbf{y}\,d\tau - \int_{\mathcal{R}^n} f_0(\mathbf{y})\Big[\frac{\partial}{\partial \tau}\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\Big]_{\tau=0} d\mathbf{y} +$$
$$+ \int_{\mathcal{R}^n} \big[f_1(\mathbf{y}) + f_0(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y},0)\big]\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,0)\,d\mathbf{y}, \qquad d\mathbf{y} = dy_1\dots dy_n.$$

Здесь $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)$ — фундаментальное решение задачи Коши, которое при $t > \tau \geqslant 0$ удовлетворяет линейному однородному уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial t^2} + \varphi(\mathbf{x},t)\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} - L_{\mathbf{x},t}[\mathscr{E}] = 0 \tag{7}$$

с полуоднородными начальными условиями специального вида

$$\begin{aligned} \mathscr{E} &= 0 && \text{при} \quad t = \tau,\\ \partial_t \mathscr{E} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) && \text{при} \quad t = \tau. \end{aligned} \tag{8}$$

В задачу (7)–(8) величины τ и $\mathbf{y}$ входят как свободные параметры ($\mathbf{y} \in \mathcal{R}^n$).

Замечание 1. Если коэффициенты дифференциального оператора $L_{\mathbf{x},t}$ в (7) не зависят от времени t, то фундаментальное решение задачи Коши имеет вид $\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau) = \mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)$. В этом случае $\frac{\partial}{\partial \tau}\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\big|_{\tau=0} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$.

Замечание 2. Для дифференциального оператора $L_{\mathbf{x},t}$ с постоянными коэффициентами фундаментальное решение задачи Коши имеет вид $\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau) = \mathscr{E}(\mathbf{x}-\mathbf{y},t-\tau)$.

⊙ *Литература к разделу 0.6*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), Г. Е. Шилов (1965), А. Д. Полянин (2000 *b*, *c*).

0.7. Неоднородные краевые задачи с одной пространственной переменной. Представление решения через функцию Грина

0.7.1. Задачи для уравнений параболического типа

0.7.1-1. Постановка задачи ($t \geqslant 0,\ x_1 \leqslant x \leqslant x_2$).

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение параболического типа с переменными коэффициентами общего вида в одномерном случае записывается так:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - L_{x,t}[w] = \Phi(x,t), \tag{1}$$

где

$$L_{x,t}[w] \equiv a(x,t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial w}{\partial x} + c(x,t)w, \qquad a(x,t) > 0. \tag{2}$$

Рассмотрим нестационарную краевую задачу для уравнения (1) с начальным условием общего вида

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{3}$$

и произвольными линейными неоднородными граничными условиями

$$s_1\frac{\partial w}{\partial x} + k_1(t)w = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = x_1, \tag{4}$$

$$s_2\frac{\partial w}{\partial x} + k_2(t)w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = x_2. \tag{5}$$

Задавая соответствующим образом значения коэффициентов s_1, s_2 и функции $k_1 = k_1(t)$, $k_2 = k_2(t)$ в (4) и (5) можно получить первую, вторую, третью и смешанные краевые задачи для уравнения (1).

0.7.1-2. Представление решения задачи через функцию Грина.

Решение линейной неоднородной краевой задачи (1)–(5) можно представить в виде суммы

$$\begin{aligned} w(x,t) = \int_0^t\int_{x_1}^{x_2}\Phi(y,\tau)G(x,y,t,\tau)\,dy\,d\tau + \int_{x_1}^{x_2} f(y)G(x,y,t,0)\,dy + \\ + \int_0^t g_1(\tau)a(x_1,\tau)\Lambda_1(x,t,\tau)\,d\tau + \int_0^t g_2(\tau)a(x_2,\tau)\Lambda_2(x,t,\tau)\,d\tau. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $G(x,y,t,\tau)$ — функция Грина, которая при $t > \tau \geqslant 0$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial t} - L_{x,t}[G] = 0 \tag{7}$$

с неоднородным начальным условием специального вида

$$G = \delta(x-y) \quad \text{при} \quad t = \tau \tag{8}$$

и однородными граничными условиями:

$$s_1\frac{\partial G}{\partial x} + k_1(t)G = 0 \quad \text{при} \quad x = x_1, \tag{9}$$

$$s_2\frac{\partial G}{\partial x} + k_2(t)G = 0 \quad \text{при} \quad x = x_2. \tag{10}$$

В задачу (7)–(10) величины y и τ входят как свободные параметры ($x_1 \leqslant y \leqslant x_2$), $\delta(x)$ — дельта-функция.

Начальное условие (8) означает, что для любой непрерывной функции $f = f(x)$ имеет место предельное соотношение

$$f(x) = \lim_{t\to\tau}\int_{x_1}^{x_2} f(y)G(x,y,t,\tau)\,dy.$$

ТАБЛИЦА 7
Выражения для функций $\Lambda_1(x,t,\tau)$ и $\Lambda_2(x,t,\tau)$, входящих в подынтегральные выражения двух последних слагаемых в решении (6).

Тип задачи	Вид граничных условий	Функции $\Lambda_m(x,t,\tau)$
Первая краевая задача ($s_1=s_2=0,\ k_1=k_2=1$)	$w=g_1(t)$ при $x=x_1$ $w=g_2(t)$ при $x=x_2$	$\Lambda_1(x,t,\tau)=\partial_y G(x,y,t,\tau)\big\|_{y=x_1}$ $\Lambda_2(x,t,\tau)=-\partial_y G(x,y,t,\tau)\big\|_{y=x_2}$
Вторая краевая задача ($s_1=s_2=1,\ k_1=k_2=0$)	$\partial_x w=g_1(t)$ при $x=x_1$ $\partial_x w=g_2(t)$ при $x=x_2$	$\Lambda_1(x,t,\tau)=-G(x,x_1,t,\tau)$ $\Lambda_2(x,t,\tau)=G(x,x_2,t,\tau)$
Третья краевая задача ($s_1=s_2=1,\ k_1<0,\ k_2>0$)	$\partial_x w+k_1w=g_1(t)$ при $x=x_1$ $\partial_x w+k_2w=g_2(t)$ при $x=x_2$	$\Lambda_1(x,t,\tau)=-G(x,x_1,t,\tau)$ $\Lambda_2(x,t,\tau)=G(x,x_2,t,\tau)$
Смешанная краевая задача ($s_1=k_2=0,\ s_2=k_1=1$)	$w=g_1(t)$ при $x=x_1$ $\partial_x w=g_2(t)$ при $x=x_2$	$\Lambda_1(x,t,\tau)=\partial_y G(x,y,t,\tau)\big\|_{y=x_1}$ $\Lambda_2(x,t,\tau)=G(x,x_2,t,\tau)$
Смешанная краевая задача ($s_1=k_2=1,\ s_2=k_1=0$)	$\partial_x w=g_1(t)$ при $x=x_1$ $w=g_2(t)$ при $x=x_2$	$\Lambda_1(x,t,\tau)=-G(x,x_1,t,\tau)$ $\Lambda_2(x,t,\tau)=-\partial_y G(x,y,t,\tau)\big\|_{y=x_2}$

Функции $\Lambda_1(x,t,\tau)$ и $\Lambda_2(x,t,\tau)$, входящие в подынтегральные выражения двух последних слагаемых в решении (6), выражаются через функцию Грина $G(x,y,t,\tau)$. Для основных типов краевых задач соответствующие формулы для $\Lambda_m(x,t,\tau)$ даны в табл. 7.

Важно подчеркнуть, что функция Грина G и функции Λ_1 и Λ_2 не зависят от функций Φ, f, g_1, g_2, характеризующих различные неоднородности краевой задачи.

Если коэффициенты уравнения (1)–(2) и коэффициенты k_1 и k_2 в граничных условиях (4) и (5) не зависят от времени t, т. е. выполнены условия

$$a=a(x),\quad b=b(x),\quad c=c(x),\quad k_1=\text{const},\quad k_2=\text{const}, \tag{11}$$

то функция Грина зависит только от трех аргументов

$$G(x,y,t,\tau)=G(x,y,t-\tau).$$

В этом случае функции Λ_m зависят от двух аргументов $\Lambda_m=\Lambda_m(x,t-\tau)$, $m=1,\ 2$.

Формула (6) остается справедливой также для задачи с граничными условиями третьего рода, если $k_1=k_1(t)$, $k_2=k_2(t)$. При этом связь между функциями Λ_m ($m=1,\ 2$) и функцией Грина G будет такой же, как и для случая постоянных k_1 и k_2 (сама функция Грина будет другой).

Для первой, второй и третьей краевой задачи, которые рассматриваются на полуинтервале $x_1\leqslant x<\infty$, часто выставляется условие затухания решения на бесконечности ($w\to 0$ при $x\to\infty$). В этом случае решение можно найти по формуле (6) при $\Lambda_2=0$, где выражение для функции Λ_1 указано в табл. 7.

0.7.2. Задачи для уравнений гиперболического типа

0.7.2-1. Постановка задачи ($t\geqslant 0,\ x_1\leqslant x\leqslant x_2$).

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение гиперболического типа с переменными коэффициентами общего вида в одномерном случае записывается так:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\varphi(x,t)\frac{\partial w}{\partial t}-L_{x,t}[w]=\Phi(x,t), \tag{12}$$

где выражение для оператора $L_{x,t}[w]$ приведено в (2).

Рассмотрим нестационарную краевую задачу для уравнения (12) с начальными условиями

$$\begin{aligned} w&=f_0(x) \quad \text{при} \quad t=0,\\ \partial_t w&=f_1(x) \quad \text{при} \quad t=0 \end{aligned} \tag{13}$$

и произвольными линейными неоднородными граничными условиями (4)–(5).

0.7.2-2. Представление решения задачи через функцию Грина.

Решение задачи (12), (13), (4), (5) можно представить в виде суммы

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} \Phi(y,\tau) G(x,y,t,\tau)\,dy\,d\tau - \\ &- \int_{x_1}^{x_2} f_0(y) \Big[\frac{\partial}{\partial\tau} G(x,y,t,\tau)\Big]_{\tau=0} dy + \int_{x_1}^{x_2} \big[f_1(y) + f_0(y)\varphi(y,0)\big] G(x,y,t,0)\,dy + \\ &+ \int_0^t g_1(\tau) a(x_1,\tau) \Lambda_1(x,t,\tau)\,d\tau + \int_0^t g_2(\tau) a(x_2,\tau) \Lambda_2(x,t,\tau)\,d\tau. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь $G(x,y,t,\tau)$ — функция Грина, которая определяется путем решения однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \varphi(x,t)\frac{\partial G}{\partial t} - L_{x,t}[G] = 0 \tag{15}$$

с полуоднородными начальными условиями

$$G = 0 \quad \text{при} \quad t = \tau, \tag{16}$$

$$\partial_t G = \delta(x-y) \quad \text{при} \quad t = \tau \tag{17}$$

и однородными граничными условиями (9) и (10). В задачу (15)–(17), (9), (10) величины y и τ входят как свободные параметры ($x_1 \leqslant y \leqslant x_2$), $\delta(x)$ — дельта-функция.

Функции $\Lambda_1(x,t,\tau)$ и $\Lambda_2(x,t,\tau)$, входящие в подынтегральные выражения двух последних слагаемых в решении (14), выражаются через функцию Грина $G(x,y,t,\tau)$. Для основных типов краевых задач соответствующие формулы для $\Lambda_m(x,t,\tau)$ даны в табл. 7.

Важно подчеркнуть, что функция Грина G и функции Λ_1 и Λ_2 не зависят от функций Φ, f_0, f_1, g_1, g_2, характеризующих различные виды неоднородности нестационарной краевой задачи.

Если коэффициенты уравнения (12) и коэффициенты k_1 и k_2 в граничных условиях (4) и (5) не зависят от времени t, то функция Грина зависит только от трех аргументов $G(x,y,t,\tau) = G(x,y,t-\tau)$. В этом случае в решении (14) можно положить $\frac{\partial}{\partial\tau} G(x,y,t,\tau)\big|_{\tau=0} = -\frac{\partial}{\partial t} G(x,y,t)$.

⦿ *Литература к разделу 0.7*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), В. Я. Арсенин (1974), А. Г. Бутковский (1979), А. Д. Полянин (2000 *a, b, c*).

0.8. Неоднородные краевые задачи со многими пространственными переменными. Представление решения через функцию Грина

0.8.1. Задачи для уравнений параболического типа

0.8.1-1. Постановка задачи.

Общее линейное неоднородное дифференциальное уравнение параболического типа с n пространственными переменными имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} - L_{\mathbf{x},t}[w] = \Phi(\mathbf{x},t), \tag{1}$$

где

$$L_{\mathbf{x},t}[w] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x},t)\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\mathbf{x},t)\frac{\partial w}{\partial x_i} + c(\mathbf{x},t)w, \tag{2}$$

$$\mathbf{x} = \{x_1,\ldots,x_n\}, \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x},t)\xi_i\xi_j \geqslant \sigma \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \sigma > 0.$$

Пусть V — некоторая односвязная область в $\mathcal{R}^n$ с достаточно гладкой поверхностью $S = \partial V$. Будем рассматривать нестационарную краевую задачу для уравнения (1) в области V с произвольным начальным условием

$$w = f(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{3}$$

и линейным неоднородным граничным условием

$$\Gamma_{\mathbf{x},t}[w] = g(\mathbf{x},t) \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S. \tag{4}$$

В общем случае $\Gamma_{\mathbf{x},t}$ — представляет собой линейный дифференциальный оператор первого порядка по пространственным переменным, коэффициенты которого зависят от $\mathbf{x}$ и t.

ТАБЛИЦА 8

Вид функции $H(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)$ для основных типов нестационарных краевых задач.

Тип задачи	Вид граничного условия (4)	Функция $H(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)$
Первая краевая задача	$w=g(\mathbf{x},t)$ при $\mathbf{x}\in S$	$H(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)=-\frac{\partial G}{\partial M_y}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)$
Вторая краевая задача	$\frac{\partial w}{\partial M_x}=g(\mathbf{x},t)$ при $\mathbf{x}\in S$	$H(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)=G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)$
Третья краевая задача	$\frac{\partial w}{\partial M_x}+kw=g(\mathbf{x},t)$ при $\mathbf{x}\in S$	$H(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)=G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)$

0.8.1-2. Представление решения задачи через функцию Грина.

Решение линейной неоднородной краевой задачи (1)–(4) можно представить в виде суммы

$$w(\mathbf{x},t)=\int_0^t\int_V\Phi(\mathbf{y},\tau)G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\,dV_y\,d\tau+\int_V f(\mathbf{y})G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,0)\,dV_y+ \\ +\int_0^t\int_S g(\mathbf{y},\tau)H(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\,dS_y\,d\tau. \tag{5}$$

Здесь $G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)$ — функция Грина, которая для $t>\tau\geqslant 0$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial t}-L_{\mathbf{x},t}[G]=0 \tag{6}$$

с неоднородным начальным условием специального вида

$$G=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\quad\text{при}\quad t=\tau \tag{7}$$

и однородным граничным условием

$$\Gamma_{\mathbf{x},t}[G]=0\quad\text{при}\quad \mathbf{x}\in S. \tag{8}$$

В задачу (6)–(8) величина $\mathbf{y}=\{y_1,\dots,y_n\}$ входит как n-мерный свободный параметр ($\mathbf{y}\in V$), $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})=\delta(x_1-y_1)\delta(x_2-y_2)\dots\delta(x_n-y_n)$ — n-мерная дельта-функция. Функция Грина G не зависит от функций Φ, f и g, характеризующих различные неоднородности краевой задачи. В решении (5) интегрирование везде ведется по параметру $\mathbf{y}$, при этом $dV_y=dy_1\,dy_2\,\dots\,dy_n$.

Функция $H(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)$, входящая в подынтегральное выражение последнего слагаемого в решении (5), выражается через функцию Грина $G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)$. Для трех основных типов краевых задач соответствующие формулы для $H(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)$ даны в табл. 8 (в третьей краевой задаче коэффициент k может зависеть от $\mathbf{x}$ и t). В граничные условия второго и третьего рода и решение первой краевой задачи входят операторы дифференцирования по направлению конормали оператора (2), которые действуют так:

$$\frac{\partial G}{\partial M_x}\equiv\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x},t)N_j\frac{\partial G}{\partial x_i},\quad \frac{\partial G}{\partial M_y}\equiv\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{y},\tau)N_j\frac{\partial G}{\partial y_i}, \tag{9}$$

где $\mathbf{N}=\{N_1,\dots,N_n\}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S. В частном случае, когда $a_{ii}(\mathbf{x},t)=1$ и $a_{ij}(\mathbf{x},t)=0$ при $i\neq j$, оператор (9) совпадает с обычным оператором дифференцирования по направлению внешней нормали к поверхности S.

Если коэффициенты уравнения (6) и граничное условие (8) не зависят от времени t, то функция Грина имеет вид $G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)=G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)$.

Замечание. Если на разных частях поверхности $S=\sum\limits_{i=1}^p S_i$ выставляются граничные условия разного типа

$$\Gamma^{(i)}_{\mathbf{x},t}[w]=g_i(\mathbf{x},t)\quad\text{при}\quad\mathbf{x}\in S_i,\qquad i=1,\dots,p, \tag{10}$$

то последнее слагаемое в решении (5) заменяется суммой

$$\sum_{i=1}^p\int_0^t\int_{S_i}g_i(\mathbf{y},\tau)H_i(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\,dS_y\,d\tau. \tag{11}$$

0.8.2. Задачи для уравнений гиперболического типа

0.8.2-1. Постановка задачи.

Общее линейное неоднородное дифференциальное уравнение гиперболического типа с n пространственными переменными имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\varphi(\mathbf{x},t)\frac{\partial w}{\partial t}-L_{\mathbf{x},t}[w]=\Phi(\mathbf{x},t), \tag{12}$$

где явный вид выражения $L_{\mathbf{x},t}[w]$ указан в (2).

Будем рассматривать нестационарную краевую задачу для уравнения (12) в области V с произвольными начальными условиями

$$w=f_0(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t=0, \tag{13}$$

$$\partial_t w=f_1(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t=0 \tag{14}$$

и линейным неоднородным граничным условием (4).

0.8.2-2. Представление решения задачи через функцию Грина.

Решение линейной неоднородной краевой задачи (12)–(14), (4) можно представить в виде суммы

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x},t)=&\int_0^t\int_V \Phi(\mathbf{y},\tau)G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\,dV_y\,d\tau-\int_V f_0(\mathbf{y})\Big[\frac{\partial}{\partial\tau}G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\Big]_{\tau=0}dV_y+\\ &+\int_V\big[f_1(\mathbf{y})+f_0(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y},0)\big]G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,0)\,dV_y+\int_0^t\int_S g(\mathbf{y},\tau)H(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\,dS_y\,d\tau. \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь $G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)$ — функция Грина, которая удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}+\varphi(\mathbf{x},t)\frac{\partial G}{\partial t}-L_{\mathbf{x},t}[G]=0 \tag{16}$$

с полуоднородными начальными условиями

$$\begin{aligned} G&=0 &&\text{при}\quad t=\tau,\\ \partial_t G&=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) &&\text{при}\quad t=\tau \end{aligned}$$

и однородному граничному условию (8).

Если коэффициенты уравнения (16) и граничное условие (8) не зависят от времени t, то функция Грина имеет вид $G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)=G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)$. В этом случае в решении (15) можно положить $\frac{\partial}{\partial\tau}G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\big|_{\tau=0}=-\frac{\partial}{\partial t}G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$.

Функция $H=H(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)$, входящая в подынтегральное выражение последнего слагаемого в решении (15), выражается через функцию Грина $G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)$. Для основных типов краевых задач соответствующие формулы для H даны в табл. 8 (в третьей краевой задаче коэффициент k может зависеть от $\mathbf{x}$ и t).

Замечание. Если на разных частях поверхности $S=\sum_{i=1}^{p}S_i$ выставляются граничные условия разного типа (10), то последнее слагаемое в решении (15) заменяется суммой (11).

0.8.3. Задачи для уравнений эллиптического типа

0.8.3-1. Постановка задачи.

В общем случае линейное неоднородное уравнение эллиптического типа можно записать так:

$$-L_{\mathbf{x}}[w]=\Phi(\mathbf{x}), \tag{17}$$

где

$$L_{\mathbf{x}}[w]\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\mathbf{x})\frac{\partial^2 w}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(\mathbf{x})\frac{\partial w}{\partial x_i}+c(\mathbf{x})w. \tag{18}$$

Двумерным задачам отвечает $n=2$, а трехмерным — $n=3$.

ТАБЛИЦА 9
Вид функции $H(\mathbf{x},\mathbf{y})$, входящей в подынтегральное выражение последнего слагаемого в решении (20), для основных типов стационарных краевых задач.

Тип задачи	Вид граничного условия (19)	Функция $H(\mathbf{x},\mathbf{y})$
Первая краевая задача	$w=g(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x}\in S$	$H(\mathbf{x},\mathbf{y})=-\frac{\partial G}{\partial M_y}(\mathbf{x},\mathbf{y})$
Вторая краевая задача	$\frac{\partial w}{\partial M_x}=g(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x}\in S$	$H(\mathbf{x},\mathbf{y})=G(\mathbf{x},\mathbf{y})$
Третья краевая задача	$\frac{\partial w}{\partial M_x}+kw=g(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x}\in S$	$H(\mathbf{x},\mathbf{y})=G(\mathbf{x},\mathbf{y})$

Уравнение (17)–(18) будем рассматривать в области V с общим линейным граничным условием

$$\Gamma_{\mathbf{x}}[w]=g(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad \mathbf{x}\in S. \tag{19}$$

Решение стационарной задачи (17)–(19) можно получить путем предельного перехода при $t\to\infty$ в решении (5) для нестационарной задачи специального вида. Для этого надо рассмотреть уравнение (1), коэффициенты и правая часть которого не зависят от времени t, и взять однородное начальное условие (3) при $f(\mathbf{x})=0$ и стационарное граничное условие (4).

0.8.3-2. Представление решения задачи через функцию Грина.

Решение линейной краевой задачи (17)–(19) можно представить в виде суммы

$$w(\mathbf{x})=\int_V \Phi(\mathbf{y})G(\mathbf{x},\mathbf{y})\,dV_y+\int_S g(\mathbf{y})H(\mathbf{x},\mathbf{y})\,dS_y. \tag{20}$$

Здесь $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ — функция Грина, которая удовлетворяет неоднородному уравнению специального вида

$$-L_{\mathbf{x}}[G]=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{21}$$

с однородным граничным условием

$$\Gamma_{\mathbf{x}}[G]=0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x}\in S. \tag{22}$$

В задачу (21), (22) величина $\mathbf{y}=\{y_1,\ldots,y_n\}$ входит как n-мерный свободный параметр ($\mathbf{y}\in V$). Функция Грина G не зависит от функций Φ и g, характеризующих различные неоднородности исходной краевой задачи.

Функция $H(\mathbf{x},\mathbf{y})$, входящая в подынтегральное выражение второго слагаемого в решении (20), выражается через функцию Грина $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Для трех основных типов краевых задач соответствующие формулы для $H(\mathbf{x},\mathbf{y})$ даны в табл. 9. В граничные условия второго и третьего рода и решение первой краевой задачи входят операторы дифференцирования по направлению конормали оператора (18), которые определяются формулами (9) (в данном случае коэффициенты a_{ij} зависят только от $\mathbf{x}$).

Замечание. Для второй краевой задачи при $c(\mathbf{x})\equiv 0$ таким образом определяемая функция Грина может не существовать (см. замечание 2 в разд. 8.2.1-2).

0.8.4. Сопоставление структуры решений краевых задач для уравнений различного типа

В табл. 10 кратко сформулированы постановки краевых задач для уравнений второго порядка эллиптического, параболического и гиперболического типов. Считается, что коэффициенты дифференциальных операторов $L_{\mathbf{x}}$ и $\Gamma_{\mathbf{x}}$ по пространственным переменным $x_1,\ldots,x_n$ не зависят от времени t и эти операторы одинаковы для данных задач.

ТАБЛИЦА 10
Формулировки краевых задач для уравнений различного типа.

Тип уравнения	Вид уравнения	Начальные условия	Граничное условие
Эллиптический	$-L_{\mathbf{x}}[w] = \Phi(\mathbf{x})$	не выставляются	$\Gamma_{\mathbf{x}}[w] = g(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in S$
Параболический	$\partial_t w - L_{\mathbf{x}}[w] = \Phi(\mathbf{x}, t)$	$w = f(\mathbf{x})$ при $t = 0$	$\Gamma_{\mathbf{x}}[w] = g(\mathbf{x}, t)$ при $\mathbf{x} \in S$
Гиперболический	$\partial_{tt} w - L_{\mathbf{x}}[w] = \Phi(\mathbf{x}, t)$	$w = f_0(\mathbf{x})$ при $t = 0$, $\partial_t w = f_1(\mathbf{x})$ при $t = 0$	$\Gamma_{\mathbf{x}}[w] = g(\mathbf{x}, t)$ при $\mathbf{x} \in S$

Ниже последовательно выписаны общие формулы для решения этих задач при нулевых начальных условиях ($f = f_0 = f_1 = 0$):

$$w_0(\mathbf{x}) = \int_V \Phi(\mathbf{y}) G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, dV_y + \int_S g(\mathbf{y}) \mathcal{H}\big[G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big]\, dS_y,$$
$$w_1(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_V \Phi(\mathbf{y}, \tau) G_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau)\, dV_y\, d\tau + \int_0^t \int_S g(\mathbf{y}, \tau) \mathcal{H}\big[G_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau)\big]\, dS_y\, d\tau,$$
$$w_2(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_V \Phi(\mathbf{y}, \tau) G_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau)\, dV_y\, d\tau + \int_0^t \int_S g(\mathbf{y}, \tau) \mathcal{H}\big[G_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau)\big]\, dS_y\, d\tau,$$

где G_n — функции Грина; индексы 0, 1 и 2 соответственно относятся к задачам эллиптического, параболического и гиперболического типов. Во все решения входит одинаковый оператор $\mathcal{H}[G]$ (его явный вид для различных граничных условий указан в разд. 0.8.1 — 0.8.3, см. также разд. 0.7).

Видно, что решения задач параболического и гиперболического типа при нулевых начальных условиях имеют одинаковую структуру. Структура решения задачи для уравнения параболического типа отличается структуры решения задачи для уравнения эллиптического типа дополнительным интегрированием по переменной t.

⊙ *Литература к разделу 0.8*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), А. Г. Бутковский (1979), А. Д. Полянин (2000*a, b, c*).

0.9. Построение функций Грина. Общие формулы и соотношения

0.9.1. Функции Грина краевых задач, описываемых уравнениями различного типа в областях конечных размеров

0.9.1-1. Выражения для функций Грина в виде бесконечных рядов.

В табл. 11 приведены функции Грина краевых задач, описываемых уравнениями второго порядка различного типа в конечной области V. Считается, что $L_{\mathbf{x}}$ — линейный самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка относительно пространственных переменных $x_1, \ldots, x_n$; $\Gamma_{\mathbf{x}}$ — линейный граничный оператор нулевого или первого порядка, который может задавать граничное условие первого, второго или третьего рода (коэффициенты операторов $L_{\mathbf{x}}$ и $\Gamma_{\mathbf{x}}$ могут зависеть от пространственных переменных, но не зависят от времени t). Коэффициенты λ_k и функции $u_k(\mathbf{x})$ определяются путем решения однородной краевой задачи на собственные значения:

$$L_{\mathbf{x}}[u] + \lambda u = 0, \qquad (1)$$
$$\Gamma_{\mathbf{x}}[u] = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S. \qquad (2)$$

Из табл. 11 видно, что зная функцию Грина в задаче для уравнения параболического (или гиперболического) типа легко можно построить функции Грина в соответствующих задачах для уравнений эллиптического и гиперболического (или параболического) типов. В частности, функция Грина задачи для уравнения эллиптического типа выражается через функцию Грина

ТАБЛИЦА 11

Функции Грина краевых задач, описываемых уравнениями различного типа в областях конечных размеров. Во всех задачах операторы $L_{\mathbf{x}}$ и $\Gamma_{\mathbf{x}}$ одинаковы, $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Тип и вид уравнения	Начальные и граничные условия	Функция Грина
Эллиптическое уравнение $-L_{\mathbf{x}}[w] = \Phi(\mathbf{x})$	$\Gamma_{\mathbf{x}}[w] = g(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in S$ (начальное условие не нужно)	$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{u_k(\mathbf{x})u_k(\mathbf{y})}{\lVert u_k\rVert^2 \lambda_k}, \quad \lambda_k \neq 0$
Параболическое уравнение $\partial_t w - L_{\mathbf{x}}[w] = \Phi(\mathbf{x}, t)$	$w = f(\mathbf{x})$ при $t = 0$ $\Gamma_{\mathbf{x}}[w] = g(\mathbf{x}, t)$ при $\mathbf{x} \in S$	$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{u_k(\mathbf{x})u_k(\mathbf{y})}{\lVert u_k\rVert^2} \exp(-\lambda_k t)$
Гиперболическое уравнение $\partial_{tt} w - L_{\mathbf{x}}[w] = \Phi(\mathbf{x}, t)$	$w = f_0(\mathbf{x})$ при $t = 0$ $w = f_1(\mathbf{x})$ при $t = 0$ $\Gamma_{\mathbf{x}}[w] = g(\mathbf{x}, t)$ при $\mathbf{x} \in S$	$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{u_k(\mathbf{x})u_k(\mathbf{y})}{\lVert u_k\rVert^2 \sqrt{\lambda_k}} \sin\bigl(t\sqrt{\lambda_k}\bigr)$

задачи для уравнения параболического типа по формуле:

$$G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_0^{\infty} G_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\, dt. \tag{3}$$

Здесь учтено, что все $\lambda_k > 0$ [в случае второй краевой задачи считается, что $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (1)–(2)].

0.9.1-2. Некоторые замечания и обобщения.

Замечание 1. Формула (3) может использоваться также для неограниченной области V. В этом случае надо проверять сходимость интеграла в правой части.

Замечание 2. Пусть в уравнениях, приведенных во втором столбце табл. 11, вместо $-L_{\mathbf{x}}[w]$ стоит выражение $-L_{\mathbf{x}}[w] - \beta w$ со свободным параметром β. Тогда в выражениях для функции Грина в третьем столбце табл. 11 значения λ_k везде следует заменить на $\lambda_k - \beta$ [как и ранее λ_k и $u_k(\mathbf{x})$ будут определяться путем решения задачи на собственные значения (1)–(2)].

Замечание 3. Приведенные в табл. 11 формулы для функций Грина будут справедливы также для краевых задач, описываемых уравнениями четвертого и более высоких порядков по пространственным переменным [когда однородная задача на собственные значения для уравнения (1) с соответствующими граничными условиями будет самосопряженной].

0.9.2. Функции Грина, допускающие неполное разделение переменных

0.9.2-1. Краевые задачи для областей с прямоугольными границами.

1°. Рассмотрим уравнение параболического типа

$$\frac{\partial w}{\partial t} = L_{1,t}[w] + \cdots + L_{n,t}[w] + \Phi(\mathbf{x}, t), \tag{4}$$

где каждое слагаемое $L_{m,t}[w]$ зависит только от одной пространственной координаты x_m и времени t:

$$L_{m,t}[w] \equiv a_m(x_m, t)\frac{\partial^2 w}{\partial x_m^2} + b_m(x_m, t)\frac{\partial w}{\partial x_m} + c_m(x_m, t)w, \qquad m = 1, \ldots, n.$$

Для уравнения (4) выставляем начальное условие общего вида

$$w = f(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{5}$$

Рассмотрим область $V = \{\alpha_m \leqslant x_m \leqslant \beta_m,\ m = 1, \ldots, n\}$, которая представляет собой n-мерный параллелепипед. На гранях этого параллелепипеда выставляются граничные условия

$$\begin{aligned} s_m^{(1)}\frac{\partial w}{\partial x_m} + k_m^{(1)}(t)w &= g_m^{(1)}(\mathbf{x}, t) \quad \text{при} \quad x_m = \alpha_m, \\ s_m^{(2)}\frac{\partial w}{\partial x_m} + k_m^{(2)}(t)w &= g_m^{(2)}(\mathbf{x}, t) \quad \text{при} \quad x_m = \beta_m. \end{aligned} \tag{6}$$

Задавая соответствующим образом значения коэффициентов $s_m^{(1)}$, $s_m^{(2)}$ и функции $k_m^{(1)} = k_m^{(1)}(t)$, $k_m^{(2)} = k_m^{(2)}(t)$ на каждой грани можно получить граничные условия первого, второго и третьего рода. Для неограниченных областей соответствующие бесконечным значениям $\alpha_m = -\infty$ или $\beta_m = \infty$ граничные условия опускаются.

2°. Функцию Грина нестационарной n-мерной краевой задачи (4)–(6) можно представить в виде произведения

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau) = \prod_{m=1}^{n} G_m(x_m, y_m, t, \tau), \tag{7}$$

где $G_m = G_m(x_m, y_m, t, \tau)$ — функции Грина, которые удовлетворяют одномерным уравнениям

$$\frac{\partial G_m}{\partial t} - L_{m,t}[G_m] = 0 \qquad (m = 1, \ldots, n)$$

с начальным условием

$$G_m = \delta(x_m - y_m) \quad \text{при} \quad t = \tau$$

и однородными граничными условиями

$$s_m^{(1)} \frac{\partial G_m}{\partial x_m} + k_m^{(1)}(t) G_m = 0 \quad \text{при} \quad x_m = \alpha_m,$$
$$s_m^{(2)} \frac{\partial G_m}{\partial x_m} + k_m^{(2)}(t) G_m = 0 \quad \text{при} \quad x_m = \beta_m.$$

Здесь y_m и τ — свободные параметры ($\alpha_m \leqslant y_m \leqslant \beta_m$, $t \geqslant \tau \geqslant 0$), $\delta(x)$ — дельта-функция.

Видно, что функция Грина (7) допускает неполное разделение переменных (она разделяется по пространственным переменным $x_1, \ldots, x_n$, но не разделяется по времени t).

0.9.2-2. Краевые задачи для цилиндрической области с произвольным сечением.

1°. Рассмотрим уравнение параболического типа

$$\frac{\partial w}{\partial t} = L_{\mathbf{x},t}[w] + M_{z,t}[w] + \Phi(\mathbf{x}, z, t), \tag{8}$$

где $L_{\mathbf{x},t}$ — произвольный линейный дифференциальный оператор второго порядка по переменным $x_1, \ldots, x_n$, коэффициенты которого зависят от $\mathbf{x}$ и t; а $M_{z,t}$ — произвольный линейный дифференциальный оператор второго порядка по переменной z, коэффициенты которого зависят от z и t.

Для уравнения (8) выставляем начальное условие общего вида

$$w = f(\mathbf{x}, z) \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{9}$$

Считаем, что пространственные переменные изменяются в цилиндрической области $V = \{\mathbf{x} \in D,\ z_1 \leqslant z \leqslant z_2\}$ с произвольным сечением D. На границах этой области выставляются условия*

$$\begin{aligned} &\Gamma_1[w] = g_1(\mathbf{x}, t) &&\text{при} \quad z = z_1 &&(\mathbf{x} \in D),\\ &\Gamma_2[w] = g_2(\mathbf{x}, t) &&\text{при} \quad z = z_2 &&(\mathbf{x} \in D),\\ &\Gamma_3[w] = g_3(\mathbf{x}, z, t) &&\text{при} \quad \mathbf{x} \in \partial D &&(z_1 \leqslant z \leqslant z_2), \end{aligned} \tag{10}$$

где линейные граничные операторы Γ_k ($k = 1, 2, 3$) могут задавать граничные условия первого, второго или третьего рода (в последнем случае коэффициенты дифференциальных операторов Γ_k могут зависеть от времени t).

2°. Функция Грина задачи (8)–(10) может быть представлена в виде произведения

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \zeta, t, \tau) = G_L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau) G_M(z, \zeta, t, \tau), \tag{11}$$

где $G_L = G_L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau)$ и $G_M = G_M(z, \zeta, t, \tau)$ — вспомогательные функции Грина, которые определяются путем решения двух более простых задач меньшей размерности:

Задача на сечении D:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G_L}{\partial t} = L_{\mathbf{x},t}[G_L] & \text{при} \quad \mathbf{x} \in D,\\ G_L = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & \text{при} \quad t = \tau,\\ \Gamma_3[G_L] = 0 & \text{при} \quad \mathbf{x} \in \partial D, \end{cases}$$

Задача на отрезке $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G_M}{\partial t} = M_{z,t}[G_M] & \text{при} \quad z_1 < z < z_2,\\ G_M = \delta(z - \zeta) & \text{при} \quad t = \tau,\\ \Gamma_k[G_M] = 0 & \text{при} \quad z = z_k \ \ (k = 1, 2). \end{cases}$$

* При $x_1 = -\infty$ или $x_2 = \infty$ соответствующее граничное условие опускается.

Здесь $\mathbf{y}$, ζ, τ — свободные параметры ($\mathbf{y} \in D$, $z_1 \leqslant \zeta \leqslant z_2$, $t \geqslant \tau \geqslant 0$).

Видно, что функция Грина (11) допускает неполное разделение переменных (она разделяется по пространственным переменным $\mathbf{x}$ и z, но не разделяется по времени t).

0.9.3. Построение функций Грина с помощью фундаментальных решений

0.9.3-1. Уравнения эллиптического типа. Фундаментальное решение.

Рассмотрим линейное уравнение эллиптического типа

$$L_{\mathbf{x}}[w] + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \Phi(\mathbf{x}, z), \tag{12}$$

где $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{R}^n$, $z \in \mathcal{R}^1$, $L_{\mathbf{x}}[w]$ — линейный дифференциальный оператор, который зависит от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и не зависит от z. Для дальнейшего важно, что однородное уравнение (при $\Phi \equiv 0$) не меняется при замене z на $-z$ и z на $z + \mathrm{const}$.

Пусть $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z - \zeta)$ — фундаментальное решение уравнения (12), т. е.

$$L_{\mathbf{x}}[\mathscr{E}] + \frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial z^2} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta(z - \zeta).$$

Здесь $\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\} \in \mathcal{R}^n$, $\zeta \in \mathcal{R}^1$ — свободные параметры.

Фундаментальное решение данного уравнения является четной функцией относительно последнего аргумента:

$$\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) = \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, -z).$$

Ниже в разд. 0.9.3-2 и 0.9.3-3 приведены формулы, позволяющие выражать функции Грина некоторых краевых задач для уравнения (12) через его фундаментальное решение.

0.9.3-2. Область: $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, $0 \leqslant z < \infty$. Краевые задачи для эллиптических уравнений.

1°. *Первая краевая задача*. Граничное условие:

$$w = f(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Функция Грина:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \zeta) = \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z - \zeta) - \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z + \zeta).$$

Область изменения свободных параметров: $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^n$, $0 \leqslant \zeta < \infty$.

2°. *Вторая краевая задача*. Граничное условие:

$$\partial_z w = f(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Функция Грина:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \zeta) = \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z - \zeta) + \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z + \zeta).$$

3°. *Третья краевая задача*. Граничное условие:

$$\partial_z w - kw = f(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Функция Грина:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \zeta) &= \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z - \zeta) + \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z + \zeta) - 2k \int_0^\infty e^{-ks} \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z + \zeta + s)\, ds = \\ &= \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z - \zeta) + \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z + \zeta) - 2k \int_{z+\zeta}^\infty e^{-k(\sigma - z - \zeta)} \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \sigma)\, d\sigma. \end{aligned}$$

0.9.3-3. Область: $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Краевые задачи для эллиптических уравнений.

1°. *Первая краевая задача*. Граничные условия:

$$w = f_1(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad w = f_2(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad z = l.$$

Функция Грина:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bigl[\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z - \zeta + 2nl) - \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z + \zeta + 2nl)\bigr]. \tag{13}$$

Область изменения свободных параметров: $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^n$, $0 \leqslant \zeta \leqslant l$.

2°. *Вторая краевая задача*. Граничные условия:

$$\partial_z w = f_1(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad \partial_z w = f_2(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad z = l.$$

Функция Грина:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bigl[\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z - \zeta + 2nl) + \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z + \zeta + 2nl)\bigr]. \qquad (14)$$

3°. *Смешанная краевая задача*. На левой границе задается искомая величина, а на правой границе — ее производная:

$$w = f_1(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad \partial_z w = f_2(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad z = l.$$

Функция Грина:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \bigl[\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z - \zeta + 2nl) - \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z + \zeta + 2nl)\bigr]. \qquad (15)$$

4°. *Смешанная краевая задача*. На левой границе задается производная, а на правой границе — искомая величина:

$$\partial_z w = f_1(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad w = f_2(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad z = l.$$

Функция Грина:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \bigl[\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z - \zeta + 2nl) + \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z + \zeta + 2nl)\bigr]. \qquad (16)$$

Замечание. Следует проверять сходимость рядов (13)–(16) [например, для трехмерного уравнения Лапласа ряды (13), (15), (16) сходятся, а ряд (14) — расходится].

0.9.3-4. Краевые задачи для уравнений параболического типа.

Пусть $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, $z \in \mathcal{R}^1$, $t \geqslant 0$. Рассмотрим уравнение параболического типа

$$\frac{\partial w}{\partial t} = L_{\mathbf{x},t}[w] + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \Phi(\mathbf{x}, z, t), \qquad (17)$$

где $L_{\mathbf{x},t}[w]$ — линейный дифференциальный оператор, который зависит от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и t, но не зависит от z.

Пусть $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z - \zeta, t, \tau)$ — фундаментальное решение задачи Коши для уравнения (17), т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} &= L_{\mathbf{x},t}[\mathscr{E}] + \frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial z^2} \quad \text{при} \quad t > \tau, \\ \mathscr{E} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta(z - \zeta) \quad \text{при} \quad t = \tau. \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^n$, $\zeta \in \mathcal{R}^1$, $\tau \geqslant 0$ — свободные параметры.

Фундаментальное решение задачи Коши имеет свойство:

$$\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, t, \tau) = \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, -z, t, \tau).$$

В табл. 12 приведены формулы, позволяющие выражать функции Грина некоторых нестационарных краевых задач для уравнения (17) через фундаментальное решение задачи Коши.

⊙ *Литература к разделу 0.9*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972), А. Д. Полянин (2000 *b*).

0.10. Принципы Дюамеля в нестационарных задачах

0.10.1. Задачи для линейных однородных уравнений

0.10.1-1. Уравнения параболического типа с двумя независимыми переменными.

Рассмотрим задачу для линейного однородного уравнения параболического типа

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial w}{\partial x} + c(x)w \qquad (1)$$

ТАБЛИЦА 12

Представление функций Грина $G = G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \zeta, t, \tau)$ через фундаментальные решения $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \zeta, t, \tau)$ для некоторых нестационарных краевых задач.

Задача	Граничные условия	Функция Грина
Первая краевая задача $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, $z \in \mathcal{R}^1$	$G = 0$ при $z = 0$	$\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z-\zeta, t, \tau) - \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z+\zeta, t, \tau)$
Вторая краевая задача $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, $z \in \mathcal{R}^1$	$\partial_z G = 0$ при $z = 0$	$\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z-\zeta, t, \tau) + \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z+\zeta, t, \tau)$
Третья краевая задача $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, $z \in \mathcal{R}^1$	$\partial_z G - kG = 0$ при $z = 0$	$\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z-\zeta, t, \tau) + \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z+\zeta, t, \tau) -$ $- 2k \int_0^\infty e^{-ks} \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z+\zeta+s, t, \tau)\, ds$
Первая краевая задача $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, $0 \leqslant z \leqslant l$	$G = 0$ при $z = 0$, $G = 0$ при $z = l$	$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \bigl[\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z-\zeta+2nl, t, \tau) -$ $- \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z+\zeta+2nl, t, \tau)\bigr]$
Вторая краевая задача $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, $0 \leqslant z \leqslant l$	$\partial_z G = 0$ при $z = 0$, $\partial_z G = 0$ при $z = l$	$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \bigl[\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z-\zeta+2nl, t, \tau) +$ $+ \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z+\zeta+2nl, t, \tau)\bigr]$
Смешанная краевая задача $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, $0 \leqslant z \leqslant l$	$G = 0$ при $z = 0$, $\partial_z G = 0$ при $z = l$	$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \bigl[\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z-\zeta+2nl, t, \tau) -$ $- \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z+\zeta+2nl, t, \tau)\bigr]$
Смешанная краевая задача $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, $0 \leqslant z \leqslant l$	$\partial_z G = 0$ при $z = 0$, $G = 0$ при $z = l$	$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \bigl[\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z-\zeta+2nl, t, \tau) +$ $+ \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z+\zeta+2nl, t, \tau)\bigr]$

с однородным начальным условием

$$w = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{2}$$

при следующих граничных условиях:

$$s_1 \partial_x w + k_1 w = g(t) \qquad \text{при} \quad x = x_1, \tag{3}$$

$$s_2 \partial_x w + k_2 w = 0 \qquad \text{при} \quad x = x_2. \tag{4}$$

Задавая соответствующим образом значения коэффициентов s_1, s_2, k_1, k_2 в (3) и (4) можно получить первую, вторую, третью и смешанные краевые задачи для уравнения (1).

Решение задачи (1)–(4) с нестационарным граничным условием (3) при $x = x_1$ может быть выражено по формуле (первый принцип Дюамеля)

$$w(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t u(x, t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau = \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(x, t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau \tag{5}$$

через решение $u(x,t)$ вспомогательной задачи для уравнения (1) с начальным и граничным условиями (2) и (4) (в уравнении, начальном и граничном условиях следует заменить w на u) и более простым стационарным граничным условием при $x = x_1$:

$$s_1 \partial_x u + k_1 u = 1 \quad \text{при} \quad x = x_1. \tag{6}$$

Замечание. Аналогичная формула будет справедлива также для однородного граничного условия при $x = x_1$ и неоднородного нестационарного граничного условия при $x = x_2$.

0.10.1-2. Уравнения гиперболического типа с двумя независимыми переменными.

Рассмотрим задачу для линейного однородного уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varphi(x) \frac{\partial w}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial w}{\partial x} + c(x) w \tag{7}$$

с однородными начальными условиями

$$w = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad \partial_t w = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{8}$$

и граничными условиями (3), (4).

Решение задачи (7), (8), (3), (4) с нестационарным граничным условием (3) при $x = x_1$ может быть выражено по формуле (5) через решение $u(x,t)$ вспомогательной задачи для уравнения (7) с начальными условиями (8) и граничным условием (4) (в уравнении, начальном и граничном условиях следует заменить w на u) и более простым стационарным граничным условием (6) при $x = x_1$.

В данном случае остается справедливым замечание, приведенное в предыдущем разделе.

0.10.1-3. Уравнения второго порядка с несколькими независимыми переменными.

Первый принцип Дюамеля может использоваться также для решения линейных однородных уравнений параболического и гиперболического типов со многими пространственными переменными вида

$$\frac{\partial^k w}{\partial t^k} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial w}{\partial x_i} + c(\mathbf{x}) w, \tag{9}$$

где $k = 1,\ 2$ и $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Пусть V — некоторая ограниченная область в $\mathcal{R}^n$ с достаточно гладкой поверхностью $S = \partial V$. Решение краевой задачи для уравнения (9) в области V с однородными начальными условиями (2) (при $k = 1$) или (8) (при $k = 2$) и неоднородным линейным граничным условием

$$\Gamma_x[w] = g(t) \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S \tag{10}$$

дается формулой

$$w(\mathbf{x},t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t u(\mathbf{x}, t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau = \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau.$$

Здесь $u(\mathbf{x},t)$ решение вспомогательной задачи для уравнения (9) с теми же самыми начальными условиями (2) или (8) (в уравнении и начальных условиях следует заменить w на u) и более простым стационарным граничным условием

$$\Gamma_x[u] = 1 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S.$$

Отметим, что (10) может быть граничным условием первого, второго или третьего рода (считается, что коэффициенты оператора Γ_x не зависят от t).

0.10.2. Задачи для линейных неоднородных уравнений

0.10.2-1. Уравнения параболического типа.

Решение линейного неоднородного уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial w}{\partial x_i} + c(\mathbf{x}) w + \Phi(\mathbf{x},t)$$

с однородным начальным условием (2) и однородным граничным условием

$$\Gamma_x[w] = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S \tag{11}$$

может быть представлено в виде (второй принцип Дюамеля)

$$w(\mathbf{x},t) = \int_0^t U(\mathbf{x}, t-\tau, \tau)\, d\tau. \tag{12}$$

Здесь $U(\mathbf{x},t,\tau)$ — решение вспомогательной задачи для однородного уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial U}{\partial x_i} + c(\mathbf{x}) U$$

с граничным условием (11) (в котором следует заменить w на U) и неоднородным начальным условием, зависящим от параметра τ:

$$U = \Phi(\mathbf{x}, \tau) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Отметим, что (11) может быть граничным условием первого, второго или третьего рода.

0.10.2-2. Уравнения гиперболического типа.

Решение линейного неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\varphi(\mathbf{x})\frac{\partial w}{\partial t}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\mathbf{x})\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(\mathbf{x})\frac{\partial w}{\partial x_i}+c(\mathbf{x})w+\Phi(\mathbf{x},t)$$

с однородными начальными условиями (8) и однородным граничным условием (11) может быть выражено по формуле (12) через решение $U=U(\mathbf{x},t,\tau)$ вспомогательной задачи для однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\varphi(\mathbf{x})\frac{\partial U}{\partial t}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\mathbf{x})\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(\mathbf{x})\frac{\partial U}{\partial x_i}+c(\mathbf{x})U$$

с однородными начальным и граничным условиями (2) и (11) (в которых следует заменить w на U) и неоднородным начальным условием, зависящим от параметра τ:

$$\partial_t U=\Phi(\mathbf{x},\tau) \quad \text{при} \quad t=0.$$

Отметим, что (11) может быть граничным условием первого, второго или третьего рода.

⦿ *Литература к разделу 0.10*: Р. Курант (1962, стр. 205–208), Г. Корн, Т. Корн (1968, стр. 316–317), В. Я. Арсенин (1974, стр. 124–129), S. J. Farlow (1982, pp. 106–111), E. Zauderer (1983, pp. 159–165), D. Zwillinger (1989, pp. 342–344).

0.11. Преобразования, упрощающие начальные и граничные условия

0.11.1. Преобразования, приводящие к однородным граничным условиям

Линейную задачу с произвольными неоднородными граничными условиями

$$\Gamma^{(k)}_{\mathbf{x},t}[w]=g_k(\mathbf{x},t) \quad \text{при} \quad \mathbf{x}\in S_k \tag{1}$$

можно свести к линейной задаче с однородными граничными условиями. Для этого следует сделать замену

$$w(\mathbf{x},t)=\psi(\mathbf{x},t)+u(\mathbf{x},t), \tag{2}$$

где функция ψ должна удовлетворять неоднородным граничным условиям (1), т. е.

$$\Gamma^{(k)}_{\mathbf{x},t}[\psi]=g_k(\mathbf{x},t) \quad \text{при} \quad \mathbf{x}\in S_k. \tag{3}$$

В табл. 13 указаны примеры таких преобразований для линейных краевых задач с одной пространственной переменной, которые описываются уравнениями параболического и гиперболического типов. В третьей краевой задаче считается, что $k_1<0$, $k_2>0$.

Отметим, что выбор функции ψ носит чисто алгебраический характер и не связан с рассматриваемым уравнением [существует бесконечное множество подходящих функций ψ, удовлетворяющих условию (3)]. Преобразования вида (2) нередко используются на первом этапе решения краевых задач.

0.11.2. Преобразования, приводящие к однородным начальным и граничным условиям

Линейную задачу с неоднородными начальными и граничными условиями можно свести к линейной задаче с однородными начальными и граничными условиями. Для этого следует ввести новую зависимую переменную по формуле (2), где функция ψ должна удовлетворять неоднородным начальным и граничным условиям.

Укажем теперь простейшие функции ψ, которые можно использовать в преобразовании (2) для получения краевых задач с однородными начальными и граничными условиями. Для конкретности будем рассматривать уравнение параболического типа с одной пространственной переменной и общим начальным условием

$$w=f(x) \quad \text{при} \quad t=0. \tag{4}$$

ТАБЛИЦА 13

Простейшие преобразования вида $w(x,t) = \psi(x,t) + u(x,t)$, приводящие к однородным граничным условиям в задачах с одной пространственной переменной ($0 \leqslant x \leqslant l$).

№	Задачи	Граничные условия	Функция $\psi(x,t)$
1	Первая краевая задача	$w = g_1(t)$ при $x = 0$ $w = g_2(t)$ при $x = l$	$\psi(x,t) = g_1(t) + \dfrac{x}{l}\left[g_2(t) - g_1(t)\right]$
2	Вторая краевая задача	$\partial_x w = g_1(t)$ при $x = 0$ $\partial_x w = g_2(t)$ при $x = l$	$\psi(x,t) = xg_1(t) + \dfrac{x^2}{2l}\left[g_2(t) - g_1(t)\right]$
3	Третья краевая задача	$\partial_x w + k_1 w = g_1(t)$ при $x = 0$ $\partial_x w + k_2 w = g_2(t)$ при $x = l$	$\psi(x,t) = \dfrac{(k_2 x - 1 - k_2 l)g_1(t) + (1 - k_1 x)g_2(t)}{k_2 - k_1 - k_1 k_2 l}$
4	Смешанная краевая задача	$w = g_1(t)$ при $x = 0$ $\partial_x w = g_2(t)$ при $x = l$	$\psi(x,t) = g_1(t) + xg_2(t)$
5	Смешанная краевая задача	$\partial_x w = g_1(t)$ при $x = 0$ $w = g_2(t)$ при $x = l$	$\psi(x,t) = (x - l)g_1(t) + g_2(t)$

1°. *Первая краевая задача.* Дано начальное условие (4), граничные условия приведены в 1-й строке табл. 13. Пусть выполнены условия согласования начального и граничных условий, т. е. $f(0) = g_1(0)$, $f(l) = g_2(0)$. Тогда в качестве функции ψ в преобразовании (2) можно взять

$$\psi(x,t) = f(x) + g_1(t) - g_1(0) + \frac{x}{l}\left[g_2(t) - g_1(t) + g_1(0) - g_2(0)\right].$$

2°. *Вторая краевая задача.* Дано начальное условие (4), граничные условия приведены во 2-й строке табл. 13. Пусть выполнены условия согласования начального и граничных условий, т. е. $f'(0) = g_1(0)$, $f'(l) = g_2(0)$. Тогда в качестве функции ψ в преобразовании (2) можно взять

$$\psi(x,t) = f(x) + x\left[g_1(t) - g_1(0)\right] + \frac{x^2}{2l}\left[g_2(t) - g_1(t) + g_1(0) - g_2(0)\right].$$

3°. *Третья краевая задача.* Дано начальное условие (4), граничные условия приведены в 3-й строке табл. 13. При выполнении условий согласования начального и граничных условий в качестве функции ψ в преобразовании (2) можно взять

$$\psi(x,t) = f(x) + \frac{(k_2 x - 1 - k_2 l)\left[g_1(t) - g_1(0)\right] + (1 - k_1 x)\left[g_2(t) - g_2(0)\right]}{k_2 - k_1 - k_1 k_2 l} \qquad (k_1 < 0,\ k_2 > 0).$$

4°. *Смешанная краевая задача.* Дано начальное условие (4), граничные условия приведены в 4-й строке табл. 13. Пусть выполнены условия согласования начального и граничных условий, т. е. $f(0) = g_1(0)$, $f'(l) = g_2(0)$. Тогда в качестве функции ψ в преобразовании (2) можно взять

$$\psi(x,t) = f(x) + g_1(t) - g_1(0) + x\left[g_2(t) - g_2(0)\right].$$

5°. *Смешанная краевая задача.* Дано начальное условие (4), граничные условия приведены в 5-й строке табл. 13. Пусть выполнены условия согласования начального и граничных условий, т. е. $f'(0) = g_1(0)$, $f(l) = g_2(0)$. Тогда в качестве функции ψ в преобразовании (2) можно взять

$$\psi(x,t) = f(x) + (x - l)\left[g_1(t) - g_1(0)\right] + g_2(t) - g_2(0).$$

⊙ *Литература к разделу 0.11*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998).