Из книги В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина, «Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям». — М.: Физматлит, 2001.

0.2. Линейные уравнения второго порядка

0.2.1. Формулы для общего решения. Некоторые преобразования

0.2.1-1. Линейные однородные уравнения. Различные представления общего решения.

1°. Рассмотрим линейное однородное уравнение второго порядка общего вида

$$f_2(x)y''_{xx}+f_1(x)y'_x+f_0(x)y=0. \qquad (1)$$

Линейное однородное уравнение имеет *тривиальное решение* $y=0$.

Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — фундаментальная система решений (нетривиальные линейно независимые частные решения) уравнения (1). Тогда общее решение дается формулой

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x), \qquad (2)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

2°. Пусть $y_1=y_1(x)$ — любое нетривиальное частное решение уравнения (1). Тогда его общее решение можно представить в следующем виде:

$$y=y_1\Big(C_1+C_2\int\frac{e^{-F}}{y_1^2}\,dx\Big),\qquad \text{где}\quad F=\int\frac{f_1}{f_2}\,dx. \qquad (3)$$

Для конкретных уравнений, рассмотренных далее в разделах 2.1.2–2.1.8, часто будут указаны только частные решения. Общие решения этих уравнений можно получить с помощью формулы (3).

3°. Рассмотрим уравнение, записанное в канонической форме (о приведении уравнений к такому виду см. разд. 0.2.1-3):

$$y''_{xx}+f(x)y=0.$$

Пусть $y_1(x)$ — любое нетривиальное частное решение этого уравнения. Тогда общее решение можно определить по формуле (3) при $F=0$ или по формуле (2), где

$$y_2(x)=y_1\int\frac{[f(x)-1][y_1^2-(y_1')^2]}{[y_1^2+(y_1')^2]^2}\,dx+\frac{y_1'}{y_1^2+(y_1')^2}.$$

Здесь $y_1=y_1(x)$, штрих обозначает производную по x. Последнюю формулу полезно использовать, когда y_1 обращается в нуль в некоторых точках.

0.2.1-2. Детерминант Вронского и формула Лиувилля.

Детерминант Вронского (вронскиан):

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}\equiv y_1(y_2)'_x-y_2(y_1)'_x,$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ — фундаментальная система решений уравнения (1).

Формула Лиувилля:

$$W(x)=W(x_0)\exp\Big[-\int_{x_0}^{x}\frac{f_1(t)}{f_2(t)}\,dt\Big].$$

0.2.1-3. Приведение к канонической форме.

1°. Замена

$$y=u(x)\exp\Big(-\frac12\int\frac{f_1}{f_2}\,dx\Big) \qquad (4)$$

приводит уравнение (1) к канонической (или нормальной) форме

$$u''_{xx}+f(x)u=0,\qquad \text{где}\quad f=\frac{f_0}{f_2}-\frac14\Big(\frac{f_1}{f_2}\Big)^2-\frac12\Big(\frac{f_1}{f_2}\Big)'_x. \qquad (5)$$

2°. Замена (4) является частным случаем более общего преобразования (φ — произвольная функция):

$$x=\varphi(\xi),\quad y=u(\xi)\sqrt{|\varphi'_\xi(\xi)|}\,\exp\Big(-\frac12\int\frac{f_1(\varphi)}{f_2(\varphi)}\,d\varphi\Big),$$

которое приводит исходное уравнение к канонической форме.

0.2.1-4. Приведение к уравнению Риккати.

Замена $u = y'_x/y$ приводит линейное однородное уравнение второго порядка (1) к уравнению Риккати

$$f_2(x)u'_x + f_2(x)u^2 + f_1(x)u + f_0(x) = 0,$$

которое рассматривается в разд. 0.1.4.

0.2.1-5. Линейные неоднородные уравнения. Теорема существования.

Линейное неоднородное уравнение второго порядка имеет вид

$$f_2(x)y''_{xx} + f_1(x)y'_x + f_0(x)y = g(x). \tag{6}$$

Теорема существования и единственности. Пусть при $a < x < b$ функции f_2, f_1, f_0, g непрерывны и $f_2 \neq 0$. Тогда при любых начальных условиях

$$y(x_0) = A, \quad y'_x(x_0) = B,$$

где x_0 — произвольная точка из данного интервала (A, B — любые заданные числа), решение уравнения (6) существует и единственно. Это решение определено при всех $x \in (a, b)$.

0.2.1-6. Линейные неоднородные уравнения. Различные представления общего решения.

1°. Общее решение линейного неоднородного уравнения (6) равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения (1) и любого частного решения данного неоднородного уравнения.

2°. Пусть $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения при $g \equiv 0$. Тогда общее решения уравнения (6) можно представить в виде формулы

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + y_2\int y_1\frac{g}{f_2}\frac{dx}{W} - y_1\int y_2\frac{g}{f_2}\frac{dx}{W}, \tag{7}$$

где $W = y_1(y_2)'_x - y_2(y_1)'_x$ — детерминант Вронского.

3°. Пусть известно нетривиальное частное решение $y_1 = y_1(x)$ однородного уравнения при $g \equiv 0$. Тогда для построения общего решения уравнения (6) можно использовать формулу (7), где второе частное решение $y_2 = y_2(x)$ определяется выражением

$$y_2 = y_1\int\frac{e^{-F}}{y_1^2}\,dx, \qquad \text{где} \quad F = \int\frac{f_1}{f_2}\,dx, \quad W = e^{-F}, \tag{8}$$

В разделах 2.1.2–2.1.8 рассматриваются только однородные уравнения, решения соответствующих неоднородных уравнений можно получить с помощью формул (7) и (8).

4°. Пусть $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ — решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений с одинаковой левой и разной правой частью: $\mathrm{L}[\bar{y}_1] = g_1(x)$ и $\mathrm{L}[\bar{y}_2] = g_2(x)$, где $\mathrm{L}[y]$ — левая часть уравнения (6). Тогда функция $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$ является решением уравнения $\mathrm{L}[\bar{y}] = g_1(x) + g_2(x)$.

0.2.1-7. Преобразование Куммера — Лиувилля.

Преобразование

$$x = \alpha(t), \quad y = \beta(t)z + \gamma(t), \tag{9}$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ — произвольные достаточно гладкие функции ($\beta \not\equiv 0$), переводит любое линейное дифференциальное уравнение в линейное для функции $z = z(t)$. В частном случае $\gamma \equiv 0$ однородное уравнение преобразуется в однородное.

Частные виды преобразования (9) широко используются для упрощения линейных дифференциальных уравнений второго и более высоких порядков.

⊙ *Литература к разд. 0.2.1:* Э. Камке (1976), Г. Корн, Т. Корн (1984), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1995), С. Ю. Доброхотов (1998).

0.2.2. Представление решений в виде ряда по независимой переменной

0.2.2-1. Коэффициенты уравнения представимы в виде обычных степенных рядов.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение общего вида

$$y''_{xx} + f(x)y'_x + g(x)y = 0. \tag{1}$$

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ могут быть представлены в окрестности точки $x = x_0$ в виде обычных степенных рядов

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x-x_0)^n, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x-x_0)^n, \tag{2}$$

сходящихся в области $|x-x_0| < R$, где $R = \min\{R_1, R_2\}$, R_1 и R_2 — радиусы сходимости рядов (2). В этом случае x_0 является регулярной точкой и уравнение (1) имеет два линейно независимых решения вида

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \qquad y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n. \tag{3}$$

Значения a_n и b_n определяются путем подстановки рядов (2) в уравнение (1) с последующим приравниванием нулю коэффициентов при одинаковых степенях $(x-x_0)$.*

0.2.2-2. Коэффициенты уравнения имеют полюса в некоторой точке.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют полюса в точке $x = x_0$ и могут быть представлены в области $|x-x_0| < R$ в виде рядов

$$f(x) = \sum_{n=-1}^{\infty} A_n(x-x_0)^n, \qquad g(x) = \sum_{n=-2}^{\infty} B_n(x-x_0)^n. \tag{4}$$

В этом случае x_0 является слабо особой точкой. Пусть λ_1 и λ_2 — корни определяющего квадратного уравнения

$$\lambda_1^2 + (A_{-1} - 1)\lambda + B_{-2} = 0.$$

Существуют три типа различных решений дифференциального уравнения (1) в зависимости от корней определяющего уравнения.

1. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $\lambda_1 - \lambda_2$ — не равно целому числу, то уравнение (1) имеет два линейно независимых решения вида

$$\begin{aligned} y_1(x) &= |x-x_0|^{\lambda_1}\Bigl[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\Bigr],\\ y_2(x) &= |x-x_0|^{\lambda_2}\Bigl[1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x-x_0)^n\Bigr]. \end{aligned} \tag{5}$$

2. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то уравнение (1) имеет два линейно независимых решения вида

$$y_1(x) = |x-x_0|^{\lambda}\Bigl[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\Bigr],$$

$$y_2(x) = y_1(x)\ln|x-x_0| + |x-x_0|^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n.$$

3. Если $\lambda_1 = \lambda_2 + N$, где N — целое положительное число, то уравнение (1) имеет два линейно независимых решения вида

$$y_1(x) = |x-x_0|^{\lambda_1}\Bigl[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\Bigr],$$

$$y_2(x) = ky_1(x)\ln|x-x_0| + |x-x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n,$$

где коэффициент k может быть равным нулю.

* Предварительно должны быть собраны члены, имеющие одинаковые степени $(x-x_0)^k$; $k = 0, 1, \ldots$

При построении решений в каждом из этих трех случаев используется стандартная процедура: в исходное уравнение (1) подставляются выражения для y_1 и y_2, затем приравниваются нулю коэффициенты рядов при $(x-x_0)^n$ и $(x-x_0)^n \ln|x-x_0|$ для различных значений n, что приводит к системе рекуррентных соотношений для определения неизвестных коэффициентов.

⊙ *Литература к разд. 0.2.2:* G. M. Murphi (1960), Э. Камке (1976), Г. Корн, Т. Корн (1984), D. Zwillinger (1989).

0.2.3. Асимптотические решения

В данном разделе приведены асимптотические решения при $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon > 0)$ линейных дифференциальных уравнений, содержащих произвольные (достаточно гладкие) функции, для вещественных значений независимой переменной.

0.2.3-1. Уравнения не содержат y'_x. Главные члены асимптотических разложений.

1°. Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon^2 y''_{xx} - f(x)y = 0 \tag{1}$$

на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$.

Случай 1. При $f \neq 0$ главные члены асимптотических разложений фундаментальной системы решений при $\varepsilon \to 0$ определяются формулами

$$y_1 = f^{-1/4}\exp\biggl(-\frac{1}{\varepsilon}\int\sqrt{f}\,dx\biggr), \qquad y_2 = f^{-1/4}\exp\biggl(\frac{1}{\varepsilon}\int\sqrt{f}\,dx\biggr) \qquad \text{при } f>0,$$

$$y_1 = (-f)^{-1/4}\cos\biggl(\frac{1}{\varepsilon}\int\sqrt{-f}\,dx\biggr), \quad y_2 = (-f)^{-1/4}\sin\biggl(\frac{1}{\varepsilon}\int\sqrt{-f}\,dx\biggr) \quad \text{при } f<0.$$

Случай 2. Построим асимптотическое решение уравнения (1) в окрестности точки поворота $x = x_0$, в которой функция $f(x)$ обращается в нуль: $f(x_0) = 0$. Считаем, что $f(x)$ может быть представлена в виде

$$f(x) = (x_0 - x)\psi(x), \qquad \text{где} \quad \psi(x) > 0.$$

В этом случае фундаментальные решения при $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon > 0)$ описываются тремя различными формулами:

$$y_1 = \begin{cases} \dfrac{1}{|f(x)|^{1/4}}\sin\biggl[\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\sqrt{|f(x)|}\,dx + \dfrac{\pi}{4}\biggr] & \text{при } x - x_0 \geqslant \delta,\\ \dfrac{\sqrt{\pi}}{[\varepsilon\psi(x_0)]^{1/6}}\operatorname{Ai}(z) & \text{при } |x-x_0| \leqslant \delta,\\ \dfrac{1}{2[f(x)]^{1/4}}\exp\biggl[-\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{x}^{x_0}\sqrt{f(x)}\,dx\biggr] & \text{при } x_0 - x \geqslant \delta, \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} \dfrac{1}{|f(x)|^{1/4}}\cos\biggl[\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\sqrt{|f(x)|}\,dx + \dfrac{\pi}{4}\biggr] & \text{при } x - x_0 \geqslant \delta,\\ \dfrac{\sqrt{\pi}}{[\varepsilon\psi(x_0)]^{1/6}}\operatorname{Bi}(z) & \text{при } |x-x_0| \leqslant \delta,\\ \dfrac{1}{[f(x)]^{1/4}}\exp\biggl[\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{x}^{x_0}\sqrt{f(x)}\,dx\biggr] & \text{при } x_0 - x \geqslant \delta, \end{cases}$$

где $\operatorname{Ai}(z)$ и $\operatorname{Bi}(z)$ — функции Эйри первого и второго рода соответственно (см. уравнение 2.1.2.2), $z = \varepsilon^{-2/3}[\psi(x_0)]^{1/3}(x_0 - x)$ и $\delta = O(\varepsilon^{2/3})$.

0.2.3-2. Уравнения не содержат y'_x. Двучленные асимптотические разложения.

Двучленные асимптотические разложения решения уравнения (1) при $f > 0$ и $\varepsilon \to 0$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ имеют вид

$$\begin{aligned} y_1 &= f^{-1/4}\exp\biggl(-\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x}\sqrt{f}\,dx\biggr)\biggl\{1 - \varepsilon\int_{x_0}^{x}\biggl[\frac{1}{8}\frac{f''_{xx}}{f^{3/2}} - \frac{5}{32}\frac{(f'_x)^2}{f^{5/2}}\biggr]dx + O(\varepsilon^2)\biggr\},\\ y_2 &= f^{-1/4}\exp\biggl(\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x}\sqrt{f}\,dx\biggr)\biggl\{1 + \varepsilon\int_{x_0}^{x}\biggl[\frac{1}{8}\frac{f''_{xx}}{f^{3/2}} - \frac{5}{32}\frac{(f'_x)^2}{f^{5/2}}\biggr]dx + O(\varepsilon^2)\biggr\}, \end{aligned} \tag{2}$$

где x_0 — любое число, удовлетворяющее неравенству $a \leqslant x_0 \leqslant b$.

Асимптотические разложения фундаментальной системы решений уравнения (1) при $f < 0$ получаются путем отделения действительной и мнимой части в формуле (2).

0.2.3-3. Уравнения специального вида, не содержащие первой производной.

Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon^2 y''_{xx} - x^{m-2} f(x) y = 0 \tag{3}$$

на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, где $a < 0$ и $b > 0$, при условии, что m — целое положительное число и $f(x) \neq 0$. В этом случае главный член асимптотического решения при $\varepsilon \to 0$ в окрестности точки $x = 0$ выражается через решение более простого модельного уравнения, которое получается из (3) путем подстановки вместо функции $f(x)$ константы $f(0)$ (решение модельного уравнения выражается через функции Бесселя порядка $1/m$, см. уравнение 2.1.2.7).

Ниже приведены формулы, которые описывают главные члены асимптотических разложений фундаментальной системы решений уравнения (3) при $a < x < 0$ и $0 < x < b$ (исключая малую окрестность точки $x = 0$). Будем выделять три различных случая:

1°. Пусть m — четное число и $f(x) > 0$. Тогда

$$y_1 = \begin{cases} [f(x)]^{-1/4} \exp\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^x \sqrt{f(x)}\,dx\right] & \text{при } x < 0, \\ k^{-1}[f(x)]^{-1/4} \exp\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^x \sqrt{f(x)}\,dx\right] & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} [f(x)]^{-1/4} \exp\left[-\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^x \sqrt{f(x)}\,dx\right] & \text{при } x < 0, \\ k[f(x)]^{-1/4} \exp\left[-\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^x \sqrt{f(x)}\,dx\right] & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

где $f = f(x)$, $k = \sin\left(\dfrac{\pi}{m}\right)$.

2°. Пусть m — четное число и $f(x) < 0$. Тогда

$$y_1 = \begin{cases} |f(x)|^{-1/4} \cos\left[-\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^x \sqrt{|f(x)|}\,dx + \dfrac{\pi}{4}\right] & \text{при } x < 0, \\ k^{-1}|f(x)|^{-1/4} \cos\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^x \sqrt{|f(x)|}\,dx - \dfrac{\pi}{4}\right] & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} |f(x)|^{-1/4} \cos\left[-\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^x \sqrt{|f(x)|}\,dx - \dfrac{\pi}{4}\right] & \text{при } x < 0, \\ k|f(x)|^{-1/4} \cos\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^x \sqrt{|f(x)|}\,dx + \dfrac{\pi}{4}\right] & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

где $f = f(x)$, $k = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2m}\right)$.

3°. Пусть m — нечетное число. Тогда

$$y_1 = \begin{cases} |f(x)|^{-1/4} \cos\left[-\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^x \sqrt{|f(x)|}\,dx + \dfrac{\pi}{4}\right] & \text{при } x < 0, \\ \dfrac{1}{2}k^{-1}[f(x)]^{-1/4} \exp\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^x \sqrt{f(x)}\,dx\right] & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} |f(x)|^{-1/4} \cos\left[-\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^x \sqrt{|f(x)|}\,dx - \dfrac{\pi}{4}\right] & \text{при } x < 0, \\ k[f(x)]^{-1/4} \exp\left[-\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^x \sqrt{f(x)}\,dx\right] & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

где $f = f(x)$, $k = \sin\left(\dfrac{\pi}{2m}\right)$.

0.2.3-4. Уравнения не содержат y'_x. Коэффициенты уравнений зависят от ε.

Рассмотрим уравнение вида

$$\varepsilon^2 y''_{xx} - f(x,\varepsilon)y = 0 \tag{4}$$

на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ при условии $f \neq 0$. Будем считать, что функцию $f(x,\varepsilon)$ можно представить в виде

$$f(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\varepsilon^k, \qquad \varepsilon \to 0.$$

Тогда главные члены асимптотических разложений фундаментальной системы решений уравнения (4) определяются формулами

$$y_1 = f_0^{-1/4}(x)\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int\sqrt{f_0(x)}\,dx + \frac{1}{2}\int\frac{f_1(x)}{\sqrt{f_0(x)}}\,dx\right]\bigl[1 + O(\varepsilon)\bigr],$$

$$y_2 = f_0^{-1/4}(x)\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int\sqrt{f_0(x)}\,dx + \frac{1}{2}\int\frac{f_1(x)}{\sqrt{f_0(x)}}\,dx\right]\bigl[1 + O(\varepsilon)\bigr].$$

0.2.3-5. Уравнения содержат y'_x.

1°. Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon y''_{xx} + g(x)y'_x + f(x)y = 0$$

на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$. При $g(x) > 0$ асимптотическое решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям $y(0) = C_1$, $y(1) = C_2$, можно записать в следующем виде:

$$y = (C_1 - kC_2)\exp\bigl[-\varepsilon^{-1}g(0)x\bigr] + C_2\exp\left[\int_x^1 \frac{f(x)}{g(x)}\,dx\right] + O(\varepsilon),$$

где $k = \exp\left[\int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)}\,dx\right]$.

2°. Рассмотрим теперь уравнение

$$\varepsilon^2 y''_{xx} + \varepsilon g(x)y'_x + f(x)y = 0 \tag{5}$$

на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Считаем, что

$$D(x) \equiv [g(x)]^2 - 4f(x) \neq 0.$$

Тогда главные члены асимптотических разложений фундаментальной системы решений уравнения (5) при $\varepsilon \to 0$ описываются формулами

$$y_1 = |D(x)|^{-1/4}\exp\left[-\frac{1}{2\varepsilon}\int\sqrt{D(x)}\,dx - \frac{1}{2}\int\frac{g'_x(x)}{\sqrt{D(x)}}\,dx\right]\bigl[1 + O(\varepsilon)\bigr],$$

$$y_2 = |D(x)|^{-1/4}\exp\left[\frac{1}{2\varepsilon}\int\sqrt{D(x)}\,dx - \frac{1}{2}\int\frac{g'_x(x)}{\sqrt{D(x)}}\,dx\right]\bigl[1 + O(\varepsilon)\bigr].$$

0.2.3-6. Уравнения общего вида.

Более общее уравнение

$$\varepsilon^2 y''_{xx} + \varepsilon g(x,\varepsilon)y'_x + f(x,\varepsilon)y = 0$$

с помощью замены $y = w\exp\Bigl(-\frac{1}{2\varepsilon}\int g\,dx\Bigr)$ приводится к уравнению

$$\varepsilon^2 w''_{xx} + (f - \tfrac{1}{4}g^2 - \tfrac{1}{2}\varepsilon g'_x)w = 0,$$

которое рассмотрено в разд. 0.2.3-4.

⊙ *Литература к разд. 0.2.3:* В. Вазов (1968), М. В. Федорюк (1983), А. Найфе (1976, 1984), Ф. Олвер (1990).

0.2.4. Краевые задачи

0.2.4-1. Первая, вторая, третья и смешанные краевые задачи ($x_1 \leqslant x \leqslant x_2$).

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''_{xx} + f(x)y'_x + g(x)y = h(x). \qquad (1)$$

1°. *Первая краевая задача.* Требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$y = a_1 \quad \text{при} \quad x = x_1, \qquad y = a_2 \quad \text{при} \quad x = x_2. \qquad (2)$$

(Задаются значения искомая величины в двух различных точках x_1 и x_2).

2°. *Вторая краевая задача.* Требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$y'_x = a_1 \quad \text{при} \quad x = x_1, \qquad y'_x = a_2 \quad \text{при} \quad x = x_2. \qquad (3)$$

(Задаются значения производной искомой величины в двух различных точках x_1 и x_2.)

3°. *Третья краевая задача.* Требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} y'_x - k_1 y = a_1 \quad &\text{при} \quad x = x_1,\\ y'_x + k_2 y = a_2 \quad &\text{при} \quad x = x_2. \end{aligned} \qquad (4)$$

4°. *Смешанная краевая задача.* Требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$y = a_1 \quad \text{при} \quad x = x_1, \qquad y'_x = a_2 \quad \text{при} \quad x = x_2. \qquad (5)$$

(В одной точке задается искомая величина, а в другой — значение ее производной.)

Граничные условия (1), (2), (3) и (4) называются *однородными*, если $a_1 = a_2 = 0$.

0.2.4-2. Упрощение граничных условий. Приведение уравнения к самосопряженному виду.

1°. Неоднородные граничные условия с помощью замены $z = A_2x^2 + A_1x + A_0 + y$ можно свести к однородным граничным условиям (константы A_2, A_1, A_0 подбираются методом неопределенных коэффициентов). В частности, неоднородные граничные условия первого рода (1) приводятся к однородным граничным условиям линейной заменой

$$z = y - \frac{a_2 - a_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) - a_1.$$

2°. Умножением на функцию $p(x) = \exp\Bigl[\int f(x)\,dx\Bigr]$ уравнение (1) приводится к самосопряженному виду

$$[p(x)y'_x]'_x + q(x)y = r(x). \qquad (6)$$

Далее без ограничения общности вместо уравнения (1) будем рассматривать уравнение (6). Считаем, что функции p, p'_x, q, r — непрерывны на отрезке $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ и $p > 0$.

0.2.4-3. Функция Грина. Решение краевых задач для неоднородного уравнения.

Функцией Грина первой краевой задачи для уравнения (6) с однородными граничными условиями (2) называется функция двух аргументов $G(x, s)$, удовлетворяющая условиям:

1°. Функция $G(x, s)$ непрерывна по x при фиксированном s, где $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $x_1 \leqslant s \leqslant x_2$.

2°. Функция $G(x, s)$ является решением однородного уравнения (6) при $r = 0$ для всех $x_1 < x < x_2$, исключая точку $x = s$.

3°. Функция $G(x, s)$ удовлетворяет однородным граничным условиям $G(x_1, s) = G(x_2, s) = 0$.

4°. В точке $x = s$ производная $G'_x(x, s)$ имеет разрыв первого рода со скачком $1/p(s)$, т. е.

$$G'_x(x, s)|_{x\to s, x>s} - G'_x(x, s)|_{x\to s, x<s} = \frac{1}{p(s)}.$$

Для второй, третьей и смешанной краевой задачи в определении функции Грина в условии 3° берутся однородные граничные условия (3), (4) и (5) при $a_1 = a_2 = 0$; остальные условия не меняются.

Решение неоднородного уравнения (6) с соответствующими однородными граничными условиями выражается через функцию Грина по формуле*

$$y(x) = \int_{x_1}^{x_2} G(x,s) r(s)\, ds.$$

0.2.4-4. Представление функция Грина через частные решения.

Рассмотрим первую краевую задачу. Пусть $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ — линейно независимые частные решения однородного уравнения (6) (при $r = 0$), удовлетворяющие условиям

$$y_1(x_1) = 0, \quad y_2(x_2) = 0.$$

(Каждое из решений удовлетворяет одному из однородных граничных условий.)

Функция Грина выражается через решения однородного уравнения следующим образом:

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{y_1(x)y_2(s)}{p(s)W(s)} & \text{при } x_1 \leqslant x \leqslant s, \\ \dfrac{y_1(s)y_2(x)}{p(s)W(s)} & \text{при } s \leqslant x \leqslant x_2, \end{cases} \tag{7}$$

где $W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$ — определитель Вронского.

Замечание. Составную формулу (7) можно использовать также для построения функции Грина во второй, третьей и смешанной краевых задачах. Для этого надо найти линейно независимые частные решения однородного уравнения $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$, первое из которых удовлетворяет соответствующему однородному граничному условию при $x = x_1$, а второе — при $x = x_2$.

⦿ *Литература к разд. 0.2.4:* Л. Э. Эльсгольц (1969), Э. Камке (1976), А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников (1980).

0.2.5. Задачи на собственные значения

0.2.5-1. Задача Штурма — Лиувилля.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$[f(x)y_x']_x' + [\lambda g(x) - h(x)]y = 0 \tag{1}$$

с однородными линейными граничными условиями общего вида

$$\begin{aligned} a_1 y_x' + b_1 y = 0 \quad &\text{при} \quad x = x_1, \\ a_2 y_x' + b_2 y = 0 \quad &\text{при} \quad x = x_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Считается, что при $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ функции f, f_x', g, h непрерывны и $f > 0$, $g > 0$. Предполагается также, что $|a_1| + |b_1| > 0$, $|a_2| + |b_2| > 0$.

Задача Штурма — Лиувилля: требуется найти те значения параметра $\lambda = \lambda_n$, при которых существует нетривиальное решение задачи (1), (2). Такие значения параметра λ_n называются *собственными значениями*, а соответствующие им нетривиальные решения $y_n = y_n(x)$ — *собственными функциями*.

0.2.5-2. Общие свойства задачи Штурма — Лиувилля (1)–(2).

1°. Существует бесконечное (счетное) множество собственных значений. Все собственные значения вещественны и могут быть упорядочены $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$, причем $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$ (поэтому может быть лишь конечное число отрицательных собственных значений). Каждое собственное значение имеет кратность 1.

2°. Собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя. Каждая собственная функция $y_n(x)$ имеет в открытом интервале (x_1, x_2) ровно $n - 1$ нулей.

* Считается, что однородная краевая задача [при $r(x) = 0$ и $a_1 = a_2 = 0$] имеет только тривиальное решение.

3°. Собственные функции $y_n(x)$ и $y_m(x)$ при $n \neq m$ ортогональны между собой с весом $g(x)$ на отрезке $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$:

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x)y_n(x)y_m(x)\,dx = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m.$$

4°. Произвольная функция $F(x)$, имеющая непрерывную производную и удовлетворяющая граничным условиям задачи Штурма — Лиувилля, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n y_n(x),$$

где коэффициенты Фурье F_n функции $F(x)$ вычисляются по формулам

$$F_n = \frac{1}{\|y_n\|^2}\int_{x_1}^{x_2} g(x)F(x)y_n(x)\,dx, \qquad \|y_n\|^2 = \int_{x_1}^{x_2} g(x)y_n^2(x)\,dx.$$

5°. При выполнении условий

$$h(x) \geqslant 0, \quad a_1b_1 \leqslant 0, \quad a_2b_2 \geqslant 0 \tag{3}$$

отрицательных собственных значений нет. Если $h \equiv 0$, $b_1 = b_2 = 0$, то наименьшим собственным значением будет $\lambda_1 = 0$, которому отвечает собственная функция $\varphi_1 = \mathrm{const}$. В остальных случаях при выполнении условий (3) все собственные значения положительны.

6°. Для собственных значений справедлива асимптотическая формула при $n \to \infty$:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{\Delta^2} + O(1), \quad \Delta = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{g(x)}{f(x)}}\,dx. \tag{4}$$

В разд. 0.2.5-3 — 0.2.5-6 будут описаны также специальные свойства задачи Штурма — Лиувилля, которые зависят от конкретного вида граничных условий.

Замечание 1. Уравнение (1) сводится к случаю $f(x) \equiv 1$, $g(x) \equiv 1$ с помощью замены

$$\zeta = \int \sqrt{\frac{g(x)}{f(x)}}\,dx, \quad u(\zeta) = \bigl[f(x)g(x)\bigr]^{1/4} y(x).$$

При этом граничные условия преобразуются в граничные условия аналогичного вида.

Замечание 2. Линейное уравнение второго порядка

$$\varphi_2(x)y''_{xx} + \varphi_1(x)y'_x + [\lambda + \varphi_0(x)]y = 0$$

можно представить в виде уравнения (1), где функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ определяются по формулам

$$f(x) = \exp\Bigl[\int \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\,dx\Bigr], \;\; g(x) = \frac{1}{\varphi_2(x)}\exp\Bigl[\int \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\,dx\Bigr], \;\; h(x) = -\frac{\varphi_0(x)}{\varphi_2(x)}\exp\Bigl[\int \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\,dx\Bigr].$$

0.2.5-3. Задачи с граничными условиями первого рода (случай $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = b_2 = 1$).

Отметим некоторые специальные свойства задачи Штурма — Лиувилля первой краевой задачи для уравнения (1) с граничными условиями

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = x_1, \qquad y = 0 \quad \text{при} \quad x = x_2. \tag{5}$$

1°. При $n \to \infty$ для оценки собственных значений λ_n можно использовать асимптотику (4). При этом для собственных функций $y_n(x)$ справедлива формула

$$\frac{y_n(x)}{\|y_n\|} = \left[\frac{4}{\Delta^2 f(x)g(x)}\right]^{1/4} \sin\left[\frac{\pi n}{\Delta}\int_{x_1}^{x} \sqrt{\frac{g(x)}{f(x)}}\,dx\right] + O\Bigl(\frac{1}{n}\Bigr), \quad \Delta = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{g(x)}{f(x)}}\,dx.$$

2°. При $h \geqslant 0$ для наименьшего собственного значения имеет место оценка сверху (принцип Рэлея):

$$\lambda_1 \leqslant \frac{\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \bigl[f(x)(z'_x)^2 + h(x)z^2\bigr]\,dx}{\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} g(x)z^2\,dx}, \tag{6}$$

где $z = z(x)$ — любая дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям $z(x_1) = z(x_2) = 0$. Знак равенства в (6) достигается при $z = y_1(x)$, где $y_1(x)$ — собственная функция задачи Штурма — Лиувилля, соответствующая собственному значению λ_1. Для получения конкретных оценок в правой части (6) можно положить $z = (x - x_1)(x_2 - x)$ или $z = \sin\Bigl[\dfrac{\pi(x - x_1)}{x_2 - x_1}\Bigr]$.

3°. Расширение отрезка $[x_1, x_2]$ ведет к уменьшению собственных значений.

4°. Пусть выполнены неравенства

$$0 < f_{\min} \leqslant f(x) \leqslant f_{\max}, \quad 0 < g_{\min} \leqslant g(x) \leqslant g_{\max}, \quad 0 < h_{\min} \leqslant h(x) \leqslant h_{\max}.$$

Тогда для собственных значений справедливы двусторонние оценки:

$$\frac{f_{\min}}{g_{\max}} \frac{\pi^2 n^2}{(x_2 - x_1)^2} + \frac{h_{\min}}{g_{\max}} \leqslant \lambda_n \leqslant \frac{f_{\max}}{g_{\min}} \frac{\pi^2 n^2}{(x_2 - x_1)^2} + \frac{h_{\max}}{g_{\min}}.$$

5°. В инженерных расчетах для определения собственных значений можно использовать приближенную формулу

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{\Delta^2} + \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \frac{h(x)}{g(x)}\, dx, \quad \Delta = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{g(x)}{f(x)}}\, dx. \tag{7}$$

Эта формула обеспечивает точный результат при $f(x)g(x) = \mathrm{const}$, $h(x)/g(x) = \mathrm{const}$ (в частности, при постоянных коэффициентах уравнения $f = f_0$, $h = h_0$, $g = g_0$) и дает правильную асимптотику (4) для любых $f(x)$, $h(x)$, $g(x)$. Кроме того, при $f(x) = \mathrm{const}$, $g(x) = \mathrm{const}$ формула (7) дает правильных два первых члена разложения при $n \to \infty$ [сказанное справедливо также при выполнении условия $f(x)g(x) = \mathrm{const}$].

6°. Пусть $f(x) = g(x) = 1$ и функция $h = h(x)$ имеет непрерывную производную. Асимптотические формулы для собственных значений λ_n и собственных функций $y_n(x)$ при $n \to \infty$:

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{x_2 - x_1} + \frac{1}{\pi n} H(x_1, x_2) + O\Bigl(\frac{1}{n^2}\Bigr),$$

$$y_n(x) = \sin \frac{\pi n (x - x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{1}{\pi n}\Bigl[(x_1 - x) H(x, x_2) + (x_2 - x) H(x_1, x)\Bigr] \cos \frac{\pi n (x - x_1)}{x_2 - x_1} + O\Bigl(\frac{1}{n^2}\Bigr),$$

где

$$H(u, v) = \frac{1}{2} \int_u^v h(x)\, dx. \tag{8}$$

7°. Рассмотрим задачу на собственные значения для уравнения с малым параметром

$$y''_{xx} + [\lambda + \varepsilon h(x)] y = 0 \qquad (\varepsilon \to 0)$$

и граничными условиями (5) при $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Считаем, что $h(x) = h(-x)$.

Собственные значения и нормированные собственные функции:

$$\lambda_n = \pi^2 n^2 - \varepsilon A_{nn} + \frac{\varepsilon^2}{\pi^2} \sum_{k \neq n} \frac{A_{nk}^2}{n^2 - k^2} + O(\varepsilon^3), \qquad A_{nk} = 2 \int_0^1 h(x) \sin(\pi n x) \sin(\pi k x)\, dx;$$

$$y_n = \sqrt{2}\, \sin(\pi n x) - \varepsilon \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \sum_{k \neq n} \frac{A_{nk}}{n^2 - k^2} \sin(\pi k x) + O(\varepsilon^2).$$

Здесь суммирование ведется по k от 1 до ∞. Следующий член разложения y_n приведен в книге А. Найфе (1976, стр. 81–84).

0.2.5-4. Задачи с граничными условиями второго рода (случай $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 = b_2 = 0$).

Отметим некоторые специальные свойства задачи Штурма — Лиувилля второй краевой задачи для уравнения (1) с граничными условиями

$$y'_x = 0 \quad \text{при} \quad x = x_1, \qquad y'_x = 0 \quad \text{при} \quad x = x_2.$$

1°. При $h > 0$ для наименьшего собственного значения имеет место оценка сверху (6), где $z = z(x)$ — любая дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям $z'_x(x_1) = z'_x(x_2) = 0$. Знак равенства в (6) достигается при $z = y_1(x)$, где $y_1(x)$ — собственная функция задачи Штурма — Лиувилля, соответствующая собственному значению λ_1.

2°. Пусть $f(x)=g(x)=1$ и функция $h=h(x)$ имеет непрерывную производную. Асимптотические формулы для собственных значений λ_n и собственных функций $y_n(x)$ при $n\to\infty$:

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda_n} &= \frac{\pi(n-1)}{x_2-x_1}+\frac{1}{\pi(n-1)}H(x_1,x_2)+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),\\ y_n(x) &= \cos\frac{\pi(n-1)(x-x_1)}{x_2-x_1}+\frac{1}{\pi(n-1)}\Big[(x_1-x)H(x,x_2)+\\ &\quad+(x_2-x)H(x_1,x)\Big]\sin\frac{\pi(n-1)(x-x_1)}{x_2-x_1}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),\end{aligned}$$

где функция $H(u,v)$ определяется по формуле (8).

0.2.5-5. Задачи с граничными условиями третьего рода (случай $a_1=a_2=1$, $b_1\neq 0$, $b_2\neq 0$).

Рассмотрим третью краевую задачу для уравнения (1) с граничными условиями (2) при $a_1=a_2=1$. Пусть $f(x)=g(x)=1$ и функция $h=h(x)$ имеет непрерывную производную.

Асимптотические формулы для собственных значений λ_n и собственных функций $y_n(x)$ при $n\to\infty$:

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda_n} &= \frac{\pi(n-1)}{x_2-x_1}+\frac{1}{\pi(n-1)}\big[H(x_1,x_2)-b_1+b_2\big]+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),\\ y_n(x) &= \cos\frac{\pi(n-1)(x-x_1)}{x_2-x_1}+\frac{1}{\pi(n-1)}\Big\{(x_1-x)\big[H(x,x_2)+b_2\big]+\\ &\quad+(x_2-x)\big[H(x_1,x)-b_1\big]\Big\}\sin\frac{\pi(n-1)(x-x_1)}{x_2-x_1}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),\end{aligned}$$

где функция $H(u,v)$ определяется по формуле (8).

0.2.5-6. Задачи со смешанными граничными условиями (случай $a_1=b_2=1$, $a_2=b_1=0$).

Отметим некоторые специальные свойства задачи Штурма — Лиувилля смешанной краевой задачи для уравнения (1) с граничными условиями

$$y'_x=0\quad\text{при}\quad x=x_1,\qquad y=0\quad\text{при}\quad x=x_2.$$

1°. При $h\geqslant 0$ для наименьшего собственного значения имеет место оценка сверху (6), где $z=z(x)$ — любая дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям $z'_x(x_1)=0$ и $z(x_2)=0$. Знак равенства в (6) достигается при $z=y_1(x)$, где $y_1(x)$ — собственная функция задачи Штурма — Лиувилля, соответствующая собственному значению λ_1.

2°. Пусть $f(x)=g(x)=1$ и функция $h=h(x)$ имеет непрерывную производную. Асимптотические формулы для собственных значений λ_n и собственных функций $y_n(x)$ при $n\to\infty$:

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda_n} &= \frac{\pi(2n-1)}{2(x_2-x_1)}+\frac{2}{\pi(2n-1)}H(x_1,x_2)+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),\\ y_n(x) &= \cos\frac{\pi(2n-1)(x-x_1)}{2(x_2-x_1)}+\frac{2}{\pi(2n-1)}\Big[(x_1-x)H(x,x_2)+\\ &\quad+(x_2-x)H(x_1,x)\Big]\sin\frac{\pi(2n-1)(x-x_1)}{2(x_2-x_1)}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),\end{aligned}$$

где функция $H(u,v)$ определяется по формуле (8).

⊙ *Литература к разделу 0.2.5*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), Э. Камке (1976), Л. Коллатц (1968), В. А. Марченко (1977), А. Г. Костюченко, И. С. Саргсян (1979), Б. М. Левитан, И. С. Саргсян (1988), Л. Д. Акуленко, С. В. Нестеров (1997), В. А. Винокуров, В. А. Садовничий (2000).