Из книги В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина, «Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям». — М.: Физматлит, 2001.

0.3. Нелинейные уравнения второго порядка

0.3.1. Вид общего решения. Задача Коши.

0.3.1-1. Уравнения, разрешенные относительно производной. Общее решение.

Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$y''_{xx} = f(x, y, y'_x). \tag{1}$$

Общее решение этого уравнения зависит от двух произвольных постоянных C_1 и C_2. В ряде случаев общее решение удается записать в явном виде $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ (чаще встречается представление общего решения в неявном виде или в параметрической форме).

0.3.1-2. Задача Коши. Теорема существования и единственности.

1°. *Задача Коши*: требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее *начальным условиям*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'_x(x_0) = y_1. \tag{2}$$

(Задается искомая величина y_0 и ее производная y_1 в одной точке x_0.)

2°. *Теорема существования и единственности*. Пусть $f(x, y, z)$ является непрерывной функцией всех аргументов в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, y_1) и в этой окрестности имеет ограниченные частные производные f_y и f_z [или удовлетворяет условию Липшица $|f(x,y,z)-f(x,\bar{y},\bar{z})| \leqslant A\bigl(|y-\bar{y}|+|z-\bar{z}|\bigr)$, где $A>0$ — некоторая константа]. Тогда существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2).

⊙ *Литература к разделу 0.3.1*: В. В. Степанов (1958), И. Г. Петровский (1970), Э. Камке (1976), Г. Корн, Т. Корн (1984), А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников (1980).

0.3.2. Уравнения, допускающие понижение порядка

0.3.2-1. Уравнения, не содержащее явно y.

В общем случае уравнения, не содержащее явно y, имеют вид

$$F(x, y'_x, y''_{xx}) = 0. \tag{1}$$

Эти уравнения не меняются при произвольном сдвиге зависимой переменной: $y \to y + \text{const}$. Замена $y'_x = z(x)$ с учетом формулы $y''_{xx} = z'_x(x)$ приводит (1) к уравнению первого порядка: $F(x, z, z'_x) = 0$.

0.3.2-2. Уравнения, не содержащее явно x (автономные уравнения).

В общем случае уравнения, не содержащее явно x, имеют вид

$$F(y, y'_x, y''_{xx}) = 0. \tag{2}$$

Эти уравнения не меняются при произвольном сдвиге независимой переменной: $x \to x + \text{const}$. Подстановка $y'_x = w(y)$ (y играет роль независимой переменной) с учетом равенств $y''_{xx} = w'_x = w'_y y'_x = w'_y w$ приводит (2) к уравнению первого порядка: $F(y, w, ww'_y) = 0$.

Замечание 1. Уравнение $y''_{xx} = f(y+ax^2+bx+c)$ заменой $u = y+ax^2+bx+c$ приводится к уравнению рассматриваемого вида $u''_{xx} = f(u) + 2a$.

0.3.2-3. Уравнения вида $F(ax + by, y'_x, y''_{xx}) = 0$.

Эти уравнения не меняются при одновременном сдвиге независимой и зависимой переменных по правилу: $x \to x + bc$, $y \to y - ac$, где c — произвольная постоянная.

При $b = 0$ см. уравнение (1). При $b \neq 0$ замена $bw = ax + by$ приводит к уравнению (2): $F(bw, w'_x - a/b, w''_{xx}) = 0$.

0.3.2-4. Уравнения вида $F(x, xy'_x - y, y''_{xx}) = 0$.

Замена $w(x) = xy'_x - y$ приводит к уравнению первого порядка: $F(x, w, w'_x/x) = 0$.

0.3.2-5. Однородные уравнения.

1°. *Однородные уравнения относительно независимой переменной* не меняются при растяжении (сжатии) независимой переменной по правилу: $x \to \alpha x$, где α — произвольная постоянная ($\alpha \neq 0$). В общем случае они могут быть записаны в виде

$$F(y, xy'_x, x^2 y''_{xx}) = 0. \tag{3}$$

Подстановка $z(y) = xy'_x$ приводит к уравнению первого порядка: $F(y, z, zz'_y - z) = 0$.

2°. *Однородные уравнения относительно зависимой переменной* не меняются при растяжении (сжатии) искомой величины по правилу: $y \to \alpha y$, где α — произвольная постоянная ($\alpha \neq 0$). В общем случае они могут быть записаны в виде

$$F(x, y'_x/y, y''_{xx}/y) = 0. \tag{4}$$

Подстановка $z(x) = y'_x/y$ приводит к уравнению первого порядка: $F(x, z, z'_x + z^2) = 0$.

3°. *Однородные уравнения относительно двух переменных* не меняются при одновременном растяжении (сжатии) независимой и зависимой переменных по правилу: $x \to \alpha x$, $y \to \alpha y$, где α — произвольная постоянная ($\alpha \neq 0$). В общем случае они могут быть записаны в виде

$$F(y/x, y'_x, xy''_{xx}) = 0. \tag{5}$$

Преобразование $t = \ln|x|$, $w = y/x$ приводит к автономному уравнению из разд. 0.3.2-2: $F(w, w'_t + w, w''_{tt} + w'_t) = 0$.

0.3.2-6. Обобщенно-однородные уравнения.

1°. *Обобщенно-однородные уравнения* не меняются при одновременном растяжении (сжатии) независимой и зависимой переменных по правилу: $x \to \alpha x$, $y \to \alpha^k y$, где $\alpha \neq 0$ — произвольная постоянная, а k — некоторое число. Они могут быть записаны в виде

$$F\bigl(x^{-k} y, x^{1-k} y'_x, x^{2-k} y''_{xx}\bigr) = 0. \tag{6}$$

Преобразование $t = \ln x$, $w = x^{-k} y$ приводит к автономному уравнению из разд. 0.3.2-2:

$$F\bigl(w, w'_t + kw, w''_{tt} + (2k-1)w'_t + k(k-1)w\bigr) = 0.$$

2°. Наиболее общая форма записи обобщенно-однородных уравнений:

$$\mathcal{F}(x^n y^m, xy'_x/y, x^2 y''_{xx}/y) = 0. \tag{7}$$

Преобразование $z = x^n y^m$, $u = xy'_x/y$ приводит это уравнение к уравнению первого порядка: $\mathcal{F}\bigl(z, u, z(mu+n)u'_z - u + u^2\bigr) = 0$.

Замечание 2. При $m \neq 0$ уравнение (7) эквивалентно уравнению (6), где $k = -n/m$. Частным значениям $n = 0$ и $m = 0$ соответствуют однородные уравнения относительно независимой и зависимой переменной (3) и (4). При $n = -m \neq 0$ имеем однородное уравнение относительно двух переменных (5).

0.3.2-7. Уравнения, инвариантные относительно преобразований «растяжения-сдвига».

1°. Уравнения вида

$$F(e^{\lambda x} y, e^{\lambda x} y'_x, e^{\lambda x} y''_{xx}) = 0 \tag{8}$$

не меняются при одновременном сдвиге и растяжении переменных по правилу: $x \to x + \alpha$, $y \to \beta y$, где $\beta = e^{-\alpha\lambda}$, α — любое. Замена $w = e^{\lambda x} y$ приводит (8) к уравнению из разд. 0.3.2-2: $F(w, w'_x - \lambda w, w''_{xx} - 2\lambda w'_x + \lambda^2 w) = 0$.

2°. Уравнения вида

$$F(e^{\lambda x} y^n, y'_x/y, y''_{xx}/y) = 0 \tag{9}$$

не меняются при одновременном сдвиге и растяжении переменных по правилу: $x \to x + \alpha$, $y \to \beta y$, где $\beta = \exp(-\alpha\lambda/n)$, α — любое. Преобразование $z = e^{\lambda x} y^n$, $w = y'_x/y$ приводит (9) к уравнению первого порядка: $F\bigl(z, w, z(nw + \lambda)w'_z + w^2\bigr) = 0$.

3°. Уравнения вида
$$F(x^n e^{\lambda y}, xy'_x, x^2 y''_{xx}) = 0 \qquad (10)$$
не меняются при одновременном растяжении и сдвиге переменных по правилу: $x \to \alpha x$, $y \to y+\beta$, где $\alpha = \exp(-\beta\lambda/n)$, β — любое. Преобразование $z = x^n e^{\lambda y}$, $w = xy'_x$ приводит (10) к уравнению первого порядка: $F\bigl(z, w, z(\lambda w + n)w'_z - w\bigr) = 0$.

Замечание 3. Методы, основанные на групповом и дискретно-групповом анализе дифференциальных уравнений, излагаются в книгах Л. В. Овсянникова (1978), П. Олвера (1986), Н. Х. Ибрагимова (Ibragimov, 1994), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 1994).

0.3.2-8. Приведение квазилинейных уравнений к нормальной форме.

Рассмотрим уравнение
$$y''_{xx} + f(x)y'_x + g(x)y = \Phi(x, y) \qquad (11)$$
с линейной левой и нелинейной правой частью. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — фундаментальная система решений «укороченного» линейного уравнения при $\Phi \equiv 0$. Преобразование
$$\xi = \frac{y_2(x)}{y_1(x)}, \qquad u = \frac{y}{y_1(x)} \qquad (12)$$
приводит уравнение (11) к нормальной форме
$$u''_{\xi\xi} = \Psi(\xi, u), \qquad \text{где} \quad \Psi(\xi, u) = \frac{y_1^3(x)}{W^2(x)}\Phi\bigl(x, y_1(x)u\bigr).$$
Здесь $W(x) = y_1 y'_2 - y_2 y'_1$ — вронскиан «укороченного» уравнения, а переменную x надо выразить через ξ с помощью первого равенства (12).

Преобразование (12) удобно использовать для упрощения и классификации уравнений вида (11) при $\Phi(x, y) = h(x)y^k$, уменьшая число рассматриваемых функций с трех до одной: $\{f, g, h\} \Longrightarrow \{0, 0, h_1\}$.

⦿ *Литература к разделу 0.3.2*: В. В. Степанов (1958), А. Ф. Филиппов (1970), Н. М. Матвеев (1970), Э. Камке (1976), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1978), А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников (1980), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1993, 1995, 1997), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (1995).

0.3.3. Методы регулярных разложений по независимой переменной и малому параметру

0.3.3-1. Метод разложения в ряд Тейлора по независимой переменной.

Решение задачи Коши
$$y''_{xx} = f(x, y, y'_x), \qquad (1)$$
$$y(x_0) = y_0, \quad y'_x(x_0) = y_1 \qquad (2)$$
можно искать в виде ряда Тейлора по степеням разности $(x - x_0)$:
$$y(x) = y(x_0) + y'_x(x_0)(x - x_0) + \frac{y''_{xx}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''_{xxx}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots \qquad (3)$$
Первые два коэффициента $y(x_0)$ и $y'_x(x_0)$ в решении (3) задаются начальными условиями (2). Последующие значения производных искомой величины в точке $x = x_0$ определяются из уравнения (1) и его следствий (полученных путем последовательного дифференцирования уравнения) с учетом начальных условий (2). В частности, полагая в уравнении (1) $x = x_0$ и подставляя значения (2), находим значение второй производной:
$$y''_{xx}(x_0) = f(x_0, y_0, y_1). \qquad (4)$$
Дифференцируя далее уравнение (1), имеем
$$y'''_{xxx} = f_x(x, y, y'_x) + f_y(x, y, y'_x)y'_x + f_{y'}(x, y, y'_x)y''_{xx}. \qquad (5)$$
Подставив в правую часть равенства (5) значение $x = x_0$, начальные условия (2) и значение второй производной (4), вычислим значение третьей производной:
$$y'''_{xxx}(x_0) = f_x(x_0, y_0, y_1) + f_y(x_0, y_0, y_1)y_1 + f(x_0, y_0, y_1)f_{y'}(x_0, y_0, y_1).$$
Аналогичным образом определяются и последующие производные искомой величины.

Полученное данным методом решение (3) обычно можно использовать лишь в некоторой окрестности точки $x = x_0$.

0.3.3-2. Метод регулярного (прямого) разложения по малому параметру.

Рассмотрим уравнение общего вида с параметром ε:

$$y''_{xx} + f(x, y, y'_x, \varepsilon) = 0. \tag{6}$$

Пусть функция f может быть представлена в виде степенного ряда по параметру ε:

$$f(x, y, y'_x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_n(x, y, y'_x). \tag{7}$$

Решение задачи Коши и различных краевых задач для уравнения (6) при $\varepsilon \to 0$ ищут в виде регулярного разложения по степеням малого параметра:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n(x). \tag{8}$$

Выражение (8) подставляют в уравнение (6) с учетом представления (7). Затем функции f_n разлагают в ряд по малому параметру и собирают члены при одинаковых степенях ε. Приравнивая полученные выражения (при одинаковых степенях ε) нулю, приходят к системе уравнений для функций y_n:

$$y_0'' + f_0(x, y_0, y_0') = 0, \tag{9}$$

$$y_1'' + F(x, y_0, y_0')y_1' + G(x, y_0, y_0')y_1 + f_1(x, y_0, y_0') = 0, \qquad F = \frac{\partial f_0}{\partial y'}, \quad G = \frac{\partial f_0}{\partial y}. \tag{10}$$

Здесь выписаны только первые два уравнения, штрихом обозначены производные по x. Начальные (или граничные) условия для функций y_n получаются с учетом разложения (8).

Успех применимости данного метода, в первую очередь, определяется возможностью построить решение уравнения (9) для главного члена разложения y_0. Важно отметить, что остальные члены разложения y_n при $n \geqslant 1$ описываются линейными уравнениями (с однородными начальными условиями).

Пример. Колебания точечного материального тела, соединенного с нелинейной пружиной, описываются уравнением Дюффинга и начальными условиями:

$$y''_{xx} + y + \varepsilon y^3 = 0, \qquad y(0) = a, \quad y'_x(0) = 0,$$

где y — отклонение от положения равновесия, x — безразмерное время.

При $\varepsilon \to 0$ приближенное решение данной задачи ищем в виде асимптотического разложения (8). Подставим его в уравнение и начальные условия и разложим по степеням ε. Приравнивая затем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, получим следующие задачи для определения функций y_0 и y_1:

$$y_0'' + y_0 = 0, \qquad y_0 = a, \quad y_0' = 0;$$
$$y_1'' + y_1 = -y_0^3, \qquad y_1 = 0, \quad y_1' = 0.$$

Решение задачи для старшего члена разложения имеет вид

$$y_0 = a \cos x.$$

Подставив это выражение в уравнение для следующего члена разложения и учитывая тождество $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$, получим

$$y_1'' + y_1 = -\tfrac{1}{4}a^3(\cos 3x + 3\cos x), \qquad y_1 = 0, \quad y_1' = 0.$$

В результате интегрирования находим

$$y_1 = -\tfrac{3}{8}a^3 x \sin x + \tfrac{1}{32}a^3(\cos 3x - 3\cos x).$$

Таким образом, решение исходной задачи дается формулой

$$y = a\cos x + \varepsilon a^3\bigl[-\tfrac{3}{8}x\sin x + \tfrac{1}{32}(\cos 3x - 3\cos x)\bigr] + O(\varepsilon^2).$$

Замечание 1. Из-за наличия слагаемого $x \sin x$ имеем $y_1/y_0 \to \infty$ при $x \to \infty$. Поэтому полученное решение непригодно при больших временах. Его можно использовать только при $\varepsilon x \ll 1$ (следствие условия применимости разложения: $y_0 \gg \varepsilon y_1$).

Указанное обстоятельство является типичным при использовании метода регулярного разложения по малому параметру (оно становится непригодным при больших значениях независимой переменной). Этот метод также нельзя использовать, если разложение (8) начинается с отрицательных степеней ε. Методы, позволяющие преодолеть указанные трудности, рассматриваются в разд. 0.3.4.

Замечание 2. Растущие при $x \to \infty$ слагаемые типа $x \sin x$, которые ограничивают область применимости асимптотических разложений, называются *вековыми* (или *секулярными*) членами.

⊙ *Литература к разд. 0.3.3:* А. Ф. Филиппов (1970), Э. Камке (1976), А. Найфе (1976, 1984).

0.3.4. Методы возмущений, используемые в механике и физике

Методы возмущений широко используются для решения задач нелинейной механики и теоретической физики, которые описываются дифференциальными уравнениями с малым параметром. Основная цель данных методов заключается в получении приближенного решения, равномерно пригодного при $\varepsilon \to 0$ для всех (в том числе для больших и малых) значений независимой переменной.

Уравнения с малым параметром можно разделить на два типа:

1) — если порядок уравнения сохраняется при $\varepsilon = 0$;

2) — если порядок уравнения становится меньше при $\varepsilon = 0$.

Для уравнений первого типа решения соответствующих задач* будут достаточно гладкими (слабо меняются при уменьшении ε). Об уравнениях второго типа говорят, что они вырождаются при $\varepsilon = 0$ (или сингулярно возмущены). В соответствующих задачах обычно возникают тонкие пограничные слои, толщина которых существенно зависит от ε, характеризующиеся большими градиентами искомой величины.

Все методы возмущений имеют ограниченную область применимости; возможность использования конкретного метода зависит от типа рассматриваемых уравнений или задач. Наиболее распространенные методы возмущений кратко описаны в табл. 2 (метод регулярных разложений излагается в разд. 0.3.3-2). Ниже приводятся дополнительные замечания и конкретные примеры по некоторым методам. На практике ограничиваются получением нескольких первых членов асимптотического разложения.

Во многих задачах нелинейной механики и теоретической физики независимой переменной является безразмерное время t. Поэтому в данном разделе по традиции часто используется обозначение $x = t$, где $0 \leqslant t < \infty$.

0.3.4-1. Метод растянутых параметров (метод Линдстедта — Пуанкаре).

Характерные особенности метода растянутых параметров проиллюстрируем на конкретном примере (используемое преобразование независимой переменной и вид разложения указаны в первой строке табл. 2).

Пример 1. Рассмотрим уравнение Дюффинга

$$y''_{tt} + y + \varepsilon y^3 = 0. \tag{1}$$

Сделав замену $t = z(1 + \varepsilon\omega_1 + \ldots)$, имеем

$$y''_{zz} + (1 + \varepsilon\omega_1 + \ldots)^2(y + \varepsilon y^3) = 0. \tag{2}$$

Решение ищем в виде ряда $y = y_0(z) + \varepsilon y_1(z) + \ldots$ Подставим его в уравнение (2) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. В результате для определения двух первых членов ряда получим следующую систему (штрихи обозначают производные по z):

$$y''_0 + y_0 = 0, \tag{3}$$

$$y''_1 + y_1 = -y_0^3 - 2\omega_1 y_0. \tag{4}$$

Общее решение уравнения (3) дается формулой

$$y_0 = a\cos(z + b), \tag{5}$$

где a, b — постоянные интегрирования. Уравнение (4) с учетом (5) после элементарных преобразований принимает вид

$$y''_1 + y_1 = -\tfrac{1}{4}a^3\cos\bigl[3(z + b)\bigr] - 2a\bigl(\tfrac{3}{8}a^2 + \omega_1\bigr)\cos(z + b). \tag{6}$$

При $\omega_1 \neq -\frac{3}{8}a^2$ частное решение уравнения (6) содержит вековой член, пропорциональный $z\cos(z + b)$. В этом случае при достаточно больших z нельзя удовлетворить условию применимости разложения: $y_1/y_0 = O(1)$ (см. последний столбец первой строки табл. 2). Чтобы выполнялось данное условие необходимо положить

$$\omega_1 = -\tfrac{3}{8}a^2. \tag{7}$$

В этом случае решение уравнения (6) определяется формулой

$$y_1 = \tfrac{1}{32}a^3\cos\bigl[3(z + b)\bigr]. \tag{8}$$

Аналогичным образом можно определить и дальнейшие члены разложения.

Используя выражения (5), (7), (8), получим решение уравнения Дюффинга в виде

$$y = a\cos(\omega t + b) + \tfrac{1}{32}\varepsilon a^3\cos\bigl[3(\omega t + b)\bigr] + O(\varepsilon^2),$$

$$\omega = \bigl[1 - \tfrac{3}{8}\varepsilon a^2 + O(\varepsilon^2)\bigr]^{-1} = 1 + \tfrac{3}{8}\varepsilon a^2 + O(\varepsilon^2).$$

---

* Здесь и далее считается, что начальные или граничные условия не зависят от параметра ε.

ТАБЛИЦА 2

Методы возмущений, используемые в нелинейной механике и теоретической физике (в третьем столбце указаны n первых членов разложений по малому параметру ε)

Название метода	Примеры задач, решаемых этим методом	В каком виде ищется решение	Дополнительные условия и замечания
Метод растянутых параметров ($0\leqslant t<\infty$)	Ищутся периодические решения уравнения $y''_{tt}+\omega_0^2 y=\varepsilon f(y,y'_t)$. См. также разд. 0.3.4-1.	$y(t)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k y_k(z)$, $t=z\Bigl(1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\varepsilon^k\omega_k\Bigr)$	Ищутся y_k, ω_k; $y_{k+1}/y_k=O(1)$. За счет выбора постоянных ω_k устраняются вековые члены.
Метод растянутых переменных ($0\leqslant t<\infty$)	Задача Коши: $y'_t=f(t,y,\varepsilon)$; $y(t_0)=y_0$ (f — специального вида). См. также задачу в методе растянутых параметров.	$y(t)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k y_k(z)$, $t=z+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\varepsilon^k\varphi_k(z)$	Ищутся y_k, φ_k; $y_{k+1}/y_k=O(1)$, $\varphi_{k+1}/\varphi_k=O(1)$
Метод усреднения (или метод осреднения, $0\leqslant t<\infty$)	Задача Коши: $y''_{tt}+\omega_0^2 y=\varepsilon f(y,y'_t)$; $y(0)=y_0$, $y'_t(0)=y_1$. Более общие задачи см. в разд. 0.3.4-2, п. 2°.	$y=a(t)\cos\varphi(t)$, где амплитуда a и фаза φ описываются уравнениями: $\frac{da}{dt}=-\frac{\varepsilon}{\omega_0}f_s(a)$, $\frac{d\varphi}{dt}=\omega_0-\frac{\varepsilon}{a\omega_0}f_c(a)$	Ищутся a, φ; $f_s=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\varphi F\,d\varphi$, $f_c=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\varphi F\,d\varphi$, $F=$ $=f(a\cos\varphi,-a\omega_0\sin\varphi)$
Метод Крылова — Боголюбова — Митропольского ($0\leqslant t<\infty$)	Ищутся периодические решения уравнения $y''_{tt}+\omega_0^2 y=\varepsilon f(y,y'_t)$. Задача Коши для этого и других уравнений.	$y=a\cos\varphi+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\varepsilon^k y_k(a,\varphi)$, a и φ описываются уравнениями: $\frac{da}{dt}=\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon^k A_k(a)$, $\frac{d\varphi}{dt}=\omega_0+\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon^k\Phi_k(a)$	Ищутся y_k, A_k, Φ_k; y_k — периодические функции по аргументу φ с периодом 2π. Считается, что y_k не содержат $\cos\varphi$.
Метод двухмасштабных разложений ($0\leqslant t<\infty$)	Задача Коши: $y''_{tt}+\omega_0^2 y=\varepsilon f(y,y'_t)$; $y(0)=y_0$, $y'_t(0)=y_1$. Краевые задачи описаны в разд. 0.3.4-3, п. 2°.	$y=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k y_k(\xi,\eta)$, где $\xi=\varepsilon t$, $\eta=t\Bigl(1+\sum\limits_{k=2}^{n-1}\varepsilon^k\omega_k\Bigr)$, $\frac{d}{dt}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial\xi}+\bigl(1+\varepsilon^2\omega_2+\dots\bigr)\frac{\partial}{\partial\eta}$	Ищутся y_k, ω_k; $y_{k+1}/y_k=O(1)$. За счет выбора постоянных ω_k устраняются вековые члены.
Метод многих масштабов ($0\leqslant t<\infty$)	Ищутся периодические решения уравнения $y''_{tt}+\omega_0^2 y=\varepsilon f(y,y'_t)$. Задача Коши для этого и других уравнений.	$y=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k y_k$, где $y_k=y_k(T_0,T_1,\dots,T_n)$, $T_k=\varepsilon^k t$ $\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial T_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}+\dots+\varepsilon^n\frac{\partial}{\partial T_n}$	Ищутся y_k; $y_{k+1}/y_k=O(1)$. При $n=1$ данный метод эквивалентен методу усреднения.
Метод сращиваемых асимптотических разложений ($0\leqslant x\leqslant b$)	Краевая задача: $\varepsilon y''_{xx}+f(x,y)y'_x=g(x,y)$, $y(0)=y_0$, $y(b)=y_b$ (считается, что $f>0$). Другие задачи описаны в разд. 0.3.4-4, п. 2°.	Внешнее разложение: $y=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sigma_k(\varepsilon)y_k(x)$, $O(\varepsilon)\leqslant x\leqslant b$. Внутреннее разложение ($z=x/\varepsilon$): $\tilde y=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\tilde\sigma_k(\varepsilon)\tilde y_k(z)$, $0\leqslant x\leqslant O(\varepsilon)$.	Ищутся y_k, $\tilde y_k$, σ_k, $\tilde\sigma_k$; $y_{k+1}/y_k=O(1)$, $\tilde y_{k+1}/\tilde y_k=O(1)$. Используется процедура сращивания: $y(x\to 0)=\tilde y(z\to\infty)$.
Метод составных разложений ($0\leqslant x\leqslant b$)	Краевая задача: $\varepsilon y''_{xx}+f(x,y)y'_x=g(x,y)$, $y(0)=y_0$, $y(b)=y_b$ (считается, что $f>0$). Краевые задачи для других уравнений.	$y=Y(x,\varepsilon)+\widetilde Y(z,\varepsilon)$, $Y=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sigma_k(\varepsilon)Y_k(x)$, $\widetilde Y=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\tilde\sigma_k(\varepsilon)\widetilde Y_k(z)$, $z=\dfrac{x}{\varepsilon}$. Здесь $\widetilde Y_k\to 0$ при $z\to\infty$.	Ищутся Y_k, $\widetilde Y_k$, σ_k, $\tilde\sigma_k$; $Y(b,\varepsilon)=y_b$, $Y(0,\varepsilon)+\widetilde Y(0,\varepsilon)=y_0$. Для построения решения используются два вида записи уравнения (в переменных x и z).

0.3.4-2. Метод усреднения (схема Ван-дер-Поля — Крылова — Боголюбова).

1°. Метод усреднения состоит из двух этапов. На первом этапе нелинейное уравнение второго порядка

$$y''_{tt} + \omega_0^2 y = \varepsilon f(y, y'_t) \tag{9}$$

с помощью преобразования

$$y = a\cos\varphi, \quad y'_t = -\omega_0 a\sin\varphi, \qquad \text{где} \quad a = a(t), \quad \varphi = \varphi(t),$$

сводится к эквивалентной системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$a'_t = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} f(a\cos\varphi, -\omega_0 a\sin\varphi)\sin\varphi, \qquad \varphi'_t = \omega_0 - \frac{\varepsilon}{\omega_0 a} f(a\cos\varphi, -\omega_0 a\sin\varphi)\cos\varphi. \tag{10}$$

Правые части уравнений (10) периодичны по φ, при этом амплитуда a является слабо меняющейся функцией времени. За время, в течение которого фаза φ изменяется на величину равную 2π, амплитуда и характер колебаний меняются мало.

На втором этапе правые части уравнений (10) усредняют по φ. В результате получают приближенную систему

$$a'_t = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} f_s(a), \qquad \varphi'_t = \omega_0 - \frac{\varepsilon}{\omega_0 a} f_c(a), \tag{11}$$

где

$$f_s(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\varphi f(a\cos\varphi, -\omega_0 a\sin\varphi)\,d\varphi, \quad f_c(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\varphi f(a\cos\varphi, -\omega_0 a\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Система уравнений (11) существенно проще исходной системы (10): первое уравнение (11) для амплитуды колебаний a является уравнением с разделяющимися переменными и элементарно интегрируется; затем интегрируется второе уравнение (11), которое линейно относительно φ.

Отметим, что метод Крылова — Боголюбова — Митропольского (см. четвертую строку табл. 2) является обобщением описанной схемы метода усреднения и позволяет получать последующие члены асимптотического разложения при $\varepsilon \to 0$.

2°. Опишем теперь более общую схему метода усреднения. Будем рассматривать нелинейное уравнение второго порядка

$$y''_{tt} + g(t, y, y'_t) = \varepsilon f(t, y, y'_t). \tag{12}$$

Сначала преобразуем его к эквивалентной системе уравнений:

$$y'_t = u, \qquad u'_t + g(t, y, u) = \varepsilon f(t, y, u). \tag{13}$$

Пусть известно общее решение «укороченной» системы (13) при $\varepsilon = 0$:

$$y_0 = \varphi(t, C_1, C_2), \qquad u_0 = \psi(t, C_1, C_2), \tag{14}$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования. Используя идеи метода вариации произвольных постоянных, перейдем в системе (13) от переменных y, u к переменным Лагранжа x_1, x_2 по формулам

$$y = \varphi(t, x_1, x_2), \qquad u = \psi(t, x_1, x_2), \tag{15}$$

где φ и ψ — те же самые функции, которые определяют общее решение «укороченной» системы (14). Преобразование (15) позволяет привести систему (13) к *стандартной форме*:

$$x'_1 = \varepsilon F_1(t, x_1, x_2), \qquad x'_2 = \varepsilon F_2(t, x_1, x_2). \tag{16}$$

Здесь штрих обозначает производную по t и использованы краткие обозначения:

$$F_1 = \frac{\varphi_2 f(t,\varphi,\psi)}{\varphi_2\psi_1 - \varphi_1\psi_2}, \quad F_2 = -\frac{\varphi_1 f(t,\varphi,\psi)}{\varphi_2\psi_1 - \varphi_1\psi_2}; \quad \varphi_k = \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}, \quad \psi_k = \frac{\partial\psi}{\partial x_k},$$
$$\varphi = \varphi(t, x_1, x_2), \quad \psi = \psi(t, x_1, x_2).$$

Важно отметить, что система (16) эквивалентна исходному уравнению (12). Искомые величины x_1 и x_2 являются медленно меняющимися функциями времени.

В результате процедуры усреднения система (16) заменяется на более простую приближенную автономную систему уравнений

$$x'_1 = \varepsilon \mathcal{F}_1(x_1, x_2), \qquad x'_2 = \varepsilon \mathcal{F}_2(x_1, x_2), \tag{17}$$

где

$$\mathcal{F}_k(x_1,x_2)=\frac{1}{T}\int_0^T F_k(t,x_1,x_2)\,dt,\qquad \text{если } F_k \text{ является } T\text{-периодической функцией по } t;$$

$$\mathcal{F}_k(x_1,x_2)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F_k(t,x_1,x_2)\,dt,\quad \text{если } F_k \text{ не является периодической функцией по } t.$$

Замечание 1. Метод усреднения применим к уравнениям (9) и (12) с негладкой правой частью.

Замечание 2. Метод усреднения допускает строгое математическое обоснование. Существует также процедура, позволяющая находить последующие члены разложения. Об этом см. книги Н. Н. Моисеева (1969), Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского (1974), Е. А. Гребеникова (1986), В. Ф. Журавлева, Д. М. Климова (1988).

0.3.4-3. Метод двухмасштабных разложений (схема Коула — Кеворкяна).

1°. Характерные особенности метода двухмасштабных разложений сначала проиллюстрируем на примере решения конкретной задачи. Затем опишем возможные обобщения и модификации метода.

Пример 2. Рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля:

$$y''_{tt}+y=\varepsilon(1-y^2)y'_t. \tag{18}$$

Его решение ищем в виде (см. пятую строку табл. 2):

$$\begin{aligned}&y=y_0(\xi,\eta)+\varepsilon y_1(\xi,\eta)+\varepsilon^2y_2(\xi,\eta)+\dots,\\&\xi=\varepsilon t,\quad \eta=\bigl(1+\varepsilon^2\omega_2+\dots\bigr)t.\end{aligned}\tag{19}$$

Подставив (19) в (18) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, для первых двух членов разложения получим

$$\frac{\partial^2y_0}{\partial\eta^2}+y_0=0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2y_1}{\partial\eta^2}+y_1=-2\frac{\partial^2y_0}{\partial\xi\partial\eta}+(1-y_0^2)\frac{\partial y_0}{\partial\eta}. \tag{21}$$

Общее решение уравнения (20) дается формулой

$$y_0=A(\xi)\cos\eta+B(\xi)\sin\eta. \tag{22}$$

Зависимость величин A и B от медленной переменной ξ на этом этапе не определяется.

Подставим (22) в правую часть уравнения (21). В результате после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2y_1}{\partial\eta^2}+y_1&=\bigl[-2B'_\xi+\tfrac14B(4-A^2-B^2)\bigr]\cos\eta+\bigl[2A'_\xi-\tfrac14A(4-A^2-B^2)\bigr]\sin\eta+\\&\quad+\tfrac14(B^3-3A^2B)\cos3\eta+\tfrac14(A^3-3AB^2)\sin3\eta.\end{aligned}\tag{23}$$

Решение этого уравнения не должно содержать неограниченные члены при $\eta\to\infty$; в противном случае не будет выполнено необходимое условие $y_1/y_0=O(1)$. Поэтому коэффициенты при $\cos\eta$ и $\sin\eta$ должны быть равны нулю:

$$\begin{aligned}-2B'_\xi+\tfrac14B(4-A^2-B^2)&=0,\\2A'_\xi-\tfrac14A(4-A^2-B^2)&=0.\end{aligned}\tag{24}$$

Условия (24) являются уравнениями для определения величин $A=A(\xi)$ и $B=B(\xi)$. Умножим первое уравнение (24) на $-B$, а второе — на A, и сложим. Имеем

$$r'_\xi-\tfrac18r(4-r^2)=0,\qquad \text{где}\quad r^2=A^2+B^2. \tag{25}$$

Интегрируя методом разделения переменных, получим

$$r^2=\frac{4r_0^2}{r_0^2+(4-r_0^2)e^{-\xi}}, \tag{26}$$

где r_0 — начальная амплитуда колебаний.

Выразив A и B через амплитуду r и фазу φ, имеем $A = r\cos\varphi$, $B = -r\sin\varphi$. Подставив эти выражения в одно из уравнений (24) и используя (25), находим $\varphi'_\xi = 0$ или $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$. Поэтому главный член искомого разложения может быть записан в виде

$$y_0 = r(\xi)\cos(\eta + \varphi_0),$$

где $\xi = \varepsilon t$, $\eta = t$, а зависимость $r(\xi)$ определяется по формуле (26).

2°. Метод двухмасштабных разложений может использоваться также для решения краевых задач, когда в уравнении малый параметр стоит при старшей производной (такие задачи для области $0 \leqslant x \leqslant a$ приведены в седьмой строке табл. 2 и разд. 0.3.4-4). В тех случаях, когда пограничный слой расположен в окрестности точки $x = 0$, (а его толщина имеет порядок ε), решение ищется в виде

$$y = y_0(\xi,\eta) + \varepsilon y_1(\xi,\eta) + \varepsilon^2 y_2(\xi,\eta) + \ldots,$$
$$\xi = x, \quad \eta = \varepsilon^{-1}\bigl[g_0(x) + \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^2 g_2(x) + \ldots\bigr],$$

где функции $y_k = y_k(\xi,\eta)$, $g_k = g_k(x)$ подлежат определению. Производная по x вычисляется по правилу:

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial\xi} + \eta'_x\frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{\varepsilon}\bigl(g'_0 + \varepsilon g'_1 + \varepsilon^2 g'_2 + \ldots\bigr)\frac{\partial}{\partial\eta}.$$

На члены асимптотических разложений в рассматриваемой области накладываются дополнительные условия: $y_{k+1}/y_k = O(1)$, $g_{k+1}/g_k = O(1)$ при $k = 0, 1, \ldots;$ $g_0(x) \to x$ при $x \to 0$.

Замечание. Метод двухмасштабных разложений используется также для решения задач механики и физики, описываемых уравнениями с частными производными.

0.3.4-4. Метод сращиваемых асимптотических разложений.

1°. Характерные особенности метода сращиваемых асимптотических разложений сначала проиллюстрируем на примере решения конкретной краевой задачи (вид асимптотических разложений указан в седьмой строке табл. 2). Затем опишем возможные обобщения и модификации метода.

Пример 3. Рассмотрим линейную краевую задачу

$$\varepsilon y''_{xx} + y'_x + f(x)y = 0, \tag{27}$$
$$y(0) = a, \quad y(1) = b, \tag{28}$$

где $0 < f(0) < \infty$.

При $\varepsilon = 0$ происходит вырождение уравнения (27); решение соответствующего уравнения первого порядка

$$y'_x + f(x)y = 0 \tag{29}$$

не может удовлетворить сразу обоим граничным условиям (28). Можно показать, что должно быть опущено условие при $x = 0$ (в окрестности этой точки возникает пограничный слой).

Главный член внешнего разложения $y = y_0(x) + O(\varepsilon)$ описывается уравнением (29). Его решение, удовлетворяющее второму граничному условию (28), имеет вид

$$y_0(x) = b\exp\Bigl[\int_x^1 f(\xi)\,d\xi\Bigr]. \tag{30}$$

Старший член внутреннего разложения в пограничном слое вблизи левой границы ищем в виде (см. третий столбец седьмой строки табл. 2):

$$\tilde{y} = \tilde{y}_0(z) + O(\varepsilon), \qquad z = x/\varepsilon, \tag{31}$$

где z — растянутая переменная. Подставив (31) в уравнение (27) и выделив члены при ε^{-1}, получим

$$\tilde{y}''_0 + \tilde{y}'_0 = 0, \tag{32}$$

где штрихи обозначают производные по z. Решение уравнения (32), удовлетворяющее первому граничному условию (28), имеет вид

$$\tilde{y}_0 = a - C + Ce^{-z}. \tag{33}$$

Постоянная интегрирования C определяется из условия сращивания главных членов внешнего и внутреннего разложений:

$$y_0(x \to 0) = \tilde{y}_0(z \to \infty). \tag{34}$$

Подставив (30) и (33) в условие (34), получим

$$C = a - be^{<f>}, \qquad \text{где} \quad < f >= \int_0^1 f(x)\,dx. \tag{35}$$

Учитывая формулы (30), (31), (33), (35) приближенное решение можно представить в виде:

$$y = \begin{cases} be^{<f>} + \big(a - be^{<f>}\big)e^{-x/\varepsilon} & \text{при } \ 0 \leqslant x \leqslant O(\varepsilon), \\ b\exp\Big[\displaystyle\int_x^1 f(\xi)\,d\xi\Big] & \text{при } \ O(\varepsilon) \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{36}$$

Видно, что внутри тонкого пограничного слоя, толщина которого пропорциональна ε, решение быстро меняется на конечную величину $\Delta = be^{<f>} - a$.

Чтобы определить функцию y на всем отрезке $x \in [0,1]$ с помощью формулы (36) надо в некоторой промежуточной точке $x = x_0$ «переключаться» с одной части решения на другую. Такое переключение не слишком удобно и на практике вместо двойной формулы (36) часто используют *составное решение*. В подобных случаях оно определяется так:

$$y = y_0(x) + \tilde{y}_0(z) - A, \qquad A = \lim_{x\to 0} y_0(x) = \lim_{z\to\infty} \tilde{y}_0(z).$$

В рассматриваемой задаче $A = be^{<f>}$ и составное решение принимает вид

$$y = \big(a - be^{<f>}\big)e^{-x/\varepsilon} + b\exp\Big[\int_x^1 f(\xi)\,d\xi\Big].$$

При $\varepsilon \ll x \leqslant 1$ оно переходит во внешнее решение $y_0(x)$, а при $0 \leqslant x \ll \varepsilon$ — во внутреннее решение, давая тем самым приближенное описание искомой величины во всей рассматриваемой области.

2°. Рассмотрим теперь уравнение общего вида

$$\varepsilon y''_{xx} = F(x, y, y'_x) \tag{37}$$

с граничными условиями (28).

Для главного члена внешнего разложения $y = y_0(x) + \ldots$ имеем уравнение

$$F(x, y_0, y'_0) = 0.$$

В общем случае при использовании метода сращиваемых асимптотических разложений положение пограничного слоя и вид внутренней (растянутой) переменной должны определяться в ходе решения задачи.

Сначала предположим, что пограничный слой расположен в окрестности левой границы. В уравнении (36) сделаем замену $z = x/\delta(\varepsilon)$; после чего представим его в виде

$$y''_{zz} = \frac{\delta^2}{\varepsilon} F\Big(\delta z, y, \frac{1}{\delta} y'_z\Big). \tag{38}$$

Зависимость $\delta = \delta(\varepsilon)$ выбирается из условия, что величина в правой части уравнения (38) имеет отличный от нуля конечный предел при $\varepsilon \to 0$ (при условии, что величины z, y, y'_z имеют порядок единицы).

Пример 4. При $F(x, y, y'_x) = -kx^\lambda y'_x + y$, где $0 \leqslant \lambda < 1$, замена $z = x/\delta(\varepsilon)$ приводит уравнение (37) к виду

$$y''_{zz} = -\frac{\delta^{1+\lambda}}{\varepsilon} kz^\lambda y'_z + \frac{\delta^2}{\varepsilon} y.$$

Для того, чтобы правая часть этого уравнения имела отличный от нуля конечный предел при $\varepsilon \to 0$ надо положить $\delta^{1+\lambda}/\varepsilon = 1$ (вместо единицы можно взять любую положительную константу). Отсюда получим искомую зависимость $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{1+\lambda}}$.

Главный член внутреннего разложения в пограничном слое $y = \tilde{y}_0(z) + \ldots$ описывается уравнением $\tilde{y}''_0 + kz^\lambda \tilde{y}'_0 = 0$, где штрихи обозначают производные по z.

При неправильном выборе положения пограничного слоя не удается срастить внешнее и внутреннее разложение. В этом случае надо рассмотреть случай, когда пограничный слой расположен справа (этот случай сводится к предыдущему заменой $x = 1 - z$). В рассмотренном выше примере 4 пограничный слой расположен слева при $k > 0$, и справа — при $k < 0$.

При построении дальнейших членов разложения процедура сращивания (см. табл. 2, седьмая строка, последний столбец) в развернутом форме имеет вид:

внутреннее разложение внешнего разложения (*разложение y при $x \to 0$*) =
= *внешнее разложение внутреннего разложения* (*разложение $\tilde{y}$ при $z \to \infty$*).

Замечание 1. Метод сращиваемых асимптотических разложений применяется также для построения периодических решений сингулярно возмущенных уравнений (например, в задаче о релаксационных колебаниях осциллятора Ван-дер-Поля).

Замечание 2. В некоторых задачах может возникать два пограничных слоя [например, когда правая часть уравнения (37) не зависит явно от y'_x].

Замечание 3. Метод сращиваемых асимптотических разложений используется также для решения уравнений (рассматриваемых в полуограниченных областях), которые не вырождаются при $\varepsilon = 0$. В этих случаях пограничные слои отсутствуют, во внутренней области используется исходная переменная, а во внешней области вводится растянутая координата.

Замечание 4. Метод сращиваемых асимптотических разложений успешно применяется для решения различных задач математической физики, описываемых уравнениями с частными производными (он играет большую роль в теории тепло- и массопереноса и гидродинамики).

⦿ *Литература к разд. 0.3.4:* М. Ван-Дайк (1967), В. Вазов (1968), Н. Н. Моисеев (1969), Ю. А. Митропольский (1971), Дж. Коул (1972), Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский (1974) Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов (1975), А. Найфе (1976, 1984), Е. А. Гребеников (1986), В. Н. Богаевский, А. Я. Повзнер (1987), В. Ф. Журавлев, Д. М. Климов (1988), А. М. Ильин (1989).

0.3.5. Метод Галеркина и его модификации (проекционные методы)

0.3.5-1. Общий вид приближенного решения.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения

$$\mathfrak{F}[y] - f(x) = 0 \qquad (1)$$

с линейными однородными граничными условиями при $x = x_1$ и $x = x_2$ ($x_1 \leqslant x \leqslant x_2$). Здесь $\mathfrak{F}$ — линейный или нелинейный дифференциальный оператор второго (или более высокого) порядка, $y = y(x)$ — искомая величина, $f = f(x)$ — некоторая заданная функция. Считается, что $\mathfrak{F}[0] = 0$.

Выберем некоторую последовательность линейно независимых функций

$$\varphi = \varphi_n(x) \qquad (n = 1,\, 2,\, \ldots,\, N), \qquad (2)$$

удовлетворяющих тем же граничным условиям, что и функция $y = y(x)$. Во всех рассматриваемых далее методах приближенное решение уравнения (1) ищется виде линейной комбинации

$$y_N = \sum_{n=1}^{N} A_n \varphi_n(x), \qquad (3)$$

где коэффициенты A_n заранее неизвестны и подлежат определению в ходе решения задачи.

Конечную сумму (3) называют аппроксимирующей функцией. Остаток R_N, полученный в результате подстановки конечной суммы (3) в левую часть уравнения (1), имеет вид

$$R_N = \mathfrak{F}[y_N] - f. \qquad (4)$$

Если остаток R_N тождественно равен нулю, то функция y_N будет точным решением уравнения (1). В общем случае $R_N \not\equiv 0$.

0.3.5-2. Метод Галеркина.

Для определения коэффициентов разложения A_n в сумме (3) возьмем другую последовательность линейно независимых функций

$$\psi = \psi_k(x) \qquad (k = 1,\, 2,\, \ldots,\, N). \qquad (6)$$

Умножим обе части (4) на ψ_k и проинтегрируем по области $V = \{x_1 \leqslant x \leqslant x_2\}$, в которой ищется решение уравнения (1). Потребуем, чтобы соответствующие интегралы обращались в нуль, как это имеет место для точного решения. В результате для определения неизвестных коэффициентов A_n получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\int_{x_1}^{x_2} \psi_k R_N \, dx = 0 \qquad (k = 1,\, 2,\, \ldots,\, N). \qquad (7)$$

Равенства (7) означают, что аппроксимирующая функция (3) удовлетворяет уравнению (1) «в среднем» (т. е. интегрально) с весовыми элементами ψ_k. Если ввести скалярное произведение любых двух функций g и h по формуле $<g, h>= \int_{x_1}^{x_2} gh\,dx,$ то уравнения (7) можно трактовать как условия ортогональности остатка R_N ко всем взвешивающим функциям ψ_k.

Метод Галеркина позволяет решать не только краевые задачи, но и задачи на собственные значения (в этом случае полагают $f = \lambda y$ и одновременно ищут собственные функции y_n и собственные значения параметра λ_n).

Обоснование применимости метода Галеркина к конкретным краевым задачам можно найти в специальной литературе, приведенной в конце разд. 0.3.5. Ниже описаны другие методы, которые являются частными случаями метода Галеркина.

Замечание. В качестве членов $\varphi_n(x)$ в аппроксимирующей функции (3) чаще всего выбирают подходящие последовательности многочленов или тригонометрических функций.

0.3.5-3. Методы Бубнова — Галеркина, моментов и наименьших квадратов.

1°. Последовательности функций (2) и (6) в методе Галеркина можно выбирать произвольным образом. В частном случае, когда обе последовательности одинаковы:

$$\varphi_k(x) = \psi_k(x) \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{8}$$

указанный метод принято называть методом Бубнова — Галеркина.

2°. Метод моментов характеризуется тем, что в качестве взвешивающих функций в (6) выбираются степенные функции

$$\psi_k = x^k. \tag{9}$$

3°. Иногда функции ψ_k определяют через функции φ_k при помощи равенств

$$\psi_k = \mathfrak{F}[\varphi_k] \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots),$$

где $\mathfrak{F}$ — дифференциальный оператор, входящий в уравнение (1). Эту разновидность метода Галеркина называют методом наименьших квадратов.

0.3.5-4. Метод коллокаций.

В методе коллокаций выбирается последовательность точек x_k, где $k=1,\ 2,\ \ldots,\ N$, и требуется, чтобы остаток (4) в этих точках обращался в нуль:

$$R_N = 0 \quad \text{при} \quad x = x_k \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N). \tag{10}$$

Точкам x_k, в которых остаток R_N полагается равным нулю, придается наибольшее значение при решении конкретной задачи. Число коллокационных точек N выбирается равным числу членов ряда (3), что позволяет получить замкнутую систему алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов A_n (эта алгебраическая система будет линейной, если рассматривается линейная краевая задача).

Отметим, что метод коллокаций является частным случаем метода Галеркина, когда функциональная последовательность (6) выбирается в виде дельта-функций:

$$\psi_k = \delta(x - x_k).$$

В методе коллокаций не требуется вычисления интегралов, что сильно упрощает процедуру решения нелинейных задач (хотя точность полученных приближенных результатов обычно ниже, чем при использовании других модификаций метода Галеркина).

0.3.5-5. Метод разделения области.

Рассматриваемая область $V=\{x_1 \leqslant x \leqslant x_2\}$ разбивается на N подобластей: $V_k=\{x_{k1} \leqslant x \leqslant x_{k2}\}$, где $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$. Взвешивающие функции в методе разделения областей выбираются так:

$$\psi_k = \begin{cases} 1 & \text{в области } V_k, \\ 0 & \text{вне области } V_k. \end{cases}$$

Выбор подобластей V_k диктуется специфическими особенностями задачи и в общем случае может быть произвольным (совокупность всех подобластей V_k может и не заполнять всю область V, а отдельные подобласти V_k и V_m могут перекрывать друг друга).

0.3.5-6. Метод квадратичной ошибки.

Иногда для определения коэффициентов A_n аппроксимирующей функции (3) используется метод квадратичной ошибки, основанный на минимизации функционала

$$\Phi = \int_{x_1}^{x_2} R_N^2\, dx \to \min\,. \qquad (11)$$

При заданных элементах φ_n в (3) интеграл Φ является квадратичным полиномом относительно коэффициентов A_n. Необходимые условия минимальности (11) в этом случае имеют вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial A_n} = 0 \qquad (n = 1,\, 2,\, \ldots,\, N)$$

и представляют собой систему алгебраических уравнений для определения A_n.

⦿ *Литература к разделу 0.3.5*: Л. В. Канторович, В. И. Крылов (1962), М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко и др. (1969), С. Г. Михлин (1970), B. A. Finlayson (1972), D. Zwillinger (1989).

0.3.6. Метод последовательных приближений и численные методы

0.3.6-1. Метод последовательных приближений.

Метод последовательных приближений состоит из двух этапов. На первом этапе задача Коши

$$y''_{xx} = f(x, y, y'_x) \qquad \text{(уравнение)}, \qquad (1)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'_x(x_0) = y'_0 \qquad \text{(начальные условия)} \qquad (2)$$

с помощью введения новой переменной $u(x) = y'_x$ сводится к эквивалентной системе интегральных уравнений

$$u(x) = y'_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t), u(t))\, dt, \qquad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} u(t)\, dt. \qquad (3)$$

Затем решение системы (3) ищется с помощью последовательных приближений по формулам

$$u_{n+1}(x) = y'_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t), u_n(t))\, dt, \qquad y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} u_n(t)\, dt; \qquad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$$

В качестве начального приближения можно взять числа $y_0(x) = y_0$, $u_0(x) = y'_0$.

0.3.6-2. Метод Рунге — Кутты.

Для численного интегрирования задачи Коши (1)–(2) часто используют метод Рунге — Кутты.

Пусть Δx — некоторое достаточно малое число. Введем обозначения:

$$x_k = x_0 + k\Delta x, \quad y_k = y(x_k), \quad y'_k = y'_x(x_k), \quad f_k = f(x_k, y_k, y'_k); \qquad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$$

Искомые значения y_k и y'_k последовательно вычисляются по формулам

$$y_{k+1} = y_k + y'_k \Delta x + \tfrac{1}{6}(f_1 + f_2 + f_3)(\Delta x)^2,$$

$$y'_{k+1} = y'_k + \tfrac{1}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)\Delta x,$$

где

$$f_1 = f\bigl(x_k,\, y_k,\, y'_k\bigr),$$

$$f_2 = f\bigl(x_k + \tfrac{1}{2}\Delta x,\, y_k + \tfrac{1}{2} y'_k \Delta x,\, y'_k + \tfrac{1}{2} f_1 \Delta x\bigr),$$

$$f_3 = f\bigl(x_k + \tfrac{1}{2}\Delta x,\, y_k + \tfrac{1}{2} y'_k \Delta x + \tfrac{1}{4} f_1 (\Delta x)^2,\, y'_k + \tfrac{1}{2} f_2 \Delta x\bigr),$$

$$f_4 = f\bigl(x_k + \Delta x,\, y_k + y'_k \Delta x + \tfrac{1}{2} f_2 (\Delta x)^2,\, y'_k + f_3 \Delta x\bigr).$$

На практике величину шага Δx определяют таким же образом, что и для уравнений первого порядка (см. замечание 2 в разд. 0.1.7-3).

0.3.6-3. Метод пристрелки.

Для решения краевой задачи, описываемой уравнением (1) с граничными условиями

$$y(x_1) = y_1, \qquad y(x_2) = y_2 \tag{4}$$

решают вспомогательную задачу Коши для уравнения (1) с начальными условиями

$$y(x_1) = y_1, \qquad y'_x(x_1) = a. \tag{5}$$

(Решение задачи Коши можно получить методом Рунге-Кутты или другим численным методом.) Величину параметра a варьируют и подбирают из условия совпадения полученного решения $y = y(x, a)$ в точке $x = x_2$ со значением, которое задается вторым граничным условием (4):

$$y(x_2, a) = y_2.$$

Аналогичным образом строится решение краевой задачи со смешанными граничными условиями

$$y(x_1) = y_1, \qquad y'_x(x_2) + ky(x_2) = y_2. \tag{6}$$

В этом случае также решается вспомогательная задача Коши (1), (5). Параметр a подбирается из условия согласования полученного решения $y = y(x, a)$ в точке $x = x_2$ со вторым граничным условием (6).

⊙ *Литература к разд. 0.3.6:* Н. С. Бахвалов (1973), Э. Камке (1976), Г. Корн, Т. Корн (1984).