



Из книги А. Д. Polyanin and V. F. Zaitsev, «Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition», Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2011 [русский перевод].

### Оглавление

Предисловие ..... 11

Некоторые обозначения и замечания ..... 13

**1. Уравнения параболического типа с одной пространственной переменной ..... 15**

1.1. Уравнения со степенными нелинейностями ..... 15

1.1.1. Уравнения вида  $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw + cw^2$  ..... 15

1.1.2. Уравнения вида  $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b_0 + b_1w + b_2w^2 + b_3w^3$  ..... 16

1.1.3. Уравнения вида  $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)$  ..... 20

1.1.4. Уравнения вида  $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w)$  ..... 22

1.1.5. Уравнения вида  $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w) \frac{\partial w}{\partial x} + g(w)$  ..... 22

1.1.6. Уравнения вида  $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w) \frac{\partial w}{\partial x} + g(x, t, w)$  ..... 26

1.1.7. Уравнения вида  $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + f(x, t, w)$  ..... 28

1.1.8. Уравнения вида  $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$  ..... 30

1.1.9. Уравнения вида  $\frac{\partial w}{\partial t} = aw^k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$  ..... 31

1.1.10. Уравнения вида  $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left( w^m \frac{\partial w}{\partial x} \right)$  ..... 37

1.1.11. Уравнения вида  $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left( w^m \frac{\partial w}{\partial x} \right) + bw^k$  ..... 43

1.1.12. Уравнения вида  $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left( w^m \frac{\partial w}{\partial x} \right) + bw + c_1w^{k_1} + c_2w^{k_2} + c_3w^{k_3}$  ..... 48

1.1.13. Уравнения вида  $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ f(w) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + g(w)$  ..... 51

1.1.14. Уравнения вида  $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ f(w) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$  ..... 53

1.1.15. Другие уравнения ..... 57

1.2. Уравнения с экспоненциальными нелинейностями ..... 61

1.2.1. Уравнения вида  $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b_0 + b_1e^{\lambda w} + b_2e^{2\lambda w}$  ..... 61

1.2.2. Уравнения вида  $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{\lambda w} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + f(w)$  ..... 63

1.2.3. Уравнения вида  $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ f(w) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + g(w)$  ..... 66

1.2.4. Другие уравнения, не зависящие явно от  $x$  и  $t$  ..... 67

1.2.5. Уравнения, зависящие явно от  $x$  и  $t$  ..... 69

1.3. Уравнения с гиперболическими нелинейностями ..... 71

1.3.1. Уравнения, содержащие гиперболический косинус ..... 71

1.3.2. Уравнения, содержащие гиперболический синус ..... 71

1.3.3. Уравнения, содержащие гиперболический тангенс ..... 72

1.3.4. Уравнения, содержащие гиперболический котангенс ..... 72

1.4. Уравнения с логарифмическими нелинейностями ..... 73

1.4.1. Уравнения вида  $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w)$  ..... 73

1.4.2. Другие уравнения ..... 74

1.5. Уравнения с тригонометрическими нелинейностями ..... 76

1.5.1. Уравнения, содержащие косинус ..... 76

1.5.2. Уравнения, содержащие синус ..... 77

1.5.3. Уравнения, содержащие тангенс ..... 77

1.5.4. Уравнения, содержащие котангенс ..... 78

1.5.5. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции ..... 78

1.6. Уравнения, содержащие произвольные функции	79
1.6.1. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w)$	79
1.6.2. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} + g(x, t, w)$	82
1.6.3. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w) \frac{\partial w}{\partial x} + g(x, t, w)$	84
1.6.4. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + f(x, t, w)$	87
1.6.5. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + f(x, t, w) \frac{\partial w}{\partial x} + g(x, t, w)$	89
1.6.6. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + g(x, t, w) \frac{\partial w}{\partial x} + h(x, t, w)$	89
1.6.7. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	93
1.6.8. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = f(x, t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	94
1.6.9. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = aw \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w) \frac{\partial w}{\partial x} + g(x, t, w)$	96
1.6.10. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = (aw+b) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + g(x, t, w) \frac{\partial w}{\partial x} + h(x, t, w)$	99
1.6.11. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = aw^m \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} + g(x, t, w)$	101
1.6.12. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left( w \frac{\partial w}{\partial x} \right) + f(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} + g(x, t, w)$	102
1.6.13. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left( w^m \frac{\partial w}{\partial x} \right) + f(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} + g(x, t, w)$	103
1.6.14. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{\lambda w} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + f(x, t, w)$	106
1.6.15. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ f(w) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	107
1.6.16. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = f(x, w) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$	115
1.6.17. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = f(x, t, w) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	116
1.6.18. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = f(x, w, \frac{\partial w}{\partial x}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	123
1.6.19. Нелинейные уравнения теплового (диффузионного) пограничного слоя	128
1.7. Нелинейные уравнения Шредингера и родственные уравнения	129
1.7.1. Уравнения вида $i \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f( w )w = 0$ , содержащие произвольные параметры	129
1.7.2. Уравнения вида $i \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{x^n} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^n \frac{\partial w}{\partial x} \right) + f( w )w = 0$ , содержащие произвольные параметры	132
1.7.3. Другие уравнения, содержащие произвольные параметры	134
1.7.4. Уравнения с кубической нелинейностью, содержащие произвольные функции	134
1.7.5. Уравнения общего вида, содержащие произвольные функции одного аргумента	137
1.7.6. Уравнения общего вида, содержащие произвольные функции двух аргументов	140
<b>2. Уравнения параболического типа с двумя и более пространственными переменными</b>	<b>144</b>
2.1. Уравнения с двумя пространственными переменными, содержащие степенные нелинейности	144
2.1.1. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ f(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ g(y) \frac{\partial w}{\partial y} \right] + aw^p$	144
2.1.2. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left( w^n \frac{\partial w}{\partial x} \right) + b \frac{\partial}{\partial y} \left( w^k \frac{\partial w}{\partial y} \right)$	145
2.1.3. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ f(w) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ g(w) \frac{\partial w}{\partial y} \right] + h(w)$	149
2.1.4. Другие уравнения	151
2.2. Уравнения с двумя пространственными переменными, содержащие экспоненциальные нелинейности	155
2.2.1. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ f(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ g(y) \frac{\partial w}{\partial y} \right] + ae^{\lambda w}$	155
2.2.2. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{\beta w} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + b \frac{\partial}{\partial y} \left( e^{\lambda w} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + f(w)$	156
2.3. Другие уравнения с двумя пространственными переменными, содержащие произвольные параметры	158
2.3.1. Уравнения с логарифмическими нелинейностями	158
2.3.2. Уравнения с тригонометрическими нелинейностями	159

2.4. Уравнения, содержащие произвольные функции	159
2.4.1. Уравнения массопереноса в неподвижной и движущейся среде с химической реакцией	159
2.4.2. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [f(x) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(y) \frac{\partial w}{\partial y}] + h(w)$	161
2.4.3. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [f(w) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(w) \frac{\partial w}{\partial y}] + h(t, w)$	162
2.4.4. Другие уравнения, линейные относительно старших производных	165
2.4.5. Нелинейные уравнения диффузионного пограничного слоя	168
2.5. Уравнения с тремя и более пространственными переменными	169
2.5.1. Уравнения массопереноса в неподвижной и движущейся среде с химической реакцией	169
2.5.2. Уравнения теплопереноса при степенной и экспоненциальной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры	172
2.5.3. Уравнения тепло- и массопереноса в анизотропных средах	173
2.5.4. Другие уравнения с тремя пространственными переменными	175
2.5.5. Уравнения, зависящие от $n$ пространственных переменных	177
2.6. Нелинейные уравнения Шредингера	183
2.6.1. Двумерные уравнения	183
2.6.2. Трех- и $n$ -мерные уравнения	186
<b>3. Уравнения гиперболического типа с одной пространственной переменной</b>	<b>188</b>
3.1. Уравнения со степенными нелинейностями	188
3.1.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw + bw^n + cw^{2n-1}$	188
3.1.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w)$	190
3.1.3. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	192
3.1.4. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	194
3.1.5. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw^n \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, w)$	198
3.1.6. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial}{\partial x} (w^n \frac{\partial w}{\partial x}) + f(w)$	200
3.1.7. Другие уравнения	204
3.2. Уравнения с экспоненциальными нелинейностями	207
3.2.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\beta w} + ce^{\gamma w}$	207
3.2.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w)$	209
3.2.3. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	211
3.2.4. Другие уравнения	215
3.3. Другие уравнения, содержащие произвольные параметры	219
3.3.1. Уравнения с гиперболическими нелинейностями	219
3.3.2. Уравнения с логарифмическими нелинейностями	220
3.3.3. Уравнение синус-Гордона и другие уравнения с тригонометрическими нелинейностями	221
3.3.4. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [f(w) \frac{\partial w}{\partial x}]$	224
3.3.5. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + f(w) \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [g(w) \frac{\partial w}{\partial x}]$	225
3.4. Уравнения, содержащие произвольные функции	227
3.4.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w)$	227
3.4.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	231
3.4.3. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	236
3.4.4. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(w) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	241
3.4.5. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, w) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	247
3.4.6. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(t, w) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	249
3.4.7. Другие уравнения, линейные относительно старших производных	250

3.5. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = F(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y})$ .....	256
3.5.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = f(w)$ , содержащие произвольные параметры .....	256
3.5.2. Другие уравнения, содержащие произвольные параметры .....	259
3.5.3. Уравнения, содержащие произвольные функции .....	260
<b>4. Уравнения гиперболического типа с двумя и более пространственными переменными</b> .....	<b>264</b>
4.1. Уравнения с двумя пространственными переменными, содержащие степенные нелинейности .....	264
4.1.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [f(x) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(y) \frac{\partial w}{\partial y}] + aw^p$ .....	264
4.1.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial}{\partial x} (w^n \frac{\partial w}{\partial x}) + b \frac{\partial}{\partial y} (w^k \frac{\partial w}{\partial y})$ .....	266
4.1.3. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [f(w) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(w) \frac{\partial w}{\partial y}]$ .....	273
4.1.4. Другие уравнения .....	277
4.2. Уравнения с двумя пространственными переменными, содержащие экспоненциальные нелинейности .....	279
4.2.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [f(x) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(y) \frac{\partial w}{\partial y}] + ae^{\lambda w}$ .....	279
4.2.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial}{\partial x} (e^{\beta w} \frac{\partial w}{\partial x}) + b \frac{\partial}{\partial y} (e^{\lambda w} \frac{\partial w}{\partial y})$ .....	281
4.2.3. Другие уравнения .....	285
4.3. Нелинейные телеграфные уравнения с двумя пространственными переменными .....	286
4.3.1. Уравнения, содержащие степенные нелинейности .....	286
4.3.2. Уравнения, содержащие экспоненциальные нелинейности .....	289
4.4. Уравнения с двумя пространственными переменными, содержащие произвольные функции .....	290
4.4.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [f(x) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(y) \frac{\partial w}{\partial y}] + h(w)$ .....	290
4.4.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [f(w) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(w) \frac{\partial w}{\partial y}] + h(w)$ .....	293
4.4.3. Другие уравнения .....	298
4.5. Уравнения с тремя пространственными переменными, содержащие произвольные параметры .....	301
4.5.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [f(x) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(y) \frac{\partial w}{\partial y}] + \frac{\partial}{\partial z} [h(z) \frac{\partial w}{\partial z}] + aw^p$ .....	301
4.5.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [f(x) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(y) \frac{\partial w}{\partial y}] + \frac{\partial}{\partial z} [h(z) \frac{\partial w}{\partial z}] + ae^{\lambda w}$ .....	302
4.5.3. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial}{\partial x} (w^n \frac{\partial w}{\partial x}) + b \frac{\partial}{\partial y} (w^m \frac{\partial w}{\partial y}) + c \frac{\partial}{\partial z} (w^k \frac{\partial w}{\partial z}) + sw^p$ .....	304
4.5.4. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial}{\partial x} (e^{\lambda_1 w} \frac{\partial w}{\partial x}) + b \frac{\partial}{\partial y} (e^{\lambda_2 w} \frac{\partial w}{\partial y}) + c \frac{\partial}{\partial z} (e^{\lambda_3 w} \frac{\partial w}{\partial z}) + se^{\beta w}$ .....	309
4.6. Уравнения с тремя пространственными переменными, содержащие произвольные функции .....	316
4.6.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [f_1(x) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [f_2(y) \frac{\partial w}{\partial y}] + \frac{\partial}{\partial z} [f_3(z) \frac{\partial w}{\partial z}] + g(w)$ .....	316
4.6.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [f_1(w) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [f_2(w) \frac{\partial w}{\partial y}] + \frac{\partial}{\partial z} [f_3(w) \frac{\partial w}{\partial z}] + g(w)$ .....	319
4.6.3. Другие уравнения .....	325
<b>5. Уравнения эллиптического типа с двумя независимыми переменными</b> .....	<b>328</b>
5.1. Уравнения со степенными нелинейностями .....	328
5.1.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = aw + bw^n + cw^{2n-1}$ .....	328
5.1.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x, y, w)$ .....	330
5.1.3. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y})$ .....	331
5.1.4. Уравнения вида $\frac{\partial}{\partial x} [f_1(x, y) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [f_2(x, y) \frac{\partial w}{\partial y}] = g(w)$ .....	332
5.1.5. Уравнения вида $\frac{\partial}{\partial x} [f_1(w) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [f_2(w) \frac{\partial w}{\partial y}] = g(w)$ .....	334
5.1.6. Другие уравнения, содержащие произвольные параметры .....	338

5.2. Уравнения с экспоненциальными нелинейностями	343
5.2.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = a + be^{\beta w} + ce^{\gamma w}$	343
5.2.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x, y, w)$	345
5.2.3. Уравнения вида $\frac{\partial}{\partial x} [f_1(x, y) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [f_2(x, y) \frac{\partial w}{\partial y}] = g(w)$	346
5.2.4. Уравнения вида $\frac{\partial}{\partial x} [f_1(w) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [f_2(w) \frac{\partial w}{\partial y}] = g(w)$	348
5.2.5. Другие уравнения, содержащие произвольные параметры	350
5.3. Уравнения, содержащие другие нелинейности	353
5.3.1. Уравнения с гиперболическими нелинейностями	353
5.3.2. Уравнения с логарифмическими нелинейностями	355
5.3.3. Уравнения с тригонометрическими нелинейностями	357
5.4. Уравнения, содержащие произвольные функции	359
5.4.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F(x, y, w)$	359
5.4.2. Уравнения вида $a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y})$	363
5.4.3. Уравнения тепло- и массопереноса вида $\frac{\partial}{\partial x} [f(x) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(y) \frac{\partial w}{\partial y}] = h(w)$	367
5.4.4. Уравнения вида $\frac{\partial}{\partial x} [f(x, y, w) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(x, y, w) \frac{\partial w}{\partial y}] = h(x, y, w)$	369
5.4.5. Другие уравнения	375
<b>6. Уравнения эллиптического типа с тремя и более пространственными переменными</b>	<b>380</b>
6.1. Уравнения с тремя пространственными переменными, содержащие степенные нелинейности	380
6.1.1. Уравнения вида $\frac{\partial}{\partial x} [f(x) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(y) \frac{\partial w}{\partial y}] + \frac{\partial}{\partial z} [h(z) \frac{\partial w}{\partial z}] = aw^p$	380
6.1.2. Уравнения вида $\frac{\partial}{\partial x} [f(w) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(w) \frac{\partial w}{\partial y}] + \frac{\partial}{\partial z} [h(w) \frac{\partial w}{\partial z}] = 0$	382
6.2. Уравнения с тремя пространственными переменными, содержащие экспоненциальные нелинейности	387
6.2.1. Уравнения вида $\frac{\partial}{\partial x} [f(x) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(y) \frac{\partial w}{\partial y}] + \frac{\partial}{\partial z} [h(z) \frac{\partial w}{\partial z}] = ae^{\lambda w}$	387
6.2.2. Уравнения вида $a_1 \frac{\partial}{\partial x} (e^{\lambda_1 w} \frac{\partial w}{\partial x}) + a_2 \frac{\partial}{\partial y} (e^{\lambda_2 w} \frac{\partial w}{\partial y}) + a_3 \frac{\partial}{\partial z} (e^{\lambda_3 w} \frac{\partial w}{\partial z}) = be^{\beta w}$	390
6.3. Трёхмерные уравнения, содержащие произвольные функции	393
6.3.1. Уравнения тепло- и массопереноса вида $\frac{\partial}{\partial x} [f_1(x) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [f_2(y) \frac{\partial w}{\partial y}] + \frac{\partial}{\partial z} [f_3(z) \frac{\partial w}{\partial z}] = g(w)$	393
6.3.2. Уравнения тепло- и массопереноса при наличии осложняющих факторов	396
6.3.3. Другие уравнения	399
6.4. Уравнения с произвольным числом независимых переменных	401
6.4.1. Уравнения вида $\frac{\partial}{\partial x_1} [f_1(x_1) \frac{\partial w}{\partial x_1}] + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} [f_n(x_n) \frac{\partial w}{\partial x_n}] = g(x_1, \dots, x_n, w)$	401
6.4.2. Другие уравнения	403
<b>7. Уравнения, содержащие смешанные производные, и некоторые другие уравнения</b>	<b>405</b>
7.1. Уравнения линейные относительно смешанной производной	405
7.1.1. Уравнение Калоджеро	405
7.1.2. Уравнение Хохлова — Заболоцкой и родственные уравнения	407
7.1.3. Уравнение нестационарного трансзвукового газового потока	412
7.1.4. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F(x, y, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y})$	414
7.1.5. Другие уравнения с двумя независимыми переменными	416
7.1.6. Другие уравнения с тремя независимыми переменными	418
7.2. Уравнения, квадратичные относительно старших производных	419
7.2.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F(x, y)$	419
7.2.2. Уравнение Монжа — Ампера $(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F(x, y)$	421
7.2.3. Уравнения вида $(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y})$	430

7.2.4. Уравнения вида $(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})^2 = f(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g(x, y)$ .....	435
7.2.5. Другие уравнения .....	438
7.3. Уравнение Беллмана и родственные уравнения .....	441
7.3.1. Уравнения с квадратичной нелинейностью .....	441
7.3.2. Уравнения со степенной нелинейностью .....	443
<b>8. Уравнения второго порядка общего вида .....</b>	<b>446</b>
8.1. Уравнения, содержащие производную первого порядка по $t$ .....	446
8.1.1. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = F(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2})$ .....	446
8.1.2. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = F(t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2})$ .....	453
8.1.3. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = F(x, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2})$ .....	456
8.1.4. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = F(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2})$ .....	460
8.1.5. Уравнения вида $F(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) = 0$ .....	464
8.1.6. Уравнения с тремя независимыми переменными .....	466
8.2. Уравнения, содержащие несколько вторых производных .....	467
8.2.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2})$ .....	467
8.2.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2})$ .....	470
8.2.3. Уравнения линейные относительно смешанной производной .....	473
8.2.4. Уравнения нелинейные относительно нескольких старших производных .....	474
8.2.5. Уравнения с $n$ независимыми переменными .....	477
<b>9. Уравнения третьего порядка .....</b>	<b>480</b>
9.1. Уравнения, содержащие производную первого порядка по $t$ .....	480
9.1.1. Уравнение Кортевега — де Фриза $\frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + bw \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ .....	480
9.1.2. Цилиндрическое, сферическое и модифицированное уравнения Кортевега — де Фриза .....	485
9.1.3. Обобщенное уравнение Кортевега — де Фриза $\frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + f(w) \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ .....	487
9.1.4. Уравнения, приводимые к уравнению Кортевега — де Фриза .....	490
9.1.5. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + f(w, \frac{\partial w}{\partial x}) = 0$ .....	492
9.1.6. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + F(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}) = 0$ .....	494
9.1.7. Уравнение Бюргера — Кортевега — де Фриза и другие уравнения .....	495
9.2. Уравнения, содержащие вторые производные по $t$ .....	499
9.2.1. Уравнения с квадратичной нелинейностью .....	499
9.2.2. Другие уравнения .....	502
9.3. Уравнения гидродинамического пограничного слоя .....	503
9.3.1. Уравнения стационарного пограничного слоя ньютоновской жидкости .....	503
9.3.2. Уравнения стационарного пограничного слоя неньютоновских жидкостей .....	509
9.3.3. Уравнения нестационарного пограничного слоя ньютоновской жидкости .....	514
9.3.4. Уравнения нестационарного пограничного слоя неньютоновских жидкостей .....	524
9.3.5. Родственные уравнения .....	528
9.4. Уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера) .....	529
9.4.1. Стационарные уравнения .....	529
9.4.2. Нестационарные уравнения .....	533
9.5. Другие нелинейные уравнения третьего порядка .....	539
9.5.1. Уравнения, содержащие смешанные производные второго порядка .....	539
9.5.2. Уравнения, содержащие смешанные третьи производные .....	541
9.5.3. Другие уравнения .....	545
<b>10. Уравнения четвертого порядка .....</b>	<b>547</b>
10.1. Уравнения, содержащие производную первого порядка по $t$ .....	547
10.1.1. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + F(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$ .....	547
10.1.2. Другие уравнения .....	550

10.2. Уравнения, содержащие вторую производную по $t$ .....	552
10.2.1. Уравнение Буссинеска и его модификации .....	552
10.2.2. Уравнения с квадратичной нелинейностью .....	557
10.2.3. Другие уравнения .....	560
10.3. Уравнения, содержащие смешанные производные .....	562
10.3.1. Уравнение Кадомцева — Петвиашвили .....	562
10.3.2. Стационарные уравнения гидродинамики (уравнения Навье — Стокса) .....	564
10.3.3. Нестационарные уравнения гидродинамики (уравнения Навье — Стокса) .....	571
10.3.4. Другие уравнения .....	582
<b>11. Уравнения старших порядков .....</b>	<b>583</b>
11.1. Уравнения, содержащие производную первого порядка по $t$ , линейные относительно старшей производной .....	583
11.1.1. Уравнения пятого порядка .....	583
11.1.2. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x, t, w)$ .....	585
11.1.3. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(w) \frac{\partial w}{\partial x}$ .....	586
11.1.4. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x, t, w) \frac{\partial w}{\partial x} + g(x, t, w)$ .....	589
11.1.5. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + F(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$ .....	591
11.1.6. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + F(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n-1} w}{\partial x^{n-1}})$ .....	596
11.1.7. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = aw \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x, t, w) \frac{\partial w}{\partial x} + g(x, t, w)$ .....	597
11.1.8. Другие уравнения .....	599
11.2. Уравнения общего вида, содержащие первую производную по $t$ .....	601
11.2.1. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = F(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n})$ .....	601
11.2.2. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = F(t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n})$ .....	606
11.2.3. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = F(x, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n})$ .....	608
11.2.4. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = F(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n})$ .....	611
11.3. Уравнения, содержащие вторую производную по $t$ .....	614
11.3.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x, t, w)$ .....	614
11.3.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + F(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$ .....	615
11.3.3. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + F(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n-1} w}{\partial x^{n-1}})$ .....	619
11.3.4. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x, t, w) \frac{\partial w}{\partial x} + g(x, t, w)$ .....	621
11.3.5. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n})$ .....	622
11.4. Другие уравнения .....	624
11.4.1. Уравнения, содержащие смешанные производные .....	624
11.4.2. Уравнения, содержащие $\frac{\partial^n w}{\partial x^n}$ и $\frac{\partial^m w}{\partial y^m}$ .....	627
<b>Дополнение. Некоторые нелинейные системы уравнений .....</b>	<b>630</b>
D1. Нелинейные системы двух уравнений первого порядка .....	630
D1.1. Системы вида $\frac{\partial u}{\partial x} = F(u, w)$ , $\frac{\partial w}{\partial t} = G(u, w)$ .....	630
D1.2. Системы газодинамического типа, линеаризуемые с помощью преобразования годографа .....	634
D1.3. Другие нелинейные системы двух уравнений первого порядка .....	639
D2. Нелинейные системы двух уравнений второго порядка .....	640
D2.1. Параболические системы вида $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u, w)$ , $\frac{\partial w}{\partial t} = b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + G(u, w)$ .....	640
D2.1.1. Произвольные функции зависят от линейной комбинации искомых величин. ....	640
D2.1.2. Произвольные функции зависят от отношения искомых величин. ....	642
D2.1.3. Произвольные функции зависят от произведения степеней искомых величин. ....	648

D2.1.4. Произвольные функции зависят от суммы (разности) квадратов искомых величин. . . . .	648
D2.1.5. Произвольные функции сложным образом зависят от искомых величин. . . . .	650
D2.2. Параболические системы вида $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a}{x^n} \frac{\partial}{\partial x} (x^n \frac{\partial u}{\partial x}) + F(u, w)$ , $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{b}{x^n} \frac{\partial}{\partial x} (x^n \frac{\partial w}{\partial x}) + G(u, w)$ . . . . .	651
D2.2.1. Произвольные функции зависят от линейной комбинации искомых величин. . . . .	652
D2.2.2. Произвольные функции зависят от отношения искомых величин. . . . .	653
D2.2.3. Произвольные функции зависят от произведения степеней искомых величин. . . . .	656
D2.2.4. Произвольные функции зависят от суммы (разности) квадратов искомых величин. . . . .	656
D2.2.5. Произвольные функции зависят от разных аргументов. . . . .	657
D2.3. Другие системы уравнений второго порядка параболического типа . . . . .	658
D2.4. Эллиптические системы вида $\Delta u = F(u, w)$ , $\Delta w = G(u, w)$ . . . . .	659
D2.4.1. Произвольные функции зависят от линейной комбинации искомых величин. . . . .	659
D2.4.2. Произвольные функции зависят от отношения искомых величин. . . . .	660
D2.4.3. Другие системы. . . . .	662
D2.5. Гиперболические системы вида $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a}{x^n} \frac{\partial}{\partial x} (x^n \frac{\partial u}{\partial x}) + F(u, w)$ , $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{b}{x^n} \frac{\partial}{\partial x} (x^n \frac{\partial w}{\partial x}) + G(u, w)$ . . . . .	663
D2.5.1. Произвольные функции зависят от линейной комбинации искомых величин. . . . .	663
D2.5.2. Произвольные функции зависят от отношения искомых величин. . . . .	664
D2.5.3. Другие системы. . . . .	666
D3. Нелинейные системы общего вида . . . . .	667
D3.1. Системы двух уравнений, содержащие первые производные по $t$ . . . . .	667
D3.2. Системы двух уравнений, содержащие вторые производные по $t$ . . . . .	673
D3.3. Системы, содержащие произвольное число уравнений . . . . .	675
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>678</b>