



Из книги А. D. Polyanin and V. F. Zaitsev, «Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition», Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2011 [русский перевод].

Предисловие

Нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными второго и более высоких порядков (нелинейные уравнения математической физики) часто встречаются в различных областях математики, физики, механики, химии, биологии и в многочисленных приложениях. Общее решение нелинейных уравнений математической физики удается получить только в исключительных случаях. Поэтому обычно приходится ограничиться поиском и анализом частных решений, которые принято называть *точными решениями*.

Точные решения дифференциальных уравнений математической физики всегда играли и продолжают играть огромную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Точные решения нелинейных уравнений наглядно демонстрируют и позволяют понять механизмы таких сложных нелинейных эффектов, как пространственная локализация процессов переноса, множественность или отсутствие стационарных состояний при определенных условиях, существование режимов с обострением и др. Простые решения широко используются для иллюстрации теоретического материала и некоторых приложений в учебных курсах университетов и технических вузов (по теории тепло- и массопереноса, гидродинамике, газовой динамике, теории волн, нелинейной оптике и др.).

Точные решения типа бегущей волны и автомодельные решения часто представляют собой асимптотики существенно более широких классов решений, соответствующих другим начальным и граничным условиям. Указанное свойство позволяет делать выводы общего характера и прогнозировать динамику различных явлений и процессов.

Даже те частные точные решения дифференциальных уравнений, которые не имеют ясного физического смысла, могут быть использованы в качестве основы для «тестовых» задач при проверке корректности и оценке точности различных численных, асимптотических и приближенных аналитических методов. Кроме того, допускающие точные решения модельные уравнения и задачи служат основой для разработки новых численных, асимптотических и приближенных методов, которые, в свою очередь, позволяют исследовать уже более сложные задачи, не имеющие точного аналитического решения. Точные методы и решения необходимы также для разработки и совершенствования соответствующих разделов компьютерных программ, предназначенных для аналитических вычислений (системы MATHEMATICA, MAPLE, CONVODE и др.).

Важно отметить, что многие уравнения прикладной и теоретической физики, химии и биологии содержат эмпирические параметры или эмпирические функции. Точные решения позволяют планировать эксперимент для определения этих параметров или функций путем искусственного создания подходящих (граничных и начальных) условий.

Под точными решениями нелинейных уравнений математической физики обычно понимаются следующие решения:

1. Решения, которые выражаются через элементарные функции.
2. Решения, которые выражаются в виде квадратур.*
3. Решения, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (системами обыкновенных дифференциальных уравнений).
4. Решения, которые выражаются через решения линейных уравнений с частными производными (линейных интегральных уравнений).

* Интегрирование дифференциальных уравнений в замкнутой форме — это представление решений дифференциальных уравнений аналитическими формулами, при записи которых используются указанный априори набор допустимых функций и перечисленный заранее набор математических операций. Решение выражается в виде квадратур, если в качестве допустимых функций используются элементарные функции и функции, входящие в уравнение, а под допустимыми операциями понимается конечное множество арифметических операций, операций суперпозиции (образования сложной функции) и операций взятия неопределенного интеграла.

5. Решения, описываемые уравнениями в частных производных с меньшим числом переменных, чем исходное уравнение (такие решения не всегда относят к точным решениям).

В книге приведены точные решения более 1700 нелинейных уравнений математической физики второго, третьего, четвертого и более высоких порядков. Помимо отдельных уравнений рассмотрены также некоторые системы уравнений. Описано много новых решений.

При отборе материала авторы отдавали наибольшее предпочтение следующим трем важным типам уравнений:

- уравнениям, которые встречаются в различных приложениях (в теории тепло- и массопереноса, теории волн, гидродинамике, газовой динамике, теории горения, нелинейной оптике, химической технологии, биологии и др.);

- уравнениям общего вида, которые зависят от произвольных функций (точные решения таких уравнений представляют особый интерес для тестирования численных и приближенных методов);

- уравнениям, которые допускают точные решения, зависящие от произвольных функций.

При написании книги широко использовались предыдущие справочники авторов [см. А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004)] и материалы веб-сайта EqWorld—Мир математических уравнений (<http://eqworld.ipmnet.ru>); ссылки на эти источники часто опускаются. В целом данный справочник содержит больше нелинейных уравнений математической физики и точных решений, чем любые другие книги, выходявшие до 2010 года (в частности, в данную книгу включено в два раза больше уравнений и точных решений, чем в цитируемую выше книгу 2002 года). Ввиду большого объема добавленного материала авторы исключили главы с описанием методов решения уравнений; необходимую информацию по методам можно найти в книге А. Д. Полянина, В. Ф. Зайцева, А. И. Журова (2005).

Для максимального расширения круга потенциальных читателей с разной математической подготовкой авторы по возможности старались избегать использования специальной терминологии. Поэтому некоторые результаты описаны схематически и упрощенно (опущены детали), чего вполне достаточно для их применения в большинстве приложений.

Расположение уравнений во всех главах книги отвечает принципу «от простого к сложному». Большинство разделов можно читать независимо друг от друга, что облегчает работу с материалом. Обширное оглавление поможет читателю находить искомые уравнения.

Авторы надеются, что книга будет полезной для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, инженеров и студентов, специализирующихся в области прикладной математики, механики, физики, теории управления и химической технологии. Рассмотренные в книге уравнения и их решения могут быть использованы в качестве иллюстративного материала при чтении спецкурсов и для проведения практических занятий* по уравнениям математической физики для студентов и аспирантов физико-математических специальностей университетов и технических вузов.

Отметим, что данная книга является неполным русским переводом первой части книги A. D. Polyanin and V. F. Zaitsev, «Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition», Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton—London—New York, 2011.

Авторы

© А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, 2010

* Для заинтересованного читателя отметим, что многие решения из данного справочника являются ответами на соответствующие задачи и упражнения, приведенные в книге А. Д. Полянина, В. Ф. Зайцева, А. И. Журова (2005).