Из книги A. D. Polyanin and V. F. Zaitsev, «Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition», Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2011 [русский перевод].

Некоторые обозначения и замечания

Латинский алфавит

$C_1, C_2, \ldots$ — произвольные постоянные;
$r,\ \varphi,\ z$ — цилиндрические координаты, $r=\sqrt{x^2+y^2}$;
$r,\ \theta,\ \varphi$ — сферические координаты, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;
t — время ($t\geqslant 0$);
w — искомая функция (зависимая переменная);
x, y, z — пространственные переменные (декартовы координаты);
$x_1, \ldots, x_n$ — декартовы координаты в n-мерном пространстве.

Греческий алфавит

Δ — оператор Лапласа:
$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — в двумерном случае,
$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — в трехмерном случае,
$\Delta=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ — в n-мерном случае;

$\Delta\Delta$ — бигармонический оператор, $\Delta\Delta=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}$ — в двумерном случае;
$|\nabla w|^2$ — модуль градиента функции w, $|\nabla w|^2=\sum\limits_{k=1}^{n}\bigl(\frac{\partial w}{\partial x_k}\bigr)^2$ — в n-мерном случае;
$\nabla\cdot\vec{v}$ — дивергенция вектора $\vec{v}$, $\nabla\cdot\vec{v}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}$ — в n-мерном случае;
$(\vec{v}\cdot\nabla)w$ — градиент скаляра w по вектору $\vec{v}$, $(\vec{v}\cdot\nabla)w=\sum\limits_{k=1}^{n}v_k\frac{\partial w}{\partial x_k}$ — в n-мерном случае.

Краткие обозначения производных

Частные производные:

$$\partial_t w=\frac{\partial w}{\partial t},\quad \partial_x w=\frac{\partial w}{\partial x},\quad \partial_{tt} w=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\quad \partial_{xx} w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad \partial_{xxx} w=\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}.$$

Обыкновенные производные функции $f=f(x)$:

$$f'_x\equiv\frac{df}{dx},\quad f''_{xx}\equiv\frac{d^2f}{dx^2},\quad f'''_{xxx}\equiv\frac{d^3f}{dx^3},\quad f''''_{xxxx}\equiv\frac{d^4f}{dx^4},\quad f^{(n)}_x\equiv\frac{d^nf}{dx^n}\quad \text{при}\quad n\geqslant 5.$$

Замечания

1. В формулах, содержащих выражения типа $\dfrac{f(x)}{a-2}$, часто не оговаривается, что $a\neq 2$.
2. В книге обычно не рассматриваются простые решения, зависящие только от одной переменной, которая входит в исходное уравнение.
3. При ссылках в тексте на конкретные уравнения запись вида «3.1.2.5» означает «уравнение 5 из раздела 3.1.2».
4. В книге часто используется очень простая и наглядная классификация наиболее распространенных типов точных решений, которая не связана с конкретным видом рассматриваемых уравнений (см. таблицу).

ТАБЛИЦА
Наиболее распространенные типы точных решений (для уравнений с двумя независимыми переменными x и t и искомой функцией w).

№	Название решения	Структура решения (x и t можно поменять местами)
1	Решение типа бегущей волны*	$w = F(z),\ z = \alpha x + \beta t,\ \alpha\beta \neq 0$
2	Решение в виде суммы функций разных аргументов**	$w = \varphi(x) + \psi(t)$
3	Решение в виде произведения функций разных аргументов***	$w = \varphi(x)\psi(t)$
4	Автомодельное решение****	$w = t^{\alpha} F(z),\ z = xt^{\beta}$
5	Обобщенное автомодельное решение	$w = \varphi(t)F(z),\ z = x\psi(t)$
6	Решение типа обобщенной бегущей волны	$w = F(z),\ z = \varphi(t)x + \psi(t)$
7	Решение с обобщенным разделением переменных	$w = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(t)$
8	Решение с функциональным разделением переменных	$w = F(z),\ z = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(t)$

* Обе переменные могут играть роль пространственных координат.

** Другое название — решение с аддитивным разделением переменных.

*** Другое название — решение с мультипликативным разделением переменных.

**** Иногда решения вида $w = \bar{t}^{\alpha} F(z),\ \ z = \bar{x}\bar{t}^{\beta}$, где $\bar{x} = x + C_1$ и $\bar{t} = t + C_2$, также будут называться автомодельными решениями.

⊙ Этим знаком помечены ссылки на литературные источники после уравнения, когда:

a) хотя бы одно из приведенных выше решений или преобразований получено в цитируемой работе (даже если решение там было приведено с «устранимыми» ошибками в знаках и коэффициентах);

b) в цитируемой работе содержится полезная дополнительная информация, относительно свойств рассматриваемого уравнения, его решений и приложений.