Из книги A. D. Polyanin and V. F. Zaitsev, «Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition», Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2011 [русский перевод].

1. Уравнения параболического типа с одной пространственной переменной

1.1. Уравнения со степенными нелинейностями

1.1.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw + cw^2$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - bw^2$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^2 w(C_1 x + C_2, C_1^2 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w = \frac{a}{b}\,\frac{12(4-\sqrt{6}\,)x^2 + 12(4-\sqrt{6}\,)C_1 x + 120(12-5\sqrt{6}\,)at + 12(2-\sqrt{6}\,)C_2 + 6C_1^2}{\left[x^2 + C_1 x + 10(3-\sqrt{6}\,)at + C_2\right]^2},$$
$$w = \frac{a}{b}\,\frac{12(4+\sqrt{6}\,)x^2 + 12(4+\sqrt{6}\,)C_1 x + 120(12+5\sqrt{6}\,)at + 12(2+\sqrt{6}\,)C_2 + 6C_1^2}{\left[x^2 + C_1 x + 10(3+\sqrt{6}\,)at + C_2\right]^2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Решение типа бегущей волны (λ — произвольная постоянная):

$$w = w(z), \qquad z = x + \lambda t,$$

где функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $aw''_{zz} - \lambda w'_z - bw^2 = 0$.

4°. Автомодельное решение:

$$w = t^{-1} u(\xi), \qquad \xi = xt^{-1/2},$$

где функция $u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $au''_{\xi\xi} + \frac{1}{2}\xi u'_\xi + u - bu^2 = 0$.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 13), T. Barannyk (2002).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw(1-w)$.

Уравнение Фишера (Fisher), частный случай уравнения 1.1.3.2 при $m = 2$. Это уравнение встречается в задачах тепло- и массопереноса, теории горения, биологии и экологии. Оно описывает, например, массоперенос в двухкомпонентной неподвижной смеси при наличии объемной химической реакции квазипервого порядка. Кинетическая функция $f(w) = aw(1-w)$ моделирует также автокаталитическое цепное превращение в теории горения.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm x + C_1, t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решения типа бегущей волны (C — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = \bigl[1 + C\exp\bigl(-\tfrac{5}{6}at \pm \tfrac{1}{6}\sqrt{6a}\,x\bigr)\bigr]^{-2},$$
$$w(x,t) = \bigl[-1 + C\exp\bigl(-\tfrac{5}{6}at \pm \tfrac{1}{6}\sqrt{6a}\,x\bigr)\bigr]^{-2},$$
$$w(x,t) = \frac{1 + 2C\exp\bigl(-\frac{5}{6}at \pm \frac{1}{6}\sqrt{-6a}\,x\bigr)}{\bigl[1 + C\exp\bigl(-\frac{5}{6}at \pm \frac{1}{6}\sqrt{-6a}\,x\bigr)\bigr]^2}.$$

3°. Решения типа бегущей волны:

$$w(x,t) = \pm\xi^2\varphi(\xi), \qquad \xi = C_1\exp\bigl(\tfrac{1}{6}\sqrt{6a}\,x + \tfrac{5}{6}at\bigr),$$

где функция $\varphi(\xi)$ задана неявно

$$\xi = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\pm(4\varphi^3 - 1)}} - C_2,$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные. Для верхнего знака обращение последней зависимости приводит к классической эллиптической функции Вейерштрасса $\varphi(\xi) = \wp(\xi + C_3,\, 0,\, 1)$.

4°. Замена $U = 1 - w$ приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - aU(1 - U).$$

⊙ *Литература*: R. A. Fisher (1937), M. J. Ablowitz, A. Zeppetella (1979), В. П. Маслов, В. Г. Данилов, К. А. Волосов (1987).

1.1.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - bw^3$.

Частный случай уравнения 1.1.2.5 при $b_0 = b_1 = b_2 = 0$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1 w(\pm C_1 x + C_2, C_1^2 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x,t) = \pm\sqrt{\frac{2a}{b}}\,\frac{2C_1 x + C_2}{C_1 x^2 + C_2 x + 6aC_1 t + C_3}.$$

3°. Решение типа бегущей волны (λ — произвольная постоянная):

$$w = w(z), \qquad z = x + \lambda t,$$

где функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aw''_{zz} - \lambda w'_z - bw^3 = 0.$$

4°. Автомодельное решение:

$$w = t^{-1/2}u(\xi), \qquad \xi = xt^{-1/2},$$

где функция $u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$au''_{\xi\xi} + \tfrac{1}{2}\xi u'_\xi + \tfrac{1}{2}u - bu^3 = 0.$$

5°. Точное решение:

$$w = xU(\zeta), \qquad \zeta = t + \frac{1}{6a}x^2,$$

где функция $U(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $U''_{\zeta\zeta} - 9abU^3 = 0$.

⊙ *Литература*: P. A. Clarkson, E. L. Mansfield (1994), T. A. Barannyk, A. G. Nikitin (2004), G. Cicogna (2004).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw - bw^3$.

Частный случай уравнения 1.1.2.5 при $b_0 = b_2 = 0$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = \pm w(\pm x + C_1, t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Точные решения при $a > 0$, $b > 0$:

$$w = \sqrt{\frac{a}{b}}\,\frac{C_1 \exp\bigl(\frac12\sqrt{2a}\,x\bigr) - C_2 \exp\bigl(-\frac12\sqrt{2a}\,x\bigr)}{C_1 \exp\bigl(\frac12\sqrt{2a}\,x\bigr) + C_2 \exp\bigl(-\frac12\sqrt{2a}\,x\bigr) + C_3 \exp\bigl(-\frac32 at\bigr)},$$
$$w = \sqrt{\frac{a}{b}}\left[\frac{2C_1 \exp\bigl(\sqrt{2a}\,x\bigr) + C_2 \exp\bigl(\frac12\sqrt{2a}\,x - \frac32 at\bigr)}{C_1 \exp\bigl(\sqrt{2a}\,x\bigr) + C_2 \exp\bigl(\frac12\sqrt{2a}\,x - \frac32 at\bigr) + C_3} - 1\right],$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

3°. Точное решение при $a < 0$, $b > 0$:

$$w = \sqrt{\frac{|a|}{b}}\,\frac{\sin\bigl(\frac12\sqrt{2|a|}\,x + C_1\bigr)}{\cos\bigl(\frac12\sqrt{2|a|}\,x + C_1\bigr) + C_2 \exp\bigl(-\frac32 at\bigr)},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4°. Точное решение при $a > 0$ (обобщает первое решение из п. 2°):

$$w = \bigl[C_1 \exp\bigl(\tfrac12\sqrt{2a}\,x + \tfrac32 at\bigr) - C_2 \exp\bigl(-\tfrac12\sqrt{2a}\,x + \tfrac32 at\bigr)\bigr]U(z),$$
$$z = C_1 \exp\bigl(\tfrac12\sqrt{2a}\,x + \tfrac32 at\bigr) + C_2 \exp\bigl(-\tfrac12\sqrt{2a}\,x + \tfrac32 at\bigr) + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, функция $U = U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $aU''_{zz} = 2bU^3$ (решение которого можно записать в неявном виде).

5°. Точное решение при $a < 0$ (обобщает решение из п. 3°):

$$w = \exp\bigl(\tfrac32 at\bigr)\sin\bigl(\tfrac12\sqrt{2|a|}\,x + C_1\bigr)V(\xi),$$
$$\xi = \exp\bigl(\tfrac32 at\bigr)\cos\bigl(\tfrac12\sqrt{2|a|}\,x + C_1\bigr) + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, функция $V = V(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $aV''_{\xi\xi} = -2bV^3$ (решение которого можно записать в неявном виде).

6°. См. также уравнение 1.1.3.2 при $m = 3$.

⦿ *Литература*: F. Cariello, M. Tabor (1989), M. C. Nucci, P. A. Clarkson (1992), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 3).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - bw^3 - cw^2$.

Частный случай уравнения 1.1.2.5 при $b_1 = b_0 = 0$.

1°. Решения типа бегущей волны:

$$w(x,t) = \left(ct \pm \sqrt{\frac{b}{2a}}\,x + C\right)^{-1},$$

где C — произвольная постоянная.

2°. Точные решения:

$$w(x,t) = k\sqrt{\frac{2a}{b}}\,\frac{1}{F}\,\frac{\partial F}{\partial x},$$

где

$$F = C_1\left(x + kc\sqrt{\frac{2a}{b}}\,t\right) + C_2 \exp\left(-\frac{kc}{\sqrt{2ab}}x + \frac{c^2}{2b}t\right) + C_3, \qquad k = \pm 1;$$

C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

3°. Точные решения:

$$w(x,t) = k\sqrt{\frac{2a}{b}}\,\frac{1}{F}\,\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{c}{b},$$

где

$$F = C_1 \exp\left(\frac{kc}{\sqrt{2ab}}x - \frac{c^2}{2b}t\right) + C_2\left(\frac{kc}{\sqrt{2ab}}x + \frac{c^2}{b}t\right)\exp\left(\frac{kc}{\sqrt{2ab}}x - \frac{c^2}{2b}t\right) + C_3, \qquad k = \pm 1.$$

4. $\boldsymbol{\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w(1-w)(a-w)}$.

Уравнение Фицхью–Нагумо (FitzHugh — Nagumo). Это уравнение встречается в популяционной генетике и в моделях передачи нервных импульсов.

1°. Существуют три стационарных однородных решения: $w = w_k$, где $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_3 = a$. Линейный анализ устойчивости показывает, что

при $-1 \leqslant a < 0$: решения $w = a$, $w = 1$ устойчивы, решение $w = 0$ неустойчиво;

при $0 < a < 1$: решения $w = 0$, $w = 1$ устойчивы, решения $w = a$ неустойчиво.

Стационарное неоднородное решение задается неявно (A, B — произвольные постоянные):

$$\int \frac{dw}{\sqrt{\frac{1}{4}w^4 - \frac{1}{3}(a+1)w^3 + \frac{1}{2}aw^2 + A}} = \pm x + B.$$

2°. Решения типа бегущей волны (A — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = \frac{1}{1 + A\exp\bigl[\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\,x + \frac{1}{2}(2a-1)t\bigr]},$$

$$w(x,t) = \frac{a}{1 + A\exp\bigl[\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\,a\,x + \frac{1}{2}a(2-a)t\bigr]},$$

$$w(x,t) = \frac{A\exp\bigl[\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1-a)x + \frac{1}{2}(1-a^2)t\bigr] + a}{A\exp\bigl[\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1-a)x + \frac{1}{2}(1-a^2)t\bigr] + 1},$$

$$w(x,t) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{th}\bigl[\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,x + \tfrac{1}{4}(1-2a)t + A\bigr],$$

$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}a\,\mathrm{th}\bigl[\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,ax + \tfrac{1}{4}a(a-2)t + A\bigr],$$

$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}(1+a) + \tfrac{1}{2}(1-a)\,\mathrm{th}\bigl[\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,(1-a)x + \tfrac{1}{4}(1-a^2)t + A\bigr],$$

$$w(x,t) = \frac{2a}{(1+a) - (1-a)\,\mathrm{th}\bigl[\pm\frac{1}{4}\sqrt{2}\,(1-a)x + \frac{1}{4}(1-a^2)t + A\bigr]},$$

$$w(x,t) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{cth}\bigl[\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,x + \tfrac{1}{4}(1-2a)t + A\bigr],$$

$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}a\,\mathrm{cth}\bigl[\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,ax + \tfrac{1}{4}a(a-2)t + A\bigr],$$

$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}(1+a) + \tfrac{1}{2}(1-a)\,\mathrm{cth}\bigl[\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,(1-a)x + \tfrac{1}{4}(1-a^2)t + A\bigr],$$

$$w(x,t) = \frac{2a}{(1+a) - (1-a)\,\mathrm{cth}\bigl[\pm\frac{1}{4}\sqrt{2}\,(1-a)x + \frac{1}{4}(1-a^2)t + A\bigr]}.$$

3°. «Двухфазное» решение:

$$w(x,t) = \frac{A\exp(z_1) + aB\exp(z_2)}{A\exp(z_1) + B\exp(z_2) + C},$$

$$z_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,x + \bigl(\tfrac{1}{2} - a\bigr)t, \quad z_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,ax + a\bigl(\tfrac{1}{2}a - 1\bigr)t,$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

4°. Решения из п. 2° являются специальными случаями решения типа бегущей волны

$$w(x,t) = w(\xi), \qquad \xi = x + \lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная, функция $w(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi} - \lambda w'_\xi = w(1-w)(a-w).$$

Подстановка $w'_\xi = \lambda y(w)$ приводит к уравнению Абеля второго рода:

$$yy'_w - y = \lambda^{-2}\bigl[aw - (a+1)w^2 + w^3\bigr].$$

Общее решение этого уравнения при $a = -1$ и $\lambda = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$ приведено в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

5°. Укажем два преобразования, сохраняющих вид исходного уравнения.

Замена $u = 1 - w$ приводит к уравнению аналогичного вида с параметром $a_1 = 1 - a$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u(1-u)(1-a-u).$$

Преобразование

$$v(z,\tau) = 1 - \frac{1}{a} w(x,t), \quad \tau = a^2 t, \quad z = ax$$

приводит к уравнению аналогичного вида с параметром $a_2 = 1 - a^{-1}$:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - v(1-v)\left(1 - \frac{1}{a} - v\right).$$

Поэтому, если функция $w = w(x,t;\, a)$ является решением рассматриваемого уравнения, то функции

$$w_1 = 1 - w\bigl(x,t;\, 1-a\bigr),$$
$$w_2 = a - aw\bigl(ax, a^2 t;\, 1 - a^{-1}\bigr)$$

также будут решениями этого уравнения. Сказанное позволяет «размножать» точные решения.

⊙ *Литература для уравнения* 1.1.2.4: T. Kawahara, M. Tanaka (1983), M. C. Nucci, P. A. Clarkson (1992), N. H. Ibragimov (1994, p. 142), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 392).

5. $\boldsymbol{\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3}.$

1°. Решения уравнения определяются по формулам

$$w(x,t) = \frac{\beta}{F}\frac{\partial F}{\partial x} + \lambda, \quad \beta = \pm\sqrt{-\frac{2a}{b_3}}, \tag{1}$$

где λ — любой корень кубического уравнения

$$b_3\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0 = 0 \tag{2}$$

а вид функции $F = F(x,t)$ зависит от коэффициентов уравнения.

Введем обозначения:

$$p_1 = -3a, \quad p_2 = \beta(b_2 + 3b_3\lambda), \quad q_1 = -\frac{\beta}{2a}(b_2 + 3b_3\lambda), \quad q_2 = -\frac{1}{2a}(3b_3\lambda^2 + 2b_2\lambda + b_1). \tag{3}$$

Возможны четыре ситуации.

1.1. При $q_2 \neq 0$ и $q_1^2 \neq 4q_2$ имеем

$$\begin{gathered} F(x,t) = C_1 \exp(k_1 x + s_1 t) + C_2 \exp(k_2 x + s_2 t) + C_3, \\ k_n = -\tfrac{1}{2}q_1 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{q_1^2 - 4q_2}, \quad s_n = -k_n^2 p_1 - k_n p_2, \end{gathered} \tag{4}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные; $n = 1,\, 2$.

1.2. При $q_2 \neq 0$, $q_1^2 = 4q_2$ имеем

$$F(x,t) = C_1 \exp(kx + s_1 t) + C_2(kx + s_2 t)\exp(kx + s_1 t) + C_3,$$
$$k = -\tfrac{1}{2}q_1, \quad s_1 = -\tfrac{1}{4}p_1 q_1^2 + \tfrac{1}{2}p_2 q_1, \quad s_2 = -\tfrac{1}{2}p_1 q_1^2 + \tfrac{1}{2}p_2 q_1.$$

1.3. При $q_2 = 0$, $q_1 \neq 0$ имеем

$$F(x,t) = C_1(x - p_2 t) + C_2 \exp[-q_1 x + q_1(p_2 - p_1 q_1)t] + C_3.$$

1.4. При $q_2 = q_1 = 0$ имеем

$$F(x,t) = C_1(x - p_2 t)^2 + C_2(x - p_2 t) - 2C_1 p_1 t + C_3.$$

Пример. Пусть

$$a = 1, \quad b_0 = 0, \quad b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 = -bw(w - \lambda_1)(w - \lambda_2).$$

Тогда по формулам (1)–(4) при $\lambda = 0$ можно получить решение

$$w(x,t) = \frac{C_1\lambda_1 \exp(z_1) + C_2\lambda_2 \exp(z_2)}{C_1 \exp(z_1) + C_2 \exp(z_2) + C_3},$$

где

$$z_1 = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2b}\,\lambda_1 x + \tfrac{1}{2}b\lambda_1(\lambda_1 - 2\lambda_2)t,$$
$$z_2 = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2b}\,\lambda_2 x + \tfrac{1}{2}b\lambda_2(\lambda_2 - 2\lambda_1)t.$$

2°. Существует решение типа бегущей волны $w = w(x + \gamma t)$.

⊙ *Литература*: В. Г. Данилов, П. Ю. Сыбочев (1991), Н. А. Кудряшов (1993), P. A. Clarkson, E. L. Mansfield (1994).

1.1.3. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^k$.

1°. Пусть функция $w(x,t)$ является решением данного уравнения. Тогда функции
$$w_1 = C_1^2 w(\pm C_1^{k-1}x + C_2, C_1^{2k-2}t + C_3),$$
где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:
$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t,$$
где λ — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением
$$aw''_{zz} - \lambda w'_z + bw^k = 0.$$

3°. Автомодельное решение:
$$w = t^{\frac{1}{1-k}} u(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}},$$
где функция $u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением
$$au''_{\xi\xi} + \frac{1}{2}\xi u'_\xi + \frac{1}{k-1}u + bu^k = 0.$$

4°. При $k=2$ и $k=3$ см. соответственно уравнения 1.1.1.1 и 1.1.2.1, где приведены другие решения.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw + bw^m$.

Уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова (специальный случай). Это уравнение встречается в задачах тепло- и массопереноса, теории горения, биологии и экологии.

1°. Решения типа бегущей волны:
$$w(x,t) = \bigl[\beta + C\exp(\lambda t \pm \mu x)\bigr]^{\frac{2}{1-m}}, \tag{1}$$
$$w(x,t) = \bigl[-\beta + C\exp(\lambda t \pm \mu x)\bigr]^{\frac{2}{1-m}}, \tag{2}$$
где C — произвольная постоянная, а параметры λ, μ, β определяются по формулам
$$\lambda = \frac{a(1-m)(m+3)}{2(m+1)}, \quad \mu = \sqrt{\frac{a(1-m)^2}{2(m+1)}}, \quad \beta = \sqrt{-\frac{b}{a}}.$$

2°. Решения (1) и (2) являются частными случаями более широкого класса решений типа бегущей волны
$$w = w(z), \quad z = \pm\mu x + \lambda t,$$
которые описываются автономным уравнением
$$\mu^2 w''_{zz} - \lambda w'_z + aw + bw^m = 0. \tag{3}$$

При
$$\mu = \sqrt{\frac{a(m+3)^2}{2(m+1)}}, \quad \lambda = \mu^2 \qquad (m \neq \pm 1,\ m \neq -3)$$
решение уравнения (3) можно представить в параметрическом виде
$$z = \frac{m+3}{m-1}\ln f(\zeta), \quad w = \zeta\bigl[f(\zeta)\bigr]^{\frac{2}{m-1}},$$
где функция $f(\zeta)$ определяется по формуле
$$f(\zeta) = \pm\int\left[C_1 - \frac{4b}{a(m-1)^2}\zeta^{m+1}\right]^{-1/2} d\zeta + C_2,$$
C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Уравнение (3) заменой $U(w) = \mu^2\lambda^{-1}w'_z$ приводится к уравнению Абеля второго рода:
$$UU'_w - U = a_1 w + b_1 w^m, \qquad a_1 = -a\mu^2\lambda^{-2}, \quad b_1 = -b\mu^2\lambda^{-2}.$$
В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведены точные решения этого уравнения для некоторых пар чисел m и a_1 (b_1 — любое).

⊙ *Литература*: P. Kaliappan (1984), В. П. Маслов, В. Г. Данилов, К. А. Волосов (1987), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 393).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw + bw^m + cw^{2m-1}$.

Это уравнение встречается в задачах тепло- и массопереноса, теории горения, биологии и экологии.

1°. Решения типа бегущей волны:

$$w(x,t) = \bigl[\beta + C\exp(\lambda t + \mu x)\bigr]^{\frac{1}{1-m}}, \tag{1}$$

где C — произвольная постоянная, а параметры β, λ, μ определяются из системы алгебраических уравнений

$$a\beta^2 + b\beta + c = 0, \tag{2}$$

$$\mu^2 - (1-m)\lambda + a(1-m)^2 = 0, \tag{3}$$

$$\mu^2 - \lambda + (1-m)\bigl[2a + (b/\beta)\bigr] = 0. \tag{4}$$

Квадратное уравнение (2) для β решается независимо. В общем случае система (2)–(4) дает четыре набора искомых параметров, которым отвечают четыре точных решения исходного уравнения.

2°. Решение (1) является частным случаем более широкого класса решений типа бегущей волны

$$w = w(z), \quad z = x + \sigma t,$$

которые описываются автономным уравнением

$$w''_{zz} - \sigma w'_z + aw + bw^m + cw^{2m-1} = 0. \tag{5}$$

Подстановка $U(w) = w'_z$ приводит (5) к уравнению Абеля

$$UU'_w - \sigma U + aw + bw^m + cw^{2m-1} = 0,$$

общие решения которого для некоторых значений m (на параметры a, b, c накладываются ограничения) приведены в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 a).

3°. Подстановка

$$u = w^{1-m}$$

приводит к уравнению с квадратичной нелинейностью

$$u\frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{m}{1-m}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + a(1-m)u^2 + b(1-m)u + c(1-m). \tag{6}$$

Частному решению этого уравнения вида $u = \beta + C\exp(\omega t + \mu x)$ соответствует решение (1).

При $a = 0$ уравнение (6) имеет также другие решения типа бегущей волны

$$u(x,t) = (1-m)\left(bt \pm \sqrt{-\frac{c}{m}}\,x\right) + C.$$

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 393–394).

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw^{m-1} + bmw^m - mb^2w^{2m-1}$.

Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{zz} - \lambda w'_z + aw^{m-1} + bmw^m - mb^2w^{2m-1} = 0. \tag{1}$$

Можно показать, что при $\lambda = 1$ однопараметрическое семейство решений уравнения (1) удовлетворяет уравнению первого порядка

$$w'_z = w - bw^m + \frac{a}{mb}. \tag{2}$$

Интегрируя (2), получим решение (2) в неявной форме (A — любое):

$$\int \frac{dw}{a + mbw - mb^2w^m} = \frac{1}{mb}z + A. \tag{3}$$

В частном случае $a = 0$ из формулы (3) имеем

$$w(z) = \bigl\{C\exp\bigl[(1-m)z\bigr] + b\bigr\}^{\frac{1}{1-m}},$$

где C — произвольная постоянная.

1.1.4. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t,w)$

1. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + s_1(bx+ct)^k + s_2 w^n.$

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z,w) = s_1 z^k + s_2 w^n$.

2. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + s(w+bx+ct)^k.$

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z,w) = s(w+z)^k$.

3. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + s(bx+ct)^k w^n.$

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z,w) = sz^k w^n$.

4. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bt^n x^m w^k.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C^{2n+m+2} w(C^{k-1}x, C^{2k-2}t),$$

где C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Автомодельное решение:

$$w = t^{\frac{2n+m+2}{2(1-k)}} u(\xi), \qquad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}},$$

где функция $u = u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$au''_{\xi\xi} + \frac{1}{2}\xi u'_\xi + \frac{2n+m+2}{2(k-1)}u + b\xi^m u^k = 0.$$

5. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + se^{bx+ct} w^n.$

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z,w) = se^z w^n$.

1.1.5. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)\frac{\partial w}{\partial x} + g(w)$

1. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\frac{\partial w}{\partial x} + cw + k_1 w^{n_1} + k_2 w^{n_2}.$

Частный случай уравнения 1.6.2.3 при $f(t) = b$. Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + bt$, получим более простое уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + cw + k_1 w^{n_1} + k_2 w^{n_2},$$

частные случаи которого рассматриваются в разд. 1.1.1 — 1.1.3.

2. $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w\frac{\partial w}{\partial x}.$

Уравнение Бюргерса (Burgers). Используется для описания волновых процессов в газовой динамике, гидродинамике, акустике.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(C_1 x + C_1 C_2 t + C_3, C_1^2 t + C_4) + C_2,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$
\begin{aligned}
w(x,t) &= \frac{A-x}{B+t},\\
w(x,t) &= \lambda + \frac{2}{x+\lambda t+A},\\
w(x,t) &= \frac{4x+2A}{x^2+Ax+2t+B},\\
w(x,t) &= \frac{6(x^2+2t+A)}{x^3+6xt+3Ax+B},\\
w(x,t) &= \frac{2\lambda}{1+A\exp(-\lambda^2 t-\lambda x)},\\
w(x,t) &= -\lambda + A\frac{\exp\bigl[A(x-\lambda t)\bigr]-B}{\exp\bigl[A(x-\lambda t)\bigr]+B},\\
w(x,t) &= -\lambda + 2A\,\mathrm{th}\bigl[A(x-\lambda t)+B\bigr],\\
w(x,t) &= \frac{\lambda}{\lambda^2 t+A}\left[2\,\mathrm{th}\left(\frac{\lambda x+B}{\lambda^2 t+A}\right)-\lambda x-B\right],\\
w(x,t) &= -\lambda + 2A\,\mathrm{tg}\bigl[A(\lambda t-x)+B\bigr],\\
w(x,t) &= \frac{2\lambda\cos(\lambda x+A)}{B\exp(\lambda^2 t)+\sin(\lambda x+A)},\\
w(x,t) &= \frac{2A}{\sqrt{\pi(t+\lambda)}}\exp\left[-\frac{(x+B)^2}{4(t+\lambda)}\right]\left[A\,\mathrm{erf}\left(\frac{x+B}{2\sqrt{t+\lambda}}\right)+C\right]^{-1},
\end{aligned}
$$

где A, B, C, λ — произвольные постоянные, $\mathrm{erf}\, z \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-\xi^2)\,d\xi$ — интеграл вероятностей (функция ошибок).

3°. Другие решения можно получить по формуле (преобразование Хопфа–Коула):

$$
w(x,t) = \frac{2}{u}\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{1}
$$

где $u = u(x,t)$ — решение линейного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2}
$$

Об этом уравнении см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

Замечание. Преобразование (1) и уравнение 1.6.3.2, которое является обобщением уравнения Бюргерса, встречались существенно ранее в работе Форсайта (A. R. Fortsyth, 1906).

4°. *Задача Коши.* В области $-\infty < x < \infty$ задано начальное условие

$$
w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad -\infty < x < \infty.
$$

Решение задачи Коши:

$$
w(x,t) = 2\frac{\partial}{\partial x}\ln F(x,t),
$$

где

$$
F(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}-\frac{1}{2}\int_0^{\xi} f(\xi')\,d\xi'\right]d\xi.
$$

5°. Уравнение Бюргерса связано с линейным уравнением теплопроводности (2) преобразованием Беклунда

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}uw &= 0,\\
\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial (uw)}{\partial x} &= 0.
\end{aligned}
$$

⊙ *Литература для уравнения* 1.1.5.2: J. M. Burgers (1948), E. Hopf (1950), J. Cole (1951), О. В. Руденко, С. И. Солуян (1975), N. H. Ibragimov (1994, pp. 180–182), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 395–396).

3. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw\frac{\partial w}{\partial x}.$

Ненормированное уравнение Бюргерса. Растяжение независимых переменных по формулам $x = \frac{a}{b}z$, $t = \frac{a}{b^2}\tau$ приводит к уравнению 1.1.5.2:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + w\frac{\partial w}{\partial z}.$$

4. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw\frac{\partial w}{\partial x} + c.$

Преобразование

$$w = u(z,t) + ct, \qquad z = x + \tfrac{1}{2}bct^2,$$

приводит к уравнению Бюргерса 1.1.5.3:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + bu\frac{\partial u}{\partial z}.$$

5. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} + \sigma w\frac{\partial w}{\partial x} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw.$

1°. Пусть функция $w(x,t)$ является решением. Тогда функции

$$w_1 = \pm w\bigl(\pm x - C_1\sigma e^{bt} + C_2,\ t + C_3\bigr) + Cbe^{bt},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (берутся либо верхние, либо нижние знаки).

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \qquad z = x + \lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aw''_{zz} - \sigma ww'_z - \lambda w'_z + bw = 0.$$

3°. Вырожденное решение:

$$w(x,t) = \frac{b(x + C_1)}{\sigma(1 + C_2e^{-bt})}.$$

6. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} + \sigma w\frac{\partial w}{\partial x} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b_1w + b_0.$

1°. Пусть функция $w(x,t)$ является решением. Тогда функция

$$w_1 = w\bigl(x - C_1\sigma e^{b_1t} + C_2,\ t + C_3\bigr) + Cb_1e^{b_1t},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Преобразование

$$w = u(z,t) - \frac{b_0}{b_1}, \qquad z = x + \sigma\frac{b_0}{b_1}t,$$

приводит к более простому уравнению 1.1.5.5:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sigma u\frac{\partial u}{\partial z} = a\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + b_1u.$$

7. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{b^2}{9a}w(w-k)(w+k).$

Точное решение:

$$w = \frac{k(-1 + C_1e^{4\lambda x})}{1 + C_1e^{4\lambda x} + C_2e^{2\lambda x + bk\lambda t}}, \qquad \lambda = \frac{bk}{12a},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Решение получил* К. А. Волосов (2000).

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t}+\sigma w\dfrac{\partial w}{\partial x}=a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+b_0+b_1w+b_2w^2+b_3w^3.$

Решения уравнения определяются по формуле

$$w(x,t)=\frac{\beta}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+\lambda. \qquad (1)$$

Здесь β и λ — любые из корней соответственно квадратного и кубического уравнений

$$b_3\beta^2+\sigma\beta+2a=0,$$
$$b_3\lambda^3+b_2\lambda^2+b_1\lambda+b_0=0,$$

а вид функции $z=z(x,t)$ зависит от коэффициентов уравнения.

1°. *Случай* $b_3\neq 0$. Введем обозначения:

$$p_1=-\beta\sigma-3a,\qquad p_2=\lambda\sigma+\beta b_2+3\beta\lambda b_3,$$
$$q_1=-\frac{\beta b_2+3\beta\lambda b_3}{\beta\sigma+2a},\quad q_2=-\frac{3b_3\lambda^2+2b_2\lambda+b_1}{\beta\sigma+2a}.$$

Возможны четыре ситуации.

1.1. При $q_2\neq 0$, $q_1^2\neq 4q_2$:

$$z(x,t)=C_1\exp(k_1x+s_1t)+C_2\exp(k_2x+s_2t)+C_3,$$
$$k_n=-\tfrac12 q_1\pm\tfrac12\sqrt{q_1^2-4q_2},\quad s_n=-k_n^2p_1-k_np_2,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные; $n=1,\,2$.

1.2. При $q_2\neq 0$, $q_1^2=4q_2$:

$$z(x,t)=C_1\exp(kx+s_1t)+C_2(kx+s_2t)\exp(kx+s_1t)+C_3,$$
$$k=-\tfrac12 q_1,\quad s_1=-\tfrac14 p_1q_1^2+\tfrac12 p_2q_1,\quad s_2=-\tfrac12 p_1q_1^2+\tfrac12 p_2q_1.$$

1.3. При $q_2=0$, $q_1\neq 0$:

$$z(x,t)=C_1(x-p_2t)+C_2\exp[-q_1x+q_1(p_2-p_1q_1)t]+C_3.$$

1.4. При $q_2=q_1=0$:

$$z(x,t)=C_1(x-p_2t)^2+C_2(x-p_2t)-2C_1p_1t+C_3.$$

2°. *Случай* $b_3=0$, $b_2\neq 0$. Решения определяются по формуле (1) при

$$\beta=-\frac{2a}{\sigma},\quad z(x,t)=C_1+C_2\exp\left[Ax+A\left(\frac{b_1\sigma}{2b_2}+\frac{2ab_2}{\sigma}\right)t\right],\quad A=\frac{\sigma(b_1+2b_2\lambda)}{2ab_2},$$

где λ — корень квадратного уравнения $b_2\lambda^2+b_1\lambda+b_0=0$.

3°. *Случай* $b_3=b_2=0$. См. уравнения 1.1.5.4–1.1.5.6.

⦿ *Литература*: Н. А. Кудряшов (1993).

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+bw^m\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=C_1w\big(C_1^mx+C_2,\,C_1^{2m}t+C_3\big),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w(x,t)=\left[C\exp\left(-\frac{\lambda m}{a}z\right)+\frac{b}{\lambda(m+1)}\right]^{-1/m},\qquad z=x+\lambda t,$$

где C, λ — произвольные постоянные. О более широком семействе решений типа бегущей волны см. в 1.6.3.7 при $f(w)=bw^m$.

3°. Существует автомодельное решение вида

$$w(\xi,t)=|t|^{-\frac{1}{2m}}\varphi(\xi),\qquad \xi=x|t|^{-\frac12}.$$

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\ln w + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

1°. Пусть функция $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = e^{C_1} w(x + bC_1 t + C_2, t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \exp\left(\frac{C_1 - x}{b(t + C_2)} + \frac{a}{b^2}\,\frac{\ln|t + C_2|}{t + C_2} - \frac{c}{b}\right),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Точное решение:

$$w(x,t) = e^{\lambda t} u(z), \qquad z = x + \tfrac{1}{2} b\lambda t^2 + kt,$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $u(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$au''_{zz} + (b\ln u + c - k)u'_z - \lambda u = 0.$$

Значению $\lambda = 0$ соответствует решение типа бегущей волны.

1.1.6. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t,w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx + c)\dfrac{\partial w}{\partial x} + sw^k$.

Частный случай уравнения 1.6.2.1 при $f(w) = sw^k$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + C_1 e^{-bt}, t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w = w(z), \qquad z = x + C_1 e^{-bt},$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aw''_{zz} + bzw'_z + sw^k = 0.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bt^n\dfrac{\partial w}{\partial x} + cw + k_1 w^{m_1} + k_2 w^{m_2}$.

Частный случай уравнения 1.6.2.3 при $f(t) = bt^n$. Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \dfrac{b}{n+1} t^{n+1}$, получим более простое уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + cw + k_1 w^{m_1} + k_2 w^{m_2},$$

частные случаи которого рассматриваются в разд. 1.1.1 — 1.1.3.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{k}{t} w + bw\dfrac{\partial w}{\partial x} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

Модифицированное уравнение Бюргерса.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$\begin{aligned}
&w_1 = C_1 w(C_1 x + C_2, C_1^2 t), \\
&w_2 = w(x - bC_3 t^{1-k}, t) + C_3(1-k)t^{-k} \quad &&\text{при} \ \ k \neq 1, \\
&w_3 = w(x - bC_3 \ln|t|, t) + C_3 t^{-1} &&\text{при} \ \ k = 1,
\end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Вырожденные решения (одно пространственно-однородное и два линейных по переменной x):

$$w(t) = Ct^{-k},$$
$$w(x,t) = \frac{(1-k)x + C_1}{C_2 t^k + bt} \quad \text{при} \quad k \neq 1,$$
$$w(x,t) = \frac{x + C_1}{t(C_2 + b\ln|t|)} \quad \text{при} \quad k = 1,$$

где C, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = u(z)t^{-1/2}, \quad z = xt^{-1/2},$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$au''_{zz} + \left(\tfrac{1}{2}z - bu\right)u'_z + \left(\tfrac{1}{2} - k\right)u = 0.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 17).

4. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} + bw\frac{\partial w}{\partial x} = a\left[\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{w}{x^2}\right].$

Цилиндрическое уравнение Бюргерса. Переменная x играет роль радиальной координаты.

Точное решение:

$$w(x,t) = -\frac{2a}{b}\frac{1}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial x},$$

где функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности с осевой симметрией

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{a}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial \theta}{\partial x}\right).$$

⊙ *Литература*: S. Nerney, E. J. Schmahl, Z. E. Musielak (1996).

5. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} + bw\frac{\partial w}{\partial x} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + cx^k\frac{\partial w}{\partial x} + ckx^{k-1}w.$

Точное решение:

$$w(x,t) = -\frac{2a}{b}\frac{1}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial x},$$

где функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + cx^k\frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

6. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw\frac{\partial w}{\partial x} + c(x + st)^k.$

Частный случай уравнения 1.6.3.2 при $f(x,t) = c(x + st)^k$.

7. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw\frac{\partial w}{\partial x} + cx^k + st^n.$

Частный случай уравнения 1.6.3.2 при $f(x,t) = cx^k + st^n$.

8. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx + cw^k)\frac{\partial w}{\partial x}.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + C_1e^{-bt}, t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + C_1e^{-bt},$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aw''_{zz} + (bz + cw^k)w'_z = 0.$$

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 14).

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bw^m + ct + s)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 1.6.3.11 при $f(w) = bw^m$, $g(t) = ct + s$, $h(w) = 0$.

Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \frac{1}{2}ct^2 + st$, получаем уравнение вида 1.1.5.9:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + bw^m\frac{\partial w}{\partial z}.$$

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bw^m + ct^k)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 1.6.3.11 при $f(w) = bw^m$, $g(t) = ct^k$, $h(w) = 0$.

Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \dfrac{c}{k+1}t^{k+1}$, получаем уравнение вида 1.1.5.9:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + bw^m\frac{\partial w}{\partial z}.$$

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + s_1(bx + ct)^k w^n\dfrac{\partial w}{\partial x} + s_2(bx + ct)^p w^q$.

Частный случай уравнения 1.6.3.13 при $f(z, w) = s_1 z^k w^n$, $g(z, w) = s_2 z^p w^q$.

1.1.7. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + f(x, t, w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2$.

1°. Точные решения:

$$\begin{aligned}
w(x) &= \frac{a}{b}\ln|Ax + B| + C,\\
w(x,t) &= A^2bt \pm Ax + B,\\
w(x,t) &= -\frac{(x+A)^2}{4bt} - \frac{a}{2b}\ln t + B,\\
w(x,t) &= \frac{a}{b}\ln|x^2 + 2at + Ax + B| + C,\\
w(x,t) &= \frac{a}{b}\ln|x^3 + 6axt + Ax + B| + C,\\
w(x,t) &= \frac{a}{b}\ln|x^4 + 12ax^2t + 12a^2t^2 + A| + B,\\
w(x,t) &= -\frac{a^2\lambda^2}{b}t + \frac{a}{b}\ln|\cos(\lambda x + A)| + B,
\end{aligned}$$

где A, B, C, λ — произвольные постоянные.

2°. Подстановка

$$w(x,t) = \frac{a}{b}\ln|u(x,t)|$$

приводит к линейному уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Об этом уравнении см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + b$.

Замена $u = e^w$ приводит к линейному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + cw + s.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm x + C_1, t + C_2) + C_3 e^{ct},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной x:

$$w(x,t) = \frac{c(x+C_2)^2}{C_1 e^{-ct} - 4b} - \frac{2a}{C_1} e^{ct} \ln|C_1 e^{-ct} - 4b| + C_3 e^{ct} - \frac{s}{c}.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + aw^2.$

1°. Точные решения при $a<0$:

$$w(x,t) = C_1 \exp\bigl(-at \pm x\sqrt{-a}\,\bigr),$$

$$w(x,t) = \frac{1}{C_1 - at} + \frac{C_2}{(C_1 - at)^2} \exp\bigl(-at \pm x\sqrt{-a}\,\bigr),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Первое решение является решением в виде произведения функций разных аргументов, а второе — решением с обобщенным разделением переменных.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных при $a<0$:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\bigl[A\exp\bigl(x\sqrt{-a}\,\bigr) + B\exp\bigl(-x\sqrt{-a}\,\bigr)\bigr],$$

где A, B — произвольные постоянные, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_t = a\bigl(\varphi^2 + 4AB\psi^2\bigr), \tag{1}$$

$$\psi'_t = a(2\varphi - 1)\psi. \tag{2}$$

Деля почленно правые и левые части уравнений (1) и (2), можно получить уравнение первого порядка $(2\varphi - 1)\psi\varphi'_\psi = \varphi^2 + 4AB\psi^2$.

3°. Решение с обобщенным разделением переменных при $a>0$:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\cos\bigl(x\sqrt{a} + C\bigr),$$

где C — произвольная постоянная, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_t = a\bigl(\varphi^2 + \psi^2\bigr), \tag{3}$$

$$\psi'_t = a(2\varphi - 1)\psi. \tag{4}$$

Деля почленно правые и левые части уравнений (3) и (4), можно получить уравнение первого порядка.

⊙ *Литература*: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 399).

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + bcw^2 + sw + k.$

1°. Решение с обобщенным разделением переменных при $c<0$:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp\bigl(\pm x\sqrt{-c}\,\bigr), \tag{1}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_t = bc\varphi^2 + s\varphi + k, \tag{2}$$

$$\psi'_t = (2bc\varphi + s - ac)\psi. \tag{3}$$

Решение системы уравнений (2), (3) определяется формулами

$$\varphi(t) = \lambda + \frac{2bc\lambda + s}{C_1\exp\bigl[-(2bc\lambda + s)t\bigr] - bc},$$

$$\psi(t) = \frac{C_1 C_2 \exp\bigl[-(2bc\lambda + s + ac)t\bigr]}{\bigl\{C_1\exp\bigl[-(2bc\lambda + s)t\bigr] - bc\bigr\}^2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$ — корни квадратного уравнения

$$bc\lambda^2 + s\lambda + k = 0.$$

2°. О более сложных решениях с обобщенным разделением переменных, содержащих гиперболические и тригонометрические функции x, см. уравнение 1.6.6.2 при f, g, $h = \mathrm{const}$.

⊙ *Литература*: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 399).

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + cw^2 + st^n w + kt^m.$

Частный случай уравнения 1.6.6.2 при $f = \mathrm{const}$, $g = st^n$, $h = kt^m$.

1.1.8. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f\Big(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + c.$

Замена $u = e^w$ приводит к линейному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} + cu.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + bt^n\dfrac{\partial w}{\partial x} + ct^m.$

Частный случай уравнения 1.6.5.4 при $f(x,t) = bt^n$ и $g(x,t) = ct^m$.

Замена $u = e^w$ приводит к линейному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bt^n\frac{\partial u}{\partial x} + ct^m u.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bt^n\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + ct^m w + st^k.$

Частный случай уравнения 1.6.6.1 при $f(t) = bt^n$, $g(t) = ct^m$, $h(t) = st^k$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda t}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + ce^{\mu t}w + se^{\nu t}.$

Частный случай уравнения 1.6.6.1 при $f(t) = be^{\lambda t}$, $g(t) = ce^{\mu t}$, $h(t) = se^{\nu t}$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{a}{w}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$

Частный случай уравнения 1.6.6.8 при $f(w) = a/w$.

Замена

$$u = \begin{cases} \dfrac{1}{a+1}w^{a+1} & \text{при } a \neq -1, \\ \ln|w| & \text{при } a = -1 \end{cases}$$

приводит к линейному уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = \partial_{xx} u$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw^k\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$

Частный случай уравнения 1.6.6.8 при $f(w) = aw^k$. При $k = 0$ см. уравнение 1.1.7.1; при $k = -1$ см. уравнение 1.1.8.5.

Замена

$$u = \int \exp\left(\frac{a}{k+1}w^{k+1}\right) dw$$

приводит к линейному уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = \partial_{xx} u$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw^m\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + (bx + ct + s)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.6.6.10 при $f(w) = aw^m$, $g(t) = b$, $h(t) = ct + s$.

1.1.9. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw^k \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f\Big(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-2} C_2 w(C_1 x + C_3, C_2 t + C_4),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \frac{x^2 + Ax + B}{C - 2at},$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

3°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$ak^2 \int \frac{dw}{\lambda \ln|w| + C_1} = kx + \lambda t + C_2,$$

где C_1, C_2, k, λ — произвольные постоянные.

4°. О других точных решениях см. уравнение 1.1.9.20 при $m = 1$, пп. 5° – 8°.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-1} w(C_1 x + C_2, C_1 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x,t) = Ax + B + bt,$$
$$w(x,t) = \frac{x^2 + Ax + B}{C - 2at} - \frac{b}{4a}(C - 2at),$$

где A, B, C — произвольные постоянные. Первое решение является вырожденным, а второе — решением с обобщенным разделением переменных.

3°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = kx + \lambda t,$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$ak^2 w w''_{zz} - \lambda w'_z + b = 0.$$

4°. Автомодельное решение:

$$w = tU(\xi), \quad \xi = x/t,$$

где функция $U(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aUU''_{\xi\xi} + \xi U'_\xi - U + b = 0.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw + c$.

1°. Решения с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = Ae^{bt} x + Be^{bt} - \frac{c}{b},$$
$$w(x,t) = \frac{b(x + A)^2 - Bce^{-bt} - 2act + C}{Bbe^{-bt} - 2a},$$

где A, B, C — произвольные постоянные (первое решение является вырожденным).

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = kx + \lambda t,$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$ak^2 w w''_{zz} - \lambda w'_z + bw + c = 0.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + cw^2 + kw + s.$

Частный случай уравнения 1.1.9.9 при $b = 0$.

⊙ *Литература*: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989).

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^2 + (ct + d)w + st + k.$

Частный случай уравнения 1.6.9.3 при $f(t) = ct + d$ и $g(t) = st + k$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ct + d)w + pt + k.$

Частный случай уравнения 1.6.10.2 при $f(t) \equiv 0$, $g(t) = b$, $h(t) = ct + d$, $s(t) = pt + k$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \dfrac{2}{3}a\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + b.$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \frac{1}{a}\big[3Ax^3 + f_2(t)x^2 + f_1(t)x + f_0(t)\big],$$

где A — произвольная постоянная, а функции $f_2(t)$, $f_1(t)$, $f_0(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} f_2' &= 6Af_1 - \tfrac{2}{3}f_2^2, \\ f_1' &= 18Af_0 - \tfrac{2}{3}f_1 f_2, \\ f_0' &= 2f_0 f_2 - \tfrac{2}{3}f_1^2 + ab. \end{aligned}$$

Общее решение этой системы при $A \neq 0$ имеет вид

$$f_2(t) = 3\int \varphi(t)\,dt + 3B, \quad f_1(t) = \frac{1}{A}\left[\int \varphi(t)\,dt + B\right]^2 + \frac{1}{2A}\varphi(t),$$
$$f_0(t) = \frac{1}{9A^2}\left[\int \varphi(t)\,dt + B\right]^3 + \frac{1}{6A^2}\varphi(t)\left[\int \varphi(t)\,dt + B\right] + \frac{1}{36A^2}\varphi_t'(t),$$

где функция $\varphi(t)$ задана неявно

$$\int (C_1 + 72A^2ab\varphi - 8\varphi^3)^{-1/2}\,d\varphi = \pm t + C_2;$$

B, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: J. R. King (1993), V. A. Galaktionov (1995).

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + c\dfrac{\partial w}{\partial x} + pw + q.$

Частный случай уравнения 1.6.10.2 при $f(t) = b$, $g(t) = c$, $h(t) = p$, $s(t) = q$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + cw^2 + kw + s.$

1°. Решение с обобщенным разделением переменных, содержащее экспоненциальную функцию x:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp(\pm\lambda x), \quad \lambda = \left(\frac{-c}{a+b}\right)^{1/2}, \tag{1}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi_t' = c\varphi^2 + k\varphi + s, \tag{2}$$
$$\psi_t' = (a\lambda^2\varphi + 2c\varphi + k)\psi. \tag{3}$$

Интегрируя (2), получим

$$\int \frac{d\varphi}{c\varphi^2 + k\varphi + s} = t + C_1.$$

Вычислив интеграл, можно найти явную зависимость $\varphi = \varphi(t)$. Решение уравнения (3) выражается через функцию $\varphi(t)$ по формуле

$$\psi(t) = C_2 \exp\left[\int (a\lambda^2\varphi + 2c\varphi + k)\,dt\right],$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Имеются также решения с обобщенным разделением переменных, содержащие гиперболические и тригонометрические функции (A — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\operatorname{ch}(\lambda x + A), \quad \lambda = \left(\frac{-c}{a+b}\right)^{1/2};$$

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\operatorname{sh}(\lambda x + A), \quad \lambda = \left(\frac{-c}{a+b}\right)^{1/2};$$

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\cos(\lambda x + A), \quad \lambda = \left(\frac{c}{a+b}\right)^{1/2}.$$

Функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (эти системы могут быть сведены к одному уравнению первого порядка).

Об этих решениях см. пп. $2^\circ - 4^\circ$ уравнения 1.6.10.1 при $f(t) = k$, $g(t) = s$.

⊙ *Литература*: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 21).

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

Замена $w = 1/v$ приводит к уравнению вида 1.1.10.3:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Поэтому решения исходного уравнения выражаются через решения линейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

по формулам

$$w = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x = u.$$

Чтобы получить в явном виде зависимость $w = w(x,t)$, следует исключить y.

⊙ *Литература*: Н. Х. Ибрагимов (1983, стр. 213).

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^2$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^2 w(C_1^{-1}x + C_2, C_1^2 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Преобразование $w = 1/u$, $\tau = at$ приводит к уравнению вида 1.1.11.2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{b}{a}.$$

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^{-1}$.

Частный случай уравнения 1.1.9.21 при $m = 2$ и $b = -1$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-1} w(\pm C_1^2 x + C_2, C_1^2 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решения с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \pm\left[C_1(x + C_2)^2 + C_3\exp(2aC_1 t) - \frac{b}{aC_1}\right]^{1/2},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=aw^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+bw+cw^{-1}.$

Решения с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t)=\pm\left[bC_1e^{2bt}(x+C_2)^2+C_3F(t)+2cF(t)\int\frac{dt}{F(t)}\right]^{1/2},\qquad F(t)=\exp\bigl(aC_1e^{2bt}+2bt\bigr),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

14. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=w^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\dfrac{1}{2}w\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w=\frac{C_2x^2+C_1x+C_0}{\sqrt{(C_1^2-4C_0C_2)t+C_3}},$$

где C_0, C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

15. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=w^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\dfrac{1}{2}w\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2+aw+b.$

Решение с обобщенным разделением переменных

$$w=\varphi_2(t)x^2+\varphi_1(t)x+\varphi_0(t),$$

где функции $\varphi_n(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\varphi_2'&=\varphi_2\bigl(2\varphi_0\varphi_2-\tfrac{1}{2}\varphi_1^2\bigr)+a\varphi_2,\\ \varphi_1'&=\varphi_1\bigl(2\varphi_0\varphi_2-\tfrac{1}{2}\varphi_1^2\bigr)+a\varphi_1,\\ \varphi_0'&=\varphi_0\bigl(2\varphi_0\varphi_2-\tfrac{1}{2}\varphi_1^2\bigr)+a\varphi_0+b.\end{aligned}$$

⦿ *Литература*: V. A. Galaktionov, S. A. Posashkov (1995).

16. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=aw^3\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Частный случай уравнения 1.1.9.20 при $m=3$.

Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t)=a^{-1/3}\bigl[3Ax^3+f_2(t)x^2+f_1(t)x+f_0(t)\bigr]^{1/3}.$$

Здесь

$$f_2(t)=3\int\varphi(t)\,dt+3B,\quad f_1(t)=\frac{1}{A}\left[\int\varphi(t)\,dt+B\right]^2+\frac{1}{2A}\varphi(t),$$

$$f_0(t)=\frac{1}{9A^2}\left[\int\varphi(t)\,dt+B\right]^3+\frac{1}{6A^2}\varphi(t)\left[\int\varphi(t)\,dt+B\right]+\frac{1}{36A^2}\varphi_t'(t),$$

где функция $\varphi(t)$ задана неявно

$$\int(C_1-8\varphi^3)^{-1/2}\,d\varphi=\pm t+C_2;$$

A, B, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Полагая в последней формуле $C_1=0$, получим функцию φ в явном виде $\varphi=-\frac{1}{2}(t+C_2)^{-2}$.

⦿ *Литература*: Г. А. Рудых, Э. И. Семенов (1998).

17. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=aw^3\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+bw^{-2}.$

Частный случай уравнения 1.1.9.21 при $m=3$ и $b=-2$.

Замена $w=u^{1/3}$ приводит к уравнению вида 1.1.9.7:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{2}{3}a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+3b.$$

Поэтому рассматриваемое уравнение имеет решение с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t)=a^{-1/3}\bigl[3Ax^3+f_2(t)x^2+f_1(t)x+f_0(t)\bigr]^{1/3}.$$

18. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw^4 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw + cw^{-1}$.

Решения с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \pm\sqrt{\varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t)},$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \varphi'_t &= \tfrac{1}{2}a\varphi(4\varphi\chi - \psi^2) + 2b\varphi, \\ \psi'_t &= \tfrac{1}{2}a\psi(4\varphi\chi - \psi^2) + 2b\psi, \\ \chi'_t &= \tfrac{1}{2}a\chi(4\varphi\chi - \psi^2) + 2b\chi + 2c. \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений следует, что $\varphi = C\psi$, где C — произвольная постоянная.

⊙ *Литература*: V. A. Galaktionov, S. A. Posashkov (1995).

19. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw^4 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx^m w^5$.

Частный случай уравнения 1.6.11.1 при $f(x) = bx^m$.

20. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2/m} C_2^{1/m} w(\pm C_1 x + C_3, C_2 t + C_4),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$\begin{aligned} w(x) &= Ax + B, \\ w(x,t) &= (\pm\beta x + \beta\lambda t + A)^{1/m}, \quad \beta = \frac{m\lambda}{a(1-m)}, \\ w(x,t) &= \left[\frac{m(x-A)^2}{2a(2-m)(B-t)}\right]^{1/m}, \\ w(x,t) &= \left[A|t+B|^{\frac{m}{m-2}} + \frac{m}{2a(m-2)}\frac{(x+C)^2}{t+B}\right]^{1/m}, \\ w(x,t) &= \left[\frac{(x+A)^2}{\varphi(t)} + B(x+A)^m|\varphi(t)|^{\frac{m(m-3)}{2}}\right]^{1/m}, \quad \varphi(t) = C + \frac{2a(m-2)}{m}t, \end{aligned}$$

где A, B, C, λ — произвольные постоянные (первое решение является вырожденным).

3°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\int \frac{dw}{\lambda w^{1-m} + C_1} = \frac{\beta x + \lambda t + C_2}{a\beta^2(1-m)},$$

где C_1, C_2, β, λ — произвольные постоянные. Значению $\lambda = 0$ соответствует стационарное решение, а значению $C_1 = 0$ — второе решение в п. 2°.

4°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = (\lambda t + A)^{-1/m} f(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $f = f(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $amf''_{xx} + \lambda f^{1-m} = 0$ (его решение может быть записано в неявном виде).

5°. Автомодельное решение:

$$w = w(z), \quad z = \frac{x}{\sqrt{t}},$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $2aw^m w''_{zz} + {}$ $+ zw'_z = 0$.

6°. Автомодельное решение более общего вида:

$$w = t^{\beta} U(\zeta), \quad \zeta = x t^{-\frac{m\beta+1}{2}},$$

где β — произвольная постоянная, а функция $U = U(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aU^m U''_{\zeta\zeta} = \beta U - \tfrac{1}{2}(m\beta + 1)\zeta U'_{\zeta}.$$

Это уравнение является обобщенно-однородным и поэтому допускает понижение порядка.

7°. Обобщенно-автомодельное решение:

$$w = e^{-2\lambda t}\varphi(\xi), \quad \xi = x e^{\lambda m t},$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi^m \varphi''_{\xi\xi} = \lambda m \xi \varphi'_{\xi} - 2\lambda\varphi.$$

Это уравнение является обобщенно-однородным и поэтому допускает понижение порядка.

8°. Точное решение:

$$w = (At + B)^{-1/m}\psi(u), \quad u = x + k\ln(At + B),$$

где A, B, k — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(u)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\psi^m \psi''_{uu} = Ak\psi'_u - \frac{A}{m}\psi.$$

9°. Замена $u = w^{1-m}$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{m}{1-m}}\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

которое рассматривается в разд. 1.1.10.

21. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^k.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^2 w(\pm C_1^{k-m-1} x + C_2, C_1^{2k-2} t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решения типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = kx + \lambda t,$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aw^m w''_{zz} - \lambda w'_z + bw^k = 0.$$

3°. Автомодельное решение при $k \neq 1$:

$$w = t^{\frac{1}{1-k}} u(\xi), \quad \xi = x t^{\frac{k-m-1}{2(1-k)}},$$

где функция $u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$au^m u''_{\xi\xi} + \frac{m-k+1}{2(1-k)}\xi u'_{\xi} + bu^k - \frac{1}{1-k}u = 0.$$

4°. При $m \neq 1$ подстановка $u = w^{1-m}$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{m}{1-m}}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + b(1-m)u^{\frac{k-m}{1-m}},$$

которое рассматривается в разд. 1.1.11.

5°. При $k = 1$ преобразование

$$w(x,t) = e^{bt}U(x,\tau), \quad \tau = \frac{1}{bm}e^{bmt} + \text{const},$$

приводит к уравнению вида 1.1.9.20:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = aU^m \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

22. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bxt^n \dfrac{\partial w}{\partial x} + ct^k w.$

Частный случай уравнения 1.6.11.4 при $f(t) = bt^n$ и $g(t) = ct^k$.

1.1.10. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(w^m\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)$

► *Уравнения этого вида допускают решения типа бегущей волны* $w = w(kx + \lambda t)$.

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$.

Частный случай уравнения 1.1.10.7 при $m = 1$.

1°. Точные решения:

$$
\begin{aligned}
w(x,t) &= C_1x + aC_1^2t + C_2,\\
w(x,t) &= -\frac{(x+C_1)^2}{6a(t+C_2)} + \frac{C_3}{|t+C_2|^{1/3}},\\
w(x,t) &= \frac{(x+C_1)^2}{C_2-6at} + C_3|x+C_1|^{1/2}|C_2-6at|^{-5/8},
\end{aligned}
$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

2°. Решение типа бегущей волны в неявной форме:

$$w - C_2\ln|w+C_2| = C_1x + aC_1^2t + C_3.$$

3°. Точное решение в параметрической форме:

$$
\begin{aligned}
x &= (6at + C_1)\xi + C_2\xi^2 + C_3,\\
w &= -(6at + C_1)\xi^2 - 2C_2\xi^3.
\end{aligned}
$$

4°. Точное решение в параметрической форме:

$$
\begin{aligned}
x &= tf(\xi) + g(\xi),\\
w &= tf'_\xi(\xi) + g'_\xi(\xi),
\end{aligned}
$$

где функции $f = f(\xi)$ и $g(\xi)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(f'_\xi)^2 - ff''_{\xi\xi} = af'''_{\xi\xi\xi}, \tag{1}$$

$$f'_\xi g'_\xi - fg''_{\xi\xi} = ag'''_{\xi\xi\xi}. \tag{2}$$

Порядок уравнения (1) может быть понижен на две единицы. Пусть известно некоторое решение уравнения (1). Уравнение (2) является линейным уравнением относительно функции g, которое имеет два линейно независимых частных решения

$$g_1 = 1, \quad g_2 = f(\xi).$$

Второе частное решение следует из сопоставления уравнений (1) и (2). Общее решение уравнения (1) можно представить в виде (см. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001 *a*):

$$
\begin{aligned}
g(\xi) &= C_1 + C_2f + C_3\biggl(f\int\psi\,d\xi - \int f\psi\,d\xi\biggr),\\
f &= f(\xi), \quad \psi = \frac{1}{(f'_\xi)^2}\exp\biggl(-\frac{1}{a}\int f\,d\xi\biggr).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Нетрудно проверить, что уравнение (1) имеет частные решения:

$$
\begin{aligned}
f(\xi) &= 6a(\xi + C)^{-1},\\
f(\xi) &= Ce^{\lambda\xi} - a\lambda,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где C, λ — произвольные постоянные. Первое решение (4) с учетом формул (1), (3) приводит к решению из п. 3°. Подставив вторую зависимость (4) в формулы (1), (3) можно получить другое решение.

Замечание. Указанные выше в пп. 3° и 4° решения получены с помощью преобразования Мизеса из решения уравнения гидродинамического пограничного слоя (см. 9.3.1.1, пп. 5° и 6°).

5°. О других решениях см. пп. 4° – 9° уравнения 1.1.10.7 при $m = 1$.

⊙ *Литература для уравнения* 1.10.1.1: D. Zwillinger (1989), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 22–23).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Частный случай уравнения 1.1.10.7 при $m = -1$.

Точные решения:

$$
\begin{aligned}
w(x,y) &= (C_1x - aC_1^2t + C_2)^{-1},\\
w(x,y) &= (2at + C_1)(x + C_2)^{-2},\\
w(x,y) &= \frac{2a(t+C_1)}{(x+C_2)^2 + C_3(t+C_1)^2},\\
w(x,y) &= \frac{C_1^2}{C_2 + C_3\exp(aC_2t - C_1x)},\\
w(x,y) &= \frac{C_1^2}{at+C_2}\left[C_3\exp\left(-\frac{C_1x}{at+C_2}\right) - 1 + \frac{C_1x}{at+C_2}\right]^{-1},\\
w(x,y) &= \frac{2aC_1^2t + C_2}{\operatorname{sh}^2(C_1x + C_3)},\\
w(x,y) &= \frac{C_2 - 2aC_1^2t}{\operatorname{ch}^2(C_1x + C_3)},\\
w(x,y) &= \frac{2aC_1^2t + C_2}{\cos^2(C_1x + C_3)},
\end{aligned}
$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

⦿ *Литература*: О. В. Воинов (1994), В. В. Пухначев (1995), С. Н. Аристов (1999), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 23).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^{-2}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Частный случай уравнения 1.1.10.7 при $m = -2$.

1°. Точные решения:

$$
\begin{aligned}
w(x,t) &= \pm(2C_1x - 2aC_1^2t + C_2)^{-1/2},\\
w(x,t) &= \pm\frac{\sqrt{2at}}{x}\left[\ln\left(\frac{C_1}{x^2t}\right)\right]^{-1/2},\\
w(x,t) &= \pm\left[\frac{C_1(x+C_2)^2}{2a} + C_3\exp(C_1t)\right]^{-1/2},
\end{aligned}
$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Первое решение является решением типа бегущей волны, второе — автомодельным, а третье — решением с функциональным разделением переменных.

2°. Введем новую искомую функцию $z = z(x,t)$ по формуле $w = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, а затем проинтегрируем полученное уравнение по переменной x. В результате имеем

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Это уравнение преобразованием годографа

$$x = u, \quad z = y, \tag{2}$$

приводится к линейному уравнению теплопроводности для функции $u = u(y,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{3}$$

Преобразование (2) означает, что зависимая переменная z принимается за независимую переменную, а независимая переменная x — за зависимую переменную.

Решения исходного уравнения $w = w(x,t)$ выражаются через решения $u = u(y,t)$ линейного уравнения (3) по формулам

$$w = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{-1}, \quad x = u(y,t). \tag{4}$$

Чтобы получить в явном виде зависимость $w = w(x,t)$, из формул (4) следует исключить y.

3°. Преобразование

$$\bar{x} = \int_{x_0}^{x} w(y,t)\,dy + a\int_{t_0}^{t}\left[w^{-2}(x,\tau)\frac{\partial w}{\partial x}(x,\tau)\right]_{x=x_0} d\tau, \quad \bar{t} = t - t_0, \quad \bar{w}(\bar{x},\bar{t}) = \frac{1}{w(x,t)}, \quad (5)$$

где x_0 и t_0 — произвольные числа, переводит ненулевое решение $w(x,t)$ исходного уравнения в решение $\bar{w}(\bar{x},\bar{t})$ линейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} = a\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2}.$$

Обращение преобразования (5) определяется формулами

$$x = \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} \bar{w}(x',\bar{t})\,dx' + \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}}\left(\frac{\partial \bar{w}(\bar{x},t')}{\partial \bar{x}}\right)_{\bar{x}=\bar{x}_0} dt', \quad t = \bar{t} - \bar{t}_0, \quad w(x,t) = \frac{1}{\bar{w}(\bar{x},\bar{t})}.$$

⊙ *Литература*: M. L. Storm (1951), G. W. Bluman, S. Kumei (1980), A. Munier, J. R. Burgan, J. Gutierres, E. Fijalkow, M. R. Feix (1981), Н. Х. Ибрагимов (1983).

4. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^{-4/3}\frac{\partial w}{\partial x}\right).$

Частный случай уравнения 1.1.10.7 при $m = -4/3$ (допускает больше инвариантных решений, чем при $m \neq -4/3$).

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = \frac{|A_1B_2 - A_2B_1|^{3/2}C_1^{-3/4}}{(A_2x + B_2)^3}\, w\left(\frac{A_1x + B_1}{A_2x + B_2},\, C_1t + C_2\right),$$

где A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 — произвольные постоянные ($A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$), также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$\begin{aligned}
w(x,t) &= (\pm 2C_1x - 3aC_1^2t + C_2)^{-3/4},\\
w(x,t) &= (at + C_1)^{3/4}[(x + C_2)(C_3x + C_2C_3 + 1)]^{-3/2},\\
w(x,t) &= (\pm 2C_1x^3 + C_2x^4 - 3aC_1^2x^4t)^{-3/4},\\
w(x,t) &= \left[\frac{(x + C_1)^2}{a(t + C_2)} + C_3(t + C_2)^2\right]^{-3/4},\\
w(x,t) &= \left[\frac{(x + C_1)^2}{a(t + C_2)} + C_3(t + C_2)^2(x + C_1)^4\right]^{-3/4},
\end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Первое решение является решением типа бегущей волны, второе — решением в виде произведения функций разных аргументов, а остальные — решениями с функциональным разделением переменных.

3°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \left[\varphi_4(t)x^4 + \varphi_3(t)x^3 + \varphi_2(t)x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t)\right]^{-3/4},$$

где функции $\varphi_k = \varphi_k(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\varphi_0' &= -a\tfrac{3}{4}\varphi_1^2 + 2a\varphi_0\varphi_2,\\
\varphi_1' &= -a\varphi_1\varphi_2 + 6a\varphi_0\varphi_3,\\
\varphi_2' &= -a\varphi_2^2 + \tfrac{3}{2}a\varphi_1\varphi_3 + 12a\varphi_0\varphi_4,\\
\varphi_3' &= -a\varphi_2\varphi_3 + 6a\varphi_1\varphi_4,\\
\varphi_4' &= -\tfrac{3}{4}a\varphi_3^2 + 2a\varphi_2\varphi_4.
\end{aligned}$$

Здесь штрихом обозначена производная по переменной t.

4°. Существуют точные решения следующих видов:

$$w(x,t)=x^{-3}F(y),\quad y=t-\frac{1}{x};$$
$$w(x,t)=x^{-3}G(z),\quad z=\frac{tx^2}{(x+1)^2}.$$

5°. О других решениях см. уравнение 1.1.10.7 при $m=-4/3$.

⊙ *Литература для уравнения* 1.10.1.4: Л. В. Овсянников (1959, 1978), N. H. Ibragimov (1994, pp. 120, 128), V. A. Galaktionov (1995), Г. А. Рудых, Э. И. Семенов (1998).

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^{-2/3}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Частный случай уравнения 1.1.10.7 при $m=-2/3$.

1°. Точное решение:

$$w=(C-4at)^{3/2}\bigl[(C-4at)^{3/2}-x^2\bigr]^{-3/2}.$$

2°. Преобразование

$$t=\tau,\quad x=v,\quad w=1/u,$$

где $\frac{\partial v}{\partial\xi}=u$, приводит к уравнению вида 1.1.10.4:

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}=a\frac{\partial}{\partial\xi}\left(u^{-4/3}\frac{\partial u}{\partial\xi}\right).$$

⊙ *Литература*: A. Munier, J. R. Burgan, J. Gutierres, E. Fijalkow, M. R. Feix (1981), J. R. Burgan, A. Munier, M. R. Feix, E. Fijalkow (1984), И. Ш. Ахатов, Р. К. Газизов, Н. Х. Ибрагимов (1989), N. H. Ibragimov (1994, pp. 127, 128).

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^{-3/2}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Частный случай уравнения 1.1.11.5 при $b=0$.

1°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t)=a^{2/3}\bigl[3Ax^3+f_2(t)x^2+f_1(t)x+f_0(t)\bigr]^{-2/3}.$$

Здесь

$$f_2(t)=3\int\varphi(t)\,dt+3B,\quad f_1(t)=\frac{1}{A}\left[\int\varphi(t)\,dt+B\right]^2+\frac{1}{2A}\varphi(t),$$
$$f_0(t)=\frac{1}{9A^2}\left[\int\varphi(t)\,dt+B\right]^3+\frac{1}{6A^2}\varphi(t)\left[\int\varphi(t)\,dt+B\right]+\frac{1}{36A^2}\varphi_t'(t),$$

где функция $\varphi(t)$ задается неявно

$$\int(C_1-8\varphi^3)^{-1/2}\,d\varphi=\pm t+C_2;$$

A, B, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Полагая в последней формуле $C_1=0$, получим функцию φ в явном виде: $\varphi=-\frac{1}{2}(t+C_2)^{-2}$.

2°. О других решениях см. уравнение 1.1.10.7 при $m=-3/2$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^{m}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Это уравнение часто встречается в нелинейных задачах тепло- и массопереноса, теории горения и теории фильтрации. Например, оно описывает нестационарный теплоперенос в неподвижной среде, когда коэффициент температуропроводности является степенной функцией температуры. При $m=1,\ -1,\ -2,\ -4/3,\ -2/3,\ -3/2$ см. также уравнения 1.1.7.1 — 1.1.7.6.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=C_1w(C_2x+C_3,C_1^mC_2^2t+C_4),$$

где $C_1,\,\ldots,\,C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решения:*

$$w(x) = (Ax+B)^{\frac{1}{m+1}},$$
$$w(x,t) = (\pm kx + k\lambda t + A)^{1/m}, \quad k = \lambda m/a,$$
$$w(x,t) = \left[\frac{m(x-A)^2}{2a(m+2)(B-t)}\right]^{\frac{1}{m}},$$
$$w(x,t) = \left[A|t+B|^{-\frac{m}{m+2}} - \frac{m}{2a(m+2)}\,\frac{(x+C)^2}{t+B}\right]^{\frac{1}{m}},$$
$$w(x,t) = \left[\frac{m(x+A)^2}{\varphi(t)} + B|x+A|^{\frac{m}{m+1}}\,|\varphi(t)|^{-\frac{m(2m+3)}{2(m+1)^2}}\right]^{\frac{1}{m}}, \quad \varphi(t) = C - 2a(m+2)t,$$

где A, B, C, λ — произвольные постоянные. Третье решение при $B>0$ и четвертое решение при $B<0$ соответствуют режимам с обострением (решение неограниченно возрастает на конечном интервале времени).

Пример. Решение уравнения, удовлетворяющее начальному и граничному условиям

$$w = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (x>0),$$
$$w = kt^{1/m} \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (t>0),$$

описывается формулами

$$w(x,t) = \begin{cases} k(t - x/\lambda)^{1/m} & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \lambda t, \\ 0 & \text{при } x > \lambda t, \end{cases}$$

где $\lambda = \sqrt{ak^m/m}$.

3°. Решения типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = \pm x + \lambda t,$$

где функция $w(z)$ задается неявно

$$a\int \frac{w^m\,dw}{\lambda w + C_1} = C_2 + z;$$

λ, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Значению $\lambda = 0$ соответствует стационарное решение, а значению $C_1 = 0$ — второе решение в п. 2°.

4°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = (\lambda t + A)^{-1/m} f(x), \tag{1}$$

где функция $f = f(x)$ задается неявно

$$\int \frac{f^m\,df}{\sqrt{C_1 - bf^{m+2}}} = \pm x + C_2, \qquad b = \frac{2\lambda}{am(m+2)};$$

λ, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

5°. Автомодельное решение:

$$w = w(z), \quad z = \frac{x}{\sqrt{t}} \qquad (0 \leqslant x < \infty),$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2a\big(w^m w'_z\big)'_z + zw'_z = 0. \tag{2}$$

Решениями такого вида обычно описываются ситуации, когда искомая функция принимает постоянные значения в начальных и граничных условиях.

Частному решению уравнения (2) при $w(z) = k_2 z^{2/m}$ отвечает третье решение в п. 2°.

Х. Фуджита (H. Fujita, 1952) получил общее решение уравнения (2) при $m=-1$ и $m=-2$. Об этих решениях подробно написано в книге А. В. Лыкова (1967).

---

* Здесь и далее, для краткости, точные решения нелинейных уравнений обычно приводятся только в области их пространственной локализации, где $w \not\equiv 0$.

В случае граничных условий

$$w = 1 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad z = \infty$$

решение уравнения (2) является локализованным и имеет следующую структуру:

$$w = \begin{cases} (1 - Z)^{1/m} \dfrac{P(1 - Z,\, m)}{P(1,\, m)} & \text{при} \;\; 0 \leqslant Z \leqslant 1, \\ 0 & \text{при} \;\; 1 \leqslant Z < \infty, \end{cases}$$

где

$$Z = \frac{z}{z_0}, \quad z_0^2 = \frac{2a}{mP(1,\, m)}, \quad P(\xi,\, m) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \xi^k, \quad b_0 = 1, \;\; b_1 = -\frac{1}{2}[m(m+1)]^{-1}, \;\; \ldots$$

6°. Автомодельное решение:

$$w = t^{-\frac{1}{m+2}} F(\xi), \quad \xi = xt^{-\frac{1}{m+2}} \qquad (0 \leqslant x < \infty).$$

Здесь функция $F = F(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$a(m+2)F^m F'_\xi + \xi F = C, \tag{3}$$

где C — произвольная постоянная. Значению $C = 0$ в уравнении (3) соответствует четвертое решение в п. 2°, которое описывает тепловую волну от плоского источника.

Сделаем замену $\varphi = F^m$ в уравнении (3). В результате получим

$$\varphi'_\xi = \alpha \varphi^{-1/m} - \beta \xi, \tag{4}$$

где $\alpha = \frac{mC}{a(m+2)}$, $\beta = \frac{m}{a(m+2)}$. В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведены общие решения уравнения (4) для значений $m = -1$ и $m = 1$.

7°. Автомодельное решение более общего вида:

$$w = t^\beta g(\zeta), \quad \zeta = xt^{-\frac{m\beta+1}{2}}, \qquad \beta \text{ — любое.}$$

Здесь функция $g = g(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$G''_{\zeta\zeta} = A_1 \zeta G^{-\frac{m}{m+1}} G'_\zeta + A_2 G^{\frac{1}{m+1}}, \qquad G = g^{m+1}, \tag{5}$$

где $A_1 = -(m\beta + 1)/(2a)$ и $A_2 = \beta(m+1)/a$. Это уравнение является однородным и поэтому допускает понижение порядка (после чего может быть преобразовано к уравнению Абеля второго рода). Точные аналитические решения уравнения (5) при различных значениях параметра m приведены в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

8°. Обобщенно-автомодельное решение:

$$w = e^{-2\lambda t} \varphi(u), \quad u = xe^{\lambda m t}, \qquad \lambda \text{ — любое,}$$

где функция $\varphi = \varphi(u)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a(\varphi^m \varphi'_u)'_u = \lambda m u \varphi'_u - 2\lambda\varphi. \tag{6}$$

Это уравнение является однородным и поэтому допускает понижение порядка (после чего может быть преобразовано к уравнению Абеля второго рода). Подстановка $\Phi = \varphi^{m+1}$ приводит (6) к уравнению, которое с точностью до переобозначений совпадает с (5).

9°. Точное решение:

$$w = (t + A)^{-1/m} \psi(u), \quad u = x + b\ln(t + A), \qquad A,\, b \text{ — любое,}$$

где функция $\psi = \psi(u)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a(\psi^m \psi'_u)'_u = b\psi'_u - \psi/m. \tag{7}$$

Введение новой зависимой переменной по формуле $p(\psi) = \dfrac{a}{b}\psi^m \psi'_u$ с учетом равенства $\dfrac{d}{du} = \dfrac{b}{a}\psi^{-m} p \dfrac{d}{d\psi}$, приводит к уравнению Абеля второго рода:

$$pp'_\psi = p - s\psi^{m+1}, \quad s = a/(mb^2).$$

Общие решения этого уравнения при $m = -3,\, -2,\, -\frac{3}{2},\, -1$ приведены в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

10°. Решение типа нестационарного точечного источника при $a = 1$:

$$w(x,t) = \begin{cases} At^{-1/(m+2)}\left(\eta_0^2 - \dfrac{x^2}{t^{2/(m+2)}}\right)^{1/m} & \text{при} \quad |x| \leqslant \eta_0 t^{1/(m+2)}, \\ 0 & \text{при} \quad |x| > \eta_0 t^{1/(m+2)}, \end{cases}$$

где

$$A = \left[\frac{m}{2(m+2)}\right]^{1/m}, \quad \eta_0 = \left[\frac{\Gamma(1/m + 3/2)}{A\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/m+1)} E_0\right]^{m/(m+2)}, \quad \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-\xi}\xi^{z-1}\,d\xi;$$

$\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Данное решение удовлетворяет начальному условию

$$w(x,0) = E_0\delta(x),$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, и условию сохранения энергии

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x,t)\,dx = E_0 > 0.$$

11°. Преобразование

$$\tilde{t} = t - t_0, \quad \tilde{x} = \int_{x_0}^{x} w(y,t)\,dy + a\int_{t_0}^{t}\left[w^m(x,\tau)\frac{\partial w}{\partial x}(x,\tau)\right]_{x=x_0} d\tau, \quad \tilde{w}(\tilde{x},\tilde{t}) = \frac{1}{w(x,t)}$$

«переводит» ненулевое решение $w(x,t)$ исходного уравнения в решение $\tilde{w}(\tilde{x},\tilde{t})$ уравнения аналогичного вида

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{t}} = a\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\left(\tilde{w}^{-m-2}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}}\right).$$

⊙ *Литература для уравнения* 1.1.10.7: Я. Б. Зельдович, А. С. Компанеец (1950), Г. И. Баренблатт (1952), Л. В. Овсянников (1959, 1962, 1978), А. А. Самарский, И. М. Соболь (1963), Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер (1966), N. H. Ibragimov (1994, pp. 120–124), А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1995), Г. А. Рудых, Э. И. Семенов (1998).

1.1.11. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bw^k$

► *Уравнения этого вида допускают точные решения типа бегущей волны* $w = w(kx + \lambda t)$.

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + b.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-1} w(\pm C_1 x + C_2, C_1 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решения с обобщенным разделением переменным, линейные и квадратичные по x:

$$w(x,t) = C_1 x + (aC_1^2 + b)t + C_2,$$
$$w(x,t) = -\frac{(x+C_2)^2}{6a(t+C_1)} + C_3|t+C_1|^{-1/3} + \frac{3}{4}b(t+C_1),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Первое решение является вырожденным.

3°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$a\int \frac{u\,du}{au^2 - C_1 u + b} = -\ln|\pm x + C_1 t + C_2| + C_3, \quad u = \frac{w}{\pm x + C_1 t + C_2}.$$

4°. О других решениях см. уравнение 1.1.11.11 при $m = 1$ и $k = 0$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^{-2}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + b.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1 w(\pm C_1 x + C_2, C_1^{-1} t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Преобразование

$$x = -\frac{2}{bu}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad w(x,t) = -\frac{b}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]^{-1} \tag{1}$$

приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\Phi\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) = 0, \quad \text{где} \quad \Phi = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]^{-1}, \quad \Psi = \frac{1}{u}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Отсюда следует, что любое решение $u = u(x,t)$ линейного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

порождает решение (1) исходного нелинейного уравнения.

⦿ *Литература*: В. А. Дородницын, С. Р. Свирщевский (1983).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^{-2}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) - bw^3.$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \pm\left[C_1(x + C_2)^2 + C_3\exp(2aC_1 t) - \frac{b}{aC_1}\right]^{-1/2},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^{-4/3}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bw^{-1/3}.$

1°. При $ab > 0$ преобразование

$$w(x,t) = \exp(\pm 3\lambda x) z(\xi, t), \quad \xi = \frac{1}{2\lambda}\exp(\pm 2\lambda x), \qquad \lambda = \left(\frac{b}{3a}\right)^{1/2},$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.10.4:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial \xi}\left(z^{-4/3}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right). \tag{1}$$

2°. При $ab < 0$ преобразование

$$w(x,t) = \frac{z(\xi,t)}{\cos^3(\lambda x)}, \quad \xi = \frac{1}{\lambda}\operatorname{tg}(\lambda x), \qquad \lambda = \left(-\frac{b}{3a}\right)^{1/2},$$

также приводит к уравнению 1.1.10.4.

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = (t + C)^{3/4} u(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $u = u(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a(u^{-4/3} u'_x)'_x + bu^{-1/3} - \tfrac{3}{4} u = 0.$$

4°. См. также уравнение 1.1.12.6 при $b = c = 0$.

⦿ *Литература*: N. H. Ibragimov (1994, pp. 134, 136), А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1995), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 27–28).

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^{-3/2}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bw^{5/2}.$

1°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = a^{2/3}\big[3Ax^3 + f_2(t)x^2 + f_1(t)x + f_0(t)\big]^{-2/3}.$$

Здесь

$$f_2(t) = 3\int \varphi(t)\,dt + 3B, \quad f_1(t) = \frac{1}{A}\left[\int \varphi(t)\,dt + B\right]^2 + \frac{1}{2A}\varphi(t),$$

$$f_0(t) = \frac{1}{9A^2}\left[\int \varphi(t)\,dt + B\right]^3 + \frac{1}{6A^2}\varphi(t)\left[\int \varphi(t)\,dt + B\right] + \frac{1}{36A^2}\varphi_t'(t),$$

где функция $\varphi(t)$ задается неявно

$$\int (C_1 - 108A^2ab\varphi - 8\varphi^3)^{-1/2}\,d\varphi = t + C_2;$$

A, B, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. О других решениях см. уравнения 1.1.11.9 и 1.1.11.11 при $m = -3/2$.

3°. Замена $w = u^{-2/3}$ приводит к уравнению вида 1.1.9.7:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2}{3}a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \frac{3}{2}b.$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^{-4/3}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + cw^{7/3}.$

Частный случай уравнения 1.1.12.5 при $b = 0$. См. также уравнение 1.1.11.11 при $m = -4/3$, $k = 7/3$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^{m}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bw.$

1°. Точные решения:

$$w(x,t) = e^{bt}(Ax + B)^{\frac{1}{m+1}},$$

$$w(x,t) = e^{bt}\left(\pm\frac{\lambda m}{a}x + \frac{\lambda^2}{ab}e^{bmt} + A\right)^{\frac{1}{m}},$$

$$w(x,t) = e^{bt}\left[\frac{bm^2(x-A)^2}{2a(m+2)(B - e^{bmt})}\right]^{\frac{1}{m}},$$

$$w(x,t) = \left[A\exp\left(\frac{2bmt}{m+2}\right) - \frac{bm^2(x+B)^2}{2a(m+2)}\right]^{\frac{1}{m}},$$

$$w(x,t) = e^{bt}\left[A|e^{bmt} + B|^{-\frac{m}{m+2}} - \frac{bm^2}{2a(m+2)}\,\frac{(x+C)^2}{e^{bmt} + B}\right]^{\frac{1}{m}},$$

где A, B, C, λ — произвольные постоянные.

2°. Исходное уравнение с помощью преобразования

$$w(x,t) = e^{bt}v(x,\tau), \quad \tau = \frac{1}{bm}e^{bmt} + \text{const}$$

приводится к уравнению вида 1.1.10.7:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(v^m\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

3°. См. также уравнение 1.1.11.11 при $k = 1$.

⊙ *Литература*: Л. К. Мартинсон, К. Б. Павлов (1972), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 28–31).

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bw^{m+1}$.

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов ($a = b = 1$, $m > 0$):

$$w(x,t) = \begin{cases} \left[\dfrac{2(m+1)}{m(m+2)}\,\dfrac{\cos^2(\pi x/L)}{(t_0 - t)}\right]^{1/m} & \text{при } |x| \leqslant \dfrac{L}{2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \dfrac{L}{2}, \end{cases} \tag{1}$$

где $L = 2\pi(m+1)^{1/2}/m$. Решение (3) описывает режим с обострением, который существует на ограниченном промежутке времени $t \in [0,\, t_0)$. Решение локализовано области $|x| < L/2$.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \left(\frac{Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x} + D}{m\lambda t + C}\right)^{1/m},$$

$$B = \frac{\lambda^2(m+1)^2}{4b^2 A(m+2)^2}, \quad D = -\frac{\lambda(m+1)}{b(m+2)}, \quad \mu = m\sqrt{-\frac{b}{a(m+1)}},$$

где A, C, λ — произвольные постоянные, $ab(m+1) < 0$.

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов (C, λ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = (m\lambda t + C)^{-1/m}\varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a(\varphi^m \varphi'_x)'_x + b\varphi^{m+1} + \lambda\varphi = 0. \tag{2}$$

Решение уравнения (2) в неявном виде:

$$\int \varphi^m \left[A - \frac{2\lambda}{a(m+2)}\varphi^{m+2} - \frac{b}{a(m+1)}\varphi^{2m+2}\right]^{-1/2} d\varphi = \pm x + B,$$

где A, B — произвольные постоянные.

4°. Решение с функциональным разделением переменных [считается, что $ab(m+1) < 0$]:

$$w(x,t) = \left[f(t) + g(t)e^{\lambda x}\right]^{1/m}, \quad \lambda = \pm m\sqrt{\frac{-b}{a(m+1)}},$$

где функции $f = f(t)$ и $g = g(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f'_t = bmf^2, \quad g'_t = \frac{bm(m+2)}{m+1}fg.$$

Интегрируя, получим

$$f(t) = (C_1 - bmt)^{-1}, \quad g(t) = C_2(C_1 - bmt)^{-\frac{m+2}{m+1}},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

5°. Решение с функциональным разделением переменных (A, B — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = \left[f(t) + g(t)(Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x})\right]^{1/m}, \quad \lambda = m\sqrt{\frac{-b}{a(m+1)}}, \tag{3}$$

где функции $f = f(t)$ и $g = g(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f'_t = bmf^2 + \frac{4bmAB}{m+1}g^2, \quad g'_t = \frac{bm(m+2)}{m+1}fg. \tag{4}$$

Исключив из этой системы t, получим однородное уравнение первого порядка

$$f'_g = \frac{m+1}{m+2}\,\frac{f}{g} + \frac{4AB}{m+2}\,\frac{g}{f}. \tag{5}$$

Подстановка $\zeta = f/g$ приводит к разделению переменных. Интегрируя, находим решение уравнения (5):

$$f = \pm g\big(4AB + C_1 g^{-\frac{2}{m+2}}\big)^{\frac{1}{2}}, \qquad C_1 \text{ — любое.}$$

Подставляя это выражение во второе уравнение системы (4), получим уравнение с разделяющимися переменными для функции $g = g(t)$.

6°. Решения с функциональным разделением переменных

$$w(x,t) = \left[f(t) + g(t)\,\mathrm{ch}(\lambda x)\right]^{1/m},$$
$$w(x,t) = \left[f(t) + g(t)\,\mathrm{sh}(\lambda x)\right]^{1/m}$$

являются частными случаями формулы (3) при $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{2}$ и $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$ соответственно.

7°. Решение с функциональным разделением переменных [считается, что $ab(m+1)>0$]:

$$w(x,t) = \left[f(t) + g(t)\cos(\lambda x + C)\right]^{1/m}, \qquad \lambda = m\sqrt{\frac{b}{a(m+1)}},$$

где функции $f=f(t)$ и $g=g(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f_t' = bmf^2 + \frac{bm}{m+1}g^2, \quad g_t' = \frac{bm(m+2)}{m+1}fg,$$

которая совпадает с системой при $AB=\frac{1}{4}$.

⦿ *Литература для уравнения* 1.1.11.8: Н. В. Змитренко, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, А. А. Самарский (1976), M. Bertsch, R. Kersner, L. A. Peletier (1985), В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989), А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1995), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 407–408).

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bw^{1-m}.$

Частный случай уравнения 1.1.11.11 при $k=1-m$.

Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \left[\frac{1}{F}(x+A)^2 + B|F|^{-\frac{m}{m+2}} - \frac{bm^2}{4a(m+1)}F\right]^{1/m},$$
$$F = F(t) = C - \frac{2a(m+2)}{m}t,$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

⦿ *Литература*: R. Kersner (1978).

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^{2n}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bw^{1-n}.$

Частный случай уравнения 1.1.11.11 при $m=2n$ и $k=1-n$.

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \left[\pm\frac{x+C_1}{\sqrt{C_2-kt}} - \frac{bn^2}{3a(n+1)}(C_2-kt)\right]^{1/n}, \qquad k = \frac{2a(n+1)}{n},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⦿ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 36).

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bw^k.$

Частный случай уравнения 1.6.15.2 при $f(w)=aw^m$, $g(w)=bw^k$. При $b=0$ см. разд. 1.1.10.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^2 w(\pm C_1^{k-m-1}x + C_2, C_1^{2k-2}t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Пространственно-однородное и стационарное решения (последнее записано неявном виде):

$$w(t) = \begin{cases} \left[(1-k)bt + C\right]^{\frac{1}{1-k}} & \text{при } k \neq 1, \\ Ce^{bt} & \text{при } k = 1, \end{cases}$$
$$\int w^m\left[A - \frac{2b}{a(m+k+1)}w^{m+k+1}\right]^{-1/2} dw = \pm x + B,$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

3°. Решения типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = \pm x + \lambda t,$$

где функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a(w^m w'_z)'_z - \lambda w'_z + bw^k = 0. \tag{1}$$

Подстановка

$$u(w) = \frac{a}{\lambda} w^m w'_z$$

преобразует (1) к уравнению Абеля

$$uu'_w - u = -ab\lambda^{-2} w^{m+k}. \tag{2}$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведены точные решения уравнения (2) при $m + k = -2,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ 1$.

4°. Автомодельное решение при $k \neq 1$:

$$w = t^{\frac{1}{1-k}} u(\xi), \quad \xi = xt^{\frac{k-m-1}{2(1-k)}},$$

где функция $u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a(u^m u'_\xi)'_\xi + \frac{m-k+1}{2(1-k)} \xi u'_\xi + bu^k - \frac{1}{1-k} u = 0.$$

⊙ *Литература*: В. А. Дородницын (1979, 1982).

1.1.12. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + bw + c_1 w^{k_1} + c_2 w^{k_2} + c_3 w^{k_3}$

► *Уравнения этого вида допускают точные решения типа бегущей волны* $w = w(kx + \lambda t)$.

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bw + c.$

При $c = 0$ см. уравнение 1.1.11.7.

Решения с обобщенным разделением переменных, линейные и квадратичные по переменной x:

$$w(x,t) = C_1 x e^{bt} + C_2 e^{bt} + \frac{aC_1^2}{b} e^{2bt} - \frac{c}{b},$$

$$w(x,t) = \frac{be^{bt}(x + C_2)^2}{\varphi(t)} + C_3 \frac{e^{bt}}{\varphi^{1/3}(t)} + \frac{ce^{bt}}{\varphi^{1/3}(t)} \int e^{-bt} \varphi^{1/3}(t)\,dt, \qquad \varphi(t) = C_1 - 6ae^{bt},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Первое решение является вырожденным.

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 37).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^{-2}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) - bw - cw^3.$

Решения с функциональным разделением переменных при $b \neq 0$:

$$w(x,t) = \pm\left[bC_1 e^{2bt}(x + C_2)^2 + C_3 F(t) + 2cF(t) \int \frac{dt}{F(t)}\right]^{-1/2}, \qquad F(t) = \exp\bigl(aC_1 e^{2bt} + 2bt\bigr),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 37).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^{-4/3}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bw^{-1/3} + cw.$

1°. Точные решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = e^{ct}\bigl(Ae^{kx} + Be^{-kx}\bigr)^{-3}, \qquad \text{если} \quad b/(3a) = k^2 > 0,$$

$$w(x,t) = e^{ct}\bigl[A\cos(kx) + B\sin(kx)\bigr]^{-3}, \quad \text{если} \quad b/(3a) = -k^2 < 0,$$

где A, B — произвольные постоянные.

2°. Преобразование

$$w = e^{ct} u(x,\tau), \quad \tau = -\frac{3}{4c} e^{-\frac{4}{3}ct} + \mathrm{const}$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.11.4:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(u^{-4/3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + b u^{-1/3}.$$

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 38).

4. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(w^{-4/3} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + bw + cw^{5/3}.$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \bigl[\varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t)\bigr]^{-3/2},$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \varphi_t' &= \tfrac{1}{2} a\varphi(4\varphi\chi - \psi^2) - \tfrac{2}{3} b\varphi, \\ \psi_t' &= \tfrac{1}{2} a\psi(4\varphi\chi - \psi^2) - \tfrac{2}{3} b\psi, \\ \chi_t' &= \tfrac{1}{2} a\chi(4\varphi\chi - \psi^2) - \tfrac{2}{3} b\chi - \tfrac{2}{3} c. \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений следует, что $\varphi = C\psi$, где C — произвольная постоянная.

⊙ *Литература*: V. A. Galaktionov, S. A. Posashkov (1995).

5. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(w^{-4/3} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + bw + cw^{7/3}.$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \bigl[\varphi_4(t)x^4 + \varphi_3(t)x^3 + \varphi_2(t)x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t)\bigr]^{-3/4},$$

где функции $\varphi_k = \varphi_k(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_0' &= -\tfrac{3}{4} a\varphi_1^2 + 2a\varphi_0\varphi_2 - \tfrac{4}{3} b\varphi_0 - \tfrac{4}{3} c, \\ \varphi_1' &= -a\varphi_1\varphi_2 + 6a\varphi_0\varphi_3 - \tfrac{4}{3} b\varphi_1, \\ \varphi_2' &= -a\varphi_2^2 + \tfrac{3}{2} a\varphi_1\varphi_3 + 12a\varphi_0\varphi_4 - \tfrac{4}{3} b\varphi_2, \\ \varphi_3' &= -a\varphi_2\varphi_3 + 6a\varphi_1\varphi_4 - \tfrac{4}{3} b\varphi_3, \\ \varphi_4' &= -\tfrac{3}{4} a\varphi_3^2 + 2a\varphi_2\varphi_4 - \tfrac{4}{3} b\varphi_4. \end{aligned}$$

Здесь штрих обозначает производную по переменной t.

⊙ *Литература*: V. A. Galaktionov (1995).

6. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(w^{-4/3} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - aw^{-1/3} + bw^{7/3} + cw.$

Подстановка $u = w^{-4/3}$ приводит к уравнению с квадратичной нелинейностью

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{3}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{4}{3} \bigl(au^2 - cu - b \bigr).$$

1°. При $a = 1$ это уравнение имеет решение вида

$$u = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)\cos(kx) + \varphi_3(t)\sin(kx) + \varphi_4(t)\cos(2kx) + \varphi_5(t)\sin(2kx), \quad k = 2 \times 3^{-1/2},$$

где функции $\varphi_n = \varphi_n(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (здесь не приводится).

2°. При $a = -1$ это уравнение имеет решение вида

$$u = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)\,\mathrm{ch}(kx) + \varphi_3(t)\,\mathrm{sh}(kx) + \varphi_4(t)\,\mathrm{ch}(2kx) + \varphi_5(t)\,\mathrm{sh}(2kx), \quad k = 2 \times 3^{-1/2}.$$

⊙ *Литература*: V. A. Galaktionov (1995).

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bw^{m+1} + cw.$

1°. Точные решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = e^{ct}\bigl[A\cos(kx) + B\sin(kx)\bigr]^{\frac{1}{m+1}}, \qquad \text{если} \quad b(m+1)/a = k^2 > 0,$$
$$w(x,t) = e^{ct}\bigl[A\exp(kx) + B\exp(-kx)\bigr]^{\frac{1}{m+1}}, \quad \text{если} \quad b(m+1)/a = -k^2 < 0,$$

где A, B — произвольные постоянные.

2°. Преобразование

$$w = e^{ct}u(x,\tau), \quad \tau = \frac{1}{cm}e^{cmt} + \text{const}$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.11.8:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(u^m \frac{\partial u}{\partial x}\right) + bu^{m+1}.$$

Специальный случай. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов при $m = -1$:

$$w = A\exp\left(ct - \frac{b}{2a}x^2 + Bx\right),$$

где A, B — произвольные постоянные.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + b + cw^{-m}.$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$w = \left[c(m+1)t - \frac{b(m+1)}{2a}x^2 + C_1x + C_2\right]^{\frac{1}{m+1}},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bw + cw^{1-m}.$

1°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \left(C_1e^{bmt}x + \frac{a}{bm^2}e^{2bmt} + C_2e^{bmt} - \frac{c}{b}\right)^{1/m},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. О более сложном решении см. уравнение 1.6.13.4 при $f(t) = b$, $g(t) = c$.

⊙ *Литература*: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989).

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bw^{1+m} + cw + sw^{1-m}.$

Частный случай уравнения 1.6.13.5 при $f(t) = c$, $g(t) = s$.

Замена $u = w^m$ приводит к уравнению вида 1.1.9.9:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a}{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + bmu^2 + cmu + sm.$$

⊙ *Литература*: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989).

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^{2n} \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bw + cw^{1-n}.$

Решения типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \left[\varphi(t)(\pm x + C_1) + cn\varphi(t)\int \frac{dt}{\varphi(t)}\right]^{1/n}, \quad \varphi(t) = \left[C_2e^{-2bnt} - \frac{a(n+1)}{bn^2}\right]^{-1/2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 40).

12. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^n\frac{\partial w}{\partial x}\right) + bw + ck + bkw^{n+1} + cw^{-n}.$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \left\{\exp\bigl[b(n+1)t\bigr]\bigl[C_1\cos\bigl(x\sqrt{\lambda}\,\bigr) + C_2\sin\bigl(x\sqrt{\lambda}\,\bigr)\bigr] - \frac{c}{b}\right\}^{\frac{1}{n+1}} \qquad \text{при } \lambda > 0,$$

$$w(x,t) = \left\{\exp\bigl[b(n+1)t\bigr]\bigl[C_1\operatorname{ch}\bigl(x\sqrt{|\lambda|}\,\bigr) + C_2\operatorname{sh}\bigl(x\sqrt{|\lambda|}\,\bigr)\bigr] - \frac{c}{b}\right\}^{\frac{1}{n+1}} \qquad \text{при } \lambda < 0,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, $\lambda = \dfrac{bk}{a}(n+1)$.

⦿ *Литература*: V. A. Galaktionov (1994).

1.1.13. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr] + g(w)$

► *Уравнения этого вида допускают точные решения типа бегущей волны* $w = w(kx + \lambda t)$.

1. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(aw^2 + bw)\frac{\partial w}{\partial x}\right].$

Частный случай уравнения 1.6.15.1 при $f(w) = aw^2 + bw$.

Точные решения:

$$w(x,t) = \pm\sqrt{2C_1x + 2aC_1^2t + C_2} - \frac{b}{a},$$
$$w(x,t) = \pm\frac{x + C_1}{\sqrt{C_2 - 4at}} - \frac{b}{2a},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Первое решение является решением типа бегущей волны, а второе — автомодельным решением.

2. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a}{w^2 + b^2}\frac{\partial w}{\partial x}\right).$

Частный случай уравнения 1.6.15.1 при $f(w) = a(w^2 + b^2)^{-1}$.

1°. Точные решения (A, B — произвольные постоянные):

$$w(x) = b\operatorname{tg}(Ax + B),$$
$$w(x,t) = \pm bx\bigl(A - 2ab^{-2}t - x^2\bigr)^{-1/2},$$
$$w(x,t) = Ab\exp(ab^{-2}t - x)\bigl\{1 - A^2\exp\bigl[2(ab^{-2}t - x)\bigr]\bigr\}^{-1/2}.$$

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\lambda(kx + \lambda t) + B = \frac{ak^2}{A^2 + b^2}\left[\ln|w + A| - \frac{1}{2}\ln(w^2 + b^2) + \frac{A}{b}\operatorname{arctg}\frac{w}{b}\right],$$

где A, B, k, λ — произвольные постоянные.

3°. Подстановка

$$w = \frac{bu}{\sqrt{1 - u^2}} \tag{1}$$

приводит к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a}{b^2}\left[(1 - u^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right], \tag{2}$$

которое является частным случаем 8.1.2.12 при $F(t,\xi,\eta) = ab^{-2}(\xi - \eta)$. Уравнение (2) имеет точные решения в виде произведения функций разных аргументов

$$\begin{aligned} u &= \frac{Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}}{\sqrt{4AB + Ce^{-kt}}}, & k &= \frac{2a\lambda^2}{b^2}; \\ u &= \frac{A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)}{\sqrt{A^2 + B^2 + Ce^{kt}}}, & k &= \frac{2a\lambda^2}{b^2}, \end{aligned} \tag{3}$$

где A, B, C, λ — произвольные постоянные. Формулы (1), (3) дают два решения исходного уравнения.

4°. Точное решение:

$$w = b\,\mathrm{tg}\Big(\pm\frac{1}{2}z \pm \frac{a}{b^2}t + C\Big),$$
$$z = x^2\cos^{-2}\Big(\pm\frac{1}{2}z - \mathrm{arctg}\big(\psi(z)\big) \pm \frac{a}{b^2}t + C\Big),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\psi = \psi(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\psi'_z = \frac{1}{2}(1+\psi^2)\Big(\pm 1 - \frac{\psi}{z}\Big).$$

Здесь функция $z = z(x,t)$ задана неявно.

5°. Точное решение:

$$w = b\,\mathrm{tg}\Big(\varphi(z) + \mathrm{arctg}\big(\psi(z)\big) + C\ln\frac{at}{b^2}\Big),$$
$$z = \frac{b^2x^2}{at}\cos^{-2}\Big(\varphi(z) + C\ln\frac{at}{b^2}\Big),$$

где C — произвольная постоянная, а функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_z = \frac{\psi}{2z}, \quad \psi'_z = \frac{1}{2}(1+\psi^2)\Big(C - \frac{\psi}{2} - \frac{\psi}{z}\Big).$$

Здесь функция $z = z(x,t)$ задана неявно.

⊙ *Литература для уравнения* 1.1.13.2: И. Ш. Ахатов, Р. К. Газизов, Н. Х. Ибрагимов (1989), N. H. Ibragimov (1994, pp.125–126), P. W. Doyle, P. J. Vassiliou (1998).

3. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[(aw^{2n} + bw^n)\frac{\partial w}{\partial x}\Big].$

Частный случай уравнения 1.6.15.1 при $f(w) = aw^{2n} + bw^n$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(C_1x + C_2, C_1^2t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w(x,t) = \Big(\pm\sqrt{2C_1nx + 2aC_1^2nt + C_2} - \frac{b}{a}\Big)^{1/n},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = \Big[\pm\frac{x + C_1}{\sqrt{C_2 - kt}} - \frac{b}{a(n+1)}\Big]^{1/n}, \qquad k = \frac{2a(n+1)}{n}.$$

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 41–42).

4. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[(aw^{2n} + bw^n)\frac{\partial w}{\partial x}\Big] + cw^{1-n}.$

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \Big[\pm\frac{x + C_1}{\sqrt{C_2 - kt}} - \frac{cn^2}{3a(n+1)}(C_2 - kt) - \frac{b}{a(n+1)}\Big]^{1/n}, \qquad k = \frac{2a(n+1)}{n},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 42).

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[(aw^{2n} + bw^n)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + cw + sw^{1-n}$.

Решения типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \left[\varphi(t)(\pm x + C_1) + \frac{b}{n}\varphi(t)\int\varphi(t)\,dt + sn\varphi(t)\int\frac{dt}{\varphi(t)}\right]^{1/n},$$

$$\varphi(t) = \left[C_2 e^{-2cnt} - \frac{a(n+1)}{cn^2}\right]^{-1/2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

1.1.14. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + g\Big(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^{-4/3}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bx^m w^{-1/3}$.

При $m = 0$ см. уравнение 1.1.11.4. При $m \neq 0$ исходное уравнение можно привести к более простому уравнению, соответствующему случаю $b = 0$ [см. уравнение 1.6.13.1 при $f(x) = bx^m$].

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^{-2}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + cw$.

Частный случай уравнения 1.6.13.8 при $m = -2$, $f(t) = b$, $g(t) = c$.

Преобразование (A, B — произвольные постоянные)

$$w(x,t) = e^{ct}u(z,\tau), \quad z = x + bt + A, \quad \tau = B - \frac{1}{2c}e^{-2ct}$$

приводит к уравнению вида 1.1.10.3:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial}{\partial z}\left(u^{-2}\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

⦿ *Литература*: В. А. Дородницын, С. Р. Свирщевский (1983); рассматривался случай $b = 0$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{a}{(w+b)^2}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + c\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Преобразование

$$u(z,t) = w(x,t) + b, \qquad z = x + ct$$

приводит к уравнению вида 1.1.10.3:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial z}\left(u^{-2}\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + aw\dfrac{\partial w}{\partial x} = b\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$.

Частный случай уравнения 1.1.14.16 при $n = 1$.

Вырожденное решение, линейное по x:

$$w(x,t) = \frac{ax + b\ln|t + C_1| + C_2}{a^2(t + C_1)},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + aw\dfrac{\partial w}{\partial x} = b\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^2\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$.

Частный случай уравнения 1.1.14.16 при $n = 2$.

1°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$2b\int\frac{w^2\,dw}{aw^2 + 2\lambda w + C_1} = x + \lambda t + C_2,$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные.

2°. Вырожденное решение, линейное по x:

$$w(x,t) = (x + C_1)f(t).$$

Здесь C_1 — произвольная постоянная, а функция $f = f(t)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f'_t + af^2 = 2bf^3,$$

решение которого можно представить в неявном виде:

$$\frac{1}{af} + \frac{2b}{a^2}\ln\left|\frac{2bf - a}{f}\right| = t + C_2.$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + aw\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[(bw^2 + cw)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right].$

1°. Вырожденное решение, линейное по x:

$$w(x,t) = f(t)x + g(t),$$

где функции $f = f(t)$ и $g = g(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f'_t + af^2 = 2bf^3,$$
$$g'_t + afg = 2bf^2g + cf^2.$$

Решение первого уравнения приведено в 1.1.14.5, п. 2°. Второе уравнение легко интегрируется, поскольку линейно относительно g.

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$2\int\frac{bw^2 + cw}{aw^2 + 2\lambda w + C_1}\,dw = x + \lambda t + C_2,$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bt^n w.$

Частный случай уравнения 1.6.13.2 при $f(t) = bt^n$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + be^{\lambda t} w.$

Частный случай уравнения 1.6.13.2 при $f(t) = be^{\lambda t}$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bt^n w^{1-m}.$

Частный случай уравнения 1.6.13.3 при $f(t) = bt^n$.

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + be^{\lambda t} w^{1-m}.$

Частный случай уравнения 1.6.13.3 при $f(t) = be^{\lambda t}$.

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bt^n w + ct^k w^{1-m}.$

Частный случай уравнения 1.6.13.4 при $f(t) = bt^n$, $g(t) = ct^k$.

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + be^{\lambda t} w + ce^{\mu t} w^{1-m}.$

Частный случай уравнения 1.6.13.4 при $f(t) = be^{\lambda t}$, $g(t) = ce^{\mu t}$.

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bw^{1+m} + ct^n w + st^k w^{1-m}.$

Частный случай уравнения 1.6.13.5 при $f(t) = ct^n$, $g(t) = st^k$.

14. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bx^n w^{1+m}.$

Частный случай уравнения 1.6.13.6 при $f(x) = bx^n$.

15. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + b\,\mathrm{sign}\,x\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Это уравнение встречается в биологии.

Переходя от t, x к новым переменным t, $z = |x| + bt$, приходим к более простому уравнению вида 1.1.10.7:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial z}\left(w^m \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

⦿ *Литература*: J. D. Murray (1989), N. Shigesada, K. Kawasaki, E. Teramoto (1979)

.

16. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) - bx\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2} w(\pm C_1^n x + C_2 e^{bt}, t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решения типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \left(\pm x + C_1 e^{bt}\right)^{2/n}\left[C_2 e^{2bt} + \frac{a(n+2)}{bn}\right]^{-1/n},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Решения типа обобщенной бегущей волны:

$$w = w(z), \qquad z = \pm x + Ce^{bt},$$

где C — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a(w^n w'_z)'_z - bzw'_z = 0.$$

17. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + aw\dfrac{\partial w}{\partial x} = b\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(C_1^{1-n} x + C_2, C_1^{2-n} t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$2b\int \frac{w^n\,dw}{aw^2 + 2\lambda w + C_1} = x + \lambda t + C_2,$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные.

3°. Автомодельное решение при $n \neq 2$:

$$w(x,t) = u(z)t^{1/(n-2)}, \quad z = xt^{-(n-1)/(n-2)},$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$bu^n u''_{zz} + 2bnu^{n-1}(u'_z)^2 - \left(au - \frac{n-1}{n-2}z\right)u'_z - \frac{1}{n-2}u = 0.$$

18. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + (bw^n + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \left[\frac{C_2 - x}{b(t+C_1)} + \frac{a\ln|t+C_1|}{b^2 n(t+C_1)} - \frac{c}{b}\right]^{1/n},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

19. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + aw^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^{n-1}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(C_2 x + C_3, C_1^n C_2^2 t + C_4),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение с функциональным разделением переменных при $b = \frac{1}{3}n(a-2) - a - 1$:

$$w(x,t) = \left[n \sum_{k=0}^{3} \varphi_k(t) x^k\right]^{1/n}.$$

Здесь

$$\varphi_3(t) = A, \quad \varphi_2(t) = \int \psi(t)\,dt + B, \quad \varphi_1(t) = \frac{1}{3A}\left[\int \psi(t)\,dt + B\right]^2 + \frac{1}{2A\beta n}\psi(t),$$

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{27A^2}\left[\int \psi(t)\,dt + B\right]^3 + \frac{1}{6A^2\beta n}\psi(t)\left[\int \psi(t)\,dt + B\right] + \frac{1}{12A^2\beta^2 n^2}\psi'_t(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ задается неявно

$$\int \bigl(C_1 - \tfrac{8}{3}\beta n \psi^3\bigr)^{-1/2}\,d\psi = C_2 + t;$$

A, B, C_1, C_2 — произвольные постоянные; $\beta = a+1$, $A \neq 0$, $n \neq 0$, $a > -1$.

3°. Решение с функциональным разделением переменных при $b = \frac{1}{4}n(a-3) - a - 1$:

$$w(x,t) = \left[n \sum_{k=0}^{4} \varphi_k(t) x^k\right]^{1/n}.$$

Здесь функции $\varphi_k = \varphi_k(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\varphi_0' &= -\tfrac{3}{4}\beta\varphi_1^2 + 2\beta\varphi_2\varphi_0,\\
\varphi_1' &= -\beta\varphi_1\varphi_2 + 6\beta\varphi_3\varphi_0,\\
\varphi_2' &= -\beta\varphi_2^2 + \tfrac{3}{2}\beta\varphi_1\varphi_3 + 12\beta\varphi_4\varphi_0,\\
\varphi_3' &= -\beta\varphi_2\varphi_3 + 6\beta\varphi_1\varphi_4,\\
\varphi_4' &= -\tfrac{3}{4}\beta\varphi_3^2 + 2\beta\varphi_2\varphi_4,
\end{aligned}$$

где $\beta = n(a+1)$; штрих обозначает производную по переменной t.

4°. Существуют точные решения следующих видов:

$$\begin{aligned}
&w(x,t) = F(z), \quad z = Ax + Bt;\\
&w(x,t) = (At+B)^{-1/n} G(x);\\
&w(x,t) = t^{\beta} H(\xi), \quad \xi = xt^{-\frac{\beta n+1}{2}};\\
&w(x,t) = e^{-2t} U(\eta), \quad \eta = xe^{nt};\\
&w(x,t) = (At+B)^{-1/n} V(\zeta), \quad \zeta = x + C\ln(At+B),
\end{aligned}$$

где A, B, C, β — произвольные постоянные. Первое решение является решением типа бегущей волны, второе — решением в виде произведения функций разных аргументов, третье — автомодельным решением.

⊙ *Литература*: Г. А. Рудых, Э. И. Семенов (1998).

20. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[(aw^{2n} + bw^n)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + (cw^n + s)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \left[\varphi(t)x + (st + C_1)\varphi(t) + \frac{b}{n}\varphi(t)\int \varphi(t)\,dt\right]^{1/n},$$

где C_1 — произвольная постоянная, а функция $\varphi(t)$ задается решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi_t' = \frac{a(n+1)}{n}\varphi^3 + c\varphi^2.$$

1.1.15. Другие уравнения

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = (aw^2 + bw^4)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Частный случай уравнения 1.6.16.3 при $f(w) = aw^2 + bw^4$.

1°. Автомодельные решения:

$$w(x,t) = \pm\left[\frac{(x+C_1)^2}{2a(t+C_2)} - \frac{a}{b}\right]^{1/2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Решения с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \pm\left[\varphi(t)(x^2 + C_1 x + C_2) - \frac{a}{b}\right]^{1/2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\varphi(t)$ описывается уравнением первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t = -2a\varphi^2 + \tfrac{1}{2}b(4C_2 - C_1^2)\varphi^3,$$

решение которого можно записать в неявном виде.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = (aw^2 + bw^4)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + cw + kw^{-1}.$

Решения с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \pm\sqrt{\varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t)},$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}
\varphi'_t &= \tfrac{1}{2}b\varphi(4\varphi\chi - \psi^2) + 2c\varphi,\\
\psi'_t &= \tfrac{1}{2}b\psi(4\varphi\chi - \psi^2) + 2c\psi,\\
\chi'_t &= \tfrac{1}{2}(b\chi + a)(4\varphi\chi - \psi^2) + 2c\chi + 2k.
\end{aligned}$$

Из первых двух уравнений следует, что $\varphi = C\psi$, где C — произвольная постоянная.

Замечание. Коэффициенты уравнения могут быть произвольными функциями времени $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$, $k = k(t)$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^{4-k}w^k\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Частный случай уравнения 1.6.16.4 при $f(u) = au^k$.

Преобразование

$$w(x,t) = xu(z,t), \quad z = 1/x$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.9.20:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au^k\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^n w^k\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(C_2 x, C_1^k C_2^{2-n}t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Замена $u = w^{1-k}$ приводит к уравнению вида 1.1.15.6:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ax^n\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{k}{1-k}}\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

3°. Преобразование

$$w(x,t) = xu(z,t), \quad z = 1/x$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = az^{4-n-k}u^k\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^{\frac{3m+4}{m+1}} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Частный случай уравнения 1.1.15.6.

Преобразование

$$w(x,t) = x^{\frac{1}{m+1}} u(z,t), \quad z = \frac{1}{x}$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.10.7:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial z}\left(u^m \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^n \dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Это уравнение встречается в нелинейных задачах тепло- и массопереноса и является частным случаем уравнения 1.6.17.16 при $f(w) = aw^m$. При $n = 0$ см. уравнение 1.1.10.7.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(C_2 x, C_1^m C_2^{2-n} t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x) = (Ax + B)^{\frac{1}{m+1}},$$

$$w(x,t) = k(\lambda t + A)^{-\frac{1}{m}} x^{\frac{2-n}{m}}, \quad k = \left[\frac{m\lambda}{a(n-2)(2+m-n-nm)}\right]^{\frac{1}{m}},$$

$$w(x,t) = t^{(1-n)\beta}\left[\frac{m\beta}{a(2-n)}\left(xt^\beta\right)^{2-n} + A\right]^{\frac{1}{m}}, \quad \beta = \frac{1}{nm+n-m-2},$$

$$w(x,t) = \exp(-\lambda t)\left[\frac{\lambda}{a}(m+1)^2 x^{\frac{m}{m+1}} \exp(\lambda m t) + A\right]^{\frac{1}{m}}, \quad n = \frac{m+2}{m+1},$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = (\lambda t + A)^{-1/m} f(x),$$

где функция $f = f(x)$ выражается через решения уравнения Эмдена — Фаулера:

$$F''_{xx} + \frac{\lambda(m+1)}{am} x^{-n} F^{\frac{1}{m+1}} = 0, \qquad F = f^{m+1}. \tag{1}$$

Частному решению этого уравнения степенного вида отвечает второе решение исходного уравнения в п. 1°.

Уравнение (1) допускает понижение порядка и подробно исследуется в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*), где приведены его точные решения для 26 различных пар значений параметров n, m.

4°. Автомодельное решение при $n \neq -2$:

$$w = w(z), \quad z = xt^{\frac{1}{n-2}},$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a(2-n)\left(w^m w'_z\right)'_z + z^{1-n} w'_z = 0. \tag{2}$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993) приведено общее решение уравнения (2) при $m = -1$ и любом n.

5°. Автомодельное решение:

$$w = t^\alpha g(\zeta), \quad \zeta = xt^\beta, \qquad \beta = \frac{m\alpha + 1}{n-2}, \quad \alpha \text{ — любое,}$$

где функция $g(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\zeta^n\left(g^m g'_\zeta\right)'_\zeta = \beta\zeta g'_\zeta + \alpha g. \qquad (3)$$

Это уравнение является однородным и поэтому допускает понижение порядка (после чего может быть преобразовано к уравнению Абеля второго рода).

В частном случае

$$\alpha = \frac{1-n}{nm+n-m-2}, \quad \beta = \frac{1}{nm+n-m-2},$$

первый интеграл уравнения (3) имеет вид

$$ag^m g'_\zeta = \beta\zeta^{1-n}g + C. \qquad (4)$$

Значению $C = 0$ в (4) соответствует третье решение в п. 1°.

В общем случае замена $G = g^{m+1}$ приводит (3) к уравнению

$$G''_{\zeta\zeta} = A_1\zeta^{1-n}G^{-\frac{m}{m+1}}G'_\zeta + A_2\zeta^{-n}G^{\frac{1}{m+1}}, \qquad (5)$$

где $A_1 = \beta/a$, $A_2 = \alpha(m+1)/a$. Точные аналитические решения уравнения (5) для некоторых значений параметров n, m приведены в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

6°. Обобщенно-автомодельное решение:

$$w = e^{\lambda(n-2)t}\varphi(u), \quad u = xe^{\lambda mt}, \qquad \lambda \text{ — любое},$$

где функция $\varphi(u)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$au^n(\varphi^m\varphi'_u)'_u = \lambda mu\varphi'_u + \lambda(n-2)\varphi. \qquad (6)$$

Это уравнение является однородным и поэтому допускает понижение порядка (после чего может быть преобразовано к уравнению Абеля второго рода).

В частном случае $n = \dfrac{m+2}{m+1}$ уравнение (6) имеет первый интеграл вида

$$a\varphi^m\varphi'_u = \lambda mu^{-\frac{1}{m+1}}\varphi + C.$$

Значению $C = 0$ соответствует последнее решение в п. 1°.

В общем случае замена $\Phi = \varphi^{m+1}$ приводит (6) к уравнению, которое с точностью до переобозначений совпадает с (5).

7°. При $n = 2$ имеются решения вида

$$w = w(\xi), \quad \xi = \ln|x| - \lambda t,$$

которые определяются неявно

$$a(m+1)\int\frac{w^m\,dw}{aw^{m+1} - \lambda(m+1)w + C_1} = \xi + C_2,$$

где λ, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Частному случаю $C_1 = 0$ соответствует решение

$$w(x,t) = \left[\frac{\lambda(m+1)}{a} + C|x|^{\frac{m}{m+1}}\exp\left(-\frac{m\lambda}{m+1}t\right)\right]^{\frac{1}{m}},$$

где C — произвольная постоянная.

8°. Преобразование

$$w(x,t) = x^{\frac{1}{m+1}}u(z,t), \quad z = \frac{1}{x}$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = az^{\frac{4+3m-n-nm}{m+1}}\frac{\partial}{\partial z}\left(u^m\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

⊙ *Литература для уравнения* 1.1.15.6: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 410–412).

7. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{ax+b}{cw+k}\right)^2\frac{\partial w}{\partial x}\right].$

Замена $u = \dfrac{cw+k}{ax+b}$ $(c \neq 0)$ приводит к уравнению вида 1.1.10.3:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{-2}\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

⊙ *Литература*: A. Munier, J. R. Burgan, J. Gutierres, E. Fijalkow, M. R. Feix (1981).

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^n w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Частный случай уравнения 1.6.17.5 при $f(x) = ax^n$.

1°. Пусть функция $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(C_2 x, C_1^m C_2^{2-n} t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Пусть $m \neq -1$ и $2m - 2n - nm + 3 \neq 0$. Преобразование

$$w(x,t) = x^{\frac{1-n}{m+1}} u(\xi, t), \quad \xi = x^{\frac{2m-2n-nm+3}{m+1}}$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^{\frac{3m-3n-2nm+4}{2m-2n-nm+3}} u^m \frac{\partial u}{\partial \xi}\right), \tag{1}$$

где $A = a\left(\dfrac{2m-2n-nm+3}{m+1}\right)^2$.

3°. В частном случае $n = \dfrac{3m+4}{2m+3}$ преобразованное уравнение сильно упрощается и совпадает (с точностью до переобозначений) с уравнением 1.1.10.7:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\frac{\partial}{\partial \xi}\left(u^m \frac{\partial u}{\partial \xi}\right).$$

4°. В частном случае $n = 2$, $m = -2$ преобразованное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\frac{\partial}{\partial \xi}\left(u^{-2} \frac{\partial u}{\partial \xi}\right)$$

и совпадает с уравнением 1.1.10.3 (которое приводится к линейному уравнению теплопроводности).

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 412–413).

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^n w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Это уравнение встречается в нелинейных задачах тепло- и массопереноса. При $n = 0$ см. уравнение 1.1.10.7. Значению $n = 1$ соответствуют двумерные (плоские) задачи с осевой симметрией, а значению $n = 2$ — трехмерные задачи с центральной симметрией. При $n = 5$ уравнение этого вида встречается в теории статистической турбулентности.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(C_2 x, C_1^m C_2^2 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x) = \left(Ax^{1-n} + B\right)^{\frac{1}{m+1}},$$

$$w(x,t) = \left(\frac{mx^2}{A - kt}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad k = 2a(nm + m + 2),$$

$$w(x,t) = \left(A|kt + B|^{-\frac{m(n+1)}{nm+m+2}} - \frac{mx^2}{kt + B}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad k = 2a(nm + m + 2),$$

$$w(x,t) = \left[A\exp\left(-\frac{4a\lambda}{m}t\right) + \lambda x^2\right]^{\frac{1}{m}}, \quad n = -\frac{m+2}{m},$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: Я. Б. Зельдович, А. С. Компанеец (1950), Г. И. Баренблатт (1952, 1978), Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер (1966), Л. И. Седов (1972), А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1995), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 413).

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = k(ax^2+bx+c)^m w^{4-2m}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

Частный случай уравнения 1.6.16.5 при $f(u)=ku^{-2m}$.

1°. Преобразование

$$w(x,t)=u(z,t)\sqrt{ax^2+bx+c}, \qquad z=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c} \tag{1}$$

приводит уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t}=ku^{4-2m}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k(ac-\tfrac14 b^2)u^{5-2m}, \tag{2}$$

которое имеет точное решение типа бегущей волны $u=u(z+\lambda t)$ и решение в виде произведения функций различных аргументов $u=f(t)g(z)$.

Используя замену $\varphi=u^{2m-3}$, из (2) получим уравнение вида 1.1.11.8:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=k\frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi^n\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)+p\varphi^{n+1},$$

$$n=\frac{4-2m}{2m-3}, \quad p=k(2m-3)(ac-\tfrac14 b^2),$$

которое допускает широкий класс точных решений.

2°. Исходное уравнение преобразованием

$$w(x,t)=\bigl[v(\xi,t)\bigr]^{\frac{1}{2m+3}}, \qquad \xi=\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m} \tag{3}$$

приводится к уравнению 1.6.17.5:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left[F(\xi)v^{\frac{4-2m}{2m-3}}\frac{\partial v}{\partial\xi}\right], \tag{4}$$

где функция $F(\xi)$ задается параметрически следующими формулами:

$$F(\xi)=\frac{k}{(ax^2+bx+c)^m}, \qquad \xi=\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m}. \tag{5}$$

Отметим некоторые частные случаи уравнения (4), когда функцию $F=F(\xi)$ можно записать в явном виде:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=k\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\cos^2\xi}{v^2}\frac{\partial v}{\partial\xi}\right), \qquad m=1, \quad a=1, \quad b=0, \quad c=1;$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=k\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\operatorname{ch}^2\xi}{v^2}\frac{\partial v}{\partial\xi}\right), \qquad m=1, \quad a=-1, \quad b=0, \quad c=1;$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=k\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi^{-3/2}}{\cos\xi}\frac{\partial v}{\partial\xi}\right), \qquad m=\frac12, \quad a=-1, \quad b=0, \quad c=1.$$

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 413–414).

1.2. Уравнения с экспоненциальными нелинейностями

1.2.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+b_0+b_1e^{\lambda w}+b_2e^{2\lambda w}$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+be^{\lambda w}$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=w(\pm C_1^\lambda x+C_2, C_1^{2\lambda}t+C_3)+2\ln|C_1|,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны (k, β — произвольные постоянные):

$$w = w(z), \quad z = kx + \beta t,$$

где функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$ak^2 w''_{zz} - \beta w'_z + be^{\lambda w} = 0.$$

3°. Точное решение:

$$w = u(\xi) - \frac{1}{\lambda}\ln t, \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}},$$

где функция $u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$au''_{\xi\xi} + \frac{1}{2}\xi u'_\xi + \frac{1}{\lambda} + be^{\lambda u} = 0.$$

⦿ *Литература*: N. H. Ibragimov (1994, p. 135), А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1995).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a + be^{\lambda w}$.

Это уравнение встречается в теории тепло- и массопереноса и теории горения.

1°. Решения типа бегущей волны:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= -\frac{2}{\lambda}\ln\bigl[\beta + C\exp\bigl(\pm\mu x - \tfrac{1}{2}a\lambda t\bigr)\bigr],\\ w(x,t) &= -\frac{2}{\lambda}\ln\bigl[-\beta + C\exp\bigl(\pm\mu x - \tfrac{1}{2}a\lambda t\bigr)\bigr],\end{aligned} \qquad \beta = \sqrt{-\frac{b}{a}},\ \mu = \sqrt{\frac{a\lambda}{2}},$$

где C — произвольная постоянная.

2°. Решения из п. 1° являются частными случаями более широкого класса решений типа бегущей волны

$$w = w(z), \quad z = \pm\mu x + \sigma t,$$

которые описываются автономным уравнением

$$\mu^2 w''_{zz} - \sigma w'_z + a + be^{\lambda w} = 0. \tag{1}$$

При

$$\mu = \sqrt{\tfrac{1}{2}a\lambda}, \quad \sigma = \mu^2$$

общее решение уравнения (1) можно представить в параметрическом виде

$$z = 2\int \frac{f'_\tau(\tau)\,d\tau}{f(\tau)\bigl[\lambda\tau f(\tau) + 2\bigr]} + C_1, \quad w = \frac{2}{\lambda}\ln|f(\tau)|,$$

где функция $f(\tau)$ определяется по формуле

$$f(\tau) = \frac{C_2 - 2\ln\bigl|\tau + \sqrt{\tau^2 + k}\bigr|}{\lambda\sqrt{\tau^2 + k}}, \quad k = \frac{4b}{a\lambda^2};$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⦿ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 414).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a + be^{\lambda w} + ce^{2\lambda w}$.

Уравнения этого вида встречаются в теории тепло- и массопереноса и теории горения.

1°. Решения типа бегущей волны при $a \neq 0$:

$$w(x,t) = -\frac{1}{\lambda}\ln\bigl[\beta + C\exp(\pm\mu x - a\lambda t)\bigr], \quad \mu = \frac{1}{\beta}\sqrt{-c\lambda}, \tag{1}$$

где C — произвольная постоянная, а параметр β определяется путем решения квадратного уравнения

$$a\beta^2 + b\beta + c = 0.$$

2°. Решения типа бегущей волны при $a=0$:

$$w(x,t)=-\frac{1}{\lambda}\ln\bigl(\pm\sqrt{-c\lambda}\,x-b\lambda t+C\bigr). \qquad (2)$$

3°. Подстановка $u=e^{-\lambda w}$ приводит к уравнению с квадратичной нелинейностью

$$u\frac{\partial u}{\partial t}=u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-a\lambda u^2-b\lambda u-c\lambda.$$

Частному решению этого уравнения вида $u=\beta+C\exp(\lambda t+\mu x)$ соответствует решение (1).

4°. Решения (1) и (2) являются частными случаями более широкого класса решений типа бегущей волны $w=w(x+\sigma t)$.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 415).

1.2.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)+f(w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$.

Это уравнение описывает нестационарный теплоперенос в неподвижной среде, когда коэффициент температуропроводности экспоненциально зависит от температуры.

1°. Пусть функция $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=w(C_1x+C_2,C_3t+C_4)+\frac{1}{\lambda}\ln\frac{C_3}{C_1^2},$$

где $C_1,\ldots,C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x,t)=\frac{2}{\lambda}\ln\left(\frac{\pm x+A}{\sqrt{B-2at}}\right),$$

$$w(x,t)=-\frac{1}{\lambda}\ln\bigl(C-2a\lambda\mu t\bigr)+\frac{1}{\lambda}\ln\bigl(\lambda\mu x^2+Ax+B\bigr),$$

где A, B, C, μ — произвольные постоянные. Первое решение является автомодельным, а второе — решением в виде суммы функций разных аргументов.

3°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$x+\beta t+C_1=a\int\frac{e^{\lambda w}\,dw}{\beta w+C_2}.$$

4°. Автомодельное решение:

$$w=w(y),\qquad y=x/\sqrt{t},$$

где функция $w(y)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a(e^{\lambda w}w'_y)'_y+\tfrac{1}{2}yw'_y=0.$$

5°. Точное решение:

$$w(x,t)=U(\xi)+2kt,\quad \xi=xe^{-k\lambda t},$$

где k — произвольная постоянная, а функция $U=U(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2k-k\lambda\xi U'_\xi=a(e^{\lambda U}U'_\xi)'_\xi.$$

6°. Точное решение:

$$w(x,t)=F(\zeta)-\frac{1}{\lambda}\ln t,\quad \zeta=x+\beta\ln t,$$

где β — произвольная постоянная, а функция $F=F(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка (C — произвольная постоянная)

$$-\zeta+\beta\lambda F=a\lambda e^{\lambda F}F'_\zeta+C.$$

7°. Точное решение:

$$w(x,t)=G(\theta)-\frac{2b+1}{\lambda}\ln t,\quad \theta=xt^b,$$

где b — произвольная постоянная, а функция $G=G(\theta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$-\frac{2b+1}{\lambda}+b\theta G'_\theta=(ae^{\lambda G}G'_\theta)'_\theta.$$

8°. Замена $\varphi = e^{\lambda w}$ приводит к уравнению вида 1.1.9.1:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

⦿ *Литература*: Л. В. Овсянников (1959, 1978), N. H. Ibragimov (1994, pp. 110, 119), А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1995).

2. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^w \frac{\partial w}{\partial x}\right) + b.$

1°. Пусть функция $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(C_1 x + C_2, t + C_3) - 2\ln|C_1|,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \ln|C_1 x + C_2| + bt + C_3,$$

$$w(x,t) = 2\ln|\pm x + C_1| - \ln\left(C_2 e^{-bt} - \frac{2a}{b}\right).$$

Первое решение является вырожденным.

3°. Преобразование

$$w = bt + u(x,\tau), \quad \tau = \frac{1}{b}e^{bt} + \text{const}$$

приводит к уравнению вида 1.2.2.1:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^u \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 41).

3. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^w \frac{\partial w}{\partial x}\right) - a^2 e^w.$

Точные решения:

$$w(x,t) = \ln\left|\frac{\pm A\exp[2(\pm ax + B)] + 2\exp(\pm ax + B) + D}{2a^2(t + C)}\right| \mp ax - B,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные (берутся либо верхние, либо нижние знаки).

4. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^w \frac{\partial w}{\partial x}\right) - be^w.$

1°. Пусть функция $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm x + C_1, C_2 t + C_3) + \ln C_2,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = u(x) - \ln(aC_1 t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $u = u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$u''_{xx} + (u'_x)^2 + C_1 e^{-u} - \frac{b}{a} = 0.$$

Его общее решение можно записать в неявном виде

$$\int \left(C_3 e^{-2u} - 2C_1 e^{-u} + \frac{b}{a}\right)^{-1/2} du = \pm x + C_4.$$

Данный интеграл вычисляется, поэтому решение можно представить в явном виде (при $a = 1$, $b > 0$ см. решение в 1.2.2.3).

3°. Замена $u = e^w$ приводит к уравнению вида 1.1.9.9:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bu^2.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^w \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + ae^w + b, \qquad a \neq 0, \quad b \neq 0.$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов при $a = k^2 > 0$:

$$w(x,t) = \ln\bigl[C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx)\bigr] + bt + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов при $a = -k^2 < 0$:

$$w(x,t) = \ln\bigl[C_1 \operatorname{ch}(kx) + C_2 \operatorname{sh}(kx)\bigr] + bt + C_3.$$

3°. Преобразование

$$w = bt + u(x,\tau), \quad \tau = \frac{1}{b} e^{bt} + \text{const}$$

приводит к уравнению вида 1.2.2.4:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^u \frac{\partial u}{\partial x}\right) + ae^u.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 41–42).

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^w \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + be^{\lambda w}.$

1°. Пусть функция $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1^{\lambda-1} x + C_2, C_1^{2\lambda} t + C_3) + 2\ln|C_1|,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точное решение при $\lambda \neq 0$:

$$w(x,t) = u(z) - \frac{1}{\lambda}\ln t, \quad z = 2\ln x + \frac{1-\lambda}{\lambda}\ln t,$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2a\lambda e^{-z}\bigl[2(e^u u_z')_z' - e^u u_z'\bigr] + b\lambda e^{\lambda u} = (1-\lambda)u_z' - 1.$$

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w} \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + b + ce^{-\lambda w}.$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$w = \frac{1}{\lambda}\ln\left(c\lambda t - \frac{b\lambda}{2a}x^2 + C_1 x + C_2\right),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w} \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + be^{\lambda w} + c + se^{-\lambda w}.$

Частный случай уравнения 1.6.14.4 при $f(t) = c$, $g(t) = s$.

Решение с функциональным разделением переменных:

$$w = \frac{1}{\lambda}\ln\Bigl\{e^{\alpha t}\bigl[C_1\cos(x\sqrt{\beta}\,) + C_2\sin(x\sqrt{\beta}\,)\bigr] + \gamma\Bigr\}, \qquad \text{если } ab\lambda > 0;$$
$$w = \frac{1}{\lambda}\ln\Bigl\{e^{\alpha t}\bigl[C_1\operatorname{ch}(x\sqrt{-\beta}\,) + C_2\operatorname{sh}(x\sqrt{-\beta}\,)\bigr] + \gamma\Bigr\}, \quad \text{если } ab\lambda < 0.$$

Здесь C_1, C_2 — произвольные постоянные и использованы следующие обозначения:

$$\alpha = \lambda(b\gamma + c), \quad \beta = b\lambda/a,$$

где $\gamma = \gamma_{1,2}$ — корни квадратного уравнения $b\gamma^2 + c\gamma + s = 0$.

⊙ *Литература*: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989).

1.2.3. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + g(w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(we^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$.

Решение типа бегущей волны:

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(C_1x + \frac{a}{\lambda}C_1^2t + C_2\right),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⦿ *Литература*: А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1995).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(we^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + b$.

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(C_1e^{b\lambda t}x + \frac{aC_1^2}{b\lambda^2}e^{2b\lambda t} + C_2e^{b\lambda t}\right),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⦿ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 56).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(we^{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + b(w+2)$.

Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \ln\left[C_1e^{2bt} - \frac{b}{2a}(x+C_2)^2\right],$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(we^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + be^{-\lambda w}$.

Решение типа бегущей волны:

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[C_1x + \left(\frac{aC_1^2}{\lambda} + b\lambda\right)t + C_2\right],$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(we^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + b + ce^{-\lambda w}$.

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(C_1e^{b\lambda t}x + \frac{aC_1^2}{b\lambda^2}e^{2b\lambda t} + C_2e^{b\lambda t} - \frac{c}{b}\right),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⦿ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 57).

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\left(awe^{\lambda w} + be^{\lambda w}\right)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + b + ce^{-\lambda w}$.

Замена $w = u - b/a$ приводит к уравнению вида 1.2.3.5:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ae^{-b\lambda/a}\frac{\partial}{\partial x}\left(ue^{\lambda u}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + b + ce^{b\lambda/a}e^{-\lambda u}.$$

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\left(ae^{2\lambda w} + bwe^{\lambda w}\right)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right]$.

Автомодельные решения:

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{\pm x + C_1}{\sqrt{C_2 - 2at}} - \frac{b}{a\lambda}\right),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\left(ae^{2\lambda w} + bwe^{\lambda w}\right)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + c.$

Решения типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\pm\varphi(t)x + C_1\varphi(t) + \frac{b}{\lambda}\varphi(t)\int\varphi(t)\,dt\right], \quad \varphi(t) = \left(C_2e^{-2c\lambda t} - \frac{a}{c\lambda}\right)^{-1/2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left[w^n\exp\left(\lambda w^n\right)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + bw^{1-n}.$

Решения типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \left(\frac{1}{\lambda}\ln z\right)^{1/n}, \qquad z = C_1e^{bn\lambda t}x + \frac{aC_1^2}{bn^2\lambda^2}e^{2bn\lambda t} + C_2e^{bn\lambda t},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

1.2.4. Другие уравнения, не зависящие явно от x и t

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta\dfrac{\partial w}{\partial x} + a + be^{\lambda w} + ce^{2\lambda w}.$

Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \beta t$, получим более простое уравнение вида 1.2.1.3:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + a + be^{\lambda w} + ce^{2\lambda w}.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.6.3.7 при $f(w) = be^{\lambda w}$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(C_1x + C_2, C_1^2t + C_3) + \frac{1}{\lambda}\ln C_1,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Помимо решения типа бегущей волны $w = w(x+\lambda t)$ существует также точное решение вида

$$w = \varphi(\xi) - \frac{1}{2\lambda}\ln t, \qquad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}}.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ae^{\lambda w}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$

Частный случай уравнения 1.6.6.8 при $f(w) = ae^{\lambda w}$.

Подстановка

$$u = \int\exp\left(\frac{a}{\lambda}e^{\lambda w}\right)dw$$

приводит к линейному уравнению теплопроводности $\partial_t u = \partial_{xx}u$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + aw\dfrac{\partial w}{\partial x} = b\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

1°. Пусть функция $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w\left(e^{C_1}x + \frac{a}{\lambda}C_1e^{C_1}t + C_2, e^{C_1}t + C_3\right) - \frac{1}{\lambda}C_1,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$2b\int\frac{e^{\lambda w}\,dw}{aw^2 + 2\beta w + C_1} = x + \beta t + C_2,$$

где C_1, C_2, β — произвольные постоянные.

3°. Точное решение:

$$w(x,t) = u(z) + \frac{1}{\lambda}\ln t, \quad z = \frac{x}{t} - \frac{a}{\lambda}\ln t,$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\left(au - z - \frac{a}{\lambda}\right)u'_z + \frac{1}{\lambda} = b(e^{\lambda}uu'_z)'_z.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ae^{\lambda w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

1°. Пусть функция $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(C_1x + C_2, C_3t + C_4) + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{C_3}{C_1^2},$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[C_2\exp\left(\frac{C_1}{ak^2}z\right) + \frac{\beta}{C_1}\right], \quad z = kx + \beta t,$$

где C_1, C_2, k, β — произвольные постоянные.

3°. Точные решения в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{\cos^2(C_2x + C_3)}{2C_2^2(at + C_1)}\right],$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{\operatorname{sh}^2(C_2x + C_3)}{2C_2^2(at + C_1)}\right],$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{\operatorname{ch}^2(C_2x + C_3)}{2C_2^2(C_1 - at)}\right],$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные; $\ln(A/B) = \ln|A| - \ln|B|$ при $AB > 0$.

4°. Автомодельное решение:

$$w = w(y), \quad y = x/\sqrt{t},$$

где функция $w(y)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$ae^{\lambda w}w''_{yy} + \tfrac{1}{2}yw'_y = 0.$$

5°. Точное решение:

$$w(x,t) = U(\xi) + 2kt, \quad \xi = xe^{-k\lambda t},$$

где k — произвольная постоянная, а функция $U = U(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2k - k\lambda\xi U'_\xi = ae^{\lambda U}U''_{\xi\xi}.$$

6°. Точное решение:

$$w(x,t) = F(\zeta) - \frac{1}{\lambda}\ln t, \quad \zeta = x + \beta\ln t,$$

где β — произвольная постоянная, а функция $F = F(\zeta)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\beta\lambda F'_\zeta - 1 = a\lambda e^{\lambda F}F''_{\zeta\zeta}.$$

7°. Точное решение:

$$w(x,t) = G(\theta) - \frac{2b+1}{\lambda}\ln t, \quad \theta = xt^b,$$

где b — произвольная постоянная, а функция $G = G(\theta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$-\frac{2b+1}{\lambda} + b\theta G'_\theta = ae^{\lambda G}G''_{\theta\theta}.$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ae^{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda w}$.

1°. Пусть функция $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1^{\lambda-1}x + C_2, C_1^{2\lambda}t + C_3) + 2\ln|C_1|,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(\xi), \quad \xi = kx + \beta t,$$

где k, β — произвольные постоянные, а функция $w(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$ak^2 e^w w''_{\xi\xi} - \beta w'_\xi + be^{\lambda w} = 0.$$

3°. Точное решение при $\lambda \neq 0$:

$$w(x,t) = u(z) - \frac{1}{\lambda}\ln t, \quad z = 2\ln x + \frac{1-\lambda}{\lambda}\ln t,$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2a\lambda e^{u-z}\bigl(2u''_{zz} - u'_z\bigr) + b\lambda e^{\lambda u} = (1-\lambda)u'_z - 1.$$

4°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов при $\lambda = 1$:

$$w(x,t) = -\ln(kt + C) + \varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''_{xx} + b + ke^{-\varphi} = 0.$$

5°. Точные решения в виде суммы функций разных аргументов при $\lambda = 0$:

$$w(x,t) = \ln\left[\frac{b}{2C_2^2}\,\frac{\cos^2(C_2x + C_3)}{a - C_1e^{-bt}}\right],$$
$$w(x,t) = \ln\left[\frac{b}{2C_2^2}\,\frac{\operatorname{sh}^2(C_2x + C_3)}{a - C_1e^{-bt}}\right],$$
$$w(x,t) = \ln\left[\frac{b}{2C_2^2}\,\frac{\operatorname{ch}^2(C_2x + C_3)}{C_1e^{-bt} - a}\right],$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные; $\ln(A/B) = \ln|A| - \ln|B|$ при $AB > 0$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\bigl(ae^{2w} + bwe^{w}\bigr)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + \bigl(ce^{w} + s\bigr)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \ln\left[\varphi(t)x + (st + C_1)\varphi(t) + b\varphi(t)\int\varphi(t)\,dt\right],$$

где C_1 — произвольная постоянная, а функция $\varphi(t)$ определяется обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t = a\varphi^3 + c\varphi^2,$$

общее решение которого можно записать в неявном виде.

В частных случаях имеем:

$$\varphi(t) = (C_2 - 2at)^{-1/2}, \quad \text{если } c = 0;$$
$$\varphi(t) = (C_2 - ct)^{-1}, \quad \text{если } a = 0.$$

1.2.5. Уравнения, зависящие явно от x и t

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ce^{\lambda w + bx + ct}$.

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z,w) = ce^{z+\lambda w}$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\lambda\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + be^{\beta x+\mu t-\lambda w}$.

Частный случай уравнения 1.6.4.9 при $f(x,t) \equiv 0$, $g(x,t) = be^{\beta x+\mu t}$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bt^n$.

Частный случай уравнения 1.6.14.1 при $f(t) = bt^n$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + be^{\mu t}$.

Частный случай уравнения 1.6.14.1 при $f(t) = be^{\mu t}$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + be^{\lambda w} + ce^{\mu t}$.

Частный случай уравнения 1.6.14.4 при $f(t) = ce^{\mu t}$, $g(t) = 0$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bt^n e^{-\lambda w}$.

Частный случай уравнения 1.6.14.2 при $f(t) = 0$, $g(t) = bt^n$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + be^{-\lambda w+\mu t}$.

Частный случай уравнения 1.6.14.2 при $f(t) = 0$, $g(t) = be^{\mu t}$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + be^{\mu t} + ce^{-\lambda w+\nu t}$.

Частный случай уравнения 1.6.14.2 при $f(t) = be^{\mu t}$, $g(t) = ce^{\nu t}$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + (bx+c)e^{\lambda w}$.

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w = -\frac{1}{\lambda}\ln(\lambda t + C) + \varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi(x)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$a\psi''_{xx} + \lambda(bx+c)\psi + \lambda = 0, \qquad \psi = e^{\lambda\varphi}.$$

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + be^{\lambda w+\mu x}$.

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w = -\frac{1}{\lambda}\ln(\lambda t + C) + \varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi(x)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$a\psi''_{xx} + \lambda be^{\mu x}\psi + \lambda = 0, \qquad \psi = e^{\lambda\varphi}.$$

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^n e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$.

Частный случай уравнения 1.6.17.12 при $f(x) = ax^n$.

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w+\mu x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$.

Частный случай уравнения 1.6.17.12 при $f(x) = ae^{\mu x}$.

1.3. Уравнения с гиперболическими нелинейностями

1.3.1. Уравнения, содержащие гиперболический косинус

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\operatorname{ch}^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 1.6.1.1 при $f(w) = b\operatorname{ch}^k(\lambda w)$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta\operatorname{ch}^k(\lambda w + bx + ct).$

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z, w) = \beta\operatorname{ch}^k(z + \lambda w)$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx + c)\dfrac{\partial w}{\partial x} + s\operatorname{ch}^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 1.6.2.1 при $f(w) = s\operatorname{ch}^k(\lambda w)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\operatorname{ch}^k(\lambda w)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$

Частный случай уравнения 1.6.6.8 при $f(w) = b\operatorname{ch}^k(\lambda w)$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\operatorname{ch}^k(\lambda w)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + c\operatorname{ch}^k(\beta t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.6.6.10 при $f(w) = b\operatorname{ch}^k(\lambda w)$, $g(t) = 0$, $h(t) = c\operatorname{ch}^k(\beta t)$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + 2b\operatorname{ch}(\lambda w) + c\operatorname{ch}^k(\beta t).$

Частный случай уравнения 1.6.14.4 при $f(t) = c\operatorname{ch}^k(\beta t)$, $g(t) = b$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\operatorname{ch}^2(\beta w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right].$

Частный случай уравнения 1.6.15.1 при $f(w) = a\operatorname{ch}^2(\beta w)$.

Автомодельные решения:

$$w(x, t) = \frac{1}{\beta}\operatorname{Arsh}\left(\frac{\pm x + C_1}{\sqrt{C_2 - 2at}}\right),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\operatorname{ch}^k(\beta w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right].$

Частный случай уравнения 1.6.15.1 при $f(w) = a\operatorname{ch}^k(\beta w)$.

1.3.2. Уравнения, содержащие гиперболический синус

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\operatorname{sh}^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 1.6.1.1 при $f(w) = b\operatorname{sh}^k(\lambda w)$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta\operatorname{sh}^k(\lambda w + bx + ct).$

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z, w) = \beta\operatorname{sh}^k(z + \lambda w)$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx + c)\dfrac{\partial w}{\partial x} + s\operatorname{sh}^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 1.6.2.1 при $f(w) = s\operatorname{sh}^k(\lambda w)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\operatorname{sh}^k(\lambda w)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$

Частный случай уравнения 1.6.6.8 при $f(w) = b\operatorname{sh}^k(\lambda w)$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\,\mathrm{sh}^k(\lambda w)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + c\,\mathrm{sh}^k(\beta t)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 1.6.6.10 при $f(w) = b\,\mathrm{sh}^k(\lambda w)$, $g(t) = 0$, $h(t) = c\,\mathrm{sh}^k(\beta t)$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + 2b\,\mathrm{sh}(\lambda w) + c\,\mathrm{sh}^k(\beta t)$.

Частный случай уравнения 1.6.14.4 при $f(t) = c\,\mathrm{sh}^k(\beta t)$, $g(t) = -b$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{sh}^2(\beta w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right]$.

Частный случай уравнения 1.6.15.1 при $f(w) = a\,\mathrm{sh}^2(\beta w)$.

Автомодельные решения:

$$w(x,t) = \frac{1}{\beta}\,\mathrm{Arch}\left(\frac{\pm x + C_1}{\sqrt{C_2 - 2at}}\right),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{sh}^k(\beta w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right]$.

Частный случай уравнения 1.6.15.1 при $f(w) = a\,\mathrm{sh}^k(\beta w)$.

1.3.3. Уравнения, содержащие гиперболический тангенс

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\,\mathrm{th}^k(\lambda w)$.

Частный случай уравнения 1.6.1.1 при $f(w) = b\,\mathrm{th}^k(\lambda w)$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta\,\mathrm{th}^k(\lambda w + bx + ct)$.

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z,w) = \beta\,\mathrm{th}^k(z + \lambda w)$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx + c)\dfrac{\partial w}{\partial x} + s\,\mathrm{th}^k(\lambda w)$.

Частный случай уравнения 1.6.2.1 при $f(w) = s\,\mathrm{th}^k(\lambda w)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\,\mathrm{th}^k(\lambda w)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2$.

Частный случай уравнения 1.6.6.8 при $f(w) = b\,\mathrm{th}^k(\lambda w)$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\,\mathrm{th}^k(\lambda w)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + c\,\mathrm{th}^k(\beta t)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 1.6.6.10 при $f(w) = b\,\mathrm{th}^k(\lambda w)$, $g(t) = 0$, $h(t) = c\,\mathrm{th}^k(\beta t)$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{th}^k(\beta w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right]$.

Частный случай уравнения 1.6.15.1 при $f(w) = a\,\mathrm{th}^k(\beta w)$.

1.3.4. Уравнения, содержащие гиперболический котангенс

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\,\mathrm{cth}^k(\lambda w)$.

Частный случай уравнения 1.6.1.1 при $f(w) = b\,\mathrm{cth}^k(\lambda w)$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta\,\mathrm{cth}^k(\lambda w + bx + ct)$.

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z,w) = \beta\,\mathrm{cth}^k(z + \lambda w)$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx+c)\dfrac{\partial w}{\partial x} + s\,\mathrm{cth}^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 1.6.2.1 при $f(w) = s\,\mathrm{cth}^k(\lambda w)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\,\mathrm{cth}^k(\lambda w)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$

Частный случай уравнения 1.6.6.8 при $f(w) = b\,\mathrm{cth}^k(\lambda w)$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\,\mathrm{cth}^k(\lambda w)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + c\,\mathrm{cth}^k(\beta t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.6.6.10 при $f(w) = b\,\mathrm{cth}^k(\lambda w)$, $g(t) = 0$, $h(t) = c\,\mathrm{cth}^k(\beta t)$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{cth}^k(\beta w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right].$

Частный случай уравнения 1.6.15.1 при $f(w) = a\,\mathrm{cth}^k(\beta w)$.

1.4. Уравнения с логарифмическими нелинейностями

1.4.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\ln w.$

Частный случай уравнения 1.6.1.1 при $f(w) = b\ln w$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw\ln w.$

Частный случай уравнения 1.6.1.1 при $f(w) = aw\ln w$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = \exp(C_1 e^{at})w(\pm x + C_2, t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решения с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \exp\left(Ae^{at}x + \frac{A^2}{a}e^{2at} + Be^{at}\right),$$
$$w(x,t) = \exp\left[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}a(x+A)^2 + Be^{at}\right],$$
$$w(x,t) = \exp\left[-\frac{a(x+A)^2}{4(1+Be^{-at})} + \frac{1}{2B}e^{at}\ln(1+Be^{-at}) + Ce^{at}\right],$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \exp\left[Ae^{at} + f(x)\right], \tag{1}$$

где функция $f(x)$ задана неявно с помощью равенства

$$\int\left(Be^{-2f} - af + \tfrac{1}{2}a\right)^{-1/2}df = \pm x + C. \tag{2}$$

В формулы (1), (2) входят три произвольные постоянные: A, B, C.

4°. Существуют более сложные решения вида

$$w(x,t) = \exp\left[Ae^{at} + f(x+bt)\right],$$

где функция $f(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f''_{\xi\xi} + (f'_\xi)^2 - bf'_\xi + af = 0.$$

⊙ *Литература для уравнения* 1.4.1.2: В. А. Дородницын (1979, 1982), А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1995), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 46).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw\ln w + bw.$

Замена $w = e^{-b/a}u$ приводит к уравнению вида 1.4.1.2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au\ln u.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw\ln w + (bx + c)w.$

Частный случай уравнений 1.6.1.5 и 1.6.1.7.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw\ln w + (bx + ct + k)w.$

Частный случай уравнения 1.6.1.7.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw\ln w + (bx^2 + cx + k)w.$

Частный случай уравнения 1.6.1.9.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a(w + b)\ln^2(w + b).$

1°. Замена $w = e^u - b$ приводит к уравнению вида 1.1.7.4:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + au^2. \tag{1}$$

2°. Точные решения уравнения (1) при $a < 0$:

$$u(x,t) = C_1\exp\bigl(-at \pm x\sqrt{-a}\,\bigr),$$
$$u(x,t) = \frac{1}{C_1 - at} + \frac{C_2}{(C_1 - at)^2}\exp\bigl(-at \pm x\sqrt{-a}\,\bigr),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Первое решение является решением типа бегущей волны, а второе — решение с обобщенным разделением переменных.

3°. Уравнение (1) имеет также точные решения с обобщенным разделением переменных вида

$$u(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\bigl[A\exp(x\sqrt{-a}\,) + A\exp(x\sqrt{-a}\,)\bigr] \quad \text{при} \quad a < 0,$$
$$u(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\bigl[A\sin(x\sqrt{a}\,) + A\cos(x\sqrt{a}\,)\bigr] \quad \text{при} \quad a > 0.$$

Подробности см. в 1.1.4.4.

⊙ *Литература*: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 47).

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (1 + kw)\bigl[a\ln^2(1 + kw) + b\ln(1 + kw) + c\bigr].$

Частный случай уравнения 1.6.1.10.

⊙ *Литература*: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989).

1.4.2. Другие уравнения

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\dfrac{\partial w}{\partial x} + bw\ln w.$

Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + at$, получим более простое уравнение вида 1.4.1.2:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + bw\ln w.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bt\dfrac{\partial w}{\partial x} + cw\ln w.$

Частный случай уравнения 1.6.2.6 при $f(t) = 0$, $g(t) = bt$, $h(t) = c$, $p(t) = s(t) = 0$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx\dfrac{\partial w}{\partial x} + cw\ln w.$

Частный случай уравнения 1.6.2.6 при $f(t) = b$, $g(t) = 0$, $h(t) = c$, $p(t) = s(t) = 0$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{a}{x^k}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^k \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bw\ln w.$

Значения $k = 1$ и $k = 2$ соответствуют пространственным задачам с осевой и центральной симметрией.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = \exp(C_1 e^{bt})\, w(\pm x, t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \exp\left[-\frac{bx^2}{4a(1+Ae^{-bt})} + Be^{bt} + \frac{1}{2A}(k+1)e^{bt}\ln(1+Ae^{-bt})\right],$$

где A, B — произвольные постоянные.

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \exp\bigl(Ae^{bt}\bigr)\theta(x),$$

где A — произвольная постоянная, а функция $\theta(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\frac{a}{x^k}\frac{d}{dx}\left(x^k \frac{d\theta}{dx}\right) + b\theta\ln\theta = 0.$$

⊙ *Литература*: А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1995), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 47–48).

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\ln w + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

1°. Пусть функция $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = e^{C_1} w(x + bC_1 t + C_2, t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w(x,t) = \exp\left[C_1\exp\left(-\frac{b}{a}x + b^2 C_2 t\right) + 1 - aC_2 - \frac{c}{b}\right],$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \exp\left[\frac{C_1 - x}{b(t+C_2)} + \frac{a}{b^2}\,\frac{\ln|t+C_2|}{t+C_2} - \frac{c}{b}\right].$$

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 67).

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\ln^k(bw)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$

Частный случай уравнения 1.6.6.8 при $f(w) = a\ln^k(bw)$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[(a\ln w + b)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right].$

Частный случай уравнения 1.6.15.1 при $f(w) = a\ln w + b$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(C_1 x + C_2, C_1^2 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x,t) = \exp\left(\pm\sqrt{2C_1 x + 2aC_1^2 t + C_2} - \frac{b}{a}\right),$$

$$w(x,t) = \exp\left(\frac{C_2 \pm x}{\sqrt{C_1 - 2at}} - \frac{a+b}{a}\right),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Первое решение является решением типа бегущей волны, а второе — автомодельным решением.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[(a\ln w + b)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + cw.$

Решения типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \exp\left[\frac{C_2 \pm x}{\sqrt{C_1 - 2at}} - \frac{c}{3a}(C_1 - 2at) - \frac{a+b}{a}\right],$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 68).

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[(a\ln w + b)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + cw\ln w + sw.$

Решения типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \exp\left[\varphi(t)(C_1 \pm x) + (a+b)\varphi(t)\int\varphi(t)\,dt + s\varphi(t)\int\frac{dt}{\varphi(t)}\right],$$

$$\varphi(t) = \left(C_2 e^{-2ct} - \frac{a}{c}\right)^{-1/2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

1.5. Уравнения с тригонометрическими нелинейностями

1.5.1. Уравнения, содержащие косинус

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\cos^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 1.6.1.1 при $f(w) = b\cos^k(\lambda w)$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta\cos^k(\lambda w + bx + ct).$

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z,w) = \beta\cos^k(z + \lambda w)$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx + c)\dfrac{\partial w}{\partial x} + s\cos^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 1.6.2.1 при $f(w) = s\cos^k(\lambda w)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\cos^k(\lambda w)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$

Частный случай уравнения 1.6.6.8 при $f(w) = b\cos^k(\lambda w)$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\cos^k(\lambda w)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + c\cos^k(\beta t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.6.6.10 при $f(w) = b\cos^k(\lambda w)$, $g(t) = 0$, $h(t) = c\cos^k(\beta t)$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\cos^2(\lambda w + \beta)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Замена $u = \operatorname{tg}(\lambda w + \beta)$ приводит к уравнению вида 1.1.13.2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{u^2+1}\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\cos^2(\beta w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right].$

Частный случай уравнения 1.6.15.1 при $f(w) = a\cos^2(\beta w)$.

Автомодельные решения:

$$w(x,t) = \frac{1}{\beta}\arcsin\frac{\pm x + C_1}{\sqrt{2at + C_2}},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\cos^k(\beta w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right].$

Частный случай уравнения 1.6.15.1 при $f(w) = a\cos^k(\beta w)$.

1.5.2. Уравнения, содержащие синус

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\sin^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 1.6.1.1 при $f(w) = b\sin^k(\lambda w)$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta\sin^k(\lambda w + bx + ct).$

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z,w) = \beta\sin^k(z + \lambda w)$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx + c)\dfrac{\partial w}{\partial x} + s\sin^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 1.6.2.1 при $f(w) = s\sin^k(\lambda w)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\sin^k(\lambda w)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$

Частный случай уравнения 1.6.6.8 при $f(w) = b\sin^k(\lambda w)$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\sin^k(\lambda w)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + c\sin^k(\beta t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.6.6.10 при $f(w) = b\sin^k(\lambda w)$, $g(t) = 0$, $h(t) = c\sin^k(\beta t)$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\sin^2(\lambda w)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Замена $u = \operatorname{ctg}(\lambda w)$ приводит к уравнению вида 1.1.13.2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{u^2+1}\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\sin^2(\beta w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right].$

Частный случай уравнения 1.6.15.1 при $f(w) = a\sin^2(\beta w)$.

Автомодельные решения:

$$w(x,t) = \frac{1}{\beta}\arccos\frac{\pm x + C_1}{\sqrt{2at + C_2}},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\sin^k(\beta w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right].$

Частный случай уравнения 1.6.15.1 при $f(w) = a\sin^k(\beta w)$.

1.5.3. Уравнения, содержащие тангенс

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\operatorname{tg}^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 1.6.1.1 при $f(w) = b\operatorname{tg}^k(\lambda w)$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta\operatorname{tg}^k(\lambda w + bx + ct).$

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z,w) = \beta\operatorname{tg}^k(z + \lambda w)$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx+c)\dfrac{\partial w}{\partial x} + s\,\mathrm{tg}^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 1.6.2.1 при $f(w) = s\,\mathrm{tg}^k(\lambda w)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\,\mathrm{tg}^k(\lambda w)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$

Частный случай уравнения 1.6.6.8 при $f(w) = b\,\mathrm{tg}^k(\lambda w)$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\,\mathrm{tg}^k(\lambda w)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + c\,\mathrm{tg}^k(\beta t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.6.6.10 при $f(w) = b\,\mathrm{tg}^k(\lambda w)$, $g(t) = 0$, $h(t) = c\,\mathrm{tg}^k(\beta t)$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{tg}^k(\beta w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right].$

Частный случай уравнения 1.6.15.1 при $f(w) = a\,\mathrm{tg}^k(\beta w)$.

1.5.4. Уравнения, содержащие котангенс

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\,\mathrm{ctg}^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 1.6.1.1 при $f(w) = b\,\mathrm{ctg}^k(\lambda w)$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta\,\mathrm{ctg}^k(\lambda w + bx + ct).$

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z,w) = \beta\,\mathrm{ctg}^k(z + \lambda w)$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx+c)\dfrac{\partial w}{\partial x} + s\,\mathrm{ctg}^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 1.6.2.1 при $f(w) = s\,\mathrm{ctg}^k(\lambda w)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\,\mathrm{ctg}^k(\lambda w)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$

Частный случай уравнения 1.6.6.8 при $f(w) = b\,\mathrm{ctg}^k(\lambda w)$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\,\mathrm{ctg}^k(\lambda w)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + c\,\mathrm{ctg}^k(\beta t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.6.6.10 при $f(w) = b\,\mathrm{ctg}^k(\lambda w)$, $g(t) = 0$, $h(t) = c\,\mathrm{ctg}^k(\beta t)$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{ctg}^k(\beta w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right].$

Частный случай уравнения 1.6.15.1 при $f(w) = a\,\mathrm{ctg}^k(\beta w)$.

1.5.5. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{e^{\lambda\,\mathrm{arctg}\,w}}{1+w^2}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Точное решение в параметрической форме:

$$w = \mathrm{tg}\left(\varphi(z) + \mathrm{arctg}\bigl(2z\varphi'_z\bigr) - \frac{1}{\lambda}\ln t\right),$$
$$x^2 = z\cos^2\left(\varphi(z) + \frac{1}{\lambda}\ln t\right),$$

где z — параметр, а функция $\varphi = \varphi(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка (C — произвольная постоянная)

$$\varphi'_z = \frac{1}{2z}\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{\lambda}\ln\frac{C-z}{2} - \varphi\right) - \frac{1}{\lambda(C-z)}.$$

⦿ *Литература*: И. Ш. Ахатов, Р. К. Газизов, Н. Х. Ибрагимов (1989, стр. 29–30).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \left[\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 1\right]^{-1} \exp\left[k \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\right] \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad k \neq 0.$

Точное решение:

$$w^2 = u(z) - x^2, \quad z = t \exp\bigl[-k \operatorname{arctg}(x/w)\bigr],$$

где функция $u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2k^2 z^2 u u''_{zz} - k^2 z(3z u'_z - 2u) u'_z - 4u^2 - \tfrac{1}{2}(k^2 z^2 {u'_z}^2 + 4u^2) u'_z \exp\bigl[k \operatorname{arctg}\bigl(\tfrac{1}{2} k z u^{-1} u'_z\bigr)\bigr] = 0.$$

⊙ *Литература*: И. Ш. Ахатов, Р. К. Газизов, Н. Х. Ибрагимов (1989, стр. 29–33).

1.6. Уравнения, содержащие произвольные функции

1.6.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w).$

Уравнение Колмогорова — Петровского — Пискунова. Уравнения этого вида часто встречаются в различных задачах тепло- и массопереноса (f — скорость объемной химической реакции), теории горения, биологии и экологии. Для функций $f = f(w)$ степенного, экспоненциального и логарифмического вида см. соответственно разд. 1.1.1.–1.1.3, уравнения 1.2.1.1–1.2.1.3 и 1.4.1.2, 1.4.1.3, 1.4.1.7, 1.4.1.8.

1°. Нестационарное решение, однородное по пространственной переменной, в неявном виде:

$$\int \frac{dw}{f(w)} = t + C, \qquad C \text{ — произвольная постоянная.}$$

2°. Стационарное решение в неявном виде:

$$\int \left[C_1 - \frac{2}{a}\int f(w)\,dw\right]^{-1/2} dw = C_2 \pm x.$$

3°. Решения типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = \pm x + \lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $w = w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a w''_{zz} - \lambda w'_z + f(w) = 0. \tag{1}$$

Преобразование

$$\xi = (\lambda/a) z, \quad U(w) = w'_\xi$$

приводит (1) к уравнению Абеля

$$U U'_w - U + a\lambda^{-2} f(w) = 0. \tag{2}$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведено много точных решений уравнения (2) для различных зависимостей $f = f(w)$.

⊙ *Литература*: А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский, И. С. Пискунов (1937), Я. Б. Зельдович, Г. И. Баренблатт, В. Б. Либрович, Г. М. Махвиладзе (1980).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(bx + ct, w).$

Точное решение:

$$w = w(\xi), \quad \xi = bx + ct,$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$ab^2 w''_{\xi\xi} - c w'_\xi + f(\xi, w) = 0.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{1}{t} f\left(\dfrac{x}{\sqrt{t}},\, w\right).$

1°. Пусть функция $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(Cx, C^2 t),$$

где C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Преобразование

$$\tau = \ln t, \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$$

приводит к уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2}\xi\frac{\partial w}{\partial \xi} + f(\xi,\, w),$$

которое допускает точные решения вида $w = w(\xi)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw\ln w + f(t)w.$

1°. Пусть функция $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = \exp\bigl(C_1 e^{bt}\bigr) w\bigl(\pm x + C_2, t\bigr),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \exp\left[Ae^{bt}x + Be^{bt} + \frac{a}{b}A^2e^{2bt} + e^{bt}\int e^{-bt}f(t)\,dt\right],$$

где A, B — произвольные постоянные.

3°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \exp\bigl[\varphi(t)x^2 + \psi(t)\bigr].$$

Здесь функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются формулами

$$\varphi(t) = \frac{be^{bt}}{A - 4ae^{bt}}, \quad \psi(t) = Be^{bt} + e^{bt}\int e^{-bt}\bigl[2a\varphi(t) + f(t)\bigr]\,dt,$$

где A, B — произвольные постоянные.

4°. Существуют также точные решения с функциональным разделением переменных более общего вида

$$w(x,t) = \exp\bigl[\varphi_2(t)x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t)\bigr],$$

где функции $\varphi_2(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_0(t)$ определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (см. уравнение 1.6.1.9), которая может быть проинтегрирована.

5°. Точное решение:

$$w(x,t) = \exp\left[Ae^{bt} + e^{bt}\int e^{-bt}f(t)\,dt + \Phi(x + \lambda t)\right],$$

где A, λ — произвольные постоянные, а функция $\Phi = \Phi(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\Phi''_{zz} + a(\Phi'_z)^2 - \lambda\Phi'_z + b\Phi = 0,$$

порядок которого можно понизить на единицу.

6°. Замена

$$w(x,t) = \exp\left[e^{bt}\int e^{-bt}f(t)\,dt\right]u(x,t)$$

приводит к более простому уравнению вида 1.4.1.2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu\ln u.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw\ln w + \bigl[f(x) + g(t)\bigr]w.$

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \exp\left[Ce^{bt} + e^{bt}\int e^{-bt}g(t)\,dt\right]\varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''_{xx} + b\varphi\ln\varphi + f(x)\varphi = 0.$$

2°. Замена

$$w(x,t) = \exp\left[e^{bt}\int e^{-bt}g(t)\,dt\right]u(x,t)$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu\ln u + f(x)u.$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)w\ln w + g(t)w.$

1°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \exp\bigl[\Phi(t)x + \Psi(t)\bigr],$$

где функции $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ определяются формулами

$$\Phi(t) = Ae^F,\quad \Psi(t) = Be^F + e^F\int e^{-F}(aA^2e^{2F} + g)\,dt,\qquad F = \int f\,dt;$$

A, B — произвольные постоянные.

2°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \exp\bigl[\varphi(t)x^2 + \psi(t)\bigr],$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются формулами

$$\varphi(t) = e^F\left(A - 4a\int e^F dt\right)^{-1},\quad F = \int f\,dt,$$

$$\psi(t) = Be^F + e^F\int e^{-F}(2a\varphi + g)\,dt;$$

A, B — произвольные постоянные.

3°. Существуют также точные решения с функциональным разделением переменных более общего вида

$$w(x,t) = \exp\bigl[\varphi_2(t)x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t)\bigr],$$

где функции $\varphi_2(t), \varphi_1(t), \varphi_0(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (см. уравнение 1.6.1.9), которая может быть проинтегрирована.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 419–420).

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)w\ln w + \bigl[g(t)x + h(t)\bigr]w.$

1°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \exp\bigl[\varphi(t)x + \psi(t)\bigr],$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются формулами

$$\varphi(t) = Ae^F + e^F\int e^{-F}g\,dt,\quad F = \int f\,dt,$$

$$\psi(t) = Be^F + e^F\int e^{-F}(a\varphi^2 + h)\,dt;$$

A, B — произвольные постоянные.

2°. Существуют точные решения с функциональным разделением переменных вида

$$w(x,t) = \exp\bigl[\varphi_2(t)x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t)\bigr],$$

где функции $\varphi_2(t), \varphi_1(t), \varphi_0(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (см. уравнение 1.6.1.9), которая может быть проинтегрирована.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 420).

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)w\ln w + \bigl[bf(x)t + g(x)\bigr]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = e^{-bt}\exp\bigl[\varphi(x)\bigr],$$

где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''_{xx} + a(\varphi'_x)^2 + f(x)\varphi + g(x) + b = 0.$$

При f, $g = \text{const}$ это уравнение подстановкой $u(\varphi) = (\varphi'_x)^2$ приводится к линейному уравнению первого порядка.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 420–421).

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)w\ln w + \bigl[g(t)x^2 + h(t)x + s(t)\bigr]w.$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \exp\bigl[\varphi_2(t)x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t)\bigr],$$

где функции $\varphi_n(t)$ $(n = 1,\,2,\,3)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f, g, h, s не указываются)

$$\varphi'_2 = 4a\varphi_2^2 + f\varphi_2 + g, \tag{1}$$
$$\varphi'_1 = 4a\varphi_2\varphi_1 + f\varphi_1 + h, \tag{2}$$
$$\varphi'_0 = f\varphi_0 + a\varphi_1^2 + 2a\varphi_2 + s. \tag{3}$$

Здесь аргументы у функций f, g, h, s не указываются, штрих означает производную по переменной t.

Уравнение (1) для функции $\varphi_2 = \varphi_2(t)$ является уравнением Риккати и может быть сведено к линейному уравнению второго порядка. В книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *а*) приведено много решений этого уравнения для различных функций f и g.

Если решение уравнения (1) известно, то решения уравнений (2), (3) строятся последовательно (каждое из них линейно относительно искомой функции).

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 421).

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bw + c)\bigl[k\ln^2(bw + c) + f(t)\ln(bw + c) + g(t)\bigr].$

Замена

$$bw + c = \exp u, \quad u = u(x,t)$$

приводит к уравнению с квадратичной нелинейностью вида 1.6.6.2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + bku^2 + bf(t)u + bg(t),$$

которое имеет экспоненциальные и синусоидальные решения по переменной x.

1.6.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx + c)\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(w).$

Это уравнение описывает нестационарный массоперенос с объемной химической реакцией в неоднородном потоке жидкости.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + C_1e^{-bt}, t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + C_1e^{-bt},$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aw''_{zz} + (bz + c)w'_z + f(w) = 0.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 56).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + f(t)w\ln w.$

Это уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{an}{x}\frac{\partial w}{\partial x} + f(t)w\ln w.$$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \exp\bigl[\varphi(t)x^2 + \psi(t)\bigr],$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi'_t = 4a\varphi^2 + f\varphi,$$
$$\psi'_t = 2a(n+1)\varphi + f\psi;$$

аргументы у функций f, g не указываются. Последовательно интегрируя, получим

$$\varphi(t) = e^F\left(A - 4a\int e^F dt\right)^{-1}, \quad F = \int f\,dt,$$
$$\psi(t) = Be^F + 2a(n+1)e^F\int \varphi e^{-F}dt,$$

где A, B — произвольные постоянные.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(w).$

Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \int f(t)\,dt$, получим более простое уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + g(w),$$

которое имеет точное решение типа бегущей волны $w = w(kz + \lambda t)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t,w).$

Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \int f(t)\,dt$, получим более простое уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + g(t,w).$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + bw\ln w + \bigl[g(x) + h(t)\bigr]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \exp\left[Ce^{bt} + e^{bt}\int e^{-bt}h(t)\,dt\right]\varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''_{xx} + f(x)\varphi'_x + b\varphi\ln\varphi + g(x)\varphi = 0.$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bigl[xf(t) + g(t)\bigr]\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w\ln w + \bigl[xp(t) + s(t)\bigr]w.$

1°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \exp\bigl[x\varphi(t) + \psi(t)\bigr],$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi'_t = \bigl[f(t) + h(t)\bigr]\varphi + p(t), \tag{1}$$
$$\psi'_t = h(t)\psi + a\varphi^2 + g(t)\varphi + s(t). \tag{2}$$

Интегрируя сначала (1), а затем (2), имеем

$$\varphi(t) = C_1 E(t) + E(t)\int \frac{p(t)}{E(t)}\,dt, \qquad E(t) = \exp\left[\int f(t)\,dt + \int h(t)\,dt\right],$$
$$\psi(t) = C_2 H(t) + H(t)\int \frac{a\varphi^2(t) + g(t)\varphi(t) + s(t)}{H(t)}\,dt, \qquad H(t) = \exp\left[\int h(t)\,dt\right].$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. См. уравнение 1.6.2.7 при $r(t) = 0$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bigl[xf(t) + g(t)\bigr]\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w\ln w + \bigl[x^2 r(t) + xp(t) + s(t)\bigr]w.$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \exp\bigl[x^2\varphi(t) + x\psi(t) + \chi(t)\bigr],$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi'_t = 4a\varphi^2 + (2f + h)\varphi + r, \tag{1}$$
$$\psi'_t = (4a\varphi + f + h)\psi + 2g\varphi + p, \tag{2}$$
$$\chi'_t = h\chi + 2a\varphi + a\psi^2 + g\psi + s. \tag{3}$$

При $r \equiv 0$ уравнение (1) является уравнением Бернулли и легко интегрируется. В общем случае уравнение (1) для функции $\varphi = \varphi(t)$ является уравнением Риккати и может быть сведено к линейному уравнению второго порядка. В книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведено много решений этого уравнения для различных функций f, h, r. После решения уравнения (1) последовательно определяются решения уравнений (2) и (3), которые линейны относительно функций $\psi = \psi(t)$ и $\chi = \chi(t)$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left[xf(t) + \dfrac{g(t)}{x}\right]\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w\ln w + \bigl[x^2 p(t) + s(t)\bigr]w.$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \exp\bigl[\varphi(t)x^2 + \psi(t)\bigr],$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi'_t = 4a\varphi^2 + (2f + h)\varphi + p, \tag{1}$$
$$\psi'_t = h\psi + 2(a + g)\varphi + s. \tag{2}$$

При $p \equiv 0$ уравнение (1) является уравнением Бернулли и легко интегрируется. В общем случае уравнение (1) для функции $\varphi = \varphi(t)$ является уравнением Риккати и может быть сведено к линейному уравнению второго порядка. В книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведено много решений этого уравнения для различных функций f, h, p. После решения уравнения (1) из линейного уравнения (2) определяется $\psi = \psi(t)$.

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 55).

1.6.3. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t,w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(t).$

Преобразование

$$w = u(z,t) + \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau, \qquad z = x + b\int_{t_0}^{t}(t-\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

где t_0 — любое, приводит к уравнению Бюргерса 1.1.5.3:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu\frac{\partial u}{\partial x}.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(x,t).$

Сделаем замену

$$w = \frac{\partial u}{\partial x},$$

а затем проинтегрируем полученное уравнение по переменной x. В результате приходим к уравнению вида 1.6.4.3:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{b}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + F(x,t),$$

где $F(x,t) = \int f(x,t)\,dx + g(t)$; $g(t)$ — произвольная функция.

⦿ *Литература*: A. R. Forsyth (1906).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + bw\dfrac{\partial w}{\partial x} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl[f(x,t)w\Bigr].$

Точное решение:

$$w(x,t) = -\frac{2a}{b}\frac{1}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial x},$$

где функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + f(x,t)\frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bigl[bw + f(t)\bigr]\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t).$

Преобразование

$$w = u(z,t) + \int_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau, \qquad z = x + \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau + b\int_{t_0}^{t}(t-\tau)g(\tau)\,d\tau,$$

где t_0 — любое, приводит к уравнению Бюргерса 1.1.5.3:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu\frac{\partial u}{\partial x}.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + f(t)w\dfrac{\partial w}{\partial x} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(t)w + h(t).$

Пусть функция $w(x,t)$ является решением. Тогда функция

$$w_1 = w\bigl(x + \psi(t),\, t\bigr) + \varphi(t), \quad \varphi(t) = C\exp\left[\int g(t)\,dt\right], \quad \psi(t) = -\int f(t)\varphi(t)\,dt,$$

где C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

Замечание. В уравнении a может быть произвольной функцией времени: $a = a(t)$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bigl[f(t)\ln w + g(t)\bigr]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \exp\left\{\varphi(t)(x + C_1) + \varphi(t)\int\bigl[a\varphi(t) + g(t)\bigr]\,dt\right\}, \quad \varphi(t) = -\left[\int f(t)\,dt + C_2\right]^{-1},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Обобщенное уравнение Бюргерса.

1°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t$$

можно записать в неявном виде

$$a\int\frac{dw}{\lambda w - F(w) + A} = z + B, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где A, B — произвольные постоянные.

2°. Для специальных видов функции $f(w) = bw$, $f(w) = bw^m$, $f(w) = be^{\lambda w}$, $f(w) = b\ln w + c$ см. соответственно уравнения 1.1.5.3, 1.1.5.9, 1.1.5.10, 1.2.4.2, 1.4.2.5, где приведены также другие решения.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(w).$

Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где функция $w = w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным второго порядка

$$aw''_{zz} + \big[f(w) - \lambda\big]w'_z + g(w) = 0,$$

которое заменой $w'_z = u(w)$ сводится к уравнению первого порядка. О точных решениях указанных обыкновенных дифференциальных уравнений для различных функций $f(w)$ и $g(w)$ см. книгу В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \big[f(w) + bx\big]\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(w).$

1°. Пусть функция $w(x,t)$ является решением. Тогда функция

$$w_1 = w(x + C_1 e^{-bt}, t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + C_1 e^{-bt},$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aw''_{zz} + \big[f(w) + bz\big]w'_z + g(w) = 0.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 56).

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \big[f(w) + g(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \displaystyle\int g(t)\,dt$, получим уравнение вида 1.6.3.7:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f(w)\frac{\partial w}{\partial z}.$$

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \big[f(w) + g(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(w).$

Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \displaystyle\int g(t)\,dt$, получим более простое уравнение вида 1.6.3.8:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f(w)\frac{\partial w}{\partial z} + h(w).$$

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \big[f(w) + g(t) + bx\big]\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(w).$

1°. Пусть функция $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + Ce^{-bt}, t),$$

где C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + Ce^{-bt} + e^{-bt}\int e^{bt} g(t)\,dt,$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aw''_{zz} + \big[f(w) + bz\big]w'_z + h(w) = 0.$$

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(bx + ct, w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(bx + ct, w).$

Точное решение:

$$w = w(\xi), \quad \xi = bx + ct,$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$ab^2 w''_{\xi\xi} + \big[bf(\xi, w) - c\big]w'_\xi + g(\xi, w) = 0.$$

1.6.4. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + f(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + f(x) + g(t).$

Частный случай уравнения 1.6.4.3.

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = At + B + \int g(t)\,dt + \varphi(x).$$

Здесь A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''_{xx} + b\big(\varphi'_x\big)^2 + f(x) - A = 0,$$

которое с помощью замены $\varphi'_x = \dfrac{a}{b}\dfrac{\psi'_x}{\psi}$ приводится к линейному уравнению второго порядка:

$$\psi''_{xx} + ba^{-2}\big[f(x) - A\big]\psi = 0.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + f(t)x^2 + g(t)x + h(t).$

Частный случай уравнения 1.6.4.3.

Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной x:

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi'_t = 4b\varphi^2 + f, \tag{1}$$

$$\psi'_t = 4b\varphi\psi + g, \tag{2}$$

$$\chi'_t = 2a\varphi + b\psi^2 + h. \tag{3}$$

Уравнение (1) для функции φ является уравнением Риккати. В частном случае $f = \mathrm{const}$ оно легко интегрируется с помощью разделения переменных. После определения φ последовательно находятся решения уравнений (2) и (3), которые линейны относительно функций ψ и χ.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + f(x,t).$

Замена $u = \exp\left(\dfrac{b}{a}w\right)$ приводит к линейному уравнению для функции $u = u(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{b}{a}f(x,t)u.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + cw + f(t).$

1°. Пусть функция $w(x,t)$ является решением. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm x + C_1, t) + C_2e^{ct},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной x:

$$w(x,t) = \frac{c(x+C_2)^2}{C_1e^{-ct} - 4b} - \frac{2a}{C_1}e^{ct}\ln|C_1e^{-ct} - 4b| + C_3e^{ct} + e^{ct}\int e^{-ct}f(t)\,dt.$$

3°. Точное решение:

$$w(x,t) = Ae^{ct} + e^{ct}\int e^{-ct}f(t)\,dt + \Theta(\xi), \quad \xi = x + \lambda t,$$

где A, λ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\Theta''_{\xi\xi} + b\big(\Theta'_\xi\big)^2 - \lambda\Theta'_\xi + c\Theta = 0.$$

4°. Замена

$$w = U(x,t) + e^{ct}\int e^{-ct} f(t)\,dt$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + cU.$$

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 57).

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + cw + f(x).$

1°. Пусть функция $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x, t + C_1) + C_2 e^{ct},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = Ae^{ct} + \varphi(x),$$

где A — произвольная постоянная, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''_{xx} + b(\varphi'_x)^2 + c\varphi + f(x) = 0.$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + cw + f(x) + g(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + Ae^{ct} + e^{ct}\int e^{-ct} g(t)\,dt,$$

где A — произвольная постоянная, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''_{xx} + b(\varphi'_x)^2 + c\varphi + f(x) = 0.$$

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + g(t)w + h(t).$

Частный случай уравнения 1.6.6.1 при $f(t) = b$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + cw^2 + f(t)w + g(t).$

Частный случай уравнения 1.6.6.2.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\lambda\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + f(x,t) + g(x,t)e^{-\lambda w}.$

Замена $u = \exp(\lambda w)$ приводит к линейному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda f(x,t)u + \lambda g(x,t).$$

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \dfrac{1}{t} f\left(\dfrac{x}{\sqrt{t}}, w\right).$

1°. Пусть функция $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(Cx, C^2 t),$$

где C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Преобразование $\tau = \ln t$, $\xi = xt^{-1/2}$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + b\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{1}{2}\xi\frac{\partial w}{\partial \xi} + f(\xi, w),$$

которое допускает точное решение вида $w = w(\xi)$.

3°. В частном случае $f = f(\xi)$ имеется также точное решение вида $w = C\tau + \varphi(\xi)$, где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''_{\xi\xi} + b(\varphi'_\xi)^2 + \tfrac{1}{2}\xi\varphi'_\xi + f(\xi) - C = 0.$$

1.6.5. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + f(x,t,w)\frac{\partial w}{\partial x} + g(x,t,w)$

1. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + f(x)\frac{\partial w}{\partial x} + kw + g(x) + h(t).$

1°. Пусть функция $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x,t) + Ce^{kt},$$

где C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + Ce^{kt} + e^{kt}\int e^{-kt}h(t)\,dt,$$

где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''_{xx} + b(\varphi'_x)^2 + f(x)\varphi'_x + k\varphi + g(x) = 0.$$

2. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + f(t)\frac{\partial w}{\partial x} + cw^2 + g(t)w + h(t).$

Частный случай уравнения 1.6.6.5.

3. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + cw\frac{\partial w}{\partial x} + kw^2 + f(t)w + g(t).$

Существуют решения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp(\lambda x),$$

где $\lambda = \lambda_{1,2}$ — корни квадратного уравнения $b\lambda^2 + c\lambda + k = 0$.

4. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + f(x,t)\frac{\partial w}{\partial x} + g(x,t).$

Замена $u = \exp\left(\frac{b}{a}w\right)$ приводит к линейному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b}{a}g(x,t)u.$$

5. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\lambda\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + f(x,t)\frac{\partial w}{\partial x} + g(x,t) + h(x,t)e^{-\lambda w}.$

Замена $u = \exp(\lambda w)$ приводит к линейному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda g(x,t)u + \lambda h(x,t).$$

1.6.6. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t,w)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + g(x,t,w)\frac{\partial w}{\partial x} + h(x,t,w)$

1. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + g(t)w + h(t).$

1°. Пусть функция $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm x + C_1, t) + C_2\exp\left[\int g(t)\,dt\right],$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной x:

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi'_t = 4f\varphi^2 + g\varphi, \qquad (1)$$

$$\psi'_t = (4f\varphi + g)\psi, \qquad (2)$$

$$\chi'_t = g\chi + 2a\varphi + f\psi^2 + h. \qquad (3)$$

Уравнение (1) для функции φ является уравнением Бернулли и легко интегрируется. После этого последовательно определяются решения уравнений (2) и (3), которые линейны относительно функций ψ и χ. В итоге получим

$$\begin{aligned} \varphi &= e^G\left(A_1 - 4\int e^G f\,dt\right)^{-1}, \quad G = \int g\,dt, \\ \psi &= A_2 \exp\left[\int (4f\varphi + g)\,dt\right], \\ \chi &= A_3 e^G + e^G \int e^{-G}(2a\varphi + f\psi^2 + h)\,dt, \end{aligned} \qquad (4)$$

где A_1, A_2, A_3 — произвольные постоянные.

Предельному переходу $A_1 \to \infty$ в (4) соответствует вырожденное решение с $\varphi \equiv 0$.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 422).

2. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + bf(t)w^2 + g(t)w + h(t).$

1°. Решения с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp\bigl(\pm x\sqrt{-b}\bigr), \qquad b < 0, \qquad (1)$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f, g, h не указываются)

$$\varphi'_t = bf\varphi^2 + g\varphi + h, \qquad (2)$$

$$\psi'_t = (2bf\varphi + g - ab)\psi. \qquad (3)$$

Уравнение (2) для функции $\varphi = \varphi(t)$ является уравнением Риккати и может быть сведено к линейному уравнению второго порядка. В книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 a), приведено много решений этого уравнения для различных функций f, g, h.

Если решение уравнения (2) известно, то решение уравнения (3) для функции $\psi = \psi(t)$ определяется по формуле

$$\psi(t) = C\exp\left[-abt + \int (2bf\varphi + g)\,dt\right], \qquad (4)$$

где C — произвольная постоянная.

Отметим два частных случая интегрирования уравнения (2).

Решение уравнения (2) при $h \equiv 0$:

$$\varphi(t) = e^G\left(C_1 - b\int fe^G\,dt\right)^{-1}, \quad G = \int g\,dt,$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Если функции f, g, h пропорциональны:

$$g = \alpha f, \quad h = \beta f \qquad (\alpha, \beta = \text{const}),$$

то решение уравнения (2) имеет вид

$$\int \frac{d\varphi}{b\varphi^2 + \alpha\varphi + \beta} = \int f\,dt + C_2, \qquad (5)$$

где C_2 — произвольная постоянная. После интегрирования левой части выражения (5) можно получить явный вид зависимости $\varphi = \varphi(t)$.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных более общего вида:

$$w(x,t)=\varphi(t)+\psi(t)\big[A\exp\big(x\sqrt{-b}\,\big)+B\exp\big(-x\sqrt{-b}\,\big)\big],\qquad b<0, \tag{6}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi'_t=bf\big(\varphi^2+4AB\psi^2\big)+g\varphi+h, \tag{7}$$

$$\psi'_t=2bf\varphi\psi+g\psi-ab\psi. \tag{8}$$

Из уравнения (8) можно выразить φ через ψ, а затем подставить в (7). В итоге получается нелинейное уравнение второго порядка для функции ψ (при f, g, $h=\mathrm{const}$ это уравнение является автономным и допускает понижение порядка).

Отметим два частных случая решения вида (6), которые выражаются через гиперболические функции:

$$w(x,t)=\varphi(t)+\psi(t)\operatorname{ch}\big(x\sqrt{-b}\,\big),\qquad A=\tfrac{1}{2},\quad B=\tfrac{1}{2};$$

$$w(x,t)=\varphi(t)+\psi(t)\operatorname{sh}\big(x\sqrt{-b}\,\big),\qquad A=\tfrac{1}{2},\quad B=-\tfrac{1}{2}.$$

3°. Решение с обобщенным разделением переменных (c — произвольная постоянная):

$$w(x,t)=\varphi(t)+\psi(t)\cos\big(x\sqrt{b}+c\big),\qquad b>0, \tag{9}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi'_t=bf\big(\varphi^2+\psi^2\big)+g\varphi+h, \tag{10}$$

$$\psi'_t=2bf\varphi\psi+g\psi-ab\psi. \tag{11}$$

Из уравнения (11) можно выразить φ через ψ, а затем подставить в (10). В итоге получается нелинейное уравнение второго порядка для функции ψ (при f, g, $h=\mathrm{const}$ это уравнение является автономным и допускает понижение порядка).

◉ *Литература*: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989, рассматривался случай $f,g,h=\mathrm{const}$), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 422–423).

3. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t}=a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f(t)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+bf(t)w\frac{\partial w}{\partial x}+cf(t)w^2+g(t)w+h(t).$

Существуют решения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t)=\varphi(t)+\psi(t)\exp(\lambda x),$$

где $\lambda=\lambda_{1,2}$ — корни квадратного уравнения $\lambda^2+b\lambda+c=0$.

4. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t}=a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f(x)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+g(x)\frac{\partial w}{\partial x}+bw+h(x)+p(t).$

1°. Пусть функция $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=w(x,t)+Ce^{bt},$$

где C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t)=\varphi(x)+Ce^{bt}+e^{bt}\int e^{-bt}p(t)\,dt,$$

где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''_{xx}+f(x)(\varphi'_x)^2+g(x)\varphi'_x+b\varphi+h(x)=0.$$

5. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t}=a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f(t)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+g(t)\frac{\partial w}{\partial x}+bf(t)w^2+h(t)w+p(t).$

Переходя от t, x к новым переменным t, $z=x+\displaystyle\int g(t)\,dt$, приходим к уравнению вида 1.6.6.2:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+f(t)\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+bf(t)w^2+h(t)w+p(t).$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left[g_1(t)x + g_0(t)\right]\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w + p(t)x^2 + q(t)x + s(t).$

Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной x:

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi'_t = 4f\varphi^2 + (2g_1 + h)\varphi + p, \qquad (1)$$

$$\psi'_t = (4f\varphi + g_1 + h)\psi + 2g_0\varphi + q, \qquad (2)$$

$$\chi'_t = h\chi + 2a\varphi + f\psi^2 + g_0\psi + s. \qquad (3)$$

Уравнение (1) для функции $\varphi = \varphi(t)$ является уравнением Риккати и может быть сведено к линейному уравнению второго порядка. О решениях этих уравнений см. книги Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*). В частном случае при $p \equiv 0$ уравнение (1) является уравнением Бернулли и легко интегрируется.

Если решение уравнения (1) известно, то решения уравнений (2) и (3) без труда определяются последовательно (они линейны относительно функций ψ и χ).

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - ak\dfrac{1}{w}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + f(x,t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x,t)w + h(x,t)w^k.$

Замена $u = w^{1-k}$ приводит к линейному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + (1-k)g(x,t)u + (1-k)h(x,t).$$

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$

Подстановка

$$u = \int F(w)\,dw, \qquad \text{где} \quad F(w) = \exp\left[\int f(w)\,dw\right],$$

приводит к линейному уравнению теплопроводности для функции $u = u(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + g(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Подстановка

$$u = \int F(w)\,dw, \qquad \text{где} \quad F(w) = \exp\left[\int f(w)\,dw\right],$$

приводит к линейному уравнению для функции $u = u(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Некоторые точные аналитические решения полученного уравнения (для произвольной функции g) приведены в книге А. Д. Полянина (2001 *b*).

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left[xg(t) + h(t)\right]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Подстановка

$$u = \int F(w)\,dw, \qquad \text{где} \quad F(w) = \exp\left[\int f(w)\,dw\right],$$

приводит к линейному уравнению для функции $u = u(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left[xg(t) + h(t)\right]\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Это уравнение может быть сведено к линейному уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами (см. А. Д. Полянин, 2001 *b*).

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f(w)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2+g(x,t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Подстановка

$$u=\int F(w)\,dw,\qquad \text{где}\quad F(w)=\exp\Bigl[\int f(w)\,dw\Bigr],$$

приводит к линейному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f(w)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2+g(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}+h(w).$

Решение типа бегущей волны:

$$w=w(z),\quad z=x+\lambda t,$$

где функция $w=w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aw''_{zz}+f(w)(w'_z)^2+[g(w)-\lambda]w'_z+h(w)=0. \tag{1}$$

Подстановка $w'_z=u(w)$ приводит к уравнению первого порядка

$$auu'_w+f(w)u^2+[g(w)-\lambda]u+h(w)=0. \tag{2}$$

О точных решениях обыкновенных дифференциальных уравнений (1) и (2) для различных функций $f(w)$, $g(w)$ и $h(w)$ см. книгу В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

Отметим, что в частном случае $h\equiv 0$ из (2) получим линейное уравнение, которое легко интегрируется.

1.6.7. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f\Big(x,t,w,\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f(x)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^k+g(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}+bw+h(x)+p(t).$

1°. Пусть функция $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=w(x,t)+Ce^{bt},$$

где C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t)=\varphi(x)+Ce^{bt}+e^{bt}\int e^{-bt}p(t)\,dt,$$

где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$a\varphi''_{xx}+f(x)(\varphi'_x)^k+g(x)\varphi'_x+b\varphi+h(x)=0.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f\Big(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+bw+g(t).$

1°. Пусть функция $w(x,t)$ является решением. Тогда функция

$$w_1=w(x,t)+Ce^{bt},$$

где C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t)=\varphi(x)+Ce^{bt}+e^{bt}\int e^{-bt}g(t)\,dt,$$

где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$a\varphi''_{xx}+f(x,\ \varphi'_x)+b\varphi=0.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + wf\left(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

1°. Пусть функция $w(x,t)$ является решением. Тогда функция
$$w_1 = C_1 w(x + C_2, t),$$
где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:
$$w(x,t) = A\exp\left[\lambda x + a\lambda^2 t + \int f(t,\lambda)\,dt\right],$$
где A, λ — произвольные постоянные.

1.6.8. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x,t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g\left(x,t,w,\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = (ax^2 + b)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ax\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(w).$

Замена $z = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+b}}$ приводит к уравнению вида 1.6.1.1:
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f(w).$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{f(t)}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + g(t)w\ln w.$

Это уравнение можно записать в виде
$$\frac{\partial w}{\partial t} = f(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{nf(t)}{x}\frac{\partial w}{\partial x} + g(t)w\ln w.$$

Решение с функциональным разделением переменных:
$$w(x,t) = \exp\bigl[\varphi(t)x^2 + \psi(t)\bigr],$$
где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами
$$\varphi'_t = 4f\varphi^2 + g\varphi,$$
$$\psi'_t = 2(n+1)f\varphi + g\psi;$$
аргументы у функций f, g не указываются. Последовательно интегрируя, получим
$$\varphi(t) = e^G\left(A - 4\int fe^G dt\right)^{-1}, \quad G = \int g\,dt,$$
$$\psi(t) = Be^G + 2(n+1)e^G\int f\varphi e^{-G}dt,$$
где A, B — произвольные постоянные.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left[xg(t) + \dfrac{h(t)}{x}\right]\dfrac{\partial w}{\partial x} + s(t)w\ln w + \bigl[x^2 p(t) + q(t)\bigr]w.$

Решение с функциональным разделением переменных:
$$w(x,t) = \exp\bigl[\varphi(t)x^2 + \psi(t)\bigr],$$
где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами
$$\varphi'_t = 4f\varphi^2 + (2g+s)\varphi + p, \tag{1}$$
$$\psi'_t = s\psi + 2(f+h)\varphi + q. \tag{2}$$

При $p \equiv 0$ уравнение (1) является уравнением Бернулли и легко интегрируется. В общем случае уравнение (1) для функции $\varphi = \varphi(t)$ является уравнением Риккати и может быть сведено к линейному уравнению второго порядка. В книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведено много решений этого уравнения для различных функций f, g, s, p. После решения уравнения (1) из линейного уравнения (2) определяется $\psi = \psi(t)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + g(t)w\ln w + h(t)w.$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \exp\bigl[\varphi(t)e^{-\lambda x} + \psi(t)\bigr],$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi'_t = \lambda^2 f(t)\varphi^2 + g(t)\varphi,$$
$$\psi'_t = g(t)\psi + h(t).$$

Интегрируя, получим

$$\varphi(t) = G(t)\left[A - \lambda^2\int f(t)G(t)\,dt\right]^{-1}, \quad G(t) = \exp\left[\int g(t)\,dt\right],$$
$$\psi(t) = BG(t) + G(t)\int \frac{h(t)}{G(t)}\,dt,$$

где A, B — произвольные постоянные.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + aw\ln w.$

Это уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} = f(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f'_x(x)\frac{\partial w}{\partial x} + aw\ln w.$$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = \exp(C_1e^{at})\,w(x, t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \exp(Ce^{at})\,\varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(f\varphi'_x)'_x + a\varphi\ln\varphi = 0.$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + aw\ln w + \bigl[g(x) + h(t)\bigr]w.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = \exp(Ce^{at})w(x,t),$$

где C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \exp\left[Ce^{at} + e^{at}\int e^{-at}h(t)\,dt\right]\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(f\varphi'_x)'_x + a\varphi\ln\varphi + g(x)\varphi = 0.$$

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + aw\ln w + \bigl[h(x) + s(t)\bigr]w.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = \exp(Ce^{at})w(x,t),$$

где C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \exp\left[Ce^{at} + e^{at}\int e^{-at}s(t)\,dt\right]\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(x)\varphi''_{xx} + g(x)\varphi'_x + a\varphi\ln\varphi + h(x)\varphi = 0.$$

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + h(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + aw + p(x) + q(t).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x,t) + Ce^{at},$$

где C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + Ce^{at} + e^{at}\int e^{-at}q(t)\,dt,$$

где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(x)\varphi''_{xx} + g(x)(\varphi'_x)^2 + h(x)\varphi'_x + a\varphi + p(x) = 0.$$

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^k + h(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + aw + p(x) + q(t).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x,t) + Ce^{at},$$

где C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + Ce^{at} + e^{at}\int e^{-at}q(t)\,dt,$$

где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(x)\varphi''_{xx} + g(x)(\varphi'_x)^k + h(x)\varphi'_x + a\varphi + p(x) = 0.$$

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g\left(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + aw + h(t).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x,t) + Ce^{at},$$

где C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + Ce^{at} + e^{at}\int e^{-at}h(t)\,dt,$$

где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(x)\varphi''_{xx} + g(x,\ \varphi'_x) + a\varphi = 0.$$

1.6.9. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t,w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)w + bx + c.$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = (bx+c)t + Ax + B - \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}(x-\xi)f(\xi)\,d\xi,$$

где A, B, x_0 — произвольные постоянные.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)w + g(t).$

1°. Вырожденное решение, линейное по x:

$$w(x,t) = F(t)(Ax+B) + F(t)\int\frac{g(t)}{F(t)}dt, \quad F(t) = \exp\left[\int f(t)\,dt\right],$$

где A, B — произвольные постоянные.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной x:

$$w(x,t) = \varphi(t)(x^2 + Ax + B) + \varphi(t) \int \frac{g(t)}{\varphi(t)}\,dt,$$

$$\varphi(t) = F(t)\left[C - 2a \int F(t)\,dt\right]^{-1}, \quad F(t) = \exp\left[\int f(t)\,dt\right],$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

3. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = aw \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + cw^2 + f(t)w + g(t).$

Частный случай уравнения 1.6.10.1 при $b = 0$.

4. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = aw \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - ak^2 w^2 + f(x)w + b_1 \operatorname{sh}(kx) + b_2 \operatorname{ch}(kx).$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = t\bigl[b_1 \operatorname{sh}(kx) + b_2 \operatorname{ch}(kx)\bigr] + \varphi(x).$$

Здесь функция $\varphi(x)$ описывается линейным неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$a\varphi''_{xx} - ak^2\varphi + f(x) = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$\varphi(x) = C_1 \operatorname{sh}(kx) + C_2 \operatorname{ch}(kx) - \frac{1}{ak} \int_{x_0}^{x} f(\xi) \operatorname{sh}\bigl[k(x-\xi)\bigr]\,d\xi,$$

где A, B, x_0 — произвольные постоянные.

5. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = aw \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ak^2 w^2 + f(x)w + b_1 \sin(kx) + b_2 \cos(kx).$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = t\bigl[b_1 \sin(kx) + b_2 \cos(kx)\bigr] + \varphi(x).$$

Здесь функция $\varphi(x)$ описывается линейным неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$a\varphi''_{xx} + ak^2\varphi + f(x) = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$\varphi(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx) - \frac{1}{ak} \int_{x_0}^{x} f(\xi) \sin\bigl[k(x-\xi)\bigr]\,d\xi,$$

где A, B, x_0 — произвольные постоянные.

6. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = aw \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t) \frac{\partial w}{\partial x} + g(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = G(t)u(z,\tau), \quad z = x + \int f(t)\,dt, \quad \tau = \int G(t)\,dt, \qquad G(t) = \exp\left[\int g(t)\,dt\right]$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.9.1:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = au \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

7. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = aw \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t) \frac{\partial w}{\partial x} + g(t)w + h(t).$

Частный случай уравнения 1.6.10.5.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + xf(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = G(t)u(z,\tau), \quad z = xF(t), \quad \tau = \int F^2(t)G(t)\,dt,$$

где функции $F(t)$ и $G(t)$ определяются формулами

$$F(t) = \exp\left[\int f(t)\,dt\right], \quad G(t) = \exp\left[\int g(t)\,dt\right],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.9.1:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = au\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bigl[xf(t) + g(t)\bigr]\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = H(t)u(z,\tau), \quad z = xF(t) + \int g(t)F(t)\,dt, \quad \tau = \int F^2(t)H(t)\,dt,$$

где функции $F(t)$ и $H(t)$ определяются формулами

$$F(t) = \exp\left[\int f(t)\,dt\right], \quad H(t) = \exp\left[\int h(t)\,dt\right],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.9.1:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = au\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)w\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t)w + h(t).$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \varphi(t)\Theta(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\Theta(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\varphi'_t = C\varphi^2 + g(t)\varphi,\\
&\psi'_t = \bigl[C\varphi + g(t)\bigr]\psi + h(t),\\
&a\Theta''_{xx} + f(x)\Theta'_x = C,
\end{aligned}$$

C — произвольная постоянная. Последовательно интегрируя, получим

$$\begin{aligned}
&\varphi(t) = G(t)\left[A_1 - C\int G(t)\,dt\right]^{-1}, \quad G(t) = \exp\left[\int g(t)\,dt\right],\\
&\psi(t) = A_2\varphi(t) + \varphi(t)\int\frac{h(t)}{\varphi(t)}\,dt,\\
&\Theta(x) = B_1\int\frac{dx}{F(x)} + B_2 + \frac{C}{a}\int\left[\int F(x)\,dx\right]\frac{dx}{F(x)}, \quad F(x) = \exp\left[\frac{1}{a}\int f(x)\,dx\right],
\end{aligned}$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные.

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)w\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x)w^2 + h(t)w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x)H(t)\left[A - B\int H(t)\,dt\right]^{-1}, \quad H(t) = \exp\left[\int h(t)\,dt\right].$$

Здесь A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$a\varphi''_{xx} + f(x)\varphi'_x + g(x)\varphi = B.$$

О точных решениях этого уравнения при различных функциях $f(x)$ и $g(x)$ см. книги Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

1.6.10. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = (aw+b)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t,w)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + g(x,t,w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + cw^2 + f(t)w + g(t).$

1°. Решение с обобщенным разделением переменных, содержащее экспоненциальную функцию x:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp(\pm\lambda x), \quad \lambda = \left(\frac{-c}{a+b}\right)^{1/2}, \tag{1}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f и g не указываются)

$$\varphi'_t = c\varphi^2 + f\varphi + g, \tag{2}$$

$$\psi'_t = (a\lambda^2\varphi + 2c\varphi + f)\psi. \tag{3}$$

Уравнение (2) для функции $\varphi = \varphi(t)$ является уравнением Риккати и может быть сведено к линейному уравнению второго порядка. В книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведено много решений этого уравнения для различных функций f и g.

В частности, при $g \equiv 0$ уравнение (2) является уравнением Бернулли, которое легко интегрируется. В другом случае при f, $g = \text{const}$ частное решение уравнения (2) — константа $\varphi = \varphi_0$, которая является корнем квадратного уравнения $c\varphi_0^2 + f\varphi_0 + g = 0$. Подстановка $u = \varphi - \varphi_0$ приводит к уравнению Бернулли.

Если решение уравнения (2) известно, то решение уравнения (3) для функции $\psi = \psi(t)$ определяется по формуле

$$\psi(t) = C\exp\left[\int(a\lambda^2\varphi + 2c\varphi + f)\,dt\right], \tag{4}$$

где C — произвольная постоянная.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных, содержащее гиперболический косинус (A — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\,\mathrm{ch}(\lambda x + A), \quad \lambda = \left(\frac{-c}{a+b}\right)^{1/2}, \tag{5}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f и g не указываются)

$$\varphi'_t = c\varphi^2 - b\lambda^2\psi^2 + f\varphi + g, \tag{6}$$

$$\psi'_t = (a\lambda^2\varphi + 2c\varphi + f)\psi. \tag{7}$$

Из уравнения (7) можно выразить φ через ψ, а затем подставить в (6). В итоге получается нелинейное уравнение второго порядка для функции ψ (при f, $g = \text{const}$ это уравнение является автономным и допускает понижение порядка).

3°. Решение с обобщенным разделением переменных, содержащее гиперболический синус (A — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\,\mathrm{sh}(\lambda x + A), \quad \lambda = \left(\frac{-c}{a+b}\right)^{1/2},$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_t = c\varphi^2 + b\lambda^2\psi^2 + f\varphi + g,$$

$$\psi'_t = (a\lambda^2\varphi + 2c\varphi + f)\psi.$$

4°. Решение с обобщенным разделением переменных, содержащее тригонометрическую функцию (A — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\cos(\lambda x + A), \quad \lambda = \left(\frac{c}{a+b}\right)^{1/2}, \tag{8}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_t = c\varphi^2 + b\lambda^2\psi^2 + f\varphi + g, \tag{9}$$

$$\psi'_t = (-a\lambda^2\varphi + 2c\varphi + f)\psi. \tag{10}$$

Из уравнения (10) можно выразить φ через ψ, а затем подставить в (9). В итоге получается нелинейное уравнение второго порядка для функции ψ (при $f,\ g = \text{const}$ это уравнение является автономным и допускает понижение порядка).

⦿ *Литература*: V. A. Galaktionov (1995), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 425–427).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + g(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w + s(t).$

Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной x:

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f, g, h, s не указываются)

$$\varphi'_t = 2(2f + a)\varphi^2 + h\varphi, \tag{1}$$

$$\psi'_t = (4f\varphi + 2a\varphi + h)\psi + 2g\varphi, \tag{2}$$

$$\chi'_t = (2a\varphi + h)\chi + f\psi^2 + g\psi + s. \tag{3}$$

Уравнение (1) для функции $\varphi = \varphi(t)$ является уравнением Бернулли и легко интегрируется. После этого решения уравнений (2), (3) строятся последовательно (каждое из них линейно относительно искомой функции).

⦿ *Литература*: V. A. Galaktionov (1995), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 427).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + g(x)w\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(x)w^2 + p(t)w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (C — произвольная постоянная):

$$a\varphi\varphi''_{xx} + f(x)(\varphi'_x)^2 + g(x)\varphi\varphi'_x + h(x)\varphi^2 = C\varphi, \tag{1}$$

$$\psi'_t = C\psi^2 + p(t)\psi. \tag{2}$$

Общее решение уравнения (2) определяется формулами

$$\psi(t) = P(t)\left[A - C\int P(t)\,dt\right]^{-1}, \quad P(t) = \exp\left[\int p(t)\,dt\right],$$

где A — произвольная постоянная. В частном случае при $f \equiv 0$ уравнение (1) после сокращения на φ приводится к линейному уравнению второго порядка; о его точных решениях при различных функциях $g(x)$ и $h(x)$ см. книги Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = (aw + b)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + f(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + kw^2 + g(t)w + h(t).$

Преобразование

$$u(z,t) = w(x,t) + \frac{b}{a}, \quad z = x + \int f(t)\,dt$$

приводит к уравнению вида 1.6.10.2 для функции $u = u(z,t)$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = (aw + b)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \big[g_1(t)x + g_0(x)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x} +$
$+ h(t)w + p_2(t)x^2 + p_1(t)x + p_0(t).$

Существует решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по x:

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами, которая здесь не приводится.

1.6.11. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw^4 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)w^5$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x, C_1^4 t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Пусть $u = u(x)$ — любое нетривиальное решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$au''_{xx} + f(x)u = 0. \tag{1}$$

Тогда преобразование

$$\xi = \int \frac{dx}{u^2}, \quad z = \frac{w}{u}$$

упрощает исходное уравнение и приводит его к следующему виду:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = az^4 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}.$$

Используя замену $v = z^{-3}$, получаем уравнение вида 1.1.10.4:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial \xi}\left(v^{-4/3}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right).$$

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = (4\lambda t + C)^{-1/4} g(x),$$

где C, λ — произвольные постоянные, а функция $g = g(x)$ определяется из уравнения Ермакова

$$ag''_{xx} + f(x)g + \lambda g^{-3} = 0. \tag{2}$$

Если известно частное решение $u = u(x)$ линейного уравнения (1), то общее решение нелинейного уравнения (2) имеет вид (см., например, В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001 *a*)

$$Ag^2 = -\frac{\lambda}{a}u^2 + u^2\left(B + A\int \frac{dx}{u^2}\right)^2,$$

где A, B — произвольные постоянные ($A \neq 0$).

⦿ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 427–428).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)w$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2} w(\pm C_1^m x + C_2, t),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Преобразование

$$w(x,t) = F(t)u(x,\tau), \quad \tau = \int F^m(t)\,dt, \quad F(t) = \exp\left[\int f(t)\,dt\right],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.9.20:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = au^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)w^{m+1}$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x, C_1^m t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов (C, λ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = (m\lambda t + C)^{-1/m}\varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi^m \varphi''_{xx} + f(x)\varphi^{m+1} + \lambda\varphi = 0.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=aw^m\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+xf(t)\dfrac{\partial w}{\partial x}+g(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t)=u(z,\tau)G(t),\quad z=xF(t),\quad \tau=\int F^2(t)G^m(t)\,dt,$$

где функции $F(t)$ и $G(t)$ определяются формулами

$$F(t)=\exp\biggl[\int f(t)\,dt\biggr],\quad G(t)=\exp\biggl[\int g(t)\,dt\biggr],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.9.20:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=au^m\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 428).

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=aw^m\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\bigl[f(t)x+g(t)\bigr]\dfrac{\partial w}{\partial x}+h(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t)=u(z,\tau)H(t),\quad z=xF(t)+\int g(t)F(t)\,dt,\quad \tau=\int F^2(t)H^m(t)\,dt,$$

где функции $F(t)$ и $H(t)$ определяются формулами

$$F(t)=\exp\biggl[\int f(t)\,dt\biggr],\quad H(t)=\exp\biggl[\int h(t)\,dt\biggr],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.9.20:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=au^m\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

1.6.12. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)+f(x,t)\dfrac{\partial w}{\partial x}+g(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+f(t).$

Решения с обобщенным разделением переменных, линейные и квадратичные по x:

$$w(x,t)=C_1x+aC_1^2t+C_2+\int f(t)\,dt,$$

$$w(x,t)=-\frac{(x+C_2)^2}{6a(t+C_1)}+C_3(t+C_1)^{-1/3}+(t+C_1)^{-1/3}\int(t+C_1)^{1/3}f(t)\,dt,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Первое решение является вырожденным.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+f(t)w+g(t).$

Частный случай уравнения 1.6.13.4 при $m=1$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+bw^2+f(t)w+g(t).$

Частный случай уравнения 1.6.13.5 при $m=1$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+f(x)w^2.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=C_1w(x,C_1t+C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w=(\lambda t+C)^{-1}\varphi(x),$$

где λ, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a(\varphi\varphi'_x)'_x+f(x)\varphi^2+\lambda\varphi=0.$$

5. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w\frac{\partial w}{\partial x}\right) + f(t)\frac{\partial w}{\partial x} + g(t)w.$

Частный случай уравнения 1.6.13.8 при $m = 1$.

Преобразование

$$w(x,t) = G(t)u(z,\tau), \quad z = x + \int f(t)\,dt, \quad \tau = \int G(t)\,dt, \quad G(t) = \exp\left[\int g(t)\,dt\right],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.10.1:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

6. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w\frac{\partial w}{\partial x}\right) + xf(t)\frac{\partial w}{\partial x} + g(t)w.$

Преобразование

$$w(t,x) = u(z,\tau)G(t), \quad z = xF(t), \quad \tau = \int F^2(t)G(t)\,dt,$$

где функции $F(t)$ и $G(t)$ определяются формулами

$$F(t) = \exp\left[\int f(t)\,dt\right], \quad G(t) = \exp\left[\int g(t)\,dt\right],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.10.1:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

7. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \left[xf(t) + g(t)\right]\frac{\partial w}{\partial x} + h(t)w.$

Частный случай уравнения 1.6.13.10 при $m = 1$.

1.6.13. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t}=a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^m\frac{\partial w}{\partial x}\right)+f(x,t)\frac{\partial w}{\partial x}+g(x,t,w)$

1. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^{-4/3}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + f(x)w^{-1/3}.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x, C_1^{-4/3}t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Замена $w = v^{-3}$ приводит к уравнению вида 1.6.11.1:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = av^4\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \tfrac{1}{3}f(x)v^5.$$

3°. Пусть $u = u(x)$ — любое нетривиальное (частное) решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$au''_{xx} - \tfrac{1}{3}f(x)u = 0.$$

Преобразование

$$\xi = \pm\int\frac{dx}{u^2}, \quad z = wu^3$$

упрощает исходное уравнение и приводит его к уравнению 1.1.10.4:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial \xi}\left(z^{-4/3}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right).$$

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 428).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + f(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = u(x,\tau)F(t), \quad \tau = \int F^m(t)\,dt, \qquad F(t) = \exp\left[\int f(t)\,dt\right],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.10.7:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(u^m \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

При $m = -1$ и $m = -2$ об этом уравнении см. 1.1.10.2 и 1.1.10.3.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + f(t)w^{1-m}.$

Замена $u = w^m$ приводит к уравнению с квадратичной нелинейностью вида 1.6.10.2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a}{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + mf(t),$$

которое допускает решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной x: $u = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + f(t)w + g(t)w^{1-m}.$

Замена $u = w^m$ приводит к уравнению с квадратичной нелинейностью вида 1.6.10.2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a}{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + mf(t)u + mg(t),$$

которое допускает решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной x: $u = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t)$.

⊙ *Литература*: V. A. Galaktionov (1995), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 429).

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bw^{1+m} + f(t)w + g(t)w^{1-m}.$

При $b = 0$ см. уравнение 1.6.13.4.

Замена $u = w^m$ приводит к уравнению с квадратичной нелинейностью вида 1.6.10.1:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a}{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + bmu^2 + mf(t)u + mg(t),$$

которое допускает решения с обобщенным разделением переменных следующих типов:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \varphi(t) + \psi(t)\exp(\pm\lambda x),\\
u(x,t) &= \varphi(t) + \psi(t)\,\mathrm{ch}(\lambda x + C),\\
u(x,t) &= \varphi(t) + \psi(t)\,\mathrm{sh}(\lambda x + C),\\
u(x,t) &= \varphi(t) + \psi(t)\cos(\lambda x + C),
\end{aligned}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, параметр λ является корнем квадратного уравнения, C — произвольная постоянная.

⊙ *Литература*: V. A. Galaktionov (1995), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 429).

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + f(x)w^{1+m}.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x, C_1^m t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w = (\lambda mt + C)^{-1/m}\varphi(x),$$

где λ, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается уравнением

$$a\psi''_{xx} + (m+1)f(x)\psi + \lambda(m+1)\psi^{\frac{1}{m+1}} = 0, \qquad \psi = \varphi^{m+1}.$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведены точные решения этого уравнения для некоторых функций $f(x)$.

7. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^m\frac{\partial w}{\partial x}\right) + g(x)w^{m+1} + f(t)w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (C_1 — произвольная постоянная)

$$a(\varphi^m\varphi'_x)'_x + g(x)\varphi^{m+1} + C_1\varphi = 0,$$
$$\psi'_t - f(t)\psi + C_1\psi^{m+1} = 0.$$

Общее решение второго уравнения имеет вид (C_2 — произвольная постоянная)

$$\psi(t) = e^F\left(C_2 + mC_1\int e^{mF}\,dt\right)^{-1/m}, \quad F = \int f(t)\,dt.$$

8. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^m\frac{\partial w}{\partial x}\right) + f(t)\frac{\partial w}{\partial x} + g(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = u(z,\tau)G(t), \quad z = x + \int f(t)\,dt, \quad \tau = \int G^m(t)\,dt, \quad G(t) = \exp\left[\int g(t)dt\right],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.10.7:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial}{\partial z}\left(u^m\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

9. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^m\frac{\partial w}{\partial x}\right) + xf(t)\frac{\partial w}{\partial x} + g(t)w.$

Преобразование

$$w(t,x) = u(z,\tau)G(t), \quad z = xF(t), \quad \tau = \int F^2(t)G^m(t)\,dt,$$

где функции $F(t)$ и $G(t)$ определяются формулами

$$F(t) = \exp\left[\int f(t)\,dt\right], \quad G(t) = \exp\left[\int g(t)\,dt\right],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.10.7:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial}{\partial z}\left(u^m\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

В частном случае $m = -2$ это уравнение может быть преобразовано к линейному уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами (см. 1.1.10.3).

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 430).

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \bigl[xf(t) + g(t)\bigr]\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = u(z,\tau)H(t), \quad z = xF(t) + \int g(t)F(t)\,dt, \quad \tau = \int F^2(t)H^m(t)\,dt,$$

где функции $F(t)$ и $H(t)$ определяются формулами

$$F(t) = \exp\left[\int f(t)\,dt\right], \quad H(t) = \exp\left[\int h(t)\,dt\right],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.10.7:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial}{\partial z}\left(u^m \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

При $m = -1$ и $m = -2$ об этом уравнении см. 1.1.10.2 и 1.1.10.3.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 434–435).

1.6.14. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + f(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + f(t).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(C_1x + C_2, t) - \frac{2}{\lambda}\ln|C_1|,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Преобразование

$$w(x,t) = u(x,\tau) + F(t), \quad \tau = \int \exp\bigl[\lambda F(t)\bigr]\,dt, \qquad F(t) = \int f(t)\,dt,$$

приводит к более простому уравнению вида 1.2.2.1:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda u}\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 74).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + f(t) + g(t)e^{-\lambda w}.$

Замена $u = e^{\lambda w}$ приводит к уравнению с квадратичной нелинейностью вида 1.6.9.2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda f(t)u + \lambda g(t),$$

которое допускает решения с обобщенным разделением переменных, линейные и квадратичные по переменной x.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + f(x) + (bx + c)e^{-\lambda w}.$

Замена $u = e^{\lambda w}$ приводит к уравнению вида 1.6.9.1:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda f(x)u + \lambda(bx + c),$$

которое допускает решение с обобщенным разделением переменных вида $u = \lambda(bx+c)t + \varphi(x)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + be^{\lambda w} + f(t) + g(t)e^{-\lambda w}.$

При $b = 0$ см. уравнение 1.6.14.2.

Замена $u = e^{\lambda w}$ приводит к уравнению с квадратичной нелинейностью вида 1.6.10.1:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu^2 + \lambda f(t)u + \lambda g(t).$$

которое допускает решения с обобщенным разделением переменных следующих типов:

$$u(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp(\pm\mu x),$$
$$u(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\operatorname{ch}(\mu x + C),$$
$$u(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\operatorname{sh}(\mu x + C),$$
$$u(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\cos(\mu x + C),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, параметр μ является корнем квадратного уравнения, C — произвольная постоянная.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 430–431).

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + f(x)e^{\lambda w}.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x, C_1 t + C_2) + \frac{1}{\lambda}\ln C_1,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w = -\frac{1}{\lambda}\ln(\lambda t + C) + \varphi(x),$$

где λ, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$a\psi''_{xx} + \lambda f(x)\psi + \lambda = 0, \qquad \psi = e^{\lambda\varphi}.$$

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 431).

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + g(x)e^{\lambda w} + f(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w = \varphi(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (C_1 — произвольная постоянная)

$$a(e^{\lambda\varphi}\varphi'_x)'_x + g(x)e^{\lambda\varphi} + C_1 = 0, \tag{1}$$
$$\psi'_t - f(t) + C_1 e^{\lambda\psi} = 0. \tag{2}$$

Уравнение (1) заменой $U = e^{\lambda\varphi}$ приводится к линейному уравнению $aU''_{xx} + \lambda g(x)U + \lambda C_1 = 0$. Общее решение уравнения (2) имеет вид (C_2 — произвольная постоянная)

$$\psi(t) = F - \frac{1}{\lambda}\ln\left(C_2 + \lambda C_1\int e^{\lambda F}\,dt\right), \qquad F = \int f(t)\,dt.$$

1.6.15. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + g\left(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right].$

Это уравнение часто встречается в нелинейных задачах тепло- и массопереноса (f — коэффициент температуропроводности или диффузии) и теории фильтрации. При $f(w) = aw^m$ см. разд. 1.1.10; при $f(w) = e^{\lambda w}$ см. уравнение 1.2.2.1; при $f(w) = a\ln w + b$ см. уравнение 1.4.2.7.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(C_1 x + C_2, C_1^2 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$k^2 \int \frac{f(w)\,dw}{\lambda w + C_1} = kx + \lambda t + C_2, \tag{1}$$

где C_1, C_2, k, λ — произвольные постоянные. Значению $\lambda = 0$ соответствует стационарное решение.

3°. Автомодельное решение:

$$w = w(z), \quad z = \frac{x}{\sqrt{t}} \qquad (0 \leqslant x < \infty),$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\bigl[f(w)w'_z\bigr]'_z + \tfrac{1}{2} z w'_z = 0. \tag{2}$$

Решения указанного вида обычно соответствуют постоянным значениям w в начальных и граничных условиях для исходного уравнения в частных производных (w_0, $w_1 = \mathrm{const}$):

$$\begin{aligned} &w = w_0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad &&\text{(начальное условие)},\\ &w = w_1 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad &&\text{(граничное условие)},\\ &w \to w_0 \quad \text{при} \quad x \to \infty \quad &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

При этом граничные условия для обыкновенного дифференциального уравнения (2) имеют вид

$$w = w_1 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad w \to w_0 \quad \text{при} \quad z \to \infty. \tag{3}$$

При $f(w) = aw^{-1}$, $f(w) = aw^{-2}$, $f(w) = (\alpha w^2 + \beta w + \gamma)^{-1}$ общие решения уравнения (2) получил Х. Фуджита (H. Fujita, 1952). Об этих решениях см. книгу А. В. Лыкова (1967).

4°. Опишем простой способ поиска функций $f(w)$, для которых уравнение (2) допускает точное решение. Для этого проинтегрируем уравнение (2) по z, а затем сделаем преобразование годографа (переменную w будем считать независимой, а z — зависимой). В результате получим

$$f(w) = -\frac{1}{2} z'_w \biggl(\int z\,dw + A\biggr), \qquad A \text{ — произвольная постоянная.} \tag{4}$$

Подставляя в правую часть формулы (4) конкретную зависимость $z = z(w)$, будем получать однопараметрическое семейство функций $f(w)$, для которых уравнение (2) имеет решение $z = z(w)$. Явный вид решения $w = w(z)$ находится обращением зависимости $z = z(w)$.

Описанный метод разработал Ж. Филип (J. R. Philip, 1960), который получил большое число точных решений исходного уравнения для различных зависимостей $f = f(w)$. Некоторые его результаты, соответствующие задаче с начальным и граничными условиями (3) при $w_0 = 0$, $w_1 = 1$, приведены в табл. 1. Все решения записаны в неявном виде $z = z(w)$ в области их пространственной локализации $0 \leqslant w \leqslant 1$.

5°. Опишем другой простой способ поиска функций $f(w)$, для которых уравнение (2) допускает точное решение. Прямой проверкой можно убедиться, что уравнение (2) удовлетворяется, если положить

$$w = \phi'_z, \quad f(w) = \frac{s + \phi - z\phi'_z}{2\phi''_{zz}}, \tag{5}$$

где $\phi = \phi(z)$ — произвольная функция, s — произвольная постоянная. Выражения (5) представляют собой параметрическую форму задания зависимости $f = f(w)$, которая получается после исключения z.

Полагая, например, в формулах (5)

$$\phi(z) = w_0 z + \frac{1}{\lambda}(w_0 - w_1)e^{-\lambda z} \qquad (\lambda > 0,\ w_1 > w_0),$$

после исключения z находим

$$f(w) = \frac{A}{w - w_0} + B + C\ln(w - w_0), \quad w = w_0 + (w_1 - w_0)e^{-\lambda z},$$

где $A = -\frac{1}{2}s\lambda^{-1}$, $B = \frac{1}{2}\lambda^{-2}\bigl[1 + \ln(w_1 - w_0)\bigr]$, $C = -\frac{1}{2}\lambda^{-2}$. Отметим, что это решение удовлетворяет граничным условиям (3). Аналогичным образом могут быть построены и другие функции $f(w)$.

ТАБЛИЦА 1

Точные решения уравнения 1.6.13.1 для различных зависимостей $f = f(w)$, где $z = xt^{-1/2}$.

№	Функция $f = f(w)$	Решение $z = z(w)$	Условия
1	$\dfrac{n}{2}w^n - \dfrac{n}{2(n+1)}w^{2n}$	$1 - w^n$	$n > 0$
2	$\dfrac{n}{2(n+1)}\bigl[(1-w)^{n-1} - (1-w)^{2n}\bigr]$	$(1-w)^n$	$n > 0$
3	$\dfrac{n}{2(1-n)}w^{-2n} - \dfrac{n}{2}w^{-n}$	$w^{-n} - 1$	$0 < n < 1$
4	$\frac{1}{2}\sin^2\bigl(\frac{1}{2}\pi w\bigr)$	$\cos\bigl(\frac{1}{2}\pi w\bigr)$	
5	$\frac{1}{8}\sin(\pi w)\bigl[\pi w + \sin(\pi w)\bigr]$	$\cos^2\bigl(\frac{1}{2}\pi w\bigr)$	
6	$\frac{1}{16}\sin^2(\pi w)\bigl[5 + \cos(\pi w)\bigr]$	$\cos^3\bigl(\frac{1}{2}\pi w\bigr)$	
7	$\frac{1}{2}\cos\bigl(\frac{1}{2}\pi w\bigr)\bigl[\cos\bigl(\frac{1}{2}\pi w\bigr) + \frac{1}{2}\pi w - 1\bigr]$	$1 - \sin\bigl(\frac{1}{2}\pi w\bigr)$	
8	$\dfrac{w\arccos w + 1}{2\sqrt{1-w^2}} - \dfrac{1}{2}$	$\arccos w$	
9	$\dfrac{\pi - 2(1-w)\arcsin(1-w)}{4\sqrt{2w-w^2}} - \dfrac{1}{2}$	$\arcsin(1-w)$	
10	$\dfrac{w\arcsin w}{4\sqrt{1-w^2}} + \dfrac{1}{4}w^2$	$\sqrt{1-w^2}$	
11	$\frac{1}{2}(1 - \ln w)$	$-\ln w$	

6°. Еще один способ построения функций $f(w)$, для которых уравнение (2) допускает точное решение, заключается в следующем. Пусть $\bar{w} = \bar{w}(z)$ — некоторое решение уравнения (2) с функцией $f(w)$. Тогда $\bar{w} = \bar{w}(z)$ будет также решением и более сложного уравнения $\bigl[F(w)w'_z\bigr]'_z + \frac{1}{2}zw'_z = 0$ при

$$F(w) = f(w) + Ag(w) \qquad (A \text{ — произвольная постоянная}), \tag{6}$$

где функция $g = g(w)$ задается параметрически формулами

$$g(w) = \frac{1}{\bar{w}'_z}, \quad w = \bar{w}(z). \tag{7}$$

Например, для степенной зависимости $f(w) = aw^m$ частным решением уравнения (2) будет функция $\bar{w} = bz^{2/m}$, где b — некоторая константа. Из формул (6), (7) получим, что $\bar{w}$ будет также являться решением уравнения (2) и при $f(w) = aw^m + Aw^{\frac{m-2}{2}}$.

Для первого решения, приведенного в табл. 1, этот метод дает однопараметрическое семейство функций

$$f(w) = \frac{n}{2}w^n - \frac{n}{2(n+1)}w^{2n} + Aw^{n-1},$$

для которых уравнение (2) имеет решение $z = 1 - w^n$.

7°. Преобразование

$$\bar{t} = t - t_0, \quad \bar{x} = \int_{x_0}^{x} w(y,t)\,dy + \int_{t_0}^{t} f\bigl(w(x_0,\tau)\bigr)\left[\frac{\partial w}{\partial x}(x,\tau)\right]_{x=x_0} d\tau, \quad \bar{w}(\bar{x},\bar{t}) = \frac{1}{w(x,t)} \tag{8}$$

переводит ненулевое решение $w(x,t)$ исходного уравнения в решение $\bar{w}(\bar{x},\bar{t})$ уравнения аналогичного вида

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left[\bar{f}(\bar{w})\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\right], \qquad \bar{f}(w) = \frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right). \tag{9}$$

В частном случае степенной зависимости $f(w) = aw^m$ преобразование (8) приводит к уравнению (9), где $\bar{f}(w) = aw^{-m-2}$.

8°. Рассматриваемое уравнение записано в виде закона сохранения (в консервативном виде). Дополнительный закон сохранения:

$$\frac{\partial}{\partial t}(xw) + \frac{\partial}{\partial x}\left[F(w) - xf(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] = 0,$$

где $F(w) = \int f(w)\,dw$.

9°. При $f(w) = a(w^2 + b)^{-1}$ см. уравнение 1.1.13.2.

⦿ *Литература для уравнения* 1.6.15.1: Л. В. Овсянников (1959, 1962, 1978), В. А. Дородницын, С. Р. Свирщевский (1983), W. Strampp (1982), J. R. Burgan, A. Munier, M. R. Feix, E. Fijalkow (1984), А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1995), N. H. Ibragimov (1994, pp. 110, 118, 119), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 435–438), P. W. Doyle, P. J. Vassiliou (1998).

2. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + g(w).$

Это уравнение описывает нестационарную теплопроводность в неподвижной среде, когда коэффициент температуропроводности и скорость реакции являются произвольными функциями температуры.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm x + C_1, t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решения типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = \pm x + \lambda t,$$

где функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[f(w)w'_z]'_z - \lambda w'_z + g(w) = 0. \tag{1}$$

Подстановка

$$y(w) = \frac{1}{\lambda} f(w) w'_z$$

приводит уравнение (1) к уравнению Абеля второго рода:

$$yy'_w - y = \varphi(w), \qquad \text{где} \quad \varphi(w) = -\lambda^{-2} f(w) g(w). \tag{2}$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) указано много точных решений уравнения (2) для различных зависимостей $\varphi = \varphi(w)$.

3°. Пусть функция $f = f(w)$ задается произвольно, а функция $g = g(w)$ определяется по формуле

$$g(w) = \frac{A}{f(w)} + B,$$

где A, B — некоторые числа. В этом случае существует решение с функциональным разделением переменных, которое задается неявно

$$\int f(w)\,dw = At - \frac{1}{2}Bx^2 + C_1 x + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4°. Пусть функция $g = g(w)$ задается произвольно, а функция $f = f(w)$ определяется по формулам

$$f(w) = \frac{A_1 A_2 w + B}{g(w)} + \frac{A_2 A_3}{g(w)} \int Z\,dw, \tag{3}$$

$$Z = -A_2 \int \frac{dw}{g(w)}, \tag{4}$$

где A_1, A_2, A_3 — некоторые числа. В этом случае существуют точные решения типа обобщенной бегущей волны следующего вида:

$$w = w(Z), \quad Z = \frac{\pm x + C_2}{\sqrt{2A_3 t + C_1}} - \frac{A_1}{A_3} - \frac{A_2}{3A_3}(2A_3 t + C_1),$$

где функция $w(Z)$ определяется путем обращения зависимости (4), C_1, C_2 — произвольные постоянные.

5°. Пусть функция $g = g(w)$ задается произвольно, а функция $f = f(w)$ определяется по формулам

$$f(w) = \frac{1}{g(w)}\left(A_1 w + A_3 \int Z\,dw\right)\exp\left[-A_4 \int \frac{dw}{g(w)}\right], \tag{5}$$

$$Z = \frac{1}{A_4}\exp\left[-A_4 \int \frac{dw}{g(w)}\right] - \frac{A_2}{A_4}, \tag{6}$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — некоторые числа ($A_4 \neq 0$). В этом случае существуют точные решения типа обобщенной бегущей волны следующего вида:

$$w = w(Z), \quad Z = \varphi(t)x + \psi(t),$$

где функция $w(Z)$ определяется путем обращения зависимости (6), а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются по формулам

$$\varphi(t) = \pm\left(C_1 e^{2A_4 t} - \frac{A_3}{A_4}\right)^{-1/2}, \quad \psi(t) = -\varphi(t)\left[A_1 \int \varphi(t)\,dt + A_2 \int \frac{dt}{\varphi(t)} + C_2\right];$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные.

6°. Пусть функция $f = f(w)$ задается произвольно, а функция $g = g(w)$ имеет вид

$$g(w) = \left(\frac{a}{f(w)} + b\right)\left(\int f(w)\,dw + c\right),$$

где a, b, c — любые. Тогда существуют решения с функциональным разделением переменных, задаваемые в неявном виде формулой

$$\int f(w)\,dw + c = e^{at} z(x),$$

где

$$\begin{aligned}
z(x) &= C_1 \exp\bigl(x\sqrt{|b|}\,\bigr) + C_2 \exp\bigl(-x\sqrt{|b|}\,\bigr) && \text{при } b < 0,\\
z(x) &= C_1 \cos\bigl(x\sqrt{b}\,\bigr) + C_2 \sin\bigl(x\sqrt{b}\,\bigr) && \text{при } b > 0,\\
z(x) &= C_1 x + C_2 && \text{при } b = 0,
\end{aligned}$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные.

7°. Пусть функции $f(w)$ и $g(w)$ задаются по формулам

$$f(w) = w\varphi'_w(w), \quad g(w) = a\left[w + 2\frac{\varphi(w)}{\varphi'_w(w)}\right],$$

где $\varphi(w)$ — произвольная функция, a — любое число. В этом случае существуют решения с функциональным разделением переменных, которые задаются неявно

$$\varphi(w) = C_1 e^{2at} - \tfrac{1}{2}a(x + C_2)^2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

8°. Пусть функции $f(w)$ и $g(w)$ задаются по формулам

$$f(w) = A\frac{V(z)}{V'_z(z)}, \quad g(w) = B\bigl[2z^{-1/2}V'_z(z) + z^{-3/2}V(z)\bigr],$$

где A, B — произвольные постоянные ($AB \neq 0$), $V(z)$ — произвольная функция, а функция $z = z(w)$ задается неявно формулой

$$w = \int z^{-1/2} V'_z(z)\,dz + C_1; \tag{7}$$

C_1 — произвольная постоянная. Тогда существуют решение с функциональным разделением переменных вида (7), где

$$z = -\frac{(x + C_3)^2}{4At + C_2} + 2Bt + \frac{BC_2}{2A},$$

C_2, C_3 — произвольные постоянные.

9°. Групповая классификация уравнений данного вида проведена в работах В. А. Дородницына (1979, 1982); см. также В. А. Дородницын, С. Р. Свирщевский (1983), В. А. Галактионов, В. А. Дородницын, Г. Г. Еленин, С. П. Курдюмов, А. А. Самарский (1986), N. H. Ibragimov (1994). В результате удалось выделить лишь конечное число уравнений, обладающих симметриями, отличными от переносов. Сказанное означает, что групповой анализ не позволяет получить решения, приведенные выше в пп. 3° — 8° (для уравнений, содержащих функциональный произвол).

10°. При $f = dF(w)/dw$ и $g = aF(w) + bw + c$, где $F(w)$ — произвольная функция, a, b, c — произвольные постоянные, имеется закон сохранения

$$\bigl[e^{-bt}p(x)w\bigr]_t + \bigl\{e^{-bt}\bigl[p(x)_x F(w) - p(x)(F(w))_x + \varphi(x)\bigr]\bigr\}_x = 0.$$

Здесь

$$p(x) = \begin{cases} C_1\sin(\sqrt{a}x) + C_2\cos(\sqrt{a}x) & \text{при } a > 0,\\ C_1 e^{\sqrt{-a}x} + C_2 e^{-\sqrt{-a}x} & \text{при } a < 0,\\ C_1 x + C_2 & \text{при } a = 0, \end{cases}$$

где $\varphi'_x = cp(x)$; C_1, C_2 — произвольные постоянные.

11°. Конкретные уравнения данного вида см. в разд. 1.1.1–1.1.3, 1.1.11–1.1.13, 1.2.1–1.2.3 и 1.4.1.

⊙ *Литература для уравнения* 1.6.15.2: В. А. Дородницын (1979, 1982), В. А. Галактионов (1994), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 107–108), А. Д. Полянин, Е. А. Вязьмина (2005), Е. А. Вязьмина, А. Д. Полянин (2006).

3. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{g(t)}{f(w)} + h(x).$

Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$\int f(w)\,dw = \int g(t)\,dt - \int_{x_0}^{x}(x-\xi)h(\xi)\,d\xi + C_1x + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, x_0 — некоторая постоянная.

4. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] - (ax+b)\frac{\partial w}{\partial x}.$

Это уравнение описывает нестационарный тепло- и массоперенос в неоднородном потоке жидкости при произвольной зависимости коэффициента температуропроводности от температуры.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + C_1e^{at}, t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w = w(z), \qquad z = x + C_1e^{at},$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[f(w)w'_z]'_z - (az+b)w'_z = 0.$$

3°. Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$\int f(w)\,dw = C_1e^{-at}(ax+b) + C_2.$$

4°. Переходя от t, x к новым переменным

$$\tau = \frac{1}{2a}\bigl(1 - e^{-2at}\bigr), \qquad \zeta = e^{-at}\left(x + \frac{b}{a}\right),$$

для функции $w(\zeta,\tau)$ получим более простое уравнение вида 1.6.15.1:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right].$$

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 109).

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + g(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

1°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$k^2 \int \frac{f(w)\,dw}{\lambda w - kG(w) + C_1} = kx + \lambda t + C_2, \qquad G(w) = \int g(w)\,dw,$$

где C_1, C_2, k, λ — произвольные постоянные.

2°. Преобразование по решению

$$dz = w\,dx + \bigl[f(w)w_x + G(w)\bigr]\,dt, \quad d\tau = dt, \quad u = 1/w \qquad \bigl(dz = z_x\,dx + z_t\,dt\bigr)$$

приводит это уравнение к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\Phi(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right] + \Psi(u)\frac{\partial u}{\partial z},$$

где

$$\Phi(u) = \frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u}\right), \quad \Psi(u) = \frac{1}{u} g\left(\frac{1}{u}\right) - G\left(\frac{1}{u}\right), \quad G(w) = \int g(w)\,dw.$$

Пример. При $f(w) = a$ и $g(w) = bw$ исходное уравнение представляет собой ненормированное уравнение Бюргерса 1.1.5.3. Указанное преобразование приводит его к разрешимому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{a}{u^2}\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{b}{2u^2}\frac{\partial u}{\partial z},$$

которое рассматривалось в работе A. S. Fokas, Y. C. Yortsos (1982).

3°. Пусть функции $f(w)$ и $g(w)$ определяются по формулам

$$f(w) = Z'_w\left(A_1 w + A_3 \int Z\,dw\right), \qquad g(w) = A_2 + A_4 Z,$$

где

$$Z = Z(w) \tag{1}$$

есть некоторая заданная функция (выбирается произвольным образом). Тогда исходное уравнение имеет решение типа обобщенной бегущей волны

$$w = w(Z), \qquad Z = \varphi(t)x + (A_2 t + C_1)\varphi(t) + A_1\varphi(t)\int \varphi(t)\,dt,$$

где C_1 — произвольная постоянная, функция $w(Z)$ определяется обращением формулы (1), а функция $\varphi(t)$ задается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t = A_3\varphi^3 + A_4\varphi^2, \tag{2}$$

общее решение которого можно записать в неявном виде.

В частных случаях решения уравнения (2) имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= (C_2 - 2A_3 t)^{-1/2} && \text{при } A_4 = 0, \\ \varphi(t) &= (C_2 - A_4 t)^{-1} && \text{при } A_3 = 0. \end{aligned}$$

4°. Закон сохранения:

$$D_t(w) + D_x\bigl[-f(w)w_x - G(w)\bigr] = 0, \qquad G(w) = \int g(w)\,dw.$$

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 109–110).

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + g(t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Это уравнение описывает нестационарную теплопроводность в движущейся среде, когда коэффициент температуропроводности является произвольной функцией температуры.

Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \int g(t)\,dt$, получим более простое уравнение вида 1.6.15.1:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial z}\right].$$

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + xg(t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Переходя от t, x к новым переменным (A, B — произвольные постоянные)

$$\tau = \int G^2(t)\,dt + A, \quad z = xG(t), \qquad \text{где} \quad G(t) = B\exp\left[\int g(t)\,dt\right],$$

для функции $w(\tau, z)$ получим более простое уравнение вида 1.6.15.1:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial z}\right].$$

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + \left[xg(t) + h(t)\right]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Преобразование

$$w = U(z,\tau), \quad z = xG(t) + \int h(t)G(t)\,dt, \quad \tau = \int G^2(t)\,dt, \quad G(t) = \exp\left[\int g(t)\,dt\right],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.6.15.1:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z}\left[f(U)\frac{\partial U}{\partial z}\right].$$

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 441).

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + g(w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(w).$

Это уравнение при $g \equiv \text{const}$ описывает нестационарную теплопроводность в движущейся с постоянной скоростью среде, когда коэффициент температуропроводности и скорость реакции являются произвольными функциями температуры.

Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[f(w)w'_z]'_z + [g(w) - \lambda]w'_z + h(w) = 0. \tag{1}$$

Подстановка $y(w) = f(w)w'_z$ приводит (1) к уравнению Абеля

$$yy'_w + [g(w) - \lambda]y + f(w)h(w) = 0. \tag{2}$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *а*) приведено много точных решений уравнения (2) для различных функций f, g, h.

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + \left[ax + g(w)\right]\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(w).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + C_1e^{-at}, t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + C_1e^{-at},$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[f(w)w'_z]'_z + [az + g(w)]w'_z + h(w) = 0.$$

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 111).

1.6.16. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = f(x,w)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

1. $\frac{\partial w}{\partial t} = f(x)w^m \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x, C_1^m t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = (m\lambda t + C)^{-1/m}\varphi(x),$$

где C, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ определяется из обобщенного уравнения Эмдена — Фаулера

$$\varphi''_{xx} + \lambda\big[f(x)\big]^{-1}\varphi^{1-m} = 0. \qquad (1)$$

При $m=1$ общее решение уравнения (1) имеет вид

$$\varphi(x) = -\lambda\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)}{f(\xi)}\,d\xi + Ax + B,$$

где A, B — произвольные постоянные (x_0 — любое число, для которого данный интеграл имеет смысл).

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведено много точных решений уравнения (1) для различных функций $f(x)$.

3°. Преобразование $u = w/x$, $\xi = 1/x$ приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(\xi)u^m\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \qquad F(\xi) = \xi^{4-m} f(1/\xi).$$

2. $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{f(x)}{aw+b}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по переменной t:

$$w(x,t) = \frac{1}{a}\big[\varphi(x)t + \psi(x) - b\big],$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f(x)\varphi''_{xx} - \varphi^2 = 0,$$
$$f(x)\psi''_{xx} - \varphi\psi = 0.$$

Первое уравнение рассматривается независимо от второго. Второе уравнение имеет частное решение $\psi(x) = \varphi(x)$, поэтому его общее решение определяется формулой

$$\psi(x) = C_1\varphi(x) + C_2\varphi(x)\int\frac{dx}{\varphi^2(x)},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3. $\frac{\partial w}{\partial t} = f(w)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(C_1 x + C_2, C_1^2 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$k^2\int\frac{dw}{\lambda F(w) + C_1} = kx + \lambda t + C_2, \qquad F(w) = \int\frac{dw}{f(w)},$$

где C_1, C_2, k, λ — произвольные постоянные.

3°. Автомодельное решение:

$$w = U(z), \quad z = \frac{x + C_1}{\sqrt{C_2 t + C_3}},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функция $U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(U)U''_{zz} + \tfrac{1}{2}C_2 z U'_z = 0.$$

4°. Замена $u = \displaystyle\int \frac{dw}{f(w)}$ приводит к уравнению вида 1.6.15.1:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[F(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right],$$

где функция F задается параметрически

$$F(u) = f(w), \quad u = \int \frac{dw}{f(w)}.$$

Для получения явной зависимости $F = F(u)$ из этих формул следует исключить w.

5°. Законы сохранения:

$$D_t(u) + D_x(-w_x) = 0,$$
$$D_t(xu) + D_x(w - xw_x) = 0,$$

где $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$; w_x — частная производная w по x; величина u определена в п. 4°.

4. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = x^4 f\left(\frac{w}{x}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Преобразование $u = w/x$, $\xi = 1/x$ приводит к более простому уравнению вида 1.6.16.3:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$

5. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = w^4 f\left(\frac{w}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

В результате преобразования

$$w(x,t) = u(z,t)\sqrt{ax^2 + bx + c}, \quad z = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

получим более простое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^4 f(u)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(ac - \tfrac{1}{4}b^2\right)u^5 f(u),$$

которое имеет точное решение типа бегущей волны $u = u(z + \lambda t)$.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 432).

1.6.17. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x,t,w)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g\left(x,t,w,\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$

1. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = f(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - aw^3.$

1°. Точные решения в виде произведения функций разных аргументов при $a > 0$:

$$w(x,t) = C\exp\left[\pm x\sqrt{a} + a\int f(t)\,dt\right],$$

где C — произвольная постоянная.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов при $a > 0$:

$$w(x,t) = \left(C_1 e^{x\sqrt{a}} + C_2 e^{-x\sqrt{a}}\right)e^F\left(C_3 + 8aC_1C_2\int e^{2F}\,dt\right)^{-1/2}, \quad F = a\int f(t)\,dt,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов при $a<0$:

$$w(x,t)=\left[C_1\sin\left(x\sqrt{|a|}\right)+C_2\cos\left(x\sqrt{|a|}\right)\right]e^F\left[C_3+2a(C_1^2+C_2^2)\int e^{2F}\,dt\right]^{-1/2},$$

где $F=a\int f(t)\,dt$; C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=f(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+g(t)w+h_2(t)x^2+h_1(t)x+h_0(t)$.

Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной x:

$$w(x,t)=\varphi(t)x^2+\psi(t)x+\chi(t),$$

где функции $\varphi=\varphi(t)$, $\psi=\psi(t)$, $\chi=\chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\varphi_t'&=6f(t)\varphi^2+g(t)\varphi+h_2(t),\\
\psi_t'&=6f(t)\varphi\psi+g(t)\psi+h_1(t),\\
\chi_t'&=2f(t)\varphi\chi+f(t)\psi^2+g(t)\chi+h_0(t).
\end{aligned}$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t}+f(t)w\dfrac{\partial w}{\partial x}=g(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$.

Вырожденное решение, линейное по x:

$$w(x,t)=\frac{1}{F(t)}\left[x+\int\frac{g(t)}{F(t)}\,dt+C_1\right],\qquad F(t)=\int f(t)\,dt+C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t}+f(t)w\dfrac{\partial w}{\partial x}=g(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^2\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$.

Вырожденное решение, линейное по x:

$$w(x,t)=(x+C_1)\varphi(t),$$

где функция $\varphi=\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi_t'=2g(t)\varphi^3-f(t)\varphi^2.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(x)w^m\dfrac{\partial w}{\partial x}\right]$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=C_1w(x,C_1^mt+C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t)=(m\lambda t+C)^{-1/m}\varphi(x),$$

где C, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi=\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[f(x)\varphi^m\varphi_x']_x'+\lambda\varphi=0. \tag{1}$$

Преобразование

$$z=\int\frac{dx}{f(x)},\qquad \Phi=\varphi^{m+1}$$

приводит (1) к обобщенному уравнению Эмдена — Фаулера

$$\Phi_{zz}''+F(z)\Phi^{\frac{1}{m+1}}=0, \tag{2}$$

где функция $F=F(z)$ задается параметрически с помощью формул

$$F=\lambda(m+1)f(x),\qquad z=\int\frac{dx}{f(x)}.$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*, разделы 2.3 и 2.7) приведено много точных решений уравнения (2) для различных функций $F=F(z)$.

3°. Преобразование

$$w(x,t)=\bigl[\psi(x)\bigr]^{\frac{1}{m+1}}u(\xi,t),\quad \xi=-\int\bigl[\psi(x)\bigr]^{\frac{m+2}{m+1}}dx,\qquad \psi(x)=\int\frac{dx}{f(x)},$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left[F(\xi)u^m\frac{\partial u}{\partial\xi}\right],$$

где функция $F=F(\xi)$ задается параметрически с помощью формул

$$F=f(x)[\psi(x)]^{\frac{3m+4}{m+1}},\quad \xi=-\int\bigl[\psi(x)\bigr]^{\frac{m+2}{m+1}}dx,\qquad \psi(x)=\int\frac{dx}{f(x)}.$$

6. $\boldsymbol{\dfrac{\partial w}{\partial t}=f(x)w^m\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+g(x)w^{m+1}}$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=C_1w(x,C_1^mt+C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов (C, λ — произвольные постоянные):

$$w(x,t)=(m\lambda t+C)^{-1/m}\varphi(x),$$

где функция $\varphi=\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(x)\varphi^m\varphi''_{xx}+g(x)\varphi^{m+1}+\lambda\varphi=0. \tag{1}$$

В частном случае $f(x)=ax^n$, $g(x)=bx^k$ уравнение (1) имеет вид

$$\varphi''_{xx}+(b/a)x^{k-n}\varphi+(\lambda/a)x^{-n}\varphi^{1-m}=0. \tag{2}$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведено много точных решений уравнения (2) для различных значений параметров n, m, k.

7. $\boldsymbol{\dfrac{\partial w}{\partial t}=f(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+g(t)w^{1-m}}$.

Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t)=\bigl[\varphi(t)x^2+\psi(t)\bigr]^{1/m},$$

где функции $\varphi=\varphi(t)$ и $\psi=\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_t=\frac{2(m+2)}{m}f\varphi^2,\qquad \psi'_t=2f\varphi\psi+mg.$$

Интегрируя, получим

$$\varphi=\frac{1}{F},\quad \psi=F^{-\frac{m}{m+2}}\left(A+m\int gF^{\frac{m}{m+2}}\,dt\right),$$

$$F=B-\frac{2(m+2)}{m}\int f\,dt,$$

где A, B — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 433).

8. $\boldsymbol{\dfrac{\partial w}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(x)w^m\dfrac{\partial w}{\partial x}\right]+g(x)w^{m+1}}$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=C_1w(x,C_1^mt+C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов (C, λ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = (m\lambda t + C)^{-1/m}\varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[f(x)\varphi^m \varphi'_x]'_x + g(x)\varphi^{m+1} + \lambda\varphi = 0. \qquad (1)$$

Преобразование

$$z = \int \frac{dx}{f(x)}, \quad \Phi = \varphi^{m+1}$$

приводит (1) к уравнению

$$\Phi''_{zz} + F(z)\Phi^{\frac{1}{m+1}} + G(z)\Phi = 0, \qquad (2)$$

где функции $F = F(z)$ и $G = G(z)$ задаются параметрически с помощью формул

$$\begin{cases} F = \lambda(m+1)f(x), \\ z = \displaystyle\int \frac{dx}{f(x)}, \end{cases} \qquad \begin{cases} G = (m+1)f(x)g(x), \\ z = \displaystyle\int \frac{dx}{f(x)}. \end{cases}$$

В частном случае $f(x) = ax^n$, $g(x) = bx^k$ уравнение (2) имеет вид

$$\Phi''_{zz} + Az^{\frac{n}{1-n}}\Phi^{\frac{1}{m+1}} + Bz^{\frac{n+k}{1-n}}\Phi = 0, \qquad n \neq 1, \qquad (3)$$

где $A = \lambda a(m+1)\bigl[a(1-n)\bigr]^{\frac{n}{1-n}}$, $B = ab(m+1)\bigl[a(1-n)\bigr]^{\frac{n+k}{1-n}}$.

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведено много точных решений уравнения (3) для различных значений параметров n, m, k.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 434).

9. $\displaystyle\frac{\partial w}{\partial t} = f(t)\frac{\partial}{\partial x}\left(w^m \frac{\partial w}{\partial x}\right) + g(t)\frac{\partial w}{\partial x} + h(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = u(z,\tau)\exp\left[\int h(t)\,dt\right], \quad z = x + \int g(t)\,dt, \quad \tau = \int f(t)\exp\left[m\int h(t)dt\right]dt$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.10.7:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z}\left(u^m \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

10. $\displaystyle\frac{\partial w}{\partial t} = f(t)\frac{\partial}{\partial x}\left(w^m \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \bigl[xg(t) + h(t)\bigr]\frac{\partial w}{\partial x} + s(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = u(z,\tau)S(t), \quad z = xG(t) + \int h(t)G(t)\,dt, \quad \tau = \int f(t)G^2(t)S^m(t)\,dt,$$

где функции $S(t)$ и $G(t)$ определяются по формулам

$$S(t) = \exp\left[\int s(t)\,dt\right], \quad G(t) = \exp\left[\int g(t)\,dt\right],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.10.7:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z}\left(u^m \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 434–435).

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = x^k f(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + xg(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w.$

Преобразование

$$w(t,x) = u(z,\tau)H(t), \quad z = xG(t), \quad \tau = \int f(t)G^{2-k}(t)H^m(t)\,dt,$$

где функции $G(t)$ и $H(t)$ определяются по формулам

$$G(t) = \exp\left[\int g(t)\,dt\right], \quad H(t) = \exp\left[\int h(t)\,dt\right],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.15.6:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = z^k \frac{\partial}{\partial z}\left(u^m \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 440).

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(x)e^{\beta w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right].$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x, C_1 t + C_2) + \frac{1}{\beta}\ln C_1,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = -\frac{1}{\beta}\ln(\beta t + C) + \frac{1}{\beta}\ln\left[\int \frac{A - \beta x}{f(x)}\,dx + B\right],$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(x)e^{\beta w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + g(x)e^{\beta w}.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x, C_1 t + C_2) + \frac{1}{\beta}\ln C_1,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = -\frac{1}{\beta}\ln(\beta t + C) + \varphi(x),$$

где β, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$[f(x)\psi'_x]'_x + \beta g(x)\psi + \beta = 0, \qquad \psi = e^{\beta\varphi}.$$

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 435).

14. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\left[f_2(t)w^{2n} + f_1(t)w^n\right]\dfrac{\partial w}{\partial x}\right\} + g_1(t)w + g_2(t)w^{1-n}.$

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \left[\varphi(t)x + \psi(t)\right]^{1/n},$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t = \frac{(n+1)}{n} f_2(t)\varphi^3 + ng_1(t)\varphi,$$
$$\psi'_t = \frac{(n+1)}{n} f_2(t)\varphi^2\psi + ng_1(t)\psi + \frac{1}{n}f_1(t)\varphi^2 + ng_2(t),$$

которая легко интегрируется (первое уравнение является уравнением Бернулли, а второе — линейно относительно ψ).

15. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(w)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \big[ax + g(w)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(w).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + C_1 e^{-at}, t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w = w(z), \qquad z = x + C_1 e^{-at},$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(w)w''_{zz} + [az + g(w)]w'_z + h(w) = 0.$$

16. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = x^{1-n}\dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right].$

К этому уравнению приводятся нелинейные задачи диффузионного пограничного слоя (f — аналог коэффициента диффузии, $n = 1,\ 2,\ 3$), которые описываются уравнением 1.6.19.2. При $n = 1$ см. уравнение 1.6.15.1; при $f(w) = aw^m$ см. уравнение 1.1.15.6.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(C_1 x, C_1^{n+1} t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Автомодельное решение при $n \neq -1$:

$$w = w(z), \quad z = xt^{-\frac{1}{n+1}} \qquad (0 \leqslant x < \infty),$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(n+1)[f(w)w'_z]'_z + z^n w'_z = 0, \tag{1}$$

которое часто рассматривается с граничными условиями (3) из 1.6.15.1.

Общее решение уравнения (1) при $f(w) = a(w+b)^{-1}$ (n — произвольная постоянная) приведено в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993).

3°. Опишем простой способ поиска функций $f(w)$, для которых уравнение (1) допускает точное решение. Для этого проинтегрируем уравнение (1) по z, а затем сделаем преобразование годографа (переменную w будем считать независимой, а z — зависимой). В результате получим

$$f(w) = -\frac{1}{n+1} z'_w \left(\int z^n\,dw + A\right), \qquad A \text{ — любое.} \tag{2}$$

Подставляя в правую часть формулы (2) конкретную зависимость $z = z(w)$, будем получать однопараметрическое семейство функций $f(w)$, для которых уравнение (1) имеет решение $z = z(w)$. Явный вид решения $w = w(z)$ находится обращением зависимости $z = z(w)$.

Выбирая, например, $z = (1-w)^k$, из формулы (2) получим соответствующую функцию $f(w)$:

$$f(w) = A(1-w)^{k-1} - \frac{k}{(n+1)(nk+1)}(1-w)^{k(n+1)}, \qquad A \text{ — любое.}$$

4°. Другой способ построения функций $f(w)$, для которых уравнение (1) допускает точное аналитическое решение, заключается в следующем. Пусть $\bar w = \bar w(z)$ — некоторое решение уравнения (1) с функцией $f(w)$. Тогда $\bar w = \bar w(z)$ будет также решением и более сложного уравнения $(n+1)\big[F(w)w'_z\big]'_z + z^n w'_z = 0$ при

$$F(w) = f(w) + Ag(w) \qquad (A \text{ — любое}), \tag{3}$$

где функция $g = g(w)$ задается параметрически формулами

$$g(w) = \frac{1}{\bar w'_z}, \quad w = \bar w(z). \tag{4}$$

Например, для степенной зависимости $f(w) = aw^m$ частным решением уравнения (1) будет функция $\bar w = bz^{\frac{n+1}{m}}$, где b — некоторая константа. Из формул (3), (4) получим, что $\bar w$ будет также являться решением уравнения (1) и при $f(w) = aw^m + Aw^{\frac{m-n-1}{n+1}}$.

5°. При $n=-1$ существует точное решение вида
$$w = w(\xi), \qquad \xi = \ln|x| + \lambda t,$$
где функция $w(\xi)$ определяется неявно по формулам
$$\int \frac{f(w)\,dw}{\lambda w + F(w) + C_1} = \xi + C_2, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$
где λ, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Значению $\lambda = 0$ соответствует стационарное решение.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 439–440).

17. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^n f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + g(w).$

Нелинейное уравнение теплопроводности в радиально-симметричном случае (значения $n=1$ и $n=2$ соответствуют плоской и пространственной задачам).

1°. Пусть функция $f = f(w)$ задается произвольно, а функция $g = g(w)$ имеет вид
$$g(w) = \left(\frac{a}{f(w)} + b\right)\left(\int f(w)\,dw + c\right),$$
где a, b, c — любые числа. Тогда имеются решения с функциональным разделением переменных, задаваемые неявно формулой
$$\int f(w)\,dw + c = e^{at} z(x),$$
где функция $z = z(x)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением
$$z''_{xx} + \frac{n}{x} z'_x + bz = 0.$$
Его общее решение можно выразить через функции Бесселя или через модифицированные функции Бесселя [см. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2001 *a*)].

2°. Пусть функции $f(w)$ и $g(w)$ определяются формулами
$$f(w) = w\varphi'_w(w), \qquad g(w) = a(n+1)w + 2a\frac{\varphi(w)}{\varphi'_w(w)},$$
где $\varphi(w)$ — произвольная функция. В этом случае имеется решение с функциональным разделением переменных, заданное в неявной форме
$$\varphi(w) = Ce^{2at} - \tfrac{1}{2}ax^2,$$
где C — произвольная постоянная.

3°. Пусть функции $f(w)$ и $g(w)$ определяются формулами
$$f(w) = a\varphi^{-\frac{n+1}{2}}\varphi' \int \varphi^{\frac{n+1}{2}}\,dw, \qquad g(w) = b\frac{\varphi}{\varphi'},$$
где $\varphi = \varphi(w)$ — произвольная функция. В этом случае имеется решение с функциональным разделением переменных, заданное в неявной форме
$$\varphi(w) = \frac{bx^2}{Ce^{-bt} - 4a}.$$

4°. Пусть функции $f(w)$ и $g(w)$ определяются формулами
$$f(w) = A\frac{V(z)}{V'_z(z)}, \qquad g(w) = B\Big[2z^{-\frac{n+1}{2}}V'_z(z) + (n+1)z^{-\frac{n+3}{2}}V(z)\Big], \tag{1}$$
где A, B — произвольные постоянные ($AB \neq 0$), $V(z)$ — произвольная функция, а функция $z = z(w)$ задается неявно формулой
$$w = \int z^{-\frac{n+1}{2}} V'_z(z)\,dz + C_1; \tag{2}$$
C_1 — произвольная постоянная. Тогда имеется решение с функциональным разделением переменных вида (2), где
$$z = -\frac{x^2}{4At + C_2} + 2Bt + \frac{BC_2}{2A},$$
C_2 — произвольная постоянная.

⊙ *Литература*: V. A. Galaktionov (1994), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 119–120), А. Д. Полянин, Е. А. Вязьмина (2005), Е. А. Вязьмина, А. Д. Полянин (2006).

18. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\varphi(w)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \big[xg(t) + h(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Преобразование

$$z = xG(t) + \int h(t)G(t)\,dt, \quad \tau = \int f(t)G^2(t)\,dt, \qquad G(t) = \exp\left[\int g(t)\,dt\right],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.6.16.3:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \varphi(w)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

19. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\varphi(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + \big[xg(t) + h(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Преобразование

$$z = xG(t) + \int h(t)G(t)\,dt, \quad \tau = \int f(t)G^2(t)\,dt, \qquad G(t) = \exp\left[\int g(t)\,dt\right],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.6.15.1:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\varphi(w)\frac{\partial w}{\partial z}\right].$$

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 441).

20. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\big[f(x,w)\big] + \dfrac{g(t)}{f_w(x,w)} + h(x).$

Здесь f_w — частная производная функции f по w.

Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$f(x,w) = \int g(t)\,dt - \int_{x_0}^{x}(x-\xi)h(\xi)\,d\xi + C_1x + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, x_0 — некоторая постоянная.

1.6.18. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f\Big(x, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g\Big(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^k\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \big[f(t)x + g(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w.$

В результате преобразования

$$w(x,t) = u(z,\tau)H(t), \quad z = xF(t) + \int g(t)F(t)\,dt, \quad \tau = \int F^{k+2}(t)H^k(t)\,dt,$$

где функции $F(t)$ и $H(t)$ задаются формулами

$$F(t) = \exp\left[\int f(t)\,dt\right], \quad H(t) = \exp\left[\int h(t)\,dt\right],$$

получим более простое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^k\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

См. уравнение 1.6.18.3, частный случай 1.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^k\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1w(x, C_1^kt + C_2) + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = At + B + \varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ определяется формулами

$$\varphi(x) = \int \left[A(k+1) \int \frac{dx}{f(x)} + C_1 \right]^{\frac{1}{k+1}} dx + C_2 \quad \text{при} \quad k \neq -1,$$

$$\varphi(x) = C_1 \int \exp\left[A \int \frac{dx}{f(x)} \right] dx + C_2 \qquad \text{при} \quad k = -1,$$

A, B, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Точное решение:

$$w(x,t) = (Akt + B)^{-1/k} \Theta(x) + C,$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\Theta(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$f(x)\bigl(\Theta'_x\bigr)^k \Theta''_{xx} + A\Theta = 0.$$

3. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^n \right] + g(w).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + C_1, t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[f(w)(w'_z)^n]'_z - \lambda w'_z + g(w) = 0.$$

3°. Пусть функция $f = f(w)$ задается произвольно, а функция $g = g(w)$ определяется по формуле

$$g(w) = A[f(w)]^{-1/n} - B,$$

где A, B — некоторые числа. В этом случае существует решение с функциональным разделением переменных, которое задается неявно

$$\int [f(w)]^{1/n}\, dw = At + \frac{n}{B(n+1)} (Bx + C_1)^{\frac{n+1}{n}} + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4°. Пусть функция $g = g(w)$ задается произвольно, а функция $f = f(w)$ определяется по формуле

$$f(w) = \frac{A}{[g(w)]^n} \exp\left[Bn \int \frac{dw}{g(w)} \right],$$

где A, B — некоторые числа. В этом случае существует решение с функциональным разделением переменных, которое задается неявно

$$\int \frac{dw}{g(w)} = t + \frac{1}{B} \ln|Bx + C_1| + C_2.$$

5°. Пусть функция $g = g(w)$ задается произвольно, а функция $f = f(w)$ определяется формулами

$$f(w) = \frac{A_1 A_2^n\, w + B}{[g\,(w)]^n} + \frac{A_2^n A_3}{[g\,(w)]^n} \int Z dw, \tag{1}$$

$$Z = A_2 \int \frac{dw}{g\,(w)}, \tag{2}$$

где A_1, A_2, A_3 — некоторые числа. В этом случае существуют точные решения типа обобщенной бегущей волны следующего вида:

$$w = w(Z), \quad Z = \varphi(t)x + \psi(t),$$

где функция $w(Z)$ определяется путем обращения зависимости (2), а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют вид

$$\varphi(t) = \left[\frac{1}{C_1 - A_3\,(n+1)\,t}\right]^{\frac{1}{n+1}},$$

$$\psi\,(t) = \varphi\,(t)\left[A_1\int[\varphi\,(t)]^n\,dt + A_2\int\frac{dt}{\varphi\,(t)} + C_2\right],$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные.

6°. Пусть функция $g = g(w)$ задается произвольно, а функция $f = f(w)$ определяется формулами

$$f(w) = \frac{1}{[(g\,(w)]^n}\left(A_1 w + A_3\int Z dw\right)\exp\left[nA_4\int\frac{dw}{g\,(w)}\right], \qquad (3)$$

$$Z = \frac{1}{A_4}\,\exp\left[A_4\int\frac{dw}{g\,(w)}\right] - \frac{A_2}{A_4}, \qquad (4)$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — некоторые числа ($A_4 \neq 0$). В этом случае существуют точные решения типа обобщенной бегущей волны следующего вида:

$$w = w(Z), \quad Z = \varphi(t)x + \psi(t),$$

где функция $w(Z)$ определяется путем обращения зависимости (2), а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют вид

$$\varphi(t) = \left[C_1 e^{-(n+1)A_4 t} - \frac{A_3}{A_4}\right]^{-\frac{1}{n+1}},$$

$$\psi(t) = \varphi\,(t)\left[A_1\int[\varphi\,(t)]^n\,dt + A_2\int\frac{dt}{\varphi\,(t)} + C_2\right],$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные.

7°. Пусть функции $f(w)$ и $g(w)$ задаются по формулам

$$f(w) = A\exp\bigl[-bn\varphi(w)\bigr]\bigl[\varphi'_w(w)\bigr]^n, \qquad g(w) = \frac{a}{\varphi'_w(w)} - Acn\exp\bigl[-bn\varphi(w)\bigr],$$

где $\varphi(w)$ — произвольная функция; A, a, b, c — любые числа. В этом случае существует решение с функциональным разделением переменных, которое задается неявно

$$\varphi(w) = at + \theta(x),$$

где функция $\theta(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\theta'_x)^{n-1}\theta''_{xx} = b(\theta'_x)^{n+1} + c.$$

Общее решение этого уравнения можно записать в параметрическом виде

$$\theta = \int\frac{u^n\,du}{bu^{n+1}+c} + C_1, \qquad x = \int\frac{u^{n-1}\,du}{bu^{n+1}+c} + C_2.$$

8°. Пусть функции $f(w)$ и $g(w)$ задаются по формулам

$$f(w) = \frac{1}{\lambda^n}\left(a - \frac{n\lambda}{n+1}w\right)\bigl[\varphi'_w(w)\bigr]^n, \qquad g(w) = \lambda\frac{\varphi(w)}{\varphi'_w(w)} + \frac{n\lambda}{n+1}w - a,$$

где $\varphi(w)$ — произвольная функция; a, λ — любые числа. В этом случае существует решение с функциональным разделением переменных, которое задается неявно

$$\varphi(w) = C_1 e^{\lambda t} + \frac{n\lambda}{n+1}(x + C_2)^{\frac{n+1}{n}},$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные.

9°. Некоторые уравнения данного вида, допускающие точные решения с функциональным разделением переменных вида

$$w = F(\xi), \qquad \xi = \varphi(x) + \psi(t)$$

рассматривались в работе P. G. Estévez, C. Z. Qu, S. L. Zhang (2002). Приведенные там уравнения, в отличие от рассмотренных выше уравнений из пп. 3° — 8°, не содержат функциональный произвол.

⊙ *Литература для уравнения* 1.6.18.3: А. Д. Полянин, Е. А. Вязьмина (2005), Е. А. Вязьмина, А. Д. Полянин (2006).

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Это уравнение нелинейной теории фильтрации; оно описывает также движение нелинейной вязко-пластической среды.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-1} w(C_1 x + C_2, C_1^2 t + C_3) + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = At + B + \varphi(z), \quad z = kx + \lambda t, \tag{1}$$

где A, B, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k^2 f\big(k\varphi'_z\big)\varphi''_{zz} = \lambda\varphi'_z + A. \tag{2}$$

Общее решение уравнения (2) можно представить в параметрическом виде

$$\varphi = k\int \frac{uf(u)\,du}{\lambda u + Ak} + C_1, \quad z = k^2\int \frac{f(u)\,du}{\lambda u + Ak} + C_2, \tag{3}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные,

При $A = 0$ формулы (1), (3) описывают решение типа бегущей волны, а при $\lambda = 0$ — решение в виде суммы функций разных аргументов.

3°. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = \sqrt{t}\,\Theta(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}},$$

где функция $\Theta(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2f\big(\Theta'_\xi\big)\Theta''_{\xi\xi} + \xi\Theta'_\xi - \Theta = 0.$$

4°. Замена $u(x,t) = \dfrac{\partial w}{\partial x}$ приводит к уравнению вида 1.6.15.1:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

5°. Преобразование годографа

$$\bar{x} = w(x,t), \quad \bar{w}(\bar{x},t) = x$$

переводит это уравнение в уравнение такого же вида

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = \bar{f}\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\right)\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2}, \qquad \bar{f}(z) = \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right).$$

6°. Преобразование

$$\bar{t} = \alpha t + \gamma_1, \quad \bar{x} = \beta_1 x + \beta_2 w + \gamma_2, \quad \bar{w} = \beta_3 x + \beta_4 w + \gamma_3,$$

где α, β_i, γ_i — произвольные постоянные ($\alpha \neq 0$ и $\beta_1\beta_4 - \beta_2\beta_3 \neq 0$), «переводит» исходное уравнение в уравнение такого же вида. При этом

$$\bar{f}(\bar{w}_{\bar{x}}) = \frac{1}{\alpha}(\beta_1 + \beta_2 w_x)^2 f(w_x), \qquad w_x = \frac{\beta_1\bar{w}_{\bar{x}} - \beta_3}{\beta_4 - \beta_2\bar{w}_{\bar{x}}},$$

где индексы x и $\bar{x}$ соответствуют частным производным.

Специальный случай 1. Уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad k \neq 0.$$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(C_2 x + C_3, C_1^k C_2^{k+2} t + C_4) + C_5,$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = (t + C_1)^{-1/k} u(x) + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $ak(u'_x)^k u''_{xx} + u = 0$, общее решение которого можно записать в неявном виде

$$\int \left(C_3 - \frac{k+2}{2ak} u^2 \right)^{-\frac{1}{k+2}} du = x + C_4.$$

Специальный случай 2. Уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{a}{w_x^2 + b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad w_x = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

1. Точное решение:

$$w(x,t) = \pm \sqrt{C_1 - b^2(x + C_2)^2 - 2at} + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

2. Точное решение:

$$w = bx \operatorname{tg}\left(\pm \frac{1}{2} z - \operatorname{arctg}\bigl(\psi(z)\bigr) \pm \frac{a}{b^2} t + C \right),$$
$$z = x^2 \cos^{-2}\left(\pm \frac{1}{2} z - \operatorname{arctg}\bigl(\psi(z)\bigr) \pm \frac{a}{b^2} t + C \right),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\psi = \psi(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\psi'_z = \frac{1}{2}(1 + \psi^2)\left(\pm 1 - \frac{\psi}{z} \right).$$

В указанном решении зависимость $z = z(x,t)$ задается неявно.

3. Точное решение:

$$w = bx \operatorname{tg}\left(\varphi(z) + C \ln \frac{at}{b^2} \right),$$
$$z = \frac{b^2 x^2}{at} \cos^{-2}\left(\varphi(z) + C \ln \frac{at}{b^2} \right),$$

где C — произвольная постоянная, а функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_z = \frac{\psi}{2z}, \quad \psi'_z = \frac{1}{2}(1 + \psi^2)\left(C - \frac{\psi}{2} - \frac{\psi}{z} \right).$$

В указанном решении зависимость $z = z(x,t)$ задается неявно.

Специальный случай 3. Уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = k \exp\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-1} w(C_1 x + C_2, C_1^2 e^{C_3} t + C_4) + C_3 x + C_5,$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = 2A \operatorname{arctg}\left(\frac{x + B}{A} \right) - (x + B) \ln \left| \frac{kt + C}{(x + B)^2 + A^2} \right| - (2 + \ln 2)x + D,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

⊙ *Литература для уравнения* 1.6.18.4: Е. В. Ленский (1966), И. Ш. Ахатов, Р. К. Газизов, Н. Х. Ибрагимов (1989), N. H. Ibragimov (1994, pp. 115–118, 129–130), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 121–123).

5. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = f(x) g(w) h(w_x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad w_x = \frac{\partial w}{\partial x}.$

Преобразование годографа (x принимается за зависимую переменную, а w — за независимую переменную)

$$x = u, \quad w = y,$$

приводит к уравнению аналогичного вида для функции $u = u(y,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(y) f(u) \overline{h}(u_y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad \text{где} \quad \overline{h}(z) = z^{-2} h(1/z).$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f\left(t, \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-1} w(C_1 x + C_2, t) + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Преобразование Эйлера

$$w(x,t) + u(\xi,\eta) = x\xi, \quad x = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad t = \eta$$

приводит к линейному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = -f(\eta,\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$

⦿ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 123).

1.6.19. Нелинейные уравнения теплового (диффузионного) пограничного слоя

1. $f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x)y\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\varphi(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right]$.

Это уравнение встречается в нелинейных задачах стационарного диффузионного пограничного слоя (массообмен капель и пузырей с потоком, конвективная диффузия в пленках жидкости), где координаты x и y отсчитываются соответственно вдоль и поперек межфазной поверхности.

Преобразование (A, B — произвольные постоянные)

$$t = \int \frac{h^2(x)}{f(x)}\,dx + A, \quad z = yh(x), \qquad \text{где} \quad h(x) = B\exp\left[-\int \frac{g(x)}{f(x)}\,dx\right],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.6.15.1:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\varphi(w)\frac{\partial w}{\partial z}\right].$$

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин (1980 *a, b*), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 443).

2. $f(x)y^{n-1}\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x)y^n\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\varphi(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right]$.

Это уравнение встречается в нелинейных задачах диффузионного пограничного слоя (массообмен твердых частиц, капель и пузырей с окружающей жидкостью, конвективная диффузия к пластине и в пленках жидкости), x — координата, отсчитываемая вдоль поверхности тела, y — координата, отсчитываемая по нормали к поверхности тела. Твердой частице обычно отвечает значение $n = 2$, а каплям и пузырям — значение $n = 1$.

Преобразование (A, B — произвольные постоянные)

$$t = \int \frac{h^{n+1}(x)}{f(x)}\,dx + A, \quad z = yh(x), \qquad \text{где} \quad h(x) = B\exp\left[-\int \frac{g(x)}{f(x)}\,dx\right],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.6.17.16:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = z^{1-n}\frac{\partial}{\partial z}\left[\varphi(w)\frac{\partial w}{\partial z}\right].$$

⦿ *Литература*: Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев (1985), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 443).

3. $f\left(\dfrac{y}{\sqrt{x}}\right)\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}g\left(\dfrac{y}{\sqrt{x}}\right)\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\varphi(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right]$.

Нелинейное уравнение теплового пограничного слоя на плоской пластине.

1°. Автомодельное решение:

$$w = w(\xi), \quad \xi = \frac{y}{\sqrt{x}}, \tag{1}$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[\varphi(w)w'_\xi]'_\xi + \left[\tfrac{1}{2}\xi f(\xi) - g(\xi)\right]w'_\xi = 0. \tag{2}$$

2°. Решение исходного уравнения в частных производных с простейшими граничными условиями первого рода

$$x = 0,\ w = a; \quad y = 0,\ w = b; \quad y \to \infty,\ w \to a,$$

где a и b — некоторые постоянные, сводится к решению уравнения (2) с граничными условиями

$$\xi = 0,\ w = b; \quad \xi \to \infty,\ w \to a.$$

Замечание. Классическое уравнение теплового пограничного слоя задается соотношениями:

$$f(\xi) = \Pr F'_\xi(\xi), \quad g(\xi) = \tfrac{1}{2}\Pr\bigl[\xi F'_\xi(\xi) - F(\xi)\bigr],$$

где $F(\xi)$ — решение Блазиуса в гидродинамической задаче о продольном обтекании плоской пластины однородным поступательным потоком вязкой несжимаемой жидкости, $\Pr$ — число Прандтля (x — координата, направленная вдоль пластины, а y — координата, направленная по нормали к поверхности пластины).

⦿ *Литература*: Г. Шлихтинг (1974), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 87–88).

1.7. Нелинейные уравнения Шредингера и родственные уравнения

1.7.1. Уравнения вида $i\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(|w|)w = 0$, содержащие произвольные параметры

► *В этом разделе w — комплексная функция действительных переменных x и t; $i^2 = -1$.*

1. $\displaystyle i\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k|w|^2 w = 0.$

Уравнение Шредингера с кубической нелинейностью, k — действительное число. Встречается во многих разделах теоретической физики, включая нелинейную оптику, теорию сверхпроводимости и физику плазмы.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = \pm A_1 w(\pm A_1 x + A_2, A_1^2 t + A_3),$$
$$w_2 = e^{-i(\lambda x + \lambda^2 t + B)} w(x + 2\lambda t, t),$$

где A_1, A_2, A_3, B, λ — произвольные действительные постоянные, также будут решениями этого уравнения. Знаки в выражении для w_1 выбираются произвольно.

2°. Точные решения:

$$w(x,t) = C_1 \exp\bigl\{i\,[C_2 x + (kC_1^2 - C_2^2)t + C_3]\bigr\},$$
$$w(x,t) = \pm C_1\sqrt{\frac{2}{k}}\,\frac{\exp[i(C_1^2 t + C_2)]}{\operatorname{ch}(C_1 x + C_3)},$$
$$w(x,t) = \pm A\sqrt{\frac{2}{k}}\,\frac{\exp[iBx + i(A^2 - B^2)t + iC_1]}{\operatorname{ch}(Ax - 2ABt + C_2)},$$
$$w(x,t) = \frac{C_1}{\sqrt{t}}\exp\left[i\frac{(x + C_2)^2}{4t} + i(kC_1^2\ln t + C_3)\right],$$

где A, B, C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные. Второе и третье решения справедливы при $k > 0$. Третье решение описывает свободное движение солитона в быстрозатухающем случае.

3°. Точное решение:

$$w(x,t) = (ax+b)\exp\bigl[i(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\bigr],$$

где функции $a=a(t)$, $b=b(t)$, $\alpha=\alpha(t)$, $\beta=\beta(t)$, $\gamma=\gamma(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
a'_t &= -6a\alpha,\\
b'_t &= -2a\beta-2b\alpha,\\
\alpha'_t &= ka^2-4\alpha^2,\\
\beta'_t &= 2kab-4\alpha\beta,\\
\gamma'_t &= kb^2-\beta^2.
\end{aligned}$$

4°. N-солитонное решение при $k>0$:

$$w(x,t) = \sqrt{\frac{2}{k}}\,\frac{\det\mathbf{R}(x,t)}{\det\mathbf{M}(x,t)}.$$

Здесь $\mathbf{M}(x,t)$ — квадратная матрица порядка N с элементами

$$M_{n,k}(x,t) = \frac{1+\overline{g}_n(x,t)g_n(x,t)}{\overline{\lambda}_n-\lambda_k},\quad g_n(x,t)=\gamma_n e^{i(\lambda_n x-\lambda_n^2 t)},\qquad n,\,k=1,\,\ldots,\,N,$$

где λ_n и γ_n — произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условиям $\operatorname{Im}\lambda_n>0$ ($\lambda_n\neq\lambda_k$ при $n\neq k$), $\gamma_n\neq 0$, чертой сверху обозначены комплексно сопряженные величины. Матрица $\mathbf{R}(x,t)$ имеет порядок $N+1$ и получается путем добавления последнего столбца и последней строки к матрице $\mathbf{M}(x,t)$. Ее элементы определяются по формулам

$$\begin{array}{llll}
R_{n,k}(x,t) = M_{n,k}(x,t) & \text{при} & n,k=1,\,\ldots,\,N & \text{(основной массив матрицы)},\\
R_{n,N+1}(x,t) = g_n(x,t) & \text{при} & n=1,\,\ldots,\,N & \text{(последний столбец матрицы)},\\
R_{N+1,n}(x,t) = 1 & \text{при} & n=1,\,\ldots,\,N & \text{(последняя строка матрицы)},\\
R_{N+1,N+1}(x,t) = 0 & & & \text{(последний элемент на диагонали)}.
\end{array}$$

Указанное решение при $t\to\pm\infty$ представляется в виде суммы N односолитонных решений.

5°. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{C_1t+C_2}}u(z),\qquad z=\frac{x+C_3}{\sqrt{C_1t+C_2}},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функция $u=u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$u''_{zz}+k|u|^2u-\tfrac{1}{2}iC_1(zu'_z+u)=0.$$

6°. О других точных решениях см. уравнение 1.7.5.1 при $f(u)=ku^2$.

7°. Автопреобразования Беклунда, сохраняющие вид уравнения (при $k=1$):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial x} &= iaf_1-\frac{i}{2}f_2g_1,\\
\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial t} &= \frac{1}{2}g_1\biggl(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial x}\biggr)-ag_2+\frac{i}{4}f_1\bigl(|f_1|^2+|f_2|^2\bigr).
\end{aligned}$$

Здесь

$$f_1=w-\widetilde{w},\quad f_2=w+\widetilde{w},\quad g_1=i\varepsilon\bigl(b-2|f_1|^2\bigr)^{1/2},\quad g_2=i\bigl(af_1-\tfrac{1}{2}f_2g_1\bigr),$$

где a, b — произвольные действительные постоянные; $\varepsilon=\pm1$.

8°. Уравнение Шредингера с кубической нелинейностью имеет бесконечный набор интегралов движения.

Первые три интеграла при $k=2$:

$$C_1=\int_{-\infty}^{\infty}|w|^2\,dx,\quad C_2=\int_{-\infty}^{\infty}\biggl(\overline{w}\frac{\partial w}{\partial x}-w\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}\biggr)dx,\quad C_3=\int_{-\infty}^{\infty}\biggl(2\biggl|\frac{\partial w}{\partial x}\biggr|^2-|w|^4\biggr)dx.$$

Здесь считается, что начальное распределение $w(x,0)$ достаточно быстро убывает при $|x|\to\infty$. Чертой сверху обозначены комплексно сопряженные величины.

Первые три интеграла при $k = -2$:

$$C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - |w|^2\right) dx, \quad C_2 = -\int_{-\infty}^{\infty} \left(\overline{w}\frac{\partial w}{\partial x} - w\frac{\partial \overline{w}}{\partial x}\right) dx, \quad C_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^2 + |w|^4 - 1\right) dx.$$

9°. Уравнение Шредингера с кубической нелинейностью интегрируется методом обратной задачи рассеяния, см. цитируемую ниже литературу.

⊙ *Литература для уравнения* 1.7.1.1: В. Е. Захаров, А. Б. Шабат (1971), G. L. Lamb (1974), В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский (1980), Н. Х. Ибрагимов (1983, стр. 152), Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев (1986, стр. 120–129), М. Абловиц, Х. Сигур (1987), Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис (1988), V. E. Korepin, N. N. Bogoliubov, A. G. Izergin (1993), C. Sulem, P.-L. Sulem (1999), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 88–89), Н. Н. Ахмедиев, А. Анкевич (2003), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 125–127).

2. $\boldsymbol{i\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (A|w|^2 + B)w = 0.}$

Уравнение Шредингера с кубической нелинейностью, A и B — действительные постоянные.

1°. Точные решения:

$$w(x,t) = C_1 \exp\left\{i\left[C_2 x + (AC_1^2 + B - C_2^2)t + C_3\right]\right\},$$
$$w(x,t) = \frac{C_1}{\sqrt{t}} \exp\left[i\frac{(x+C_2)^2}{4t} + i(AC_1^2 \ln t + Bt + C_3)\right],$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = (ax+b)\exp\left[i(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\right],$$

где функции $a = a(t)$, $b = b(t)$, $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, $\gamma = \gamma(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} a'_t &= -6a\alpha, \\ b'_t &= -2a\beta - 2b\alpha, \\ \alpha'_t &= Aa^2 - 4\alpha^2, \\ \beta'_t &= 2Aab - 4\alpha\beta, \\ \gamma'_t &= Ab^2 - \beta^2 + B. \end{aligned}$$

3°. О других точных решениях см. уравнение 1.7.5.1 при $f(u) = Au^2 + B$.

3. $\boldsymbol{i\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (A|w|^2 + B|w| + C)w = 0.}$

Уравнение Шредингера с кубической нелинейностью; A, B, C — действительные постоянные.

1°. Уравнение имеет точное решение вида

$$w(x,t) = (ax+b)\exp\left[i(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\right],$$

где $a = a(t)$, $b = b(t)$, $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, $\gamma = \gamma(t)$ — действительные функции действительного переменного.

2°. О других точных решениях см. уравнение 1.7.5.1 при $f(u) = Au^2 + Bu + C$.

4. $\boldsymbol{i\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A|w|^{2n} w = 0.}$

Уравнение Шредингера со степенной нелинейностью, A и n — действительные постоянные.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = \pm B_1 w(\pm B_1^n x + B_2, B_1^{2n} t + B_3),$$
$$w_2 = e^{-i(\lambda x + \lambda^2 t + C)} w(x + 2\lambda t, t),$$

где B_1, B_2, B_3, C, λ — произвольные действительные постоянные, также будут решениями этого уравнения. Знаки в выражении для w_1 выбираются произвольно.

2°. Точные решения:

$$w(x,t)=C_1\exp\bigl\{i\,[C_2x+(A|C_1|^{2n}-C_2^2)t+C_3]\bigr\},$$

$$w(x,t)=\pm\left[\frac{(n+1)C_1^2}{A\operatorname{ch}^2(C_1nx+C_2)}\right]^{\frac{1}{2n}}\exp[i(C_1^2t+C_3)],$$

$$w(x,t)=\frac{C_1}{\sqrt{t}}\exp\left[i\frac{(x+C_2)^2}{4t}+i\left(\frac{AC_1^{2n}}{1-n}t^{1-n}+C_3\right)\right],$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные.

3°. Точное решение:

$$w(x,t)=e^{-i(\lambda x+\lambda^2t+C)}U(x+2\lambda t),$$

где C, λ — произвольные постоянные, а функция $U=U(y)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $U''_{yy}+AU^{2n+1}=0$. Его решение можно представить в неявном виде.

4°. Автомодельное решение:

$$w(x,t)=(C_1t+C_2)^{-\frac{1}{2n}}u(z),\qquad z=\frac{x+C_3}{\sqrt{C_1t+C_2}},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функция $u=u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$u''_{zz}+k|u|^{2n}u-\frac{1}{2}iC_1\left(zu'_z+\frac{1}{n}u\right)=0.$$

5°. О других точных решениях см. уравнение 1.7.5.1 при $f(u)=Au^{2n}$.

⊙ *Литература*: М. Абловиц, Х. Сигур (1987), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 127–128).

1.7.2. Уравнения вида $i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{1}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)+f(|w|)w=0$, содержащие произвольные параметры

► *В этом разделе w — комплексная функция действительных переменных x и t; $i^2=-1$. Значениям $n=1$ и $n=2$ соответствует двумерное и трехмерное уравнение Шредингера с осевой и центральной симметрией.*

1. $i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{1}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+A|w|^2w=0.$

Уравнение Шредингера с кубической нелинейностью.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=C_1e^{iC_2}w(\pm C_1x,C_1^2t+C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t)=u(x)e^{i(C_1t+C_2)},$$

где C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные, а функция $u=u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$x^{-n}(x^nu'_x)'_x-C_1u+Au^3=0.$$

3°. Точное решение:

$$w(x,t)=u(x)\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr],\qquad \varphi(x,t)=C_1t+C_2\int\frac{dx}{x^nu^2(x)}+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные, а функция $u=u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$x^{-n}(x^nu'_x)'_x-C_1u-C_2^2x^{-2n}u^{-3}+Au^3=0.$$

4°. Точное решение:

$$w(x,t)=C_1(t+C_2)^{-\frac{n+1}{2}}\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr],\qquad \varphi(x,t)=\frac{x^2}{4(t+C_2)}-\frac{AC_1^2}{n(t+C_2)^n}+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 90).

2. $\boldsymbol{i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{1}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+(A|w|^2+B)w=0.}$

Уравнение Шредингера с кубической нелинейностью.

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t)=u(x)e^{i(C_1t+C_2)},$$

где C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные, а функция $u=u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$x^{-n}(x^nu_x')_x'-C_1u+(Au^2+B)u=0.$$

2°. Точное решение:

$$w(x,t)=u(x)\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr],\quad \varphi(x,t)=C_1t+C_2\int\frac{dx}{x^nu^2(x)}+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные, а функция $u=u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$x^{-n}(x^nu_x')_x'-C_1u-C_2^2x^{-2n}u^{-3}+(Au^2+B)u=0.$$

3°. Точное решение:

$$w(x,t)=C_1(t+C_2)^{-\frac{n+1}{2}}\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr],\quad \varphi(x,t)=\frac{x^2}{4(t+C_2)}-\frac{AC_1^2}{n(t+C_2)^n}+Bt+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные.

3. $\boldsymbol{i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{1}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+(A|w|^2+B|w|+C)w=0.}$

Частный случай уравнения 1.7.5.2 при $f(u)=Au^2+Bu+C$.

4. $\boldsymbol{i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{1}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+A|w|^kw=0.}$

Уравнение Шредингера со степенной нелинейностью.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=\pm C_1^2e^{iC_2}w(\pm C_1^kx,C_1^{2k}t+C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные, также будут решениями этого уравнения. Знаки выбираются произвольно.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t)=u(x)e^{i(C_1t+C_2)},$$

где C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные, а функция $u=u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$x^{-n}(x^nu_x')_x'-C_1u+A|u|^ku=0.$$

3°. Точное решение:

$$w(x,t)=u(x)\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr],\quad \varphi(x,t)=C_1t+C_2\int\frac{dx}{x^nu^2(x)}+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные, а функция $u=u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$x^{-n}(x^nu_x')_x'-C_1u-C_2^2x^{-2n}u^{-3}+A|u|^ku=0.$$

4°. Точное решение:

$$w(x,t)=C_1(t+C_2)^{-\frac{n+1}{2}}\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr],$$
$$\varphi(x,t)=\frac{x^2}{4(t+C_2)}+\frac{2A|C_1|^k}{2-k-nk}(t+C_2)^{\frac{2-k-nk}{2}}+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 91).

1.7.3. Другие уравнения, содержащие произвольные параметры

1. $i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+a\bigl(1-e^{-k|w|}\bigr)w=0.$

Это уравнение встречается в теории плазмы и лазерной физике. Частный случай уравнения 1.7.5.1 при $f(u)=a\bigl(1-e^{-ku}\bigr)$.

⦿ *Литература*: R. K. Bullough (1977, 1978).

2. $i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+ia\dfrac{\partial}{\partial x}\bigl(|w|^2 w\bigr)=0.$

Это уравнение встречается в физике плазмы (распространение альфеновских волн и радиоволн), a — действительное число.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=C_1 w(C_1^2 x+C_2,C_1^4 t+C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение:

$$w(x,t)=u(t)\exp[iv(x,t)],\quad v(x,t)=\varphi(t)x^2+\psi(t)x+\chi(t).$$

Здесь

$$u=\frac{C_2}{\sqrt{t+C_1}},\quad \varphi=\frac{1}{4(t+C_1)},\quad \psi=\frac{C_3-2aC_2^2\ln|t+C_1|}{4(t+C_1)},\quad \chi=-\int\bigl(\psi^2+a\psi u^2\bigr)\,dt+C_4,$$

где $C_1,\ldots,C_4$ — произвольные действительные постоянные.

3°. О другом решении см. п. 2° уравнения 1.7.5.4 при $f(z)=az^2$. См. также Ф. Калоджеро, А. Дегасперис (1985, стр. 62).

⦿ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 130).

3. $i\dfrac{\partial w}{\partial t}+a\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{w}{\sqrt{1+|w|^2}}\right)=0.$

Частный случай уравнения 1.7.5.5 при $f(z)=a(1+z^2)^{-1/2}$.

⦿ *Литература*: Ф. Калоджеро, А. Дегасперис (1985, стр. 59).

4. $i\dfrac{\partial w}{\partial t}+(1+ia)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f(x,t)w|w|^2+g(x,t)w=0.$

Точные решения этого уравнения для конкретных функций $f(x,t)$ и $g(x,t)$ описаны в табл. 2. См. также уравнение 1.7.4.4 при $f_1(t)=1$, $f_2(t)=a$ и уравнение 1.7.4.5 $f_1(x)=1$, $f_2(x)=a$.

⦿ *Литература*: L. Garnon, P. Winternitz (1993).

1.7.4. Уравнения с кубической нелинейностью, содержащие произвольные функции

► *В этом разделе w — комплексная функция действительных переменных x и t; $i^2=-1$.*

1. $i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\bigl[f(t)|w|^2+g(t)\bigr]w=0.$

Уравнение Шредингера с кубической нелинейностью, $f(t)$ и $g(t)$ — действительные функции действительного переменного.

1°. Точное решение:

$$w(x,t)=C_1\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr],\quad \varphi(x,t)=C_2x-C_2^2t+\int\bigl[C_1^2f(t)+g(t)\bigr]\,dt+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные.

2°. Точное решение:

$$w(x,t)=\frac{C_1}{\sqrt{t}}\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr],\quad \varphi(x,t)=\frac{(x+C_2)^2}{4t}+\int\bigl[C_1^2f(t)+tg(t)\bigr]\,\frac{dt}{t}+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные.

ТАБЛИЦА 2

Структура точных решений уравнения типа Шредингера $i\frac{\partial w}{\partial t}+(1+ia)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f(x,t)w|w|^2+g(x,t)w=0$.

a	$f(x,t)$	$g(x,t)$	Структура решения $w(x,t)$
0	$1+ib$	0	Решение 1: $w=\varphi(t)\exp\bigl(\frac{ix^2}{4t}\bigr)$, Решение 2: $w=\psi(z)/x$, $z=x^2/t$
0	$1+ib$	ic/t	Решение 1: $w=\varphi(t)\exp\bigl(\frac{ix^2}{4t}\bigr)$, Решение 2: $w=\psi(z)/x$, $z=x^2/t$
0	$(1+ib)/x$	$(c_1+ic_2)/x^2$	$w=\psi(z)/\sqrt{x}$, $z=x^2/t$
0	$(1+ib)\exp\bigl(\alpha xt^{-1/2}\bigr)$	$\frac{1}{4}\alpha xt^{-3/2}+\beta t^{-1}$	$w=\psi(z)/x$, $z=x^2/t$
0	$\bigl[f_1(t)+if_2(t)\bigr]\exp\bigl[2h(t)x\bigr]$	$ih'_t(t)x$	$w=\varphi(t)\exp\bigl[-h(t)x\bigr]$
любое	$1+ib$	0	$w=\psi(z)/x$, $z=x^2/t$
любое	$(1+ib)e^{-x}$	ic	$w=\varphi(t)\exp\bigl(\frac{1}{2}x\bigr)$
любое	$(1+ib)e^{-kx}$	$x+ic$	$w=\varphi(t)\exp\bigl(\frac{1}{2}kx+ixt\bigr)$
любое	$(1+ib)x^{-k}$	$(c_1+ic_2)x^{-2}$	$w=x^{(k-2)/2}\psi(z)$, $z=x^2/t$
любое	$1+ib$	$c_1xt^{-3/2}-ic_2t^{-1}$	Решение 1: $w=\varphi(t)\exp\bigl(-\frac{2ic_1x}{\sqrt{t}}\bigr)$, Решение 2: $w=\psi(z)/x$, $z=x^2/t$

3°. Точное решение:

$$w(x,t)=(ax+b)\exp\bigl[i(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\bigr],$$

где функции $a=a(t)$, $b=b(t)$, $\alpha=\alpha(t)$, $\beta=\beta(t)$, $\gamma=\gamma(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
a'_t&=-6a\alpha,\\
b'_t&=-2a\beta-2b\alpha,\\
\alpha'_t&=f(t)a^2-4\alpha^2,\\
\beta'_t&=2f(t)ab-4\alpha\beta,\\
\gamma'_t&=f(t)b^2-\beta^2+g(t).
\end{aligned}$$

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 91).

2. $\boldsymbol{i\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+[f_1(t)+if_2(t)]w|w|^2+[g_1(t)+ig_2(t)]w=0}$.

Уравнения этого вида встречаются в нелинейной оптике.

1°. Точные решения:

$$w(x,t)=\pm u(t)\exp[i\varphi(x,t)],\quad \varphi(x,t)=C_1x-C_1^2t+\int[f_1(t)u^2(t)+g_1(t)]\,dt+C_2.$$

Здесь функция $u=u(t)$ описывается уравнением Бернулли $u'_t+f_2(t)u^3+g_2(t)u=0$, общее решение которого имеет вид

$$u(t)=\biggl[C_3e^{G(t)}+2e^{G(t)}\int e^{-G(t)}f_2(t)\,dt\biggr]^{-1/2},\quad G(t)=2\int g_2(t)\,dt.$$

2°. Точные решения:

$$w(x,t)=\pm u(t)\exp[i\varphi(x,t)],\quad \varphi(x,t)=\frac{(x+C_1)^2}{4t}+\int[f_1(t)u^2(t)+g_1(t)]\,dt+C_2,$$

где функция $u = u(t)$ описывается уравнением Бернулли

$$u'_t + f_2(t)u^3 + \left[g_2(t) + \frac{1}{2t}\right]u = 0.$$

Интегрируя, получим

$$u(t) = \left[C_3 e^{G(t)} + 2e^{G(t)} \int e^{-G(t)} f_2(t)\,dt\right]^{-1/2}, \quad G(t) = \ln t + 2\int g_2(t)\,dt.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 92).

3. $\boldsymbol{i\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + [f_1(x) + if_2(x)]w|w|^2 + [g_1(x) + ig_2(x)]w = 0}$.

Точные решения:

$$w(x,t) = \pm u(x)\exp[iC_1 t + i\theta(x)],$$

где функции $u = u(x)$ и $\theta = \theta(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$2u'_x\theta'_x + u\theta''_{xx} + f_2(x)u^3 + g_2(x)u = 0,$$
$$u''_{xx} - C_1 u - u(\theta'_x)^2 + f_1(x)u^3 + g_1(x)u = 0.$$

4. $\boldsymbol{i\dfrac{\partial w}{\partial t} + [f_1(t) + if_2(t)]\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + [g_1(t) + ig_2(t)]w|w|^2 + [h_1(t) + ih_2(t)]w = 0}$.

Точные решения:

$$w(x,t) = \pm u(t)\exp[i\varphi(x,t)], \quad \varphi(x,t) = C_1 x + \int [-C_1^2 f_1(t) + g_1(t)u^2(t) + h_1(t)]\,dt + C_2.$$

Здесь функция $u = u(t)$ описывается уравнением Бернулли

$$u'_t + g_2(t)u^3 + [h_2(t) - C_1^2 f_2(t)]u = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$u(t) = \left[C_3 e^{F(t)} + 2e^{F(t)} \int e^{-F(t)} g_2(t)\,dt\right]^{-1/2}, \quad F(t) = 2\int \big[h_2(t) - C_1^2 f_2(t)\big]\,dt.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 92).

5. $\boldsymbol{i\dfrac{\partial w}{\partial t} + [f_1(x) + if_2(x)]\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + [g_1(x) + ig_2(x)]w|w|^2 + [h_1(x) + ih_2(x)]w = 0}$.

Точные решения:

$$w(x,t) = \pm u(x)\exp[iC_1 t + i\theta(x)],$$

где функции $u = u(x)$ и $\theta = \theta(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$2f_1 u'_x\theta'_x + f_1 u\theta''_{xx} + f_2 u''_{xx} - f_2 u(\theta'_x)^2 + g_2 u^3 + h_2 u = 0,$$
$$f_1 u''_{xx} - C_1 u - f_1 u(\theta'_x)^2 - 2f_2 u'_x\theta'_x - f_2 u\theta''_{xx} + g_1 u^3 + h_1 u = 0.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 92).

6. $\boldsymbol{\dfrac{\partial w}{\partial t} + [f_1(t) + if_2(t)]\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + [g_1(t) + ig_2(t)]w|w|^2 + [h_1(t) + ih_2(t)]w = 0}$.

Данное уравнение при $f_n, g_n, h_n = \text{const}$ используется для описания двухкомпонентных реакционно-диффузионных систем в окрестности точки бифуркации.

Точные решения:

$$w(x,t) = \pm u(t)\exp[i\varphi(x,t)],$$
$$\varphi(x,t) = C_1 x + \int [C_1^2 f_2(t) - g_2(t)u^2(t) - h_2(t)]\,dt + C_2.$$

Здесь функция $u = u(t)$ описывается уравнением Бернулли

$$u'_t + g_1(t)u^3 + [h_1(t) - C_1^2 f_1(t)]u = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$u(t) = \left[C_3 e^{F(t)} + 2e^{F(t)} \int e^{-F(t)} g_1(t)\,dt\right]^{-1/2},$$
$$F(t) = 2\int \big[h_1(t) - C_1^2 f_1(t)\big]\,dt.$$

⊙ *Литература*: Y. Kuramoto, T. Tsuzuki (1975), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 93).

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t}+[f_1(x)+if_2(x)]\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+[g_1(x)+ig_2(x)]w|w|^2+[h_1(x)+ih_2(x)]w=0.$

Точные решения:

$$w(x,t)=\pm u(x)\exp[iC_1t+i\theta(x)],$$

где функции $u=u(x)$ и $\theta=\theta(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f_1u''_{xx}-f_1u(\theta'_x)^2-f_2u\theta''_{xx}-2f_2u'_x\theta'_x+g_1u^3+h_1u=0,$$
$$f_2u''_{xx}+C_1u-f_2u(\theta'_x)^2+f_1u\theta''_{xx}+2f_1u'_x\theta'_x+g_2u^3+h_2u=0.$$

1.7.5. Уравнения общего вида, содержащие произвольные функции одного аргумента

► *В этом разделе w — комплексная функция действительных переменных x и t; $i^2=-1$.*

1. $i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f(|w|)w=0.$

Уравнение Шредингера общего вида, $f(u)$ — действительная функция действительного переменного.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=e^{-i(\lambda x+\lambda^2t+C_1)}w(x+2\lambda t+C_2,t+C_3),$$

где C_1, C_2, C_3, λ — произвольные действительные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w(x,t)=C_1\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr],\quad \varphi(x,t)=C_2x-C_2^2t+f(|C_1|)t+C_3.$$

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t)=u(x)e^{i(C_1t+C_2)},$$

где функция $u=u(x)$ определяется неявно по формулам

$$\int\frac{du}{\sqrt{C_1u^2-2F(u)+C_3}}=C_4\pm x,\quad F(u)=\int uf(|u|)\,du.$$

Здесь $C_1,\ldots,C_4$ — произвольные действительные постоянные.

4°. Точное решение:

$$w(x,t)=U(\xi)e^{i(Ax+Bt+C)},\quad \xi=x-2At,\tag{1}$$

где функция $U=U(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $U''_{\xi\xi}+f(|U|)U-(A^2+B)U=0$. Интегрируя, получим решение в неявном виде:

$$\int\frac{dU}{\sqrt{(A^2+B)U^2-2F(U)+C_1}}=C_2\pm\xi,\quad F(U)=\int Uf(|U|)\,dU.\tag{2}$$

В формулы (1) и (2) входят произвольные действительные постоянные A, B, C, C_1, C_2.

5°. Точное решение (A, B, C — произвольные действительные постоянные):

$$w(x,t)=\psi(z)\exp\bigl[i(Axt-\tfrac{2}{3}A^2t^3+Bt+C)\bigr],\quad z=x-At^2,$$

где функция $\psi=\psi(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\psi''_{zz}+f(|\psi|)\psi-(Az+B)\psi=0.$$

6°. Точные решения:

$$w(x,t)=\pm\frac{1}{\sqrt{C_1t}}\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr],\quad \varphi(x,t)=\frac{(x+C_2)^2}{4t}+\int f\bigl(|C_1t|^{-1/2}\bigr)\,dt+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные.

7°. Точное решение:

$$w(x,t) = u(x)\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr], \quad \varphi(x,t) = C_1 t + C_2 \int \frac{dx}{u^2(x)} + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные, а функция $u = u(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$u''_{xx} - C_1 u - C_2^2 u^{-3} + f(|u|)u = 0.$$

8°. Точное решение:

$$w(x,t) = u(z)\exp\bigl[iAt + i\varphi(z)\bigr], \quad z = kx + \lambda t,$$

где A, k, λ — произвольные действительные постоянные, а функции $u = u(z)$ и $\varphi = \varphi(z)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$k^2 u\varphi''_{zz} + 2k^2 u'_z \varphi'_z + \lambda u'_z = 0,$$
$$k^2 u''_{zz} - k^2 u(\varphi'_z)^2 - \lambda u\varphi'_z - Au + f(|u|)u = 0.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 93–94).

2. $\boldsymbol{i\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{1}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + f(|w|)w = 0}$.

Уравнение Шредингера общего вида, $f(u)$ — действительная функция действительного переменного. Значениям $n=1$ и $n=2$ соответствует двумерное и трехмерное уравнение Шредингера с осевой и центральной симметрией.

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = u(x)e^{i(C_1 t + C_2)},$$

где C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные, а функция $u = u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$x^{-n}(x^n u'_x)'_x - C_1 u + f(|u|)u = 0.$$

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = u(x)\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr], \quad \varphi(x,t) = C_1 t + C_2 \int \frac{dx}{x^n u^2(x)} + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные, а функция $u = u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$x^{-n}(x^n u'_x)'_x - C_1 u - C_2^2 x^{-2n} u^{-3} + f(|u|)u = 0.$$

3°. Точное решение:

$$w(x,t) = C_1 t^{-\frac{n+1}{2}} \exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr], \quad \varphi(x,t) = \frac{x^2}{4t} + \int f\Bigl(|C_1| t^{-\frac{n+1}{2}}\Bigr)\,dt + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 95).

3. $\boldsymbol{\dfrac{\partial w}{\partial t} = (a + ib)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bigl[f(|w|) + ig(|w|)\bigr]w}$.

Обобщенное уравнение Гинзбурга — Ландау, $f(u)$ и $g(u)$ — действительные функции действительного переменного, a и b — действительные постоянные. Уравнения этого вида используются для изучения фазовых переходов второго рода в теории сверхпроводимости и для описания двухкомпонентных реакционно-диффузионных систем в окрестности точки бифуркации.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение уравнения обобщенного уравнения Гинзбурга — Ландау. Тогда функция

$$w_1 = e^{iC_1} w(x + C_2, t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w(x,t) = C_1 \exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr], \quad \varphi(x,t) = \pm x\sqrt{\frac{f(|C_1|)}{a}} + t\biggl[g(|C_1|) - \frac{b}{a} f(|C_1|)\biggr] + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные.

3°. Точное решение:

$$w(x,t) = u(t)\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr], \quad \varphi(x,t) = C_1 x - C_1^2 bt + \int g(|u|)\,dt + C_2,$$

где $u = u(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $u'_t = f(|u|)u - aC_1^2 u$, общее решение которого можно представить в неявном виде

$$\int \frac{du}{f(|u|)u - aC_1^2 u} = t + C_3.$$

4°. Точное решение:

$$w(x,t) = U(z)\exp\bigl[iC_1 t + i\theta(z)\bigr], \quad z = x + \lambda t,$$

где C_1, λ — произвольные действительные постоянные, а функции $U = U(z)$ и $\theta = \theta(z)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$aU''_{zz} - aU(\theta'_z)^2 - bU\theta''_{zz} - 2bU'_z\theta'_z - \lambda U'_z + f(|U|)U = 0,$$
$$aU\theta''_{zz} - bU(\theta'_z)^2 + bU''_{zz} + 2aU'_z\theta'_z - \lambda U\theta'_z - C_1 U + g(|U|)U = 0.$$

⊙ *Литература*: В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау (1950), Y. Kuramoto, T. Tsuzuki (1975), В. С. Берман, Ю. А. Данилов (1981), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 96–97).

4. $i\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + i\dfrac{\partial}{\partial x}\bigl[f(|w|)w\bigr] = 0.$

1°. Точное решение:

$$w(x,t) = u(t)\exp[iv(x,t)], \quad v(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$

где функции $u = u(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u'_t + 2\varphi u = 0,$$
$$\varphi'_t + 4\varphi^2 = 0,$$
$$\psi'_t + 4\varphi\psi + 2\varphi f(u) = 0,$$
$$\chi'_t + \psi^2 + \psi f(u) = 0.$$

Интегрируя, получим

$$u = \frac{C_2}{\sqrt{t + C_1}}, \quad \varphi = \frac{1}{4(t + C_1)}, \quad \psi = -2\varphi\int f(u)\,dt + C_3\varphi, \quad \chi = -\int\bigl[\psi^2 + \psi f(u)\bigr]\,dt + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные действительные постоянные.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = U(z)\exp[i\beta t + iV(z)], \quad z = kx + \lambda t,$$

где k, β, λ — произвольные действительные постоянные, а функции $U = U(z)$ и $V = V(z)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\lambda U'_z + k^2(UV'_z)'_z + k^2 U'_z V'_z + k[f(U)U]'_z = 0,$$
$$-U(\beta + \lambda V'_z) + k^2 U''_{zz} - k^2 U(V'_z)^2 - kf(U)UV'_z = 0.$$

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 136).

5. $i\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\bigl[f(|w|)w\bigr] = 0.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = \pm e^{iC_1} w(\pm C_2 x + C_3, C_2^2 t + C_4),$$

где C_1, …, C_4 — произвольные действительные постоянные, также будут решениями этого уравнения. Знаки выбираются произвольно.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = u(t)\exp[iv(x,t)], \quad v(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$

где функции $u = u(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} u'_t + 2u\varphi f(u) &= 0, \\ \varphi'_t + 4\varphi^2 f(u) &= 0, \\ \psi'_t + 4\varphi\psi f(u) &= 0, \\ \chi'_t + \psi^2 f(u) &= 0. \end{aligned}$$

Интегрируя, получим

$$\varphi = C_1 u^2, \quad \psi = C_2 u^2, \quad \chi = -C_2^2 \int u^4 f(u)\,dt + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные, а функция $u = u(t)$ задается неявно (C_4 — произвольная постоянная)

$$\int \frac{du}{u^3 f(u)} + 2C_1 t + C_4 = 0.$$

3°. Существуют решения вида

$$w(x,t) = U(z)\exp[i\beta t + iV(z)], \quad z = kx + \lambda t,$$

где k, β, λ — произвольные действительные постоянные, а функции $U = U(z)$ и $V = V(z)$ описываются соответствующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений (которая опускается).

4°. Существует автомодельное решение вида $w(x,t) = V(\xi)$, где $\xi = x^2/t$.

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, стр. 136–137).

1.7.6. Уравнения общего вида, содержащие произвольные функции двух аргументов

► *В этом разделе w — комплексная функция действительных переменных x и t; $i^2 = -1$.*

1. $\boldsymbol{i\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, |w|)w = 0}$.

Уравнение Шредингера общего вида, $f(x,u)$ — действительная функция двух действительных переменных.

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = u(x)e^{i(C_1 t + C_2)},$$

где C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные, а функция $u = u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$u''_{xx} - C_1 u + f(x, |u|)u = 0.$$

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = u(x)\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr], \quad \varphi(x,t) = C_1 t + C_2 \int \frac{dx}{u^2(x)} + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные, а функция $u = u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$u''_{xx} - C_1 u - C_2^2 u^{-3} + f(x, |u|)u = 0.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 94).

2. $\boldsymbol{i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f(t,|w|)w=0}$.

Уравнение Шредингера общего вида, $f(t,u)$ — действительная функция двух действительных переменных.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение указанного уравнения Шредингера. Тогда функция

$$w_1=e^{-i(\lambda x+\lambda^2 t+C_1)}w(x+2\lambda t+C_2,\,t),$$

где C_1, C_2, λ — произвольные действительные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x,t)=C_1\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr],\quad \varphi(x,t)=C_2x-C_2^2t+\int f(t,|C_1|)\,dt+C_3;$$

$$w(x,t)=C_1t^{-1/2}\exp\bigl[i\psi(x,t)\bigr],\quad \psi(x,t)=\frac{(x+C_2)^2}{4t}+\int f\bigl(t,|C_1|t^{-1/2}\bigr)\,dt+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 94–95).

3. $\boldsymbol{i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{1}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+f(x,|w|)w=0}$.

Уравнение Шредингера общего вида, $f(x,u)$ — действительная функция двух действительных переменных. Значениям $n=1$ и $n=2$ соответствует двумерное и трехмерное уравнение Шредингера с осевой и центральной симметрией.

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t)=u(x)e^{i(C_1t+C_2)},$$

где C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные, а функция $u=u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$x^{-n}(x^nu'_x)'_x-C_1u+f(x,|u|)u=0.$$

2°. Точное решение:

$$w(x,t)=u(x)\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr],\quad \varphi(x,t)=C_1t+C_2\int\frac{dx}{x^nu^2(x)}+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные, а функция $u=u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$x^{-n}(x^nu'_x)'_x-C_1u-C_2^2x^{-2n}u^{-3}+f(x,|u|)u=0.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 95).

4. $\boldsymbol{i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{1}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+f(t,|w|)w=0}$.

Уравнение Шредингера общего вида, $f(t,u)$ — действительная функция двух действительных переменных.

Точное решение:

$$w(x,t)=C_1t^{-\frac{n+1}{2}}\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr],\quad \varphi(x,t)=\frac{x^2}{4t}+\int f\Bigl(t,|C_1|t^{-\frac{n+1}{2}}\Bigr)\,dt+C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 96).

5. $\boldsymbol{i\dfrac{\partial w}{\partial t}+f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+g(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}+\Phi(x,|w|)w=0}$.

Уравнение Шредингера общего вида, $\Phi(x,u)$ — действительная функция двух действительных переменных. Случай $g(x)=f'_x(x)$ соответствует анизотропной среде.

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t)=u(x)e^{i(C_1t+C_2)},$$

где C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные, а функция $u=u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(x)u''_{xx}+g(x)u'_x-C_1u+\Phi(x,|u|)u=0.$$

2°. Точное решение:

$$w(x,t)=U(x)\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr],$$

$$\varphi(x,t)=C_1t+C_2\int\frac{R(x)}{U^2(x)}\,dx+C_3,\quad R(x)=\exp\biggl[-\int\frac{g(x)}{f(x)}\,dx\biggr],$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные, а функция $U=U(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(x)U''_{xx}+g(x)U'_x-C_1U-C_2^2f(x)R^2(x)U^{-3}+\Phi(x,|U|)U=0.$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=\bigl[f_1(t,|w|)+if_2(t,|w|)\bigr]\dfrac{\partial^2w}{\partial x^2}+\bigl[g_1(t,|w|)+ig_2(t,|w|)\bigr]w.$

Точное решение:

$$w(x,t)=u(t)\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr],\quad \varphi(x,t)=C_1x+\int\bigl[g_2(t,|u|)-C_1^2f_2(t,|u|)\bigr]\,dt+C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные, а функция $u=u(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$u'_t=ug_1(t,|u|)-C_1^2uf_1(t,|u|).$$

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=\bigl[f_1(x,|w|)+if_2(x,|w|)\bigr]\dfrac{\partial^2w}{\partial x^2}+\bigl[g_1(x,|w|)+ig_2(x,|w|)\bigr]w.$

Точное решение:

$$w(x,t)=u(x)\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr],\quad \varphi(x,t)=C_1t+\theta(x),$$

где функции $u=u(x)$ и $\theta=\theta(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}f_1u''_{xx}-f_1u(\theta'_x)^2-f_2u\theta''_{xx}-2f_2u'_x\theta'_x+g_1(|u|)u=0,\\ f_1u\theta''_{xx}-f_2u(\theta'_x)^2+f_2u''_{xx}+2f_1u'_x\theta'_x-C_1u+g_2(|u|)u=0.\end{gathered}$$

Здесь $f_n=f_n(x,|u|)$, $g_n=g_n(x,|u|)$, $n=1,\ 2$.

8. $i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial^2w}{\partial x^2}+i\dfrac{\partial}{\partial x}\bigl[f(t,|w|)w\bigr]=0.$

Точное решение:

$$w(x,t)=u(t)\exp[iv(x,t)],\quad v(x,t)=\varphi(t)x^2+\psi(t)x+\chi(t),$$

где функции $u=u(t)$, $\varphi=\varphi(t)$, $\psi=\psi(t)$, $\chi=\chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}u'_t+2\varphi u&=0,\\ \varphi'_t+4\varphi^2&=0,\\ \psi'_t+4\varphi\psi+2\varphi f(t,u)&=0,\\ \chi'_t+\psi^2+\psi f(t,u)&=0.\end{aligned}$$

Интегрируя, получим

$$u=\frac{C_2}{\sqrt{t+C_1}},\quad \varphi=\frac{1}{4(t+C_1)},\quad \psi=-2\varphi\int f(t,u)\,dt+C_3\varphi,\quad \chi=-\int\bigl[\psi^2+\psi f(t,u)\bigr]\,dt+C_4,$$

где C_1, …, C_4 — произвольные действительные постоянные.

9. $\boldsymbol{i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+i\dfrac{\partial}{\partial x}\big[f(x,|w|)w\big]=0}$.

Точное решение:
$$w(x,t)=U(x)\exp[i\beta t+iV(x)],$$
где β — произвольная действительная постоянная, а действительные функции $U=U(x)$ и $V=V(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений
$$(UV_x')_x'+U_x'V_x'+[f(x,U)U]_x'=0,$$
$$-\beta U+U_{xx}''-U(V_x')^2-f(x,U)UV_x'=0.$$

10. $\boldsymbol{i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\big[f(t,|w|)w\big]=0}$.

Точное решение:
$$w(x,t)=u(t)\exp[iv(x,t)],\quad v(x,t)=\varphi(t)x^2+\psi(t)x+\chi(t),$$
где функции $u=u(t)$, $\varphi=\varphi(t)$, $\psi=\psi(t)$, $\chi=\chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений
$$u_t'+2u\varphi f(t,u)=0,$$
$$\varphi_t'+4\varphi^2 f(t,u)=0,$$
$$\psi_t'+4\varphi\psi f(t,u)=0,$$
$$\chi_t'+\psi^2 f(t,u)=0.$$
Интегрируя, получим
$$\varphi=C_1u^2,\quad \psi=C_2u^2,\quad \chi=-C_2^2\int u^4 f(t,u)\,dt+C_3,$$
где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные, а функция $u=u(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $u_t'+2C_1u^3f(t,u)=0$.

11. $\boldsymbol{i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}\big[f(t,|w|)\dfrac{\partial w}{\partial x}\big]=0}$.

Точное решение:
$$w(x,t)=u(t)\exp[iv(x,t)],\quad v(x,t)=\varphi(t)x^2+\psi(t)x+\chi(t),$$
где функции $u=u(t)$, $\varphi=\varphi(t)$, $\psi=\psi(t)$, $\chi=\chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений
$$u_t'+2u\varphi f(t,u)=0,$$
$$\varphi_t'+4\varphi^2 f(t,u)=0,$$
$$\psi_t'+4\varphi\psi f(t,u)=0,$$
$$\chi_t'+\psi^2 f(t,u)=0.$$
Интегрируя, получим
$$\varphi=C_1u^2,\quad \psi=C_2u^2,\quad \chi=-C_2^2\int u^4 f(t,u)\,dt+C_3,$$
где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные, а функция $u=u(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $u_t'+2C_1u^3f(t,u)=0$.

12. $\boldsymbol{i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(x,|w|)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right]=0}$.

Существует решение вида
$$w(x,t)=U(x)\exp[i\beta t+iV(x)],$$
где β — произвольная действительная постоянная, а функции $U=U(z)$ и $V=V(z)$ описываются соответствующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений (которая опускается).