Из книги A. D. Polyanin and V. F. Zaitsev, «Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition», Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2011 [русский перевод].

2. Уравнения параболического типа с двумя и более пространственными переменными

2.1. Уравнения с двумя пространственными переменными, содержащие степенные нелинейности

2.1.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big[g(y)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big] + aw^p$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(by^m \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + cw^p.$

Частный случай уравнения 2.4.2.1 при $f(w) = cw^p$.

1°. Пусть $w(x, y, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w\Big(C_1^{\frac{p-1}{2-n}} x,\, C_1^{\frac{p-1}{2-m}} y,\, C_1^{p-1} t + C_2\Big),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x, y, t) = U(r, t), \quad r^2 = \frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2};$$

$$w(x, y, t) = t^{\frac{1}{1-p}} V(z_1, z_2), \quad z_1 = xt^{\frac{1}{n-2}}, \quad z_2 = yt^{\frac{1}{m-2}}.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\lambda y} \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + cw^p.$

Частный случай уравнения 2.4.2.3 при $f(w) = cw^p$.

1°. Пусть $w(x, y, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w\Big(C_1^{\frac{p-1}{2-n}} x,\, y + \frac{1-p}{\lambda}\ln C_1,\, C_1^{p-1} t + C_2\Big),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x, y, t) = U(r, t), \quad r^2 = \frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2};$$

$$w(x, y, t) = t^{\frac{1}{1-p}} V(z_1, z_2), \quad z_1 = xt^{\frac{1}{n-2}}, \quad z_2 = y + \frac{1}{\lambda}\ln t.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x} \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\lambda y} \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + cw^p.$

Частный случай уравнения 2.4.2.2 при $f(w) = cw^p$.

1°. Пусть $w(x, y, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w\Big(x + \frac{1-p}{\beta}\ln C_1,\, y + \frac{1-p}{\lambda}\ln C_1,\, C_1^{p-1} t + C_2\Big),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,t) = U(r,t), \quad r^2 = \frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2} + \frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2};$$

$$w(x,y,t) = t^{\frac{1}{1-p}} V(z_1,z_2), \quad z_1 = x + \frac{1}{\beta}\ln t, \quad z_2 = y + \frac{1}{\lambda}\ln t.$$

2.1.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + b\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(w^k \dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(w\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big).$

Частный случай уравнения 2.1.3.1 при $c = 0$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(w\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big).$

Уравнение Буссинеска. Встречается в нелинейных задачах теории теплопроводности и нестационарных задачах теории фильтрации со свободной поверхностью. Частный случай уравнения 2.1.2.4 при $n = 1$.

1°. Вырожденное решение, линейное по всем независимым переменным:

$$w(x,y,t) = Ax + By + (A^2 + B^2)t + C,$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

2°. Решение типа бегущей волны (k_1, k_2, λ — произвольные постоянные):

$$w = w(\xi), \qquad \xi = k_1 x + k_2 y + \lambda t,$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\lambda w'_\xi = (k_1^2 + k_2^2)(ww'_\xi)'_\xi.$$

Решение этого уравнения можно записать в неявном виде

$$\xi = B + \frac{k_1^2 + k_2^2}{\lambda^2}\big(\lambda w - A\ln|A + \lambda w|\big),$$

где A, B — произвольные постоянные.

3°. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по пространственным переменным:

$$w(x,y,t) = f(t)x^2 + g(t)xy + h(t)y^2,$$

где функции $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f'_t = 6f^2 + 2fh + g^2, \tag{1}$$
$$g'_t = 6(f+h)g, \tag{2}$$
$$h'_t = 6h^2 + 2fh + g^2. \tag{3}$$

Из уравнений (1), (3) следует, что $f'_t - h'_t = 6(f+h)(f-h)$. Далее с помощью уравнения (2) при $g \not\equiv 0$ находим $f = h + Ag$, где A — произвольная постоянная. Используя это равенство, исключим из (2) и (3) функцию h. В итоге имеем нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение для $g(t)$:

$$3gg''_{tt} - 5g'^2_t - 36(1 + A^2)g^4 = 0.$$

Решая это уравнение с помощью замены $u(g) = (g'_t)^2$, получим (B — произвольная постоянная)

$$g'_t = g\Phi(g), \qquad \Phi(g) = \pm\sqrt{Bg^{4/3} + 36(1 + A^2)g^2}, \tag{4}$$
$$h = \tfrac{1}{12}\Phi(g) - \tfrac{1}{2}Ag, \quad f = \tfrac{1}{12}\Phi(g) + \tfrac{1}{2}Ag,$$

где первое уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, решение которого можно выписать в неявном виде.

В частном случае $B = 0$ имеем решение в явном виде (C — произвольная постоянная):

$$f(t) = \frac{\mu + A}{2(C - \mu t)}, \quad g(t) = \frac{1}{C - \mu t}, \quad h(t) = \frac{\mu - A}{2(C - \mu t)}, \qquad \mu = \pm\sqrt{1 + A^2}.$$

4°. Решение с обобщенным разделением переменных (обобщает решение из п. 3°):

$$w(x,y,t) = f(t)x^2 + g(t)xy + h(t)y^2 + \varphi(t)x + \psi(t)y + \chi(t),$$

где функции $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} f'_t &= 6f^2 + 2fh + g^2, & \varphi'_t &= 2(3f+h)\varphi + 2g\psi,\\ g'_t &= 6(f+h)g, & \psi'_t &= 2g\varphi + 2(f+3h)\psi,\\ h'_t &= 6h^2 + 2fh + g^2, & \chi'_t &= \varphi^2 + \psi^2 + 2(f+h)\chi. \end{aligned}$$

Первые три уравнения решаются независимо (см. п. 3°).

Пример. Точное решение:

$$w(x,t) = -\frac{y^2}{6t} + Cxt^{-1/3} + \frac{3}{2}C^2t^{1/3},$$

где C — произвольная постоянная.

5°. Существует «двумерное» решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,t) = (At+B)^{-1}\Theta(x,y),$$

где A, B — произвольные постоянные, а стационарное уравнение для функции Θ выписано в п. 4° уравнения 2.1.2.4 при $n = \alpha = 1$.

⊙ *Литература для уравнения* 2.1.2.2: П. Я. Полубаринова–Кочина (1977, стр. 433), С. С. Титов, В. А. Устинов (1985), В. В. Пухначев (1995), А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998).

3. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \alpha\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right].$

Частный случай уравнения 2.1.2.4 при $n = -1$.

1°. Решения типа бегущей волны:

$$w(\xi) = -\frac{\alpha(k_1^2+k_2^2)}{\lambda(\xi+A)}, \quad \xi = k_1x + k_2y + \lambda t,$$

$$w(\xi) = \left\{A + B\exp\left[\frac{\lambda\xi}{\alpha A(k_1^2+k_2^2)}\right]\right\}^{-1},$$

где A, B, k_1, k_2, λ — произвольные постоянные.

2°. Точные решения:

$$w(x,y,t) = \frac{2\alpha t + B}{(\sin y + Ae^x)^2},$$

$$w(x,y,t) = \frac{2A^2\alpha t + C}{e^{2x}\operatorname{sh}^2(Ae^{-x}\sin y + B)},$$

$$w(x,y,t) = \frac{C - 2A^2\alpha t}{e^{2x}\operatorname{ch}^2(Ae^{-x}\sin y + B)},$$

$$w(x,y,t) = \frac{2A^2\alpha t + C}{e^{2x}\cos^2(Ae^{-x}\sin y + B)},$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

3°. Указанные в п. 2° точные решения являются частными случаями более общего решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,t) = (A\alpha t + B)e^{\Theta(x,y)},$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\Theta(x,y)$ является решением стационарного уравнения

$$\Delta\Theta - Ae^{\Theta} = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

которое встречается в теории горения. О решении этого уравнения см. 5.2.1.1.

4°. Другие точные решения:

$$w(x,y,t) = \frac{2\operatorname{sh}(\alpha t + C)\operatorname{ch}(\alpha t + C)}{(x+A)^2\operatorname{sh}^2(\alpha t + C) + (y+B)^2\operatorname{ch}^2(\alpha t + C)},$$

$$w(x,y,t) = \left[\frac{1}{A + \alpha\mu^2 t} + B(A + \alpha\mu^2 t)e^{\mu x} \pm \frac{\sin(\mu y + \eta_0)}{A + \alpha\mu^2 t}\right]^{-1},$$

$$w(x,y,t) = \left[A\operatorname{cth}\theta(t) + B\operatorname{sh}\theta(t)\,e^{\mu x} \pm A\frac{\sin(\mu y + \eta_0)}{\operatorname{sh}\theta(t)}\right]^{-1},$$

$$w(x,y,t) = \left[A\operatorname{ctg}\theta(t) + B\sin\theta(t)\,e^{\mu x} \pm A\frac{\sin(\mu y + \eta_0)}{\sin\theta(t)}\right]^{-1},$$

$$w(x,y,t) = \left[\frac{A}{\cos\theta(t)} \pm A\frac{1+\sin\theta(t)}{2\cos\theta(t)}\operatorname{ch}(\mu x + \xi_0) + sA\frac{1-\sin\theta(t)}{2\cos\theta(t)}\sin(\mu y + \eta_0)\right]^{-1},$$

$$w(x,y,t) = \left[-\frac{A}{\cos\theta(t)} \pm A\frac{1-\sin\theta(t)}{2\cos\theta(t)}\operatorname{ch}(\mu x + \xi_0) + sA\frac{1+\sin\theta(t)}{2\cos\theta(t)}\sin(\mu y + \eta_0)\right]^{-1},$$

$$w(x,y,t) = \left[\frac{A}{\operatorname{sh}\theta(t)} \pm A\frac{1-\operatorname{ch}\theta(t)}{2\operatorname{sh}\theta(t)}\operatorname{ch}(\mu x + \xi_0) + sA\frac{1+\operatorname{ch}\theta(t)}{2\operatorname{sh}\theta(t)}\sin(\mu y + \eta_0)\right]^{-1},$$

$$w(x,y,t) = \left[-\frac{A}{\operatorname{sh}\theta(t)} \pm A\frac{1+\operatorname{ch}\theta(t)}{2\operatorname{sh}\theta(t)}\operatorname{ch}(\mu x + \xi_0) + sA\frac{1-\operatorname{ch}\theta(t)}{2\operatorname{sh}\theta(t)}\sin(\mu y + \eta_0)\right]^{-1},$$

где $\theta(t) = \alpha\mu^2 At + \tau_0$; A, B, μ, ξ_0, η_0, τ_0 — произвольные постоянные; s — параметр, принимающий значения 1 или -1.

Делая в правых частях этих формул переобозначение независимых переменных $x \rightleftarrows y$, можно получить другую группу решений (которые здесь не выписываются).

5°. Решения с осевой симметрией:

$$w(r,t) = \frac{\lambda^2 r^{\lambda-2}}{r^\lambda + Ce^{\alpha t}},$$

$$w(r,t) = \frac{\lambda\varphi r^{\varphi-2}}{C_1 + r^\varphi(\varphi\ln r - 1)}, \quad \varphi = \frac{\lambda}{\alpha t + C_2},$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2}$; C, C_1, C_2, λ — произвольные постоянные.

6°. Преобразование $w = 1/U$ приводит к уравнению вида 2.1.4.3 при $\beta = 0$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha U\Delta U - \alpha\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right].$$

⊙ *Литература для уравнения* 2.1.2.3: В. А. Дородницын, И. В. Князева, С. Р. Свирщевский (1983), В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989), В. В. Пухначев (1995), А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998, стр. 297–298), С. Н. Аристов (1999).

4. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \alpha\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(w^n\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(w^n\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right].$

Двумерное нестационарное уравнение тепло- и массопереноса при степенной зависимости коэффициента температуропроводности от температуры (показатель n может быть целым, дробным и отрицательным). Частный случай уравнения 2.4.3.3 при $f(w) = \alpha w^n$.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2/n}C_2^{1/n}w(\pm C_1 x + C_3, \pm C_1 y + C_4, C_2 t + C_5),$$

$$w_2 = w(x\cos\beta - y\sin\beta, x\sin\beta + y\cos\beta, t),$$

где $C_1, \ldots, C_5$, β — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения. Знаки выбираются произвольным образом.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w = \left[\frac{n\lambda(k_1 x + k_2 y + \lambda t + C)}{\alpha(k_1^2 + k_2^2)}\right]^{1/n},$$

где C, k_1, k_2, λ — произвольные постоянные.

3°. Решение типа бегущей волны в неявном виде (обобщает решение из п. 2°):

$$\alpha(k_1^2+k_2^2)\int\frac{w^n\,dw}{\lambda w+C_1}=k_1x+k_2y+\lambda t+C_2,$$

где C_1, C_2, k_1, k_2, λ — произвольные постоянные.

4°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,t)=f(t)\Theta(x,y),\qquad f(t)=(A\alpha nt+B)^{-1/n}.$$

Здесь A, B — произвольные постоянные, а функция $\Theta(x,y)$ — решение двумерного стационарного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Theta^n\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Theta^n\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)+A\Theta=0.$$

Последнее уравнение при $n\neq-1$ можно преобразовать к следующей форме:

$$\Delta u+A(n+1)u^{\frac{1}{n+1}}=0,\qquad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},\quad u=\Theta^{n+1}.$$

5°. Уравнение имеет «двумерные» решения следующего вида:

$$\begin{aligned}
&w(x,y,t)=F(z,t), && z=k_1x+k_2y;\\
&w(x,y,t)=G(r,t), && r=\sqrt{x^2+y^2};\\
&w(x,y,t)=H(\xi_1,\xi_2), && \xi_1=k_1x+\lambda_1t,\quad \xi_2=k_2y+\lambda_2t;\\
&w(x,y,t)=t^\beta U(\eta_1,\eta_2), && \eta_1=xt^{-\frac{n\beta+1}{2}},\quad \eta_2=yt^{-\frac{n\beta+1}{2}};\\
&w(x,y,t)=e^{2\beta t}V(\zeta_1,\zeta_2), && \zeta_1=xe^{-\beta nt},\quad \zeta_2=ye^{-\beta nt},
\end{aligned}$$

где k_1, k_2, λ_1, λ_2, β — произвольные постоянные.

6°. См. также уравнения 2.5.5.5 и 2.5.5.6 для случая двух пространственных переменных.

⦿ *Литература для уравнения* 2.1.2.4: В. А. Дородницын, И. В. Князева, С. Р. Свирщевский (1983), С. С. Титов, В. А. Устинов (1985), J. R. King (1993), В. В. Пухначев (1995).

5. $\displaystyle \boldsymbol{\frac{\partial w}{\partial t}=a_1\frac{\partial}{\partial x}\left(w^{n_1}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+a_2\frac{\partial}{\partial y}\left(w^{n_2}\frac{\partial w}{\partial y}\right).}$

Частный случай уравнения 2.4.3.4 при $f(w)=a_1w^{n_1}$ и $g(w)=a_2w^{n_2}$.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=A^2w(\pm A^{-n_1}Bx+C_1,\pm A^{-n_2}By+C_2,B^2t+C_3),$$

где A, B, C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\int\frac{a_1k_1^2w^{n_1}+a_2k_2^2w^{n_2}}{\lambda w+C_1}\,dw=k_1x+k_2y+\lambda t+C_2,$$

где C_1, C_2, k_1, k_2, λ — произвольные постоянные.

3°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t)=t^kU(\xi,\eta),\quad \xi=xt^{-\frac{1}{2}(kn_1+1)},\quad \eta=yt^{-\frac{1}{2}(kn_2+1)},$$

где k — произвольная постоянная, а функция $U(\xi,\eta)$ описывается уравнением

$$kU-\tfrac{1}{2}(kn_1+1)\xi\frac{\partial U}{\partial\xi}-\tfrac{1}{2}(kn_2+1)\eta\frac{\partial U}{\partial\eta}=a_1\frac{\partial}{\partial x}\left(U^{n_1}\frac{\partial U}{\partial x}\right)+a_2\frac{\partial}{\partial y}\left(U^{n_2}\frac{\partial U}{\partial y}\right).$$

4°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t)=e^{2\beta t}V(z_1,z_2),\quad z_1=xe^{-\beta n_1t},\quad z_2=ye^{-\beta n_2t},$$

где β — произвольная постоянная, а функция $V(z_1,z_2)$ описывается уравнением

$$2\beta V-\beta n_1z_1\frac{\partial V}{\partial z_1}-\beta n_2z_2\frac{\partial V}{\partial z_2}=a_1\frac{\partial}{\partial z_1}\left(V^{n_1}\frac{\partial V}{\partial z_1}\right)+a_2\frac{\partial}{\partial z_2}\left(V^{n_2}\frac{\partial V}{\partial z_2}\right).$$

5°. Существует «двумерное» решение вида

$$w(x,y,t)=F(\xi_1,\xi_2),\quad \xi_1=\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1t,\quad \xi_2=\alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2t,$$

где α_i, β_i, γ_i — произвольные постоянные.

⦿ *Литература*: А. А. Самарский, И. М. Соболь (1963), В. А. Дородницын, И. В. Князева, С. Р. Свирщевский (1983), N. H. Ibragimov (1994, pp. 155–158).

2.1.3. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(w)\frac{\partial w}{\partial y}\right] + h(w)$

1. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left[(bw+c)\frac{\partial w}{\partial y}\right].$

Данное уравнение при $a=1$, $b<0$, $c>0$ описывает пространственные околозвуковые течения идеального политропного газа (С. И. Похожаев, 1989).

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2} w(\pm C_2 x + C_3, \pm C_1 C_2 y + C_4, C_2^2 t + C_5) + \frac{c(1-C_1^2)}{bC_1^2},$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$bk_2^2 w + (ak_1^2 + ck_2^2 - C_1 bk_2^2)\ln|w + C_1| = \lambda(k_1 x + k_2 y + \lambda t) + C_2,$$

где C_1, C_2, k_1, k_2, λ — произвольные постоянные.

3°. Точное решение:

$$w = u(z) - 4abC_1^2 x^2 - 4abC_1C_2 x, \qquad z = y + bC_1 x^2 + bC_2 x + C_3 t,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функция $u(z)$ задана обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$(bu + c + ab^2C_2^2)u'_z + (2abC_1 - C_3)u = 8a^2bC_1^2 z + C_4.$$

За счет подходящих сдвигов по обеим переменным можно добиться, чтобы уравнение стало однородным (т. е. уравнение интегрируется в квадратурах).

4°. Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по y (это решение является вырожденным):

$$w = F(x,t)y + G(x,t),$$

где функции F и G определяются путем решения одномерных уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial t} - a\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} - a\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = bF^2. \qquad (2)$$

Уравнение (1) является линейным однородным уравнением теплопроводности. Уравнение (2) при известной функции $F = F(x,t)$ можно рассматривать как линейное неоднородное уравнение теплопроводности. Об этих уравнениях см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

5°. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по y:

$$w = f(x,t)y^2 + g(x,t)y + h(x,t),$$

где функции $f = f(x,t)$, $g = g(x,t)$, $h = h(x,t)$ описываются системой уравнений

$$f_t = af_{xx} + 6bf^2,$$
$$g_t = ag_{xx} + 6bfg,$$
$$h_t = ah_{xx} + bg^2 + 2bfh + 2cf.$$

Здесь индексы обозначают соответствующие частные производные.

6°. «Двумерное» решение:

$$w = |y + C|^{1/2}\theta(x,t) - \frac{c}{b},$$

где функция $\theta(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}.$$

7°. «Двумерное» решение:

$$w = U(\xi,t) - \frac{aC_1^2 + cC_2^2}{bC_2^2}, \qquad \xi = C_1 x + C_2 y,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $U(\xi,t)$ описывается дифференциальным уравнением вида 1.10.1.1:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = bC_2^2 \frac{\partial}{\partial \xi}\left(U\frac{\partial U}{\partial \xi}\right).$$

8°. «Двумерное» решение:

$$w = V(\eta, t) - 4abC_1^2x^2 - 4abC_1C_2x, \qquad \eta = y + bC_1x^2 + bC_2x,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $V(\eta, t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left[(bV + c + ab^2C_2^2)\frac{\partial V}{\partial \eta}\right] + 2abC_1\frac{\partial V}{\partial \eta} - 8a^2bC_1^2.$$

9°. Точное решение:

$$w = U(z) + f(x, t), \qquad z = y + g(x, t).$$

Здесь

$$f(x,t) = -\frac{C_2^2}{2\sqrt{a}\,b}xt + \frac{C_2^2}{2b}t^2 - \frac{2\sqrt{a}\,BC_2}{b}t + \frac{C_3}{b} - \frac{1}{b}(C_2\eta + 4aB)\psi'(\eta),$$

$$g(x,t) = \frac{C_2}{8a}\left(x^2 + 2\sqrt{a}\,xt - 3at^2\right) + B(x + \sqrt{a}\,t) + \psi(\eta) \quad \eta = x - t\sqrt{a},$$

где $\psi(\eta)$ — произвольная функция, штрих обозначает производную по η.

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов (2005, стр. 101–102), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, стр. 147–148).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[(\alpha w + \beta)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[(\alpha w + \beta)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right].$

Это двумерное нестационарное уравнение тепло- и массопереноса, когда коэффициент температуропроводности зависит от температуры по линейному закону.

Подстановка $U = \alpha w + \beta$ приводит это уравнение к виду 2.1.2.2 при $U = U(x, y, t)$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\alpha w + \beta}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{\alpha w + \beta}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right).$

Это двумерное нестационарное уравнение тепло- и массопереноса, когда коэффициент температуропроводности задается гиперболической зависимостью от температуры.

Подстановка $U = \alpha w + \beta$ приводит это уравнение к виду 2.1.2.3 при $U = U(x, y, t)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \alpha\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \beta w.$

1°. Преобразование

$$w(x, y, t) = e^{\beta t}u(x, y, \tau), \quad \tau = C - \frac{1}{\beta}e^{-\beta t},$$

где C — произвольная постоянная, приводит к более простому уравнению вида 2.1.2.3:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right].$$

2°. В работе В. М. Журавлева (2000) описан нелинейный принцип суперпозиции, позволяющий строить сложные многомодовые решения исходного уравнения (там же указаны некоторые точные решения).

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \alpha\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \beta w^2.$

Подстановка $w = 1/U$ приводит это уравнение к виду 2.1.4.3 при $U = U(x, y, t)$.

⦿ *Литература*: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989), N. H. Ibragimov (1994, pp. 157–158).

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \alpha\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(w^n\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \beta w.$

Преобразование

$$w(x, y, t) = e^{\beta t}U(x, y, \tau), \quad \tau = \frac{1}{\beta n}e^{\beta n t} + C$$

где C — произвольная постоянная, приводит к более простому уравнению вида 2.1.2.4:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \alpha\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(U^n\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(U^n\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right].$$

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a_1 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^{n_1}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + a_2 \dfrac{\partial}{\partial y}\left(w^{n_2}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + bw^k.$

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = A^2 w(\pm A^{k-n_1-1}x + B_1, \pm A^{k-n_2-1}y + B_2, A^{2k-2}t + B_3),$$

где A, B_1, B_2, B_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w(x,y,t) = u(z), \quad z = t - \lambda_1 x - \lambda_2 y,$$

где λ_1, λ_2 — произвольные постоянные, а функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$u'_z = [(a_1\lambda_1^2 u^{n_1} + a_2\lambda_2^2 u^{n_2})u'_z]'_z + bu^k.$$

3°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = (\alpha t+\beta)^{\frac{1}{1-k}} F(\xi,\eta), \quad \xi = x(\alpha t+\beta)^{\frac{n_1-k+1}{2(k-1)}}, \quad \eta = y(\alpha t+\beta)^{\frac{n_2-k+1}{2(k-1)}},$$

где функция $F = F(\xi,\eta)$ описывается уравнением

$$\frac{\alpha}{1-k}F + \alpha\frac{n_1-k+1}{2(k-1)}\xi\frac{\partial F}{\partial \xi} + \alpha\frac{n_2-k+1}{2(k-1)}\eta\frac{\partial F}{\partial \eta} = a_1\frac{\partial}{\partial \xi}\left(F^{n_1}\frac{\partial F}{\partial \xi}\right) + a_2\frac{\partial}{\partial \eta}\left(F^{n_2}\frac{\partial F}{\partial \eta}\right) + bF^k.$$

⊙ *Литература*: В. А. Дородницын, И. В. Князева, С. Р. Свирщевский (1983), М. И. Бакирова, С. Н. Димова, В. А. Дородницын, С. П. Курдюмов, А. А. Самарский, С. Р. Свирщевский (1988), N. H. Ibragimov (1994, pp. 156–158).

2.1.4. Другие уравнения

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right).$

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1 w(C_2 x + C_3, \pm C_2 y + C_4, C_1 C_2^2 t + C_5),$$
$$w_2 = w(x\cos\beta - y\sin\beta, x\sin\beta + y\cos\beta, t),$$

где $C_1, \ldots, C_5$, β — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,t) = \varphi(t)(C_1x^2 + C_2xy + C_3y^2 + C_4x + C_5y + C_6), \quad \varphi(t) = \frac{1}{C_7 - 2a(C_1+C_3)t},$$

где $C_1, \ldots, C_7$ — произвольные постоянные.

3°. Уравнение допускает более общее решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,t) = \frac{\Theta(x,y)}{A+Bt},$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\Theta = \Theta(x,y)$ удовлетворяет двумерному уравнению Пуассона

$$a\Delta\Theta + B = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

4°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$a(k_1^2+k_2^2)\int\frac{dw}{\lambda\ln|w| + C_1} = k_1x + k_2y + \lambda t + C_2,$$

где C_1, C_2, k_1, k_2, λ — произвольные постоянные.

5°. Уравнение имеет «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,t)=F(z,t),\qquad z=k_1x+k_2y;$$
$$w(x,y,t)=G(r,t),\qquad r=\sqrt{x^2+y^2};$$
$$w(x,y,t)=H(\xi_1,\xi_2),\qquad \xi_1=k_1x+\lambda_1t,\quad \xi_2=k_2y+\lambda_2t;$$
$$w(x,y,t)=t^\beta U(\eta_1,\eta_2),\qquad \eta_1=x^2t^{-\beta-1},\quad \eta_2=y^2t^{-\beta-1};$$
$$w(x,y,t)=e^{2t}V(\zeta_1,\zeta_2),\qquad \zeta_1=xe^{-t},\quad \zeta_2=ye^{-t},$$

где k_1, k_2, λ_1, λ_2, β — произвольные постоянные.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=(\alpha+\beta w)\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\gamma w^2+\delta w+\varepsilon.$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y,t)=f(t)+g(t)\Theta(x,y).$$

Здесь $\Theta(x,y)$ — любое решение двумерного уравнения Гельмгольца

$$\Delta\Theta+\varkappa\Theta=0,\qquad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},\tag{1}$$

где $\varkappa=\gamma/\beta$ ($\beta\neq 0$). О решениях линейного уравнения (1) см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

Функции $f(t)$ и $g(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} f'_t&=\gamma f^2+\delta f+\varepsilon,\\ g'_t&=(\gamma f+\delta-\alpha\varkappa)g. \end{aligned}\tag{2}$$

Первое уравнение этой системы не зависит от функции $g(t)$ и представляет собой уравнение с разделяющимися переменными. После определения $f(t)$ решается второе уравнение (2), которое линейно относительно функции $g(t)$.

Функции $f(t)$ и $g(t)$ имеют различный вид в зависимости от значений параметров уравнения. Выделим пять возможных случаев (ниже C_1, C_2 — произвольные постоянные).

1°. При $\gamma=\delta=0$ имеем

$$f(t)=C_1+\varepsilon t,\quad g(t)=C_2e^{-\alpha\varkappa t}.$$

2°. При $\gamma=0$, $\delta\neq 0$ имеем

$$f(t)=C_1e^{\delta t}-\frac{\varepsilon}{\delta},\quad g(t)=C_2e^{(\delta-\alpha\varkappa)t}.$$

3°. При $\gamma\neq 0$, $\delta^2-4\gamma\varepsilon=\mu^2>0$ ($\mu>0$) имеем

$$f(t)=\frac{s_1+s_2C_1e^{\mu t}}{1+C_1e^{\mu t}},\quad g(t)=\frac{C_2}{1+C_1e^{\mu t}}e^{-(\gamma s_2+\alpha\varkappa)t},\qquad s_{1,2}=\frac{-\delta\pm\mu}{2\gamma}.$$

4°. При $\gamma\neq 0$, $\delta^2-4\gamma\varepsilon=0$ имеем

$$f(t)=-\frac{\delta}{2\gamma}-\frac{1}{C_1+\gamma t},\quad g(t)=\frac{C_2}{C_1+\gamma t}\exp\bigl[\bigl(\tfrac12\delta-\alpha\varkappa\bigr)t\bigr].$$

5°. При $\gamma\neq 0$, $\delta^2-4\gamma\varepsilon=-\mu^2<0$ ($\mu>0$) имеем

$$f(t)=\frac{\mu}{2\gamma}\operatorname{tg}\bigl(\tfrac12\mu t+C_1\bigr)-\frac{\delta}{2\gamma},\quad g(t)=C_2\frac{\exp\bigl[\bigl(\tfrac12\delta-\alpha\varkappa\bigr)t\bigr]}{\cos\bigl(\tfrac12\mu t+C_1\bigr)}.$$

⊙ *Литература*: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989), N. H. Ibragimov (1994, pp. 155–158).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=\alpha w\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-\alpha\left[\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]-\beta.$

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$\begin{aligned} w_1&=C_1^{-1}w(C_1x+C_2,\pm C_1y+C_3,C_1t+C_4),\\ w_2&=w(x\cos\beta-y\sin\beta,x\sin\beta+y\cos\beta,t), \end{aligned}$$

где $C_1,\ldots,C_4$, β — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y,t) = C_1 - \beta t + C_2 \exp\bigl[\alpha(\mu^2+\nu^2)\bigl(C_1 t - \tfrac{1}{2}\beta t^2\bigr)\bigr] e^{\mu x+\nu y},$$

где μ, ν, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Точные решения при $\beta = 0$:

$$w(x,y,t) = \frac{1}{A+\alpha\mu^2 t} + B(A+\alpha\mu^2 t)e^{\mu x} \pm \frac{\sin(\mu y+\eta_0)}{A+\alpha\mu^2 t},$$

$$w(x,y,t) = A\operatorname{cth}\theta(t) + B\operatorname{sh}\theta(t)\, e^{\mu x} \pm A\frac{\sin(\mu y+\eta_0)}{\operatorname{sh}\theta(t)},$$

$$w(x,y,t) = A\operatorname{ctg}\theta(t) + B\sin\theta(t)\, e^{\mu x} \pm A\frac{\sin(\mu y+\eta_0)}{\sin\theta(t)},$$

$$w(x,y,t) = \frac{A}{\cos\theta(t)} \pm A\frac{1+\sin\theta(t)}{2\cos\theta(t)}\operatorname{ch}(\mu x+\xi_0) + sA\frac{1-\sin\theta(t)}{2\cos\theta(t)}\sin(\mu y+\eta_0),$$

$$w(x,y,t) = -\frac{A}{\cos\theta(t)} \pm A\frac{1-\sin\theta(t)}{2\cos\theta(t)}\operatorname{ch}(\mu x+\xi_0) + sA\frac{1+\sin\theta(t)}{2\cos\theta(t)}\sin(\mu y+\eta_0),$$

$$w(x,y,t) = \frac{A}{\operatorname{sh}\theta(t)} \pm A\frac{1-\operatorname{ch}\theta(t)}{2\operatorname{sh}\theta(t)}\operatorname{ch}(\mu x+\xi_0) + sA\frac{1+\operatorname{ch}\theta(t)}{2\operatorname{sh}\theta(t)}\sin(\mu y+\eta_0),$$

$$w(x,y,t) = -\frac{A}{\operatorname{sh}\theta(t)} \pm A\frac{1+\operatorname{ch}\theta(t)}{2\operatorname{sh}\theta(t)}\operatorname{ch}(\mu x+\xi_0) + sA\frac{1-\operatorname{ch}\theta(t)}{2\operatorname{sh}\theta(t)}\sin(\mu y+\eta_0),$$

где A, B, μ, ξ_0, η_0, τ_0 — произвольные постоянные; $\theta(t) = \alpha\mu^2 At + \tau_0$; s — параметр, принимающий значения 1 или -1.

Делая в указанных формулах переобозначения пространственных переменных $x \rightleftarrows y$, можно получить другую группу решений (которые здесь не выписываются).

4°. Имеется решение с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,y,t) = f(t) + g(t)\varphi(x) + h(t)\psi(y). \qquad (1)$$

В частности, при $\varphi''_{xx} = \nu\varphi$ и $\psi''_{yy} = -\nu\psi$, где ν — произвольная постоянная, имеем

$$\varphi(x) = A_1\operatorname{ch}\mu x + A_2\operatorname{sh}\mu x, \quad \psi(y) = B_1\cos\mu y + B_2\sin\mu y \quad (\nu = \mu^2 > 0),$$

$$\varphi(x) = A_1\cos\mu x + A_2\sin\mu x, \quad \psi(y) = B_1\operatorname{ch}\mu y + B_2\operatorname{sh}\mu y \quad (\nu = -\mu^2 < 0).$$

Здесь A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные. Функции $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ в (1) описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f'_t = \alpha\nu(A_1^2 - sA_2^2)g^2 - \alpha\nu(B_1^2 + sB_2^2)h^2 - \beta,$$
$$g'_t = \alpha\nu f g,$$
$$h'_t = -\alpha\nu f h,$$

где $s = \operatorname{sign}\nu$. Можно понизить порядок этой системы на два и представить ее в виде

$$f = \Phi(h), \quad g = C_2/h, \quad h'_t = -\alpha\nu h\Phi(h),$$

где

$$\Phi(h) = \pm\sqrt{C_1 + (A_1^2 - sA_2^2)\frac{C_2^2}{h^2} + \frac{2\beta}{\alpha\nu}\ln|h| + (B_1^2 + sB_2^2)h^2}\,;$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные. При $\beta = 0$ в некоторых случаях можно получить решение в явном виде (см. п. 3°).

5°. Имеется решение с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,y,t) = f(t) + g(t)\varphi(x) + h(t)\psi(y) + u(t)\theta(x)\chi(y). \qquad (2)$$

При $\varphi''_{xx} = 4\nu\varphi$, $\psi''_{yy} = -4\nu\psi$, $\theta''_{xx} = \nu\theta$, $\chi''_{yy} = -\nu\chi$, где ν — произвольная постоянная, в формуле (2) следует положить

при $\nu = \mu^2 > 0$	при $\nu = -\mu^2 < 0$
$\varphi(x) = A_1\operatorname{ch}2\mu x + A_2\operatorname{sh}2\mu x$	$\varphi(x) = A_1\cos 2\mu x + A_2\sin 2\mu x$
$\psi(y) = B_1\cos 2\mu y + B_2\sin 2\mu y$	$\psi(y) = B_1\operatorname{ch}2\mu y + B_2\operatorname{sh}2\mu y$
$\theta(x) = C_1\operatorname{ch}\mu x + C_2\operatorname{sh}\mu x$	$\theta(x) = C_1\cos\mu x + C_2\sin\mu x$
$\chi(y) = D_1\cos\mu y + D_2\sin\mu y$	$\chi(y) = D_1\operatorname{ch}\mu y + D_2\operatorname{sh}\mu y$

Функции $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $u(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений ($s = \operatorname{sign}\nu$):

$$\begin{aligned}
f'_t &= -4\alpha\nu(A_1^2 - sA_2^2)g^2 + 4\alpha\nu(B_1^2 + sB_2^2)h^2 - \beta,\\
g'_t &= -4\alpha\nu fg + \alpha\nu a_1(D_1^2 + sD_2^2)u^2,\\
h'_t &= 4\alpha\nu fh - \alpha\nu a_2(C_1^2 - sC_2^2)u^2,\\
u'_t &= -2\alpha\nu(a_3 g - a_4 h)u.
\end{aligned}$$

Произвольные постоянные A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2 связаны двумя соотношениями

$$2A_1C_1C_2 = A_2(C_1^2 + sC_2^2), \quad 2B_1D_1D_2 = B_2(D_1^2 - sD_2^2).$$

Коэффициенты a_1, a_2, a_3, a_4 определяются по формулам

$$a_1 = \frac{C_1^2 + sC_2^2}{2A_1}, \quad a_2 = \frac{D_1^2 - sD_2^2}{2B_1}, \quad a_3 = A_2\frac{C_1^2 - sC_2^2}{C_1C_2}, \quad a_4 = B_2\frac{D_1^2 + sD_2^2}{D_1D_2},$$

где $A_1 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $C_1C_2 \neq 0$, $D_1D_2 \neq 0$.

Если $A_1 = 0$ ($A_2 \neq 0$), то следует положить $a_1 = C_1C_2/A_2$. Если $B_1 = 0$ ($B_2 \neq 0$), то $a_2 = D_1D_2/B_2$. Если $C_1 = 0$ ($C_2 \neq 0$), то $a_3 = -A_1$. Если $C_2 = 0$ ($C_1 \neq 0$), то $a_3 = A_1$. Если $D_1 = 0$ ($D_2 \neq 0$), то $a_4 = -B_1$. Если $D_2 = 0$ ($D_1 \neq 0$), то $a_4 = B_1$.

6°. Уравнение имеет точное решение типа бегущей волны $w = w(k_1x + k_2y + \lambda t)$, где k_1, k_2, λ — произвольные постоянные.

7°. Имеются решения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,y,t) = f(t)x^2 + g(t)xy + h(t)y^2 + \varphi(t)x + \psi(t)y + \chi(t).$$

В частном случае $\varphi(t) = \psi(t) \equiv 0$ функции $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $\chi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
f'_t &= \alpha(2fh - 2f^2 - g^2), & h'_t &= \alpha(2fh - 2h^2 - g^2),\\
g'_t &= -2\alpha g(f + h), & \chi'_t &= 2\alpha(f + h)\chi - \beta,
\end{aligned}$$

которая полностью интегрируется.

⊙ *Литература для уравнения* 2.1.4.3: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989), А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998, стр. 293–295), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 100–101).

4. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \alpha\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(|\nabla w|\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(|\nabla w|\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \beta w^2.$

Здесь $|\nabla w|^2 = \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2$.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$\begin{aligned}
w_1 &= C_1 w(\pm x + C_2, \pm y + C_3, C_1 t + C_4),\\
w_2 &= w(x\cos\beta - y\sin\beta, x\sin\beta + y\cos\beta, t),
\end{aligned}$$

где $C_1, \ldots, C_4, \beta$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$\begin{aligned}
w(x,y,t) &= U(\xi,\eta), \quad \xi = C_1x + C_1y + C_3t, \quad \eta = C_4x + C_5y + C_6t,\\
w(x,y,t) &= (C_1t + C_2)^{-1}V(x,y).
\end{aligned}$$

3°. «Двумерное» решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y,t) = \frac{1}{C_1 - \beta t} + \frac{C_2}{(C_1 - \beta t)^2}F(x,y),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $F(x,y)$ — любое решение стационарного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(|\nabla F|\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(|\nabla F|\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \varkappa F^2 = 0, \qquad \varkappa = \frac{\beta}{\alpha}\operatorname{sign} C_2.$$

4°. «Двумерное» решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y,t) = f(t) + g(t)\Theta(x,y).$$

Здесь функции $f(t)$ и $g(t)$ определяются формулами

$$f(t) = \frac{1}{B-\beta t}, \quad g(t) = \frac{\beta}{(B-\beta t)[A + C(B-\beta t)]},$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\Theta(x,y)$ — любое решение стационарного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(|\nabla\Theta|\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(|\nabla\Theta|\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right) \pm \varkappa\Theta^2 = \mu\Theta, \qquad \varkappa = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \mu = \frac{A}{\alpha}.$$

⦿ *Литература*: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989).

2.2. Уравнения с двумя пространственными переменными, содержащие экспоненциальные нелинейности

2.2.1. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(y)\frac{\partial w}{\partial y}\right] + ae^{\lambda w}$

1. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(by^m\frac{\partial w}{\partial y}\right) + ce^{\lambda w}.$

Частный случай уравнения 2.4.2.1 при $f(w) = ce^{\lambda w}$.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w\left(C_1^{\frac{1}{2-n}}x,\, C_1^{\frac{1}{2-m}}y,\, C_1 t + C_2\right) + \frac{1}{\lambda}\ln C_1,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,t) = U(r,t), \quad r^2 = \frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2};$$

$$w(x,y,t) = V(z_1,z_2) - \frac{1}{\lambda}\ln t, \quad z_1 = xt^{\frac{1}{n-2}}, \quad z_2 = yt^{\frac{1}{m-2}}.$$

2. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(be^{\lambda y}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + ce^{\beta w}.$

Частный случай уравнения 2.4.2.3 при $f(w) = ce^{\beta w}$.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w\left(C_1^{\frac{1}{2-n}}x,\, y - \frac{1}{\lambda}\ln C_1,\, C_1 t + C_2\right) + \frac{1}{\beta}\ln C_1,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,t) = U(r,t), \quad r^2 = \frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2};$$

$$w(x,y,t) = V(z_1,z_2) - \frac{1}{\beta}\ln t, \quad z_1 = xt^{\frac{1}{n-2}}, \quad z_2 = y + \frac{1}{\lambda}\ln t.$$

3. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(be^{\lambda y}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + ce^{\mu w}.$

Частный случай уравнения 2.4.2.2 при $f(w) = ce^{\mu w}$.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w\left(x - \frac{1}{\beta}\ln C_1,\, y - \frac{1}{\lambda}\ln C_1,\, C_1 t + C_2\right) + \frac{1}{\mu}\ln C_1,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,t) = U(r,t), \quad r^2 = \frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2} + \frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2};$$
$$w(x,y,t) = V(z_1,z_2) - \frac{1}{\mu}\ln t, \quad z_1 = x + \frac{1}{\beta}\ln t, \quad z_2 = y + \frac{1}{\lambda}\ln t.$$

2.2.2. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\beta w}\frac{\partial w}{\partial x}\Big) + b\frac{\partial}{\partial y}\Big(e^{\lambda w}\frac{\partial w}{\partial y}\Big) + f(w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \alpha\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\mu w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(e^{\mu w}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)\right].$

Двумерное нестационарное уравнение тепло- и массопереноса при экспоненциальной зависимости коэффициента температуропроводности от температуры. Частный случай уравнения 2.4.3.3 при $f(w) = \alpha e^{\mu w}$.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(C_1x + C_3, \pm C_1y + C_4, C_2t + C_5) + \frac{1}{\mu}\ln\frac{C_2}{C_1^2},$$
$$w_2 = w(x\cos\beta - y\sin\beta, x\sin\beta + y\cos\beta, t),$$

где $C_1, \ldots, C_5, \beta$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\alpha(k_1^2 + k_2^2)\int\frac{e^{\mu w}\,dw}{\lambda w + C_1} = k_1x + k_2y + \lambda t + C_2,$$

где C_1, C_2, k_1, k_2, λ — произвольные постоянные.

3°. Решение в виде суммы функций, зависящих от разных аргументов:

$$w(x,y,t) = f(t) + \frac{1}{\mu}\ln\Theta(x,y), \qquad f(t) = -\frac{1}{\mu}\ln(A\alpha t + B).$$

Здесь A, B, μ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(x,y)$ — любое решение уравнения Пуассона

$$\Delta\Theta + A = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

4°. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$\begin{aligned}
&w(x,y,t) = F(z,t), && z = k_1x + k_2y;\\
&w(x,y,t) = G(r,t), && r = \sqrt{x^2+y^2};\\
&w(x,y,t) = G(\xi_1,\xi_2), && \xi_1 = k_1x + \lambda_1 t, \quad \xi_2 = k_2y + \lambda_2 t;\\
&w(x,y,t) = H(\eta_1,\eta_2), && \eta_1 = x^2/t, \quad \eta_2 = y^2/t;\\
&w(x,y,t) = \frac{2}{\mu}t + U(\zeta_1,\zeta_2), && \zeta_1 = xe^{-t}, \quad \zeta_2 = ye^{-t},
\end{aligned}$$

где k_1, k_2, λ_1, λ_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: В. А. Дородницын, И. В. Князева, С. Р. Свирщевский (1983).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\beta w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + b\dfrac{\partial}{\partial y}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right).$

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(C_1C_2^\beta x + C_3, \pm C_1C_2^\lambda y + C_4, C_1^2t + C_5) - 2\ln|C_2|,$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = u(\theta,t), \quad \theta = c_1x + c_2y,$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, а функция $u = u(\theta,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\left(ac_1^2e^{\beta w} + bc_2^2e^{\lambda w}\right)\frac{\partial w}{\partial \theta}\right].$$

3°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = u(\zeta_1,\zeta_2), \quad \zeta_1 = k_1x + m_1t, \quad \zeta_2 = k_2y + m_2t,$$

где k_1, k_2, m_1, m_2 — произвольные постоянные, а функция $u = u(\zeta_1,\zeta_2)$ описывается уравнением

$$m_1\frac{\partial u}{\partial \zeta_1} + m_2\frac{\partial u}{\partial \zeta_2} = ak_1^2\frac{\partial}{\partial \zeta_1}\left(e^{\beta w}\frac{\partial w}{\partial \zeta_1}\right) + bk_2^2\frac{\partial}{\partial \zeta_2}\left(e^{\lambda w}\frac{\partial w}{\partial \zeta_2}\right).$$

4°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = U(\xi,\eta) + 2kt, \quad \xi = xe^{-k\beta t}, \quad \eta = ye^{-k\lambda t},$$

где k — произвольная постоянная, а функция $U = U(\xi,\eta)$ описывается уравнением

$$2k - k\beta\xi\frac{\partial U}{\partial \xi} - k\lambda\eta\frac{\partial U}{\partial \eta} = a\frac{\partial}{\partial \xi}\left(e^{\beta U}\frac{\partial U}{\partial \xi}\right) + b\frac{\partial}{\partial \eta}\left(e^{\lambda U}\frac{\partial U}{\partial \eta}\right).$$

5°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = V(z_1,z_2), \quad z_1 = \frac{x + C_1}{\sqrt{t + C_3}}, \quad z_2 = \frac{y + C_2}{\sqrt{t + C_3}},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функция $V = V(z_1,z_2)$ описывается уравнением

$$-\frac{1}{2}z_1\frac{\partial V}{\partial z_1} - \frac{1}{2}z_2\frac{\partial V}{\partial z_2} = a\frac{\partial}{\partial z_1}\left(e^{\beta w}\frac{\partial w}{\partial z_1}\right) + b\frac{\partial}{\partial z_2}\left(e^{\lambda w}\frac{\partial w}{\partial z_2}\right).$$

6°. «Двумерное» решение ($\beta = 1$):

$$w(x,y,t) = u(z,t) + 2\ln|x|, \quad z = x^{-\lambda}y,$$

где функция $u = u(z,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(a\lambda^2z^2e^u + be^{\lambda u}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda\left(a\lambda z^2e^u + be^{\lambda u}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + a\lambda(\lambda - 3)ze^u\frac{\partial u}{\partial z} + 2ae^u.$$

⦿ *Литература*: В. А. Дородницын, И. В. Князева, С. Р. Свирщевский (1983), N. H. Ibragimov (1994, pp. 155–156).

3. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda_1 w}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + b\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\lambda_2 w}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + ce^{\beta w}.$

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1^{\beta-\lambda_1}x + C_2, \pm C_1^{\beta-\lambda_2}y + C_3, C_1^{2\beta}t + C_4) + 2\ln|C_1|,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Существует «двумерное» решение вида

$$w(x,y,t) = U(\xi,\eta) - \frac{1}{\beta}\ln t, \quad \xi = xt^{\frac{\lambda_1-\beta}{2\beta}}, \quad \eta = yt^{\frac{\lambda_2-\beta}{2\beta}}.$$

⦿ *Литература*: В. А. Дородницын, И. В. Князева, С. Р. Свирщевский (1983), N. H. Ibragimov (1994, pp. 155–156).

4. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \alpha\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\mu w}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\mu w}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \beta e^{\mu w} + \gamma + \delta e^{-\mu w}.$

Замена $w = \dfrac{1}{\mu}\ln U$ приводит к уравнению вида 2.1.4.2:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha U\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) + \beta\mu U^2 + \mu\gamma U + \mu\delta.$$

⦿ *Литература*: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989), N. H. Ibragimov (1994, pp. 155–156).

2.3. Другие уравнения с двумя пространственными переменными, содержащие произвольные параметры

2.3.1. Уравнения с логарифмическими нелинейностями

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - kw\ln w.$

Нестационарное уравнение теории тепло- и массопереноса и теории горения с источником логарифмического вида. Частный случай уравнения 2.4.1.1 при $f(w) = -kw\ln w$.

1°. Пусть $w(x, y, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = \exp(C_1 e^{-kt})w(x + C_2, \pm y + C_3, t + C_4),$$
$$w_2 = w(x\cos\beta - y\sin\beta, x\sin\beta + y\cos\beta, t),$$

где $C_1, \ldots, C_4$, β — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение в виде произведения функций, зависящих от разных аргументов:

$$w(x, y, t) = \exp(C_1 e^{-kt})\Theta(x, y),$$

где функция $\Theta(x, y)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$a\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}\right) - k\Theta\ln\Theta = 0.$$

Это уравнение имеет частное решение вида $\Theta = \exp(A_1x^2 + A_2xy + A_3y^2 + A_4x + A_5y + A_6)$, где постоянные A_k определяются из соответствующей алгебраической системы уравнений.

3°. «Двумерное» решение с неполным разделением переменных (решение разделяется по пространственным переменным x и y, но не разделяется по времени t):

$$w(x, y, t) = \varphi(x, t)\psi(y, t),$$

где функции $\varphi(x, t)$ и $\psi(y, t)$ находятся из двух независимых одномерных нелинейных дифференциальных уравнений параболического типа

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = a\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - k\varphi\ln\varphi,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = a\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - k\psi\ln\psi.$$

О решениях этих уравнений см. 1.6.1.4 при $f(t) = 0$.

4°. Имеются точные решения в виде произведения функций, представляющих две независимые бегущие волны:

$$w(x, y, t) = \varphi(\xi)\psi(\eta), \quad \xi = a_1x + b_1t, \quad \eta = a_2y + b_2t,$$

где a_1, b_1, a_2, b_2 — произвольные постоянные. Данное решение является частным случаем решения из п. 3°.

⊙ *Литература*: В. А. Дородницын, И. В. Князева, С. Р. Свирщевский (1983), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994, стр. 114–117), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 98).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + cw\ln w + sw.$

Частный случай уравнения 2.4.2.1 при $f(w) = cw\ln w + sw$ и частный случай уравнения 2.4.2.4, в котором сначала надо переобозначить a на c и b на s, а затем положить $f(x) = ax^n$ и $g(y) = by^m$.

Имеются «двумерные» решения следующих типов:

$$w(x, y, t) = F(\xi, t), \quad \xi^2 = \frac{4}{a(2-n)^2}x^{2-n} + \frac{4}{b(2-m)^2}y^{2-m};$$
$$w(x, y, t) = \exp(Ae^{ct})G(x, y);$$
$$w(x, y, t) = H_1(x, t)H_2(y, t),$$

где A — произвольная постоянная.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\lambda y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + cw\ln w + sw.$

Частный случай уравнения 2.4.2.2 при $f(w) = cw\ln w + sw$ и частный случай уравнения 2.4.2.4, в котором сначала надо переобозначить a на c и b на s, а затем положить $f(x) = ae^{\beta x}$ и $g(y) = be^{\lambda y}$.

Существуют точные решения следующих видов:

$$w(x,y,t) = F(\xi,t), \quad \xi^2 = \frac{4}{a\beta^2}e^{-\beta x} + \frac{4}{b\lambda^2}e^{-\lambda y};$$
$$w(x,y,t) = \exp(Ae^{ct})G(x,y);$$
$$w(x,y,t) = H_1(x,t)H_2(y,t),$$

где A — произвольная постоянная.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^{n}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\lambda y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + cw\ln w + sw.$

Частный случай уравнения 2.4.2.3 при $f(w) = cw\ln w + sw$ и частный случай уравнения 2.4.2.4, в котором сначала надо переобозначить a на c и b на s, а затем положить $f(x) = ax^n$ и $g(y) = be^{\lambda y}$.

Существуют точные решения следующих видов:

$$w(x,y,t) = F(\xi,t), \quad \xi^2 = \frac{4}{a(2-n)^2}x^{2-n} + \frac{4}{b\lambda^2}e^{-\lambda y};$$
$$w(x,y,t) = \exp(Ae^{ct})G(x,y);$$
$$w(x,y,t) = H_1(x,t)H_2(y,t),$$

где A — произвольная постоянная.

2.3.2. Уравнения с тригонометрическими нелинейностями

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^{n}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(by^{m}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + c\sin(kw+s).$

Частный случай уравнения 2.4.2.1 при $f(w) = c\sin(kw+s)$.

Уравнение имеет точное решение вида

$$w(x,y,t) = U(\xi,t), \quad \xi^2 = \frac{4}{a(2-n)^2}x^{2-n} + \frac{4}{b(2-m)^2}y^{2-m}.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\lambda y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + c\sin(kw+s).$

Частный случай уравнения 2.4.2.2 при $f(w) = c\sin(kw+s)$.

Уравнение имеет точное решение вида

$$w(x,y,t) = U(\xi,t), \quad \xi^2 = \frac{4}{a\beta^2}e^{-\beta x} + \frac{4}{b\lambda^2}e^{-\lambda y}.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^{n}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\lambda y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + c\sin(kw+s).$

Частный случай уравнения 2.4.2.3 при $f(w) = c\sin(kw+s)$.

Уравнение имеет точное решение вида

$$w(x,y,t) = U(\xi,t), \quad \xi^2 = \frac{4}{a(2-n)^2}x^{2-n} + \frac{4}{b\lambda^2}e^{-\lambda y}.$$

2.4. Уравнения, содержащие произвольные функции

2.4.1. Уравнения массопереноса в неподвижной и движущейся среде с химической реакцией

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + f(w).$

Двумерное нестационарное уравнение теории тепло- и массопереноса и теории горения в неподвижной среде.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm x + C_1, \pm y + C_2, t + C_3),$$
$$w_2 = w(x\cos\beta - y\sin\beta, x\sin\beta + y\cos\beta, t),$$

где C_1, C_2, C_3, β — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки в w_1 выбираются произвольно).

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = Ax + By + \lambda t,$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $w(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a(A^2+B^2)w''_{\xi\xi} - \lambda w'_\xi + f(w) = 0.$$

О его решениях см. книгу В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

3°. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,t) = F(z,t), \qquad z = k_1x + k_2y;$$
$$w(x,y,t) = G(r,t), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2};$$
$$w(x,y,t) = H(\xi_1,\xi_2), \quad \xi_1 = k_1x + \lambda_1 t, \quad \xi_2 = k_2y + \lambda_2 t,$$

где k_1, k_2, λ_1, λ_2 — произвольные постоянные.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} - f(w).$

Уравнение нестационарного массопереноса с объемной химической реакцией в установившемся поступательном потоке жидкости.

Преобразование

$$w = U(\xi,\eta,t), \qquad \xi = x - at, \qquad \eta = y - bt$$

приводит к более простому уравнению вида 2.4.1.1:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - f(U).$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + (a_1x + b_1y + c_1)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (a_2x + b_2y + c_2)\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} - f(w).$

Это уравнение описывает нестационарный массоперенос с объемной химической реакцией в установившемся поступательно-сдвиговом потоке жидкости.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w\bigl(x + Cb_1e^{\lambda t},\; y + C(\lambda - a_1)e^{\lambda t},\; t\bigr),$$

где C — произвольная постоянная, а $\lambda = \lambda_{1,2}$ — корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + a_1b_2 - a_2b_1 = 0, \tag{1}$$

также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w = w(z), \qquad z = a_2x + (\lambda - a_1)y + Ce^{\lambda t},$$

где $\lambda = \lambda_{1,2}$ — корни квадратного уравнения (1), а функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\bigl[\lambda z + a_2c_1 + (\lambda - a_1)c_2\bigr]w'_z = \bigl[a_2^2 + (\lambda - a_1)^2\bigr]w''_{zz} - f(w).$$

3°. «Двумерные» решения:

$$w = U(\zeta,t), \qquad \zeta = a_2x + (\lambda - a_1)y,$$

где $\lambda = \lambda_{1,2}$ — корни квадратного уравнения (1), а функция $U(\zeta,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \bigl[\lambda\zeta + a_2c_1 + (\lambda - a_1)c_2\bigr]\frac{\partial U}{\partial \zeta} = \bigl[a_2^2 + (\lambda - a_1)^2\bigr]\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} - f(U).$$

Замечание. В случае несжимаемой жидкости коэффициенты уравнения должны удовлетворять условию $a_1 + b_2 = 0$.

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 160).

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + f_1(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + f_2(t)\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} - g(w).$

Это уравнение описывает массоперенос с объемной химической реакцией в нестационарном поступательном потоке жидкости.

Преобразование

$$w = U(\xi, \eta, t), \quad \xi = x - \int f_1(t)\,dt, \quad \eta = y - \int f_2(t)\,dt,$$

приводит к более простому уравнению вида 2.4.1.1:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - g(U).$$

2.4.2. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[f(x)\frac{\partial w}{\partial x}\Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big[g(y)\frac{\partial w}{\partial y}\Big] + h(w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(by^m \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + f(w).$

Двумерное нестационарное уравнение теории тепло- и массопереноса и теории горения в анизотропном случае при степенной зависимости главных коэффициентов температуропроводности от координат.

Точное решение при $n \neq 2$, $m \neq 2$:

$$w = w(\xi, t), \quad \xi^2 = \frac{4}{a(2-n)^2}x^{2-n} + \frac{4}{b(2-m)^2}y^{2-m},$$

где функция $w(\xi, t)$ описывается одномерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{A}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi} + f(w), \qquad A = \frac{4 - nm}{(2-n)(2-m)}.$$

О решениях этого уравнения при $A = 0$ для различных функций $f(w)$ см. разд. 1.1.1.–1.1.3 и уравнения 1.2.1.1–1.2.1.3, 1.4.1.2, 1.4.1.3, 1.4.1.7, 1.4.1.8.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 108).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x} \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\lambda y} \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + f(w).$

Двумерное нестационарное уравнение теории тепло- и массопереноса и теории горения в анизотропном случае при экспоненциальной зависимости главных коэффициентов температуропроводности от координат.

Точное решение при $\beta \neq 0$, $\lambda \neq 0$:

$$w = w(\xi, t), \quad \xi^2 = \frac{4}{a\beta^2}e^{-\beta x} + \frac{4}{b\lambda^2}e^{-\lambda y},$$

где функция $w(\xi, t)$ описывается одномерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi} + f(w).$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 108).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\lambda y} \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + f(w).$

Точное решение при $n \neq 2$, $\lambda \neq 0$:

$$w = w(\xi, t), \quad \xi^2 = \frac{4}{a(2-n)^2}x^{2-n} + \frac{4}{b\lambda^2}e^{-\lambda y},$$

где функция $w(\xi, t)$ описывается одномерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{n}{2-n}\frac{1}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi} + f(w).$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 108).

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[g(y)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right] + aw\ln w + bw.$

Нестационарное уравнение теории тепло- и массопереноса и теории горения в анизотропном случае при произвольной зависимости главных коэффициентов температуропроводности от координат с источником логарифмического типа.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = \exp(C_1e^{at})w(x,y,t+C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение в виде произведения функций, зависящих от разных аргументов:

$$w(x,y,t) = \exp(C_1e^{at})U(x,y),$$

где функция $U(x,y)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\frac{\partial U}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(y)\frac{\partial U}{\partial y}\right] + aU\ln U + bU = 0.$$

3°. «Двумерное» решение с неполным разделением переменных (решение разделяется по пространственным переменным x и y, но не разделяется по времени t):

$$w(x,y,t) = \varphi(x,t)\psi(y,t),$$

где функции $\varphi(x,t)$ и $\psi(y,t)$ находятся из двух независимых одномерных нелинейных дифференциальных уравнений параболического типа

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] + a\varphi\ln\varphi + C(t)\varphi,$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left[g(y)\frac{\partial \psi}{\partial y}\right] + a\psi\ln\psi + b\psi - C(t)\psi,$$

$C(t)$ — произвольная функция.

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин (2000).

2.4.3. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(w)\frac{\partial w}{\partial y}\right] + h(t,w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(w^n\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + f(t)w.$

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2}w\bigl(\pm C_1^n x + C_2,\ \pm C_1^n y + C_3,\ t\bigr),$$
$$w_2 = w(x\cos\beta - y\sin\beta, x\sin\beta + y\cos\beta, t),$$

где C_1, C_2, C_3, β — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки в w_1 выбираются независимо друг от друга).

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,t) = \exp\left[\int f(t)\,dt\right]\bigl[\Theta(x,y)\bigr]^{\frac{1}{n+1}}, \qquad (1)$$

где функция $\Theta(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\Theta = 0, \qquad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

О решении этого линейного стационарного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,t) = \varphi(t)\bigl[\Theta(x,y)\bigr]^{\frac{1}{n+1}}, \qquad (2)$$

где функция $\varphi(t)$ определяется из уравнения Бернулли

$$\varphi_t' - f(t)\varphi + Aa\varphi^{n+1} = 0, \qquad (3)$$

A — произвольная постоянная, а функция $\Theta(x,y)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$\Delta\Theta + A(n+1)\Theta^{\frac{1}{n+1}} = 0, \qquad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Общее решение уравнения (3) дается формулой

$$\varphi(t) = \exp\bigl[F(t)\bigr]\biggl\{Aan\int \exp\bigl[nF(t)\bigr]\,dt + B\biggr\}^{-1/n}, \quad F(t) = \int f(t)\,dt,$$

где B — произвольная постоянная.

4°. Преобразование

$$w(x,y,t) = F(t)U(x,y,\tau), \quad \tau = \int F^n(t)\,dt, \qquad F(t) = \exp\biggl[\int f(t)\,dt\biggr]$$

приводит к более простому уравнению вида 2.1.2.4:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = a\biggl[\frac{\partial}{\partial x}\biggl(U^n\frac{\partial U}{\partial x}\biggr) + \frac{\partial}{\partial y}\biggl(U^n\frac{\partial U}{\partial y}\biggr)\biggr].$$

2. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\biggl[\frac{\partial}{\partial x}\biggl(e^{\mu w}\frac{\partial w}{\partial x}\biggr) + \frac{\partial}{\partial y}\biggl(e^{\mu w}\frac{\partial w}{\partial y}\biggr)\biggr] + f(t).$

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w\bigl(C_1x + C_2,\ \pm C_1y + C_3,\ t\bigr) - \frac{2}{\mu}\ln|C_1|,$$
$$w_2 = w(x\cos\beta - y\sin\beta, x\sin\beta + y\cos\beta, t),$$

где C_1, C_2, C_3, β — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y,t) = \varphi(t) + \frac{1}{\mu}\ln\Theta(x,y),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi'_t + A(a/\mu)\exp(\mu\varphi) - f(t) = 0, \tag{1}$$

а функция $\Theta(x,y)$ является решением двумерного уравнения Пуассона

$$\Delta\Theta + A = 0, \qquad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{2}$$

Общее решение уравнения (1) дается формулой

$$\varphi(t) = F(t) - \frac{1}{\mu}\ln\biggl\{B + Aa\int \exp\bigl[\mu F(t)\bigr]\,dt\biggr\}, \quad F(t) = \int f(t)\,dt. \tag{3}$$

О решении линейного стационарного уравнения (2) см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

Отметим, что в уравнения (1), (2) и в выражение (3) входят произвольные постоянные A и B.

3°. Преобразование

$$w(x,y,t) = U(x,y,\tau) + F(t), \quad \tau = \int \exp[\mu F(t)]\,dt, \qquad F(t) = \int f(t)\,dt,$$

приводит к более простому уравнению вида 2.2.2.1:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = a\biggl[\frac{\partial}{\partial x}\biggl(e^{\mu U}\frac{\partial U}{\partial x}\biggr) + \frac{\partial}{\partial y}\biggl(e^{\mu U}\frac{\partial U}{\partial y}\biggr)\biggr].$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 110).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right].$

Двумерное нелинейное уравнение тепло- и массопереноса в случае изотропной среды.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(C_1x + C_2, \pm C_1y + C_3, C_1^2t + C_4),$$
$$w_2 = w(x\cos\beta - y\sin\beta, x\sin\beta + y\cos\beta, t),$$

где $C_1, \ldots, C_4$, β — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$(k_1^2 + k_2^2)\int \frac{f(w)\,dw}{\lambda w + C_1} = k_1x + k_2y + \lambda t + C_2,$$

где C_1, C_2, k_1, k_2, λ — произвольные постоянные.

3°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = U(\xi), \qquad \xi = \frac{x^2+y^2}{t},$$

где функция $U = U(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[\xi f(U)U'_\xi]'_\xi + \tfrac{1}{4}\xi U'_\xi = 0.$$

4°. «Двумерные» решения (для задач с осевой симметрией):

$$w(x,y,t) = V(r,t), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2},$$

где функция $V = V(r,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[rf(V)\frac{\partial V}{\partial r}\right].$$

5°. О других «двумерных» решениях см. уравнение 2.4.3.4 при $g(w) = f(w)$.

⊙ *Литература*: В. А. Дородницын, И. В. Князева, С. Р. Свирщевский (1983).

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[g(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right].$

Двумерное нелинейное уравнение тепло- и массопереноса в случае анизотропной среды при произвольной зависимости главных коэффициентов температуропроводности от температуры.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(C_1x + C_2, \pm C_1y + C_3, C_1^2t + C_4),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\int \frac{k_1^2 f(w) + k_2^2 g(w)}{\lambda w + C_1}\,dw = k_1x + k_2y + \lambda t + C_2,$$

где C_1, C_2, k_1, k_2, λ — произвольные постоянные.

3°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = U(z,t), \qquad z = k_1x + k_2y,$$

где функция $U = U(z,t)$ определяется уравнением вида 1.6.15.1:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\varphi(U)\frac{\partial U}{\partial z}\right], \qquad \varphi(U) = k_1^2 f(U) + k_2^2 g(U).$$

4°. Имеются более сложные «двумерные» решения вида

$$w(x,y,t) = V(\zeta_1,\zeta_2), \qquad \zeta_1 = a_1x + a_2y + a_3t, \qquad \zeta_2 = b_1x + b_2y + b_3t.$$

5°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = W(\xi,\eta), \qquad \xi = \frac{x}{\sqrt{at}}, \qquad \eta = \frac{y}{\sqrt{at}},$$

где $a \neq 0$ — любое, а функция $W = W(\xi,\eta)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[f(W)\frac{\partial W}{\partial \xi}\right] + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[g(W)\frac{\partial W}{\partial \eta}\right] + \frac{a}{2}\xi\frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{a}{2}\eta\frac{\partial W}{\partial \eta} = 0.$$

⊙ *Литература*: В. А. Дородницын, И. В. Князева, С. Р. Свирщевский (1983).

2.4.4. Другие уравнения, линейные относительно старших производных

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f(w)\left[\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right].$

Подстановка

$$U = \int F(w)\,dw, \qquad \text{где} \quad F(w) = \exp\left[\int f(w)\,dw\right],$$

приводит к линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}.$$

О решениях этого уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 b).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \big[aw + f(t)\big]\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + bw^2 + g(t)w + h(t), \qquad a \neq 0.$

«Двумерное» решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x, y, t) = \varphi(t) + \psi(t)\Theta(x, y),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t = b\varphi^2 + g(t)\varphi + h(t), \tag{1}$$

$$\psi'_t = \big[b\varphi - \beta f(t) + g(t)\big]\psi, \qquad \beta = b/a, \tag{2}$$

а функция $\Theta(x, y)$ — любое решение двумерного уравнения Гельмгольца

$$\Delta\Theta + \beta\Theta = 0, \qquad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{3}$$

Первое уравнение системы (1) не зависит от ψ и представляет собой уравнение Риккати для функции φ. В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 a) приведено много точных решений уравнения (1) для различных функций $g(t)$ и $h(t)$. После решения уравнения (1), подставляя зависимость $\varphi = \varphi(t)$ в (2), получим линейное уравнение относительно $\psi = \psi(t)$, которое легко интегрируется.

В частном случае $b = 0$ решение системы (1), (2) дается формулами

$$\varphi(t) = \exp\big[G(t)\big]\left\{A + \int h(t)\exp\big[-G(t)\big]\,dt\right\}, \quad G(t) = \int g(t)\,dt,$$

$$\psi(t) = B\exp\big[G(t) - \beta F(t)\big], \quad F(t) = \int f(t)\,dt,$$

где A, B — произвольные постоянные.

О решениях линейного стационарного уравнения (3) см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 b).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - a\left[\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] + f(t).$

1°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x, y, t) = \varphi(t) + \psi(t)e^{\beta x + \gamma y},$$

где β, γ — произвольные постоянные, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t = f(t), \qquad \psi'_t = a(\beta^2 + \gamma^2)\varphi\psi.$$

В результате интегрирования находим решение

$$w(x, y, t) = \varphi(t) + A\exp\left[\beta x + \gamma y + a(\beta^2 + \gamma^2)\int\varphi(t)\,dt\right], \quad \varphi(t) = \int f(t)\,dt + B,$$

где A, B — произвольные постоянные.

2°. Имеются решения с обобщенным разделением переменных следующих видов:

$$w(x,y,t)=\varphi(t)+\psi(t)(A_1\operatorname{ch}\mu x+A_2\operatorname{sh}\mu x)+\chi(t)(B_1\cos\mu y+B_2\sin\mu y),$$
$$w(x,y,t)=\varphi(t)+\psi(t)(A_1\cos\mu x+A_2\sin\mu x)+\chi(t)(B_1\operatorname{ch}\mu y+B_2\operatorname{sh}\mu y),$$

где A_1, A_2, B_1, B_2, μ — произвольные постоянные, а функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ находятся из системы обыкновенных дифференциальных уравнений (здесь не приводятся).

3°. Имеется решение с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,y,t)=\varphi(t)+\psi(t)F(x)+\chi(t)G(y)+\eta(t)H(x)P(y).$$

Здесь

$$F(x)=A_1\cos 2\mu x+A_2\sin 2\mu x,\qquad G(y)=B_1\operatorname{ch}2\mu y+B_2\operatorname{sh}2\mu y,$$
$$H(x)=C_1\cos\mu x+C_2\sin\mu x,\qquad P(y)=D_1\operatorname{ch}\mu y+D_2\operatorname{sh}\mu y,$$

где произвольные постоянные $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, \mu$ связаны двумя соотношениями, а функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$, $\eta(t)$, находятся из системы обыкновенных дифференциальных уравнений (здесь не приводятся).

4. $$\frac{\partial w}{\partial t}+(a_1x+b_1y+c_1)\frac{\partial w}{\partial x}+(a_2x+b_2y+c_2)\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[g(w)\frac{\partial w}{\partial y}\right].$$

Это уравнение описывает нестационарный анизотропный тепло- и массоперенос в установившемся поступательно-сдвиговом потоке жидкости.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_{1,2}=w\bigl(x+Cb_1e^{\lambda t},\,y+C(\lambda-a_1)e^{\lambda t},\,t\bigr),$$

где C — произвольная постоянная, а $\lambda=\lambda_{1,2}$ — корни квадратного уравнения

$$\lambda^2-(a_1+b_2)\lambda+a_1b_2-a_2b_1=0, \tag{1}$$

также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w=w(z),\qquad z=a_2x+(\lambda-a_1)y+Ce^{\lambda t}, \tag{2}$$

где $\lambda=\lambda_{1,2}$ — корни квадратного уравнения (1), а функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\bigl[\lambda z+a_2c_1+(\lambda-a_1)c_2\bigr]w'_z=[\varphi(w)w'_z]w'_z,\qquad \varphi(w)=a_2^2f(w)+(\lambda-a_1)^2g(w).$$

3°. «Двумерные» решения:

$$w=U(\zeta,t),\qquad \zeta=a_2x+(\lambda-a_1)y, \tag{3}$$

где $\lambda=\lambda_{1,2}$ — корни квадратного уравнения (1), а функция $U(\zeta,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial U}{\partial t}+[\lambda\zeta+a_2c_1+(\lambda-a_1)c_2]\frac{\partial U}{\partial\zeta}=\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\varphi(U)\frac{\partial U}{\partial\zeta}\right],\qquad \varphi(U)=a_2^2f(U)+(\lambda-a_1)^2g(U).$$

Замечание 1. В правую часть уравнения можно добавить произвольную функцию $h(w)$.

Замечание 2. В случае несжимаемой жидкости коэффициенты уравнения должны удовлетворять условию $a_1+b_2=0$.

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 166).

5. $$\frac{\partial w}{\partial t}=f(w)\mathbf{L}\,[w]+g(t)w+h(t).$$

Здесь $\mathbf{L}$ — произвольный линейный дифференциальный оператор по пространственным переменным x, y (который не зависит от t).

«Двумерное» решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y,t)=\varphi(t)+\psi(t)\Theta(x,y),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются по формулам

$$\varphi(t)=e^{G(t)}\left[A+\int h(t)e^{-G(t)}\,dt\right],\qquad \psi(t)=Be^{G(t)},\qquad G(t)=\int g(t)\,dt,$$

A — произвольная постоянная, а функция $\Theta(x,y)$ удовлетворяет линейному стационарному уравнению

$$\mathbf{L}[\Theta] = 0.$$

Замечание 1. В рассматриваемом уравнении порядок линейного оператора $\mathbf{L}$ и число пространственных переменных может быть любым. Коэффициенты оператора $\mathbf{L}$ могут зависеть от пространственных переменных.

Замечание 2. В уравнении вместо $f(w)$ может стоять произвольная функция вида $f(x,y,t,w)$. При этом в частном случае $f(x,y,t,w) = f_1(t) + \alpha w$, $\mathbf{L}[w] = \Delta w + \beta w$, где Δ — оператор Лапласа, α и β — некоторые постоянные, мы получаем уравнение вида 2.4.4.2.

6. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x,y)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(x,y)\frac{\partial w}{\partial y}\right] + kw\ln w.$

Нестационарное уравнение теории тепло- и массопереноса и теории горения в анизотропном случае при произвольной зависимости главных коэффициентов температуропроводности от координат с источником логарифмического типа.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = \exp(C_1 e^{kt})w(x,y,t+C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,t) = \exp(C_1 e^{kt})\Theta(x,y),$$

где функция $U(x,y)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x,y)\frac{\partial U}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(x,y)\frac{\partial U}{\partial y}\right] + kU\ln U = 0.$$

7. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f_1(x,t)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[f_2(y,t)\frac{\partial w}{\partial y}\right] + \left[g_1(x,t) + g_2(y,t)\right]w + h(t)w\ln w.$

Точное решение с неполным разделением переменных (решение разделяется по пространственным переменным x и y, но не разделяется по времени t):

$$w(x,y,t) = \varphi(x,t)\psi(y,t).$$

Здесь функции $\varphi(x,t)$ и $\psi(y,t)$ находятся из двух одномерных нелинейных дифференциальных уравнений параболического типа

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f_1(x,t)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] + g_1(x,t)\varphi + h(t)\varphi\ln\varphi + C(t)\varphi,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left[f_2(y,t)\frac{\partial \psi}{\partial y}\right] + g_2(y,t)\psi + h(t)\psi\ln\psi - C(t)\psi,$$

где $C(t)$ — произвольная функция.

8. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = f_1(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_2(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + f_3(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g_1(x,y)\frac{\partial w}{\partial x} + g_2(x,y)\frac{\partial w}{\partial y} + \left[h(x,y) + s(t)\right]w + kw\ln w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,t) = \exp\left[Ae^{kt} + e^{kt}\int e^{-kt}s(t)\,dt\right]\Theta(x,y),$$

где A — произвольная постоянная, а функция $\Theta(x,y)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$f_1(x,y)\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} + f_2(x,y)\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y} + f_3(x,y)\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} + g_1(x,y)\frac{\partial\Theta}{\partial x} + g_2(x,y)\frac{\partial\Theta}{\partial y} + h(x,y)\Theta + k\Theta\ln\Theta = 0.$$

9. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x,t)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[g(x,t)w + h(x,t)\right]\frac{\partial w}{\partial y}\right\}.$

Имеются «двумерные» решения с обобщенным разделением переменных, линейные и квадратичные по y:

$$w(x,y,t) = \varphi(x,t)y + \psi(x,t),$$

$$w(x,y,t) = \varphi(x,t)y^2 + \psi(x,t)y + \chi(x,t).$$

2.4.5. Нелинейные уравнения диффузионного пограничного слоя

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + f(x,t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x,t)y\dfrac{\partial w}{\partial y} = h(x,t)\dfrac{\partial}{\partial y}\left[k(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right].$

Это уравнение встречается в нелинейных задачах нестационарного диффузионного пограничного слоя (массообмен капель и пузырей с потоком, конвективная диффузия в пленках жидкости), где координаты x и y отсчитываются соответственно вдоль и поперек межфазной поверхности.

Преобразование

$$w = U(\zeta,\tau,\psi), \quad \zeta = y\varphi(x,t), \quad \tau = \tau(x,t), \quad \psi = \psi(x,t),$$

где функции $\varphi(x,t)$, $\tau(x,t)$, $\psi(x,t)$ определяются системой уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(x,t)\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -g(x,t)\varphi,\\ &\frac{\partial \tau}{\partial t} + f(x,t)\frac{\partial \tau}{\partial x} = h(x,t)\varphi^2,\\ &\frac{\partial \psi}{\partial t} + f(x,t)\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

приводит к более простому уравнению вида 1.6.15.1:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[k(U)\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right]. \tag{2}$$

Циклическая переменная ψ не входит явно в уравнение (2), но может входить параметрически в соответствующие начальные и граничные условия.

Интегрирование системы (1) сводится к решению одного обыкновенного дифференциального уравнения $x'_t = f(x,t)$. В частности, если функции f, g и h зависят только от x, общее решение системы (1) дается формулами

$$\varphi = \Phi_1(z)E(x), \quad \tau = \Phi_1^2(z)\int \frac{h(x)}{f(x)}E^2(x)\,dx + \Phi_2(z), \quad \psi = \Phi_3(z),$$

где $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$, $\Phi_3(z)$ — произвольные функции, а переменная z и функция $E(x)$ имеют вид

$$z = t - \int \frac{dx}{f(x)}, \qquad E(x) = \exp\left[-\int \frac{g(x)}{f(x)}\,dx\right].$$

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин (1980*b*), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 168–169).

2. $f(x,y)z^{n-1}\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x,y)z^{n-1}\dfrac{\partial w}{\partial y} + h(x,y)z^n\dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left[k(w)\dfrac{\partial w}{\partial z}\right].$

Это уравнение встречается в нелинейных задачах стационарного трехмерного диффузионного пограничного слоя (массообмен твердых частиц, капель и пузырей с потоком, конвективная диффузия в пленках жидкости), где z — координата, отсчитываемая по нормали к поверхности частицы. Твердой частице обычно отвечает значение $n = 2$, а каплям и пузырям — значение $n = 1$.

Преобразование

$$w = U(\zeta,\tau,\psi), \quad \zeta = z\varphi(x,y), \quad \tau = \tau(x,y), \quad \psi = \psi(x,y),$$

где функции $\varphi(x,y)$, $\tau(x,y)$, $\psi(x,y)$ определяются системой уравнений в частных производных первого порядка

$$f(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -h(x,y)\varphi, \tag{1}$$

$$f(x,y)\frac{\partial \tau}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial \tau}{\partial y} = \varphi^2, \tag{2}$$

$$f(x,y)\frac{\partial \psi}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

приводит к более простому уравнению вида 1.6.17.16:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \zeta^{1-n}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left[k(U)\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right]. \tag{4}$$

Циклическая переменная ψ не входит явно в уравнение (4), но может входить параметрически в соответствующие начальные и граничные условия.

Пусть интеграл обыкновенного дифференциального уравнения $f(x,y)y'_x = g(x,y)$ имеет вид

$$\Xi(x,y) = C.$$

Тогда общее решение уравнения (3) дается формулой $\psi = F(\Xi)$, где F — произвольные функция. Переходя в уравнениях (1)–(2) от x, y к новым переменным x, Ξ придем к обыкновенным дифференциальным уравнениям с независимой переменной x, в которые Ξ входит как параметр.

⦿ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 169).

2.5. Уравнения с тремя и более пространственными переменными

2.5.1. Уравнения массопереноса в неподвижной и движущейся среде с химической реакцией

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} - f(w).$

Это уравнение описывает нестационарный массо- и теплоперенос с объемной реакцией в неподвижной среде.

Уравнение допускает сдвиг по любой из переменных x, y, z, t.

1°. Имеется решение типа бегущей волны, $w = w(k_1 x + k_2 y + k_3 z + \lambda t)$.

2°. Для осесимметричных решений в цилиндрической и сферической системах координат оператор Лапласа в правой части уравнения соответственно имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial w}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial w}{\partial \theta}\right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

3°. «Трехмерное» решение:

$$w = u(\xi, \eta, t), \quad \xi = y + \frac{x}{C}, \quad \eta = (C^2 - 1)x^2 - 2Cxy + C^2 z^2,$$

где C — произвольная постоянная ($C \neq 0$), а функция $u = u(\xi, \eta, t)$ определена уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(1 + \frac{1}{C^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 4\xi \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 4C^2(\xi^2 + \eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2(2C^2 - 1)\frac{\partial u}{\partial \eta} - f(u).$$

Замечание. Решение, указанное в п. 3°, может использоваться для получения других «трехмерных» решений путем циклической перестановки пространственных переменных.

4°. «Трехмерное» решение:

$$w = u(\xi, \eta, t), \quad \xi = Ax + By + Cz, \quad \eta = \sqrt{(Bx - Ay)^2 + (Cy - Bz)^2 + (Az - Cx)^2},$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $u = u(\xi, \eta, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (A^2 + B^2 + C^2)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) - f(u).$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + f(t) w \ln w + g(t) w.$

1°. Имеется решение с функциональным разделением переменных вида

$$w(x,y,z,t) = \exp\left[\sum_{n,m=1}^{3} \varphi_{nm}(t) x_n x_m + \sum_{n=1}^{3} \psi_n(t) x_n + \chi(t)\right], \quad x_1 = x, \ \ x_2 = y, \ \ x_3 = z.$$

2°. Имеется решение с неполным разделением переменных вида

$$w(x,y,z,t) = \Phi_1(x,t)\Phi_2(y,t)\Phi_3(z,t).$$

3°. При $f(t)=b=\text{const}$, уравнение имеет также точные решения в виде произведения функций различных аргументов:

$$w(x,y,z,t) = \varphi(t)\Theta(x,y,z),$$

где функция $\varphi(t)$ определяется формулой

$$\varphi(t) = \exp\left[Ae^{bt} + e^{bt}\int e^{-bt}g(t)\,dt\right],$$

A — произвольная постоянная, а функция $\Theta(x,y,z)$ — решение стационарного уравнения

$$a\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}\right) + b\Theta\ln\Theta = 0.$$

3. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} + a_1\frac{\partial w}{\partial x} + a_2\frac{\partial w}{\partial y} + a_3\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - f(w).$

Это уравнение описывает нестационарный массоперенос с объемной химической реакцией в установившемся поступательном потоке жидкости.

Преобразование

$$w = U(\xi,\eta,\zeta,t), \quad \xi = x - a_1t, \quad \eta = y - a_2t, \quad \zeta = z - a_3t$$

приводит к более простому уравнению вида 2.5.1.1:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} - f(U).$$

4. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} + f_1(t)\frac{\partial w}{\partial x} + f_2(t)\frac{\partial w}{\partial y} + f_3(t)\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - g(w).$

Это уравнение описывает массоперенос с объемной химической реакцией в нестационарном поступательном потоке жидкости.

Преобразование

$$w = U(\xi,\eta,t), \quad \xi = x - \int f_1(t)\,dt, \quad \eta = y - \int f_2(t)\,dt, \quad \zeta = z - \int f_3(t)\,dt$$

приводит к более простому уравнению вида 2.5.1.1:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} - g(U).$$

5. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} + (a_1x + b_1y + c_1z + d_1)\frac{\partial w}{\partial x} + (a_2x + b_2y + c_2z + d_2)\frac{\partial w}{\partial y} +$

$$+ (a_3x + b_3y + c_3z + d_3)\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - f(w).$$

Это уравнение описывает нестационарный массоперенос с объемной химической реакцией в трехмерном установившемся поступательно-сдвиговом потоке жидкости.

1°. Пусть λ — корень кубического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_1-\lambda & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2-\lambda & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

а постоянные A_1, A_2, A_3 являются решением вырожденной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (a_1-\lambda)A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 &= 0, \\ b_1A_1 + (b_2-\lambda)A_2 + b_3A_3 &= 0, \\ c_1A_1 + c_2A_2 + (c_3-\lambda)A_3 &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Одно из этих уравнений может быть опущено, т. к. оно является следствием двух других.

Пусть $w(x,y,z,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w\bigl(x + A_1Ce^{\lambda t}, y + A_2Ce^{\lambda t}, z + A_3Ce^{\lambda t}, t\bigr),$$

где C — произвольная постоянная, λ — корень кубического уравнения (1), а A_1, A_2, A_3 — соответствующее решение алгебраической системы (2), также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение:

$$w = w(\xi), \quad \xi = A_1 x + A_2 y + A_3 z + Ce^{\lambda t},$$

где C — произвольная постоянная, λ — корень кубического уравнения (1), A_1, A_2, A_3 — соответствующее решение алгебраической системы (2), а функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\lambda\xi + A_1 d_1 + A_2 d_2 + A_3 d_3) w'_\xi = (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) w''_{\xi\xi} - f(w).$$

3°. Пусть λ — корень кубического уравнения (1), а A_1, A_2, A_3 — соответствующее решение алгебраической системы (2).

«Двумерное» решение:

$$w = U(\zeta, t), \quad \zeta = A_1 x + A_2 y + A_3 z,$$

где функция $U(\zeta, t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (\lambda\zeta + A_1 d_1 + A_2 d_2 + A_3 d_3) \frac{\partial U}{\partial \zeta} = (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} - f(U).$$

Замечание. В случае несжимаемой жидкости коэффициенты уравнения должны удовлетворять условию $a_1 + b_2 + c_3 = 0$.

6. $$\frac{\partial w}{\partial t} + (a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) \frac{\partial w}{\partial x} + (a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2) \frac{\partial w}{\partial y} + (a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3) \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f_1(w) \frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[f_2(w) \frac{\partial w}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[f_3(w) \frac{\partial w}{\partial z}\right].$$

Это уравнение описывает нестационарный анизотропный тепло- и массоперенос в трехмерном установившемся поступательно-сдвиговом потоке жидкости.

1°. Пусть λ — корень кубического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 - \lambda & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

а постоянные A_1, A_2, A_3 являются решением вырожденной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (a_1 - \lambda) A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 &= 0, \\ b_1 A_1 + (b_2 - \lambda) A_2 + b_3 A_3 &= 0, \\ c_1 A_1 + c_2 A_2 + (c_3 - \lambda) A_3 &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Одно из этих уравнений может быть опущено, т. к. оно является следствием двух других.

Пусть $w(x, y, z, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w\bigl(x + A_1 Ce^{\lambda t}, y + A_2 Ce^{\lambda t}, z + A_3 Ce^{\lambda t}, t\bigr),$$

где C — произвольная постоянная, λ — корень кубического уравнения (1), а A_1, A_2, A_3 — соответствующее решение алгебраической системы (2), также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение:

$$w = w(\xi), \quad \xi = A_1 x + A_2 y + A_3 z + Ce^{\lambda t}, \tag{3}$$

где C — произвольная постоянная, λ — корень кубического уравнения (1), A_1, A_2, A_3 — соответствующее решение алгебраической системы (2), а функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\lambda\xi + A_1 d_1 + A_2 d_2 + A_3 d_3) w'_\xi = [\varphi(w) w'_\xi]'_\xi,$$
$$\varphi(w) = A_1^2 f_1(w) + A_2^2 f_2(w) + A_3^2 f_3(w).$$

3°. Пусть λ — корень кубического уравнения (1), а A_1, A_2, A_3 — соответствующие решения алгебраической системы (2).

«Двумерные» решения:

$$w = U(\zeta, t), \quad \zeta = A_1 x + A_2 y + A_3 z, \tag{4}$$

где функция $U(\zeta, t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (\lambda\zeta + A_1 d_1 + A_2 d_2 + A_3 d_3) \frac{\partial U}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\varphi(U) \frac{\partial U}{\partial \zeta}\right],$$
$$\varphi(U) = A_1^2 f_1(U) + A_2^2 f_2(U) + A_3^2 f_3(U).$$

Замечание 1. В правую часть уравнения можно добавить произвольную функцию $g(U)$.

Замечание 2. В случае несжимаемой жидкости коэффициенты уравнения должны удовлетворять условию $a_1 + b_2 + c_3 = 0$.

2.5.2. Уравнения теплопереноса при степенной и экспоненциальной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры

► *В этом разделе* div, ∇ *и* Δ — *операторы дивергенции, градиента и Лапласа, записанные в декартовых координатах* x, y, z (*вместо декартовых могут быть использованы цилиндрические, сферические и другие ортогональные системы координат в пространстве*).

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \Delta(w^m)$.

Частный случай уравнения 2.5.5.6.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \alpha \operatorname{div}\bigl(w^n \nabla w\bigr) + f(t)w$.

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,z,t) = \exp\biggl[\int f(t)\,dt\biggr]\bigl[\Theta(x,y,z)\bigr]^{\frac{1}{n+1}}, \tag{1}$$

где функция $\Theta(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\Theta = 0.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,z,t) = \varphi(t)\bigl[\Theta(x,y,z)\bigr]^{\frac{1}{n+1}}, \tag{2}$$

где функция $\varphi(t)$ определяется из уравнения Бернулли

$$\varphi'_t - f(t)\varphi + A\alpha\varphi^{n+1} = 0. \tag{3}$$

Здесь A — произвольная постоянная, а функция $\Theta(x,y,z)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$\Delta\Theta + A(n+1)\Theta^{\frac{1}{n+1}} = 0.$$

Общее решение уравнения (3) дается формулой

$$\varphi(t) = \exp\bigl[F(t)\bigr]\biggl\{A\alpha n\int \exp\bigl[nF(t)\bigr]\,dt + B\biggr\}^{-1/n}, \quad F(t) = \int f(t)\,dt,$$

где B — произвольная постоянная.

3°. Преобразование

$$w(x,y,z,t) = F(t)U(x,y,z,\tau), \quad \tau = \int F^n(t)\,dt, \qquad F(t) = \exp\biggl[\int f(t)\,dt\biggr],$$

приводит к более простому уравнению $\dfrac{\partial U}{\partial \tau} = \alpha \operatorname{div}(U^n \nabla U)$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \alpha \operatorname{div}(w^n \nabla w) + f(t)w + g(t)w^{1-n}$.

Подстановка $U = w^n$ приводит к частному случаю уравнения 2.5.4.4:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha U\Delta U + \frac{\alpha}{n}|\nabla U|^2 + nf(t)U + ng(t).$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \alpha \operatorname{div}\bigl(e^{\mu w} \nabla w\bigr) + f(t)$.

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y,z,t) = \int f(t)\,dt + \frac{1}{\mu}\ln\Theta(x,y,z),$$

где функция $\Theta = \Theta(x,y,z)$ — любое решение уравнения Лапласа $\Delta\Theta = 0$.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y,z,t) = \varphi(t) + \frac{1}{\mu}\ln\Theta(x,y,z),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi'_t + A(\alpha/\mu)\exp(\mu\varphi) - f(t) = 0. \tag{1}$$

Здесь A — произвольная постоянная, а функция $\Theta = \Theta(x,y,z)$ является решением уравнения Пуассона

$$\Delta\Theta + A = 0. \tag{2}$$

Общее решение уравнения (1) дается формулой

$$\varphi(t) = F(t) - \frac{1}{\mu}\ln\biggl\{B + A\alpha\int \exp\bigl[\mu F(t)\bigr]\,dt\biggr\}, \quad F(t) = \int f(t)\,dt. \tag{3}$$

О решении линейного стационарного уравнения (2) см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

Отметим, что в уравнение (2) и в выражение (3) входят произвольные постоянные A и B.

3°. Применив преобразование

$$w(x,y,z,t) = U(x,y,z,\tau) + F(t), \quad \tau = \int \exp[\mu F(t)]\,dt, \qquad F(t) = \int f(t)\,dt,$$

получим более простое уравнение $\dfrac{\partial U}{\partial \tau} = \alpha\,\mathrm{div}(e^{\mu U}\nabla U)$.

5. $\boldsymbol{\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\,\mathrm{div}\bigl(e^{\mu w}\nabla w\bigr) + be^{\mu w} + g(t) + h(t)e^{-\mu w}}$.

Замена $U = e^{\mu w}$ приводит к уравнению вида 2.5.4.5 для функции $U = U(x,y,z,t)$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = aU\Delta U + b\mu U^2 + \mu g(t)U + \mu h(t).$$

Поэтому исходное уравнение имеет решения вида

$$w(x,y,z,t) = \frac{1}{\mu}\ln[\varphi(t) + \psi(t)\Theta(x,y,z)].$$

Отметим, что при $g(t) \equiv \mathrm{const}$, $h(t) \equiv \mathrm{const}$ исходное уравнение рассмотрено в работе В. А. Галактионова, С. А. Посашкова (1989); см. также N. H. Ibragimov (1994, pp. 158–163).

2.5.3. Уравнения тепло- и массопереноса в анизотропных средах

1. $\boldsymbol{\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(cz^n\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + f(w)}$.

1°. Точное решение при $m \neq 2$, $n \neq 2$:

$$w = w(\xi,t), \quad \xi^2 = \frac{x^2}{a} + \frac{4\,y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{4\,z^{2-n}}{c(2-n)^2},$$

где функция $w(\xi,t)$ описывается одномерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{A}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi} + f(w), \qquad A = \frac{2(4-m-n)}{(2-m)(2-n)}.$$

О решениях этого уравнения при $A = 0$ для различных функций $f(w)$ см. разд. 1.1.1–1.1.3 и уравнения 1.2.1.1–1.2.1.3, 1.4.1.2, 1.4.1.3, 1.4.1.7, 1.4.1.8.

2°. Точное решение при $m \neq 2$, $n \neq 2$:

$$w = w(x,\xi,t), \quad \xi^2 = \frac{4\,y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{4\,z^{2-n}}{c(2-n)^2},$$

где функция $w(x,\xi)$ описывается двумерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{A}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi} + f(w), \qquad A = \frac{4-mn}{(2-m)(2-n)}.$$

2. $\boldsymbol{\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(cz^l\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + f(w)}$.

Точное решение при $n \neq 2$, $m \neq 2$, $l \neq 2$:

$$w = w(\xi,t), \quad \xi^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{z^{2-l}}{c(2-l)^2}\right],$$

где функция $w(\xi,t)$ описывается одномерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{A}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi} + f(w), \qquad A = 2\left(\frac{1}{2-n} + \frac{1}{2-m} + \frac{1}{2-l}\right) - 1.$$

О решениях этого уравнения при $A = 0$ для различных функций $f(w)$ см. разд. 1.1.1–1.1.3 и уравнения 1.2.1.1–1.2.1.3, 1.4.1.2, 1.4.1.3, 1.4.1.7, 1.4.1.8.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\lambda x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(ce^{\nu z}\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + f(w).$

Точное решение при $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$:

$$w = w(\xi, t), \qquad \xi^2 = 4\left(\frac{e^{-\lambda x}}{a\lambda^2} + \frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right),$$

где функция $w(\xi, t)$ описывается одномерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi} + f(w).$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(ce^{\nu z}\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + f(w).$

Точное решение при $n \neq 2$, $m \neq 2$, $\nu \neq 0$:

$$w = w(\xi, t), \qquad \xi^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right],$$

где функция $w(\xi, t)$ описывается одномерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{A}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi} + f(w), \qquad A = \frac{4 - nm}{(2-n)(2-m)}.$$

О решениях этого уравнения при $A = 0$ для различных функций $f(w)$ см. разд. 1.1.1–1.1.3 и уравнения 1.2.1.1–1.2.1.3, 1.4.1.2, 1.4.1.3, 1.4.1.7, 1.4.1.8.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(ce^{\nu z}\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + f(w).$

Точное решение при $n \neq 2$, $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$:

$$w = w(\xi, t), \qquad \xi^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right],$$

где функция $w(\xi, t)$ описывается одномерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{n}{2-n}\frac{1}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi} + f(w).$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f_1(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[f_2(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right] + \dfrac{\partial}{\partial z}\left[f_3(w)\dfrac{\partial w}{\partial z}\right] + g(w).$

О групповой классификации и точных решениях данного уравнения для некоторых функций $f_n(w)$ и $g(w)$ см. работу В. А. Дородницына, И. В. Князевой, С. Р. Свирщевского (1983).

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + (a_1x + b_1y + c_1z + d_1)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (a_2x + b_2y + c_2z + d_2)\dfrac{\partial w}{\partial y} +$

$$+(a_3x+b_3y+c_3z+d_3)\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(w)\frac{\partial w}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[h(w)\frac{\partial w}{\partial z}\right].$$

Это уравнение описывает нестационарный анизотропный тепло- и массоперенос в трехмерном установившемся поступательно-сдвиговом потоке жидкости.

1°. Пусть λ — корень кубического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 - \lambda & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

а постоянные A_1, A_2, A_3 являются решением вырожденной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (a_1 - \lambda)A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 &= 0, \\ b_1A_1 + (b_2 - \lambda)A_2 + b_3A_3 &= 0, \\ c_1A_1 + c_2A_2 + (c_3 - \lambda)A_3 &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Одно из этих уравнений может быть опущено.

Пусть $w(x, y, z, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w\bigl(x + A_1Ce^{\lambda t}, y + A_2Ce^{\lambda t}, z + A_3Ce^{\lambda t}, t\bigr),$$

где C — произвольная постоянная, λ — корень кубического уравнения (1), а A_1, A_2, A_3 — соответствующее решение алгебраической системы (2), также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = A_1x + A_2y + A_3z + Ce^{\lambda t}, \tag{3}$$

где C — произвольная постоянная, λ — корень кубического уравнения (1), A_1, A_2, A_3 — соответствующее решение алгебраической системы (2), а функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\lambda\xi + A_1d_1 + A_2d_2 + A_3d_3)w'_\xi = [\varphi(w)w'_\xi]'_\xi, \qquad \varphi(w) = A_1^2 f(w) + A_2^2 g(w) + A_3^2 h(w).$$

3°. Пусть λ — корень кубического уравнения (1), а A_1, A_2, A_3 — соответствующие решения алгебраической системы (2).

«Двумерные» решения:

$$w = U(\zeta, t), \qquad \zeta = A_1x + A_2y + A_3z, \tag{4}$$

где функция $U(\zeta, t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (\lambda\zeta + A_1d_1 + A_2d_2 + A_3d_3)\frac{\partial U}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\varphi(U)\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right], \qquad \varphi(U) = A_1^2 f(U) + A_2^2 g(U) + A_3^2 h(U).$$

Замечание 1. В правую часть уравнения можно добавить произвольную функцию $g(U)$.

Замечание 2. В случае несжимаемой жидкости коэффициенты уравнения должны удовлетворять условию $a_1 + b_2 + c_3 = 0$.

2.5.4. Другие уравнения с тремя пространственными переменными

► *В этом разделе* div, ∇ *и* Δ — *операторы дивергенции, градиента и Лапласа, записанные в декартовых координатах* x, y, z (*вместо декартовых могут быть использованы цилиндрические, сферические и другие ортогональные системы координат в пространстве*).

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\Delta w + f(t)|\nabla w|^2 + g(t)w + h(t).$

Имеется решение с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{k,l=1}^{3} \varphi_{kl}(t)x_kx_l + \sum_{k=1}^{3} \psi_k(t)x_k + \chi(t).$$

Замечание. Решения такого же вида имеет более общее уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{n,m=1}^{3} a_{nm}(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x_n \partial x_m} + \sum_{n=1}^{3} b_n(t)\left(\frac{\partial w}{\partial x_n}\right)^2 + \sum_{n=1}^{3} c_n(t)\frac{\partial w}{\partial x_n} + g(t)w + h(t)$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \Delta w + f(w)|\nabla w|^2.$

Подстановка

$$U = \int F(w)\,dw, \qquad \text{где} \quad F(w) = \exp\left[\int f(w)\,dw\right],$$

приводит к линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \Delta U.$$

О решении этого уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \alpha w\Delta w - \alpha|\nabla w|^2 - \beta.$

1°. Точные решения:

$$w(x, y, z, t) = Ax + By + Cz - [\alpha(A^2 + B^2 + C^2) + \beta]t + D,$$
$$w(x, y, z, t) = A - \beta t + B\exp\bigl[\alpha(\varkappa^2 + \mu^2 + \nu^2)\bigl(At - \tfrac{1}{2}\beta t^2\bigr)\bigr]e^{\varkappa x + \mu y + \nu z},$$

где A, B, C, D, $\varkappa$, μ, ν — произвольные постоянные.

2°. См. также уравнение 2.5.4.4 при $f(t) = -\alpha$, $g(t) = 0$, $h(t) = -\beta$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \alpha w \Delta w + f(t)|\nabla w|^2 + g(t)w + h(t).$

Имеются решения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{k,l=1}^{3} \varphi_{kl}(t) x_k x_l + \sum_{k=1}^{3} \psi_k(t) x_k + \chi(t).$$

Замечание. Решения такого же вида имеет более общее уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{n,m=1}^{3} \bigl[a_{nm}(t)w + b_{nm}(t)\bigr] \frac{\partial^2 w}{\partial x_n \partial x_m} + \sum_{n=1}^{3} c_n(t) \left(\frac{\partial w}{\partial x_n}\right)^2 + \sum_{n=1}^{3} s_n(t) \frac{\partial w}{\partial x_n} + g(t)w + h(t).$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = [aw + f(t)]\Delta w + bw^2 + g(t)w + h(t).$

Здесь $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ — произвольные функции; a, b — произвольные параметры ($a \neq 0$). Частный случай уравнения 2.5.4.6 при $\mathbf{L}\,[w] \equiv \Delta w$.

Отметим, что при $f(t) \equiv \text{const}$, $g(t) \equiv \text{const}$, $h(t) \equiv \text{const}$ это уравнение рассмотрено в работах В. А. Галактионова, С. А. Посашкова (1989), N. H. Ibragimov (1994, pp. 158–163).

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = [aw + f(t)]\mathbf{L}\,[w] + bw^2 + g(t)w + h(t).$

Здесь $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ — произвольные функции; a, b — произвольные параметры ($a \neq 0$); $\mathbf{L}\,[w]$ — произвольный линейный дифференциальный оператор второго (любого) порядка, зависящий только от пространственных переменных $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ и удовлетворяющий условию $\mathbf{L}\,[\text{const}] \equiv 0$:

$$\mathbf{L}\,[w] \equiv \sum_{n,m=1}^{3} p_{nm}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 w}{\partial x_n \partial x_m} + \sum_{n=1}^{3} q_n(\mathbf{x}) \frac{\partial w}{\partial x_n}, \qquad \mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}.$$

Имеются решения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x_1, x_2, x_3, t) = \varphi(t) + \psi(t)\Theta(x_1, x_2, x_3),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t = b\varphi^2 + g(t)\varphi + h(t), \tag{1}$$

$$\psi'_t = \bigl[b\varphi - \beta f(t) + g(t)\bigr]\psi, \qquad \beta = b/a, \tag{2}$$

а функция $\Theta(x_1, x_2, x_3)$ — решение линейного стационарного уравнения

$$\mathbf{L}\,[\Theta] + \beta\Theta = 0. \tag{3}$$

Первое уравнение системы (1) не зависит от ψ и представляет собой уравнение Риккати для функции φ. В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведено много точных решений уравнения (1) для различных функций $g(t)$ и $h(t)$. После решения уравнения (1), подставляя зависимость $\varphi = \varphi(t)$ в (2), получим линейное уравнение относительно $\psi = \psi(t)$, которое легко интегрируется.

В частном случае $b = 0$ решение системы (1), (2) дается следующими формулами:

$$\varphi(t) = \exp\bigl[G(t)\bigr]\left\{A + \int h(t) \exp\bigl[-G(t)\bigr]\,dt\right\}, \quad G(t) = \int g(t)\,dt,$$

$$\psi(t) = B \exp\bigl[G(t) - \beta F(t)\bigr], \quad F(t) = \int f(t)\,dt,$$

где A, B — произвольные постоянные.

В частном случае $\mathbf{L} \equiv \Delta$ о решениях линейного стационарного уравнения (3) см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\mathbf{N}_\beta[w] + g(t)w.$

Здесь $\mathbf{N}_\beta[w]$ — произвольный однородный нелинейный дифференциальный оператор степени β относительно w (т. е. $\mathbf{N}_\beta[\alpha w] = \alpha^\beta \mathbf{N}_\beta[w]$, $\alpha = \text{const}$), действующий только по пространственным переменным x, y, z (который не зависит от t).

Применив преобразование

$$w(x,y,z,t) = G(t)U(x,y,z,\tau), \quad \tau = \int f(t)G^{\beta-1}(t)\,dt, \quad G(t) = \exp\biggl[\int g(t)\,dt\biggr],$$

получим более простое уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \mathbf{N}_\beta[U], \tag{1}$$

которое имеет точное решение в виде произведения функций разных аргументов вида $U = \varphi(\tau)\Theta(x,y,z)$.

Замечание 1. В рассматриваемом уравнении порядок (относительно производных) нелинейного оператора $\mathbf{N}_\beta$ и число пространственных переменных может быть любым. Коэффициенты оператора $\mathbf{N}_\beta$ могут зависеть от пространственных переменных.

Замечание 2. Если оператор $\mathbf{N}_\beta$ не зависит явно от пространственных координат, то уравнение (1) имеет также точное решение типа бегущей волны $U = U(\xi)$, где $\xi = k_1x + k_2y + k_3z + \lambda\tau$. Ниже приведены два примера таких операторов $\mathbf{N}_\beta$:

$$\mathbf{N}_\beta[w] = a\,\mathrm{div}(w^{\beta-1}\nabla w) + b|\nabla w|^\beta + cw^\beta,$$
$$\mathbf{N}_\beta[w] = a\,\mathrm{div}(|\nabla w|^{\beta-1}\nabla w) + bw^\mu|\nabla w|^{\beta-\mu},$$

где a, b, c, μ — некоторые постоянные.

8. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)w = \Delta w + f(w)|\nabla w|^2.$

Частный случай уравнения 2.5.5.8 при $n = 3$.

9. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)w = a\Delta w + a|\nabla w|^2 + f(\vec{x},t).$

Частный случай уравнения 2.5.5.9 при $n = 3$.

10. $\displaystyle \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{w}\cdot\nabla)\vec{w} = a\Delta\vec{w}.$

Векторное уравнение Бюргерса, $\vec{w} = \{w_1, w_2, w_3\}$, где $w_n = w_n(x_1, x_2, x_3)$. Операторы Гамильтона ∇ и Лапласа Δ могут быть записаны в произвольной ортогональной системе координат.

Точное решение:

$$\vec{w} = -\frac{2a}{\theta}\nabla\theta,$$

где θ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = a\Delta\theta.$$

О решениях этого уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

⊙ *Литература*: S. Nerney, E. J. Schmahl, Z. E. Musielak (1996).

2.5.5. Уравнения, зависящие от n пространственных переменных

► *Обозначения:* $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\Delta w = \sum\limits_{k=1}^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x_k^2}$, $|\nabla w|^2 = \sum\limits_{k=1}^n \Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial x_k}\Bigr)^2$, $\nabla\cdot\vec{v} = \sum\limits_{k=1}^n \dfrac{\partial v_k}{\partial x_k}$, $(\vec{v}\cdot\nabla)w = \sum\limits_{k=1}^n v_k\dfrac{\partial w}{\partial x_k}$.

1. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \Delta w + f(w)|\nabla w|^2.$

Подстановка $U = \int F(w)\,dw$, где $F(w) = \exp\Bigl[\int f(w)\,dw\Bigr]$, приводит к линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \Delta U.$$

О решениях этого уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\Delta w + g(t) w \ln w + h(t) w.$

Имеется решение с функциональным разделением переменных

$$w(x_1, \dots, x_n, t) = \exp\left[\sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{ij}(t) x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t) x_i + \chi(t)\right].$$

Частный случай 1. Пусть $f(t) = 1$, $g(t) = 1$, $h(t) = 0$. Точные решения в случае радиальной симметрии:

$$w = \exp\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{4} r^2 + Be^t\right), \quad r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

$$w = \exp\left\{-\frac{1}{4} r^2 (1 - Ae^{-t})^{-1} + e^t \left[B - \frac{n}{2A} \ln(1 - Ae^{-t})\right]\right\},$$

где A, B — произвольные постоянные ($A < 1$). Первое решение является частным случаем второго при $A \to 0$.

Частный случай 2. Пусть $f(t) = 1$, $g(t) = -1$, $h(t) = 0$. Точное решение в случае радиальной симметрии:

$$w = \exp\left\{-\frac{1}{4} r^2 (Ae^t - 1)^{-1} + e^{-t} \left[B - \frac{n}{2A} \ln(Ae^t - 1)\right]\right\},$$

где A, B — произвольные постоянные ($A > 1$).

⦿ *Литература*: А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1995).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f_1(t)\Delta w + f_2(t)|\nabla w|^2 + f_3(t) w + \sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}(t) x_i x_j + \sum\limits_{i=1}^{n} h_i(t) x_i + p(t).$

Уравнение имеет точное решение вида

$$w(x_1, \dots, x_n, t) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{ij}(t) x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t) x_i + \chi(t).$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f_1(t) w\Delta w + f_2(t)|\nabla w|^2 + f_3(t) w + \sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}(t) x_i x_j + \sum\limits_{i=1}^{n} h_i(t) x_i + p(t).$

Уравнение имеет точное решение вида

$$w(x_1, \dots, x_n, t) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{ij}(t) x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t) x_i + \chi(t).$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\nabla \cdot (w^m \nabla w).$

Это уравнение при $m > 1$ описывает фильтрацию газа через однородную пористую среду (w — плотность политропного газа).

1°. В случае радиальной симметрии уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{a}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1} w^m \frac{\partial w}{\partial r}\right), \qquad r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Его точные решения указаны в 1.1.15.9, где n надо заменить на $n - 1$.

2°. Решение типа нестационарного источника при $a = 1$:

$$w = \begin{cases} t^{-n/(nm+2)} \left[\dfrac{m}{2(nm+2)} \left(K_0^2 - \dfrac{r^2}{t^{2/(nm+2)}}\right)\right]^{1/m} & \text{при } r \leqslant K_0 t^{1/(nm+2)}, \\ 0 & \text{при } r > K_0 t^{1/(nm+2)}, \end{cases}$$

где

$$K_0 = \left\{\pi^{-n/2} \left[\frac{2(nm+2)}{m}\right]^{1/m} \frac{\Gamma(n/m + 1 + 1/m)}{\Gamma(1/m + 1)} E_0\right\}^{m/(nm+2)}, \quad E_0 = \text{const}.$$

Замечание. Эти формулы описывают решение задачи Коши с начальным условием

$$w(\mathbf{x}, 0) = E_0 \delta(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

которое удовлетворяет закону сохранения энергии:

$$\int_{\mathbb{R}^n} w(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x} = E_0 = \text{const} > 0.$$

3°. См. также уравнение 2.5.5.6, в котором m надо заменить на $m+1$.

⦿ *Литература*: Я. Б. Зельдович, А. С. Компанеец (1950), Г. И. Баренблатт (1952).

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \Delta(w^m)$.

Это уравнение при $m > 1$ описывает фильтрацию газа через однородную пористую среду (w — плотность политропного газа). Оно может быть записано в виде уравнения 2.5.5.5:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = m\nabla\cdot(w^{m-1}\nabla w).$$

1°. Точное решение при $m > 1$:

$$w = \left(\prod_{k=1}^{n}\varphi_k\right)^{-1}\left(A - \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{\varphi_k^2}\right)^{\frac{1}{m-1}},$$

где A — произвольная постоянная ($A > 0$), а функции $\varphi_k = \varphi_k(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi_1\frac{d\varphi_1}{dt} = \cdots = \varphi_n\frac{d\varphi_n}{dt} = \frac{2m}{m-1}\left(\prod_{k=1}^{n}\varphi_k\right)^{1-m}. \tag{1}$$

Система (1) допускает $(n-1)$ первых интегралов:

$$\varphi_j^2 = \varphi_n^2 + C_j, \qquad j = 1,\,2,\,\ldots,\,n-1, \tag{2}$$

где C_j — произвольные постоянные.

Функция $\varphi_n = \varphi_n(t)$ задается в неявном виде формулой (считается, что $C_j > 0$)

$$\int_B^{\varphi_n} z^m\left[\prod_{j=1}^{n-1}(z^2 + C_j)\right]^{\frac{m-1}{2}} dz = \frac{2mt}{m-1},$$

где B — произвольная постоянная, а остальные $\varphi_j(t)$ определяются положительными корнями квадратных уравнений (2).

2°. Точное решение при $0 < m < 1$:

$$w = \left(\prod_{k=1}^{n}\varphi_k\right)^{-1}\left(A + \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{\varphi_k^2}\right)^{\frac{1}{m-1}},$$

где A — произвольная постоянная, а функция $\varphi_k = \varphi_k(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (1).

3°. Уравнение имеет точное решение вида

$$w = \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t)x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i(t)x_i + c(t)\right]^{\frac{1}{m-1}}.$$

5°. См. также уравнение 2.5.5.5, в котором m надо заменить на $m-1$ и положить $a = m$.

⦿ *Литература для уравнения* 2.5.5.6: С. С. Титов, В. А. Устинов (1985), J. R. King (1993), В. В. Пухначев (1995), Г. А. Рудых, Э. И. Семенов (2000).

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = [aw + f(t)]\Delta w + bw^2 + g(t)w + h(t)$.

Здесь $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ — произвольные функции; a, b — произвольные параметры ($a \neq 0$).

Имеется решение с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x_1,\ldots,x_n,t) = \varphi(t) + \psi(t)\Theta(x_1,\ldots,x_n),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi_t' = b\varphi^2 + g(t)\varphi + h(t), \tag{1}$$

$$\psi_t' = \big[b\varphi - \beta f(t) + g(t)\big]\psi, \qquad \beta = b/a, \tag{2}$$

а функция $\Theta(x_1,\ldots,x_n)$ является решением уравнения Гельмгольца

$$\Delta\Theta + \beta\Theta = 0. \tag{3}$$

Первое уравнение системы (1) не зависит от ψ и представляет собой уравнение Риккати для функции φ. В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведено много точных решений уравнения (1) для различных функций $g(t)$ и $h(t)$. После решения уравнения (1), подставляя зависимость $\varphi = \varphi(t)$ в (2), получим линейное уравнение относительно $\psi = \psi(t)$, которое легко интегрируется.

О решениях линейного стационарного уравнения (3) см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) w = \Delta w + f(w) |\nabla w|^2.$

Здесь $\vec{v}$ — заданная вектор-функция, зависящая от пространственных координат и времени (которая не зависит от w).

Подстановка

$$\Theta = \int F(w)\, dw, \qquad \text{где} \quad F(w) = \exp\left[\int f(w)\, dw\right],$$

приводит к линейному уравнению конвективного тепло- и массопереноса для функции $\Theta = \Theta(x_1, \ldots, x_n, t)$:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\Theta = \Delta\Theta.$$

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) w = a\Delta w + a|\nabla w|^2 + f(\mathbf{x}, t).$

Здесь $\vec{v}$ — заданная вектор-функция, зависящая от пространственных координат и времени (которая не зависит от w).

Подстановка $\Theta = e^w$ приводит к линейному уравнению

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\Theta = a\Delta\Theta + f(\mathbf{x}, t)\Theta.$$

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \alpha \nabla \cdot \big(w^m \nabla w\big) + f(t) w.$

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(\mathbf{x}, t) = \exp\left[\int f(t)\, dt\right] \big[\Theta(\mathbf{x})\big]^{\frac{1}{m+1}}, \tag{1}$$

где функция $\Theta(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\Theta = 0.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(\mathbf{x}, t) = \varphi(t) \big[\Theta(\mathbf{x})\big]^{\frac{1}{m+1}}, \tag{2}$$

где функция $\varphi(t)$ определяется уравнением Бернулли

$$\varphi'_t - f(t)\varphi + A\alpha\varphi^{m+1} = 0, \tag{3}$$

A — произвольная постоянная, а функция $\Theta(\mathbf{x})$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$\Delta\Theta + A(m+1)\Theta^{\frac{1}{m+1}} = 0.$$

Общее решение уравнения (3) дается формулой

$$\varphi(t) = \exp\big[F(t)\big] \left\{A\alpha m \int \exp\big[mF(t)\big]\, dt + B\right\}^{-1/m}, \quad F(t) = \int f(t)\, dt,$$

где B — произвольная постоянная.

3°. Преобразование

$$w(\mathbf{x},t)=F(t)U(\mathbf{x},\tau),\qquad \tau=\int F^m(t)\,dt,\qquad F(t)=\exp\biggl[\int f(t)\,dt\biggr],$$

приводит к более простому уравнению: $\dfrac{\partial U}{\partial\tau}=\alpha\nabla\cdot(U^m\nabla w)$.

Пример. При $\alpha=1$, $f(t)=-\beta<0$ имеем

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\nabla\cdot(w^m\nabla w)-\beta w.$$

Точное решение в случае радиальной симметрии:

$$w=\begin{cases} e^{-\beta t/m}[g(t)]^{-n/(nm+2)}\biggl[\dfrac{m}{2(nm+2)}\biggl(\eta_0^2-\dfrac{r^2}{[g(t)]^{2/(nm+2)}}\biggr)\biggr]^{1/m} & \text{при } r\leqslant r_*(t),\\ 0 & \text{при } r>r_*(t),\end{cases}$$

где

$$r=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2},\quad g(t)=1+\frac{1-e^{-\beta mt}}{\beta m},\quad r_*(t)=\eta_0\biggl(1+\frac{1-e^{-\beta mt}}{\beta m}\biggr)^{1/(nm+2)}.$$

Радиус области, в которой решение отлично от нуля, монотонно возрастает, но ограничен константой

$$L=\lim_{t\to\infty}|r_*(t)|=\eta_0\biggl(1+\frac{1}{\beta m}\biggr)^{1/(nm+2)}<\infty.$$

Возмущение локализовано в шаре радиуса L.

⦿ *Литература*: Л. К. Мартинсон, К. Б. Павлов (1972), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 116–117).

11. $\boldsymbol{\dfrac{\partial w}{\partial t}=\nabla\cdot(w^m\nabla w)-w^{1-m}}$.

Точное решение в случае радиальной симметрии при $0<m<1$:

$$w=\begin{cases}\biggl[\dfrac{2(nm+2)}{m}t\biggr]^{-1/m}V^{1/m} & \text{при } V\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } V<0,\end{cases}$$

где

$$V=At^{2/(nm+2)}-\frac{(nm+2)^2}{nm+1}t^2-r^2,\qquad r=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\,;$$

A — произвольная постоянная ($A>0$). Решение отлично от нуля в ограниченной области. Диаметр этой области растет при значениях t во временно́м интервале $(0,t_*)$, где

$$t_*=\biggl[\frac{A(nm+1)}{(nm+2)^3}\biggr]^{\frac{nm+2}{nm+1}}$$

и уменьшается в интервале (t_*,T_0), где

$$T_0=\biggl[\frac{A(nm+1)}{(nm+2)^2}\biggr]^{\frac{nm+2}{2(nm+1)}}.$$

Решение исчезает при $t=T_0$.

⦿ *Литература*: R. Kersner (1978), Л. К. Мартинсон (1980).

12. $\boldsymbol{\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\nabla\cdot(e^{\lambda w}\nabla w)+be^{\lambda w}+f(t)+g(t)e^{-\lambda w}}$.

Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(\mathbf{x},t)=\frac{1}{\lambda}\ln\bigl[\varphi(t)+\psi(t)\Theta(\mathbf{x})\bigr],\qquad \psi(t)=\exp\biggl\{\lambda\int\bigl[b\varphi(t)+f(t)\bigr]\,dt\biggr\},$$

где функция $\varphi(t)$ определяется уравнением Риккати

$$\varphi_t'=b\lambda\varphi^2+\lambda f(t)\varphi+\lambda g(t),\tag{1}$$

а функция $\Theta=\Theta(\mathbf{x})$ — решение уравнения Гельмгольца

$$a\Delta\Theta+b\lambda\Theta=0.\tag{2}$$

Об уравнении Риккати см. книги Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*). О линейном уравнении (2) см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \nabla \cdot [f(w)\nabla w] + \dfrac{a}{f(w)} + b.$

Решение в неявном виде:

$$\int f(w)\,dw = at + U(\mathbf{x}),$$

где функция $U(\mathbf{x})$ описывается уравнением Пуассона

$$\Delta U + b = 0.$$

Об этом линейном уравнении см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 b).

⦿ *Литература*: V. A. Galaktionov (1994).

14. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \nabla \cdot [f(w)\nabla w] + \dfrac{g(t)}{f(w)} + h(\mathbf{x}).$

Решение в неявном виде:

$$\int f(w)\,dw = \int g(t)\,dt + U(\mathbf{x}),$$

где функция $U(\mathbf{x})$ описывается уравнением Пуассона

$$\Delta U + h(\mathbf{x}) = 0.$$

15. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \Delta f(w) + \dfrac{af(w)+b}{f'(w)} + c[af(w)+b].$

Решение в неявном виде:

$$f(w) = e^{at}U(\mathbf{x}) - \frac{b}{a},$$

где функция $U(\mathbf{x})$ описывается уравнением Гельмгольца

$$\Delta U + acU = 0.$$

Об этом линейном уравнении см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 b).

⦿ *Литература*: V. A. Galaktionov (1994).

16. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \mathbf{L}\,[f(w)] + \dfrac{g(t)}{f'(w)} + h(\mathbf{x}).$

Здесь $\mathbf{L}$ — произвольный линейный дифференциальный оператор второго (произвольного) порядка по пространственным переменным, коэффициенты которого не зависят от t, удовлетворяющий условию $\mathbf{L}\,[\mathrm{const}] = 0$.

Решение в неявном виде:

$$f(w) = \int g(t)\,dt + U(\mathbf{x}),$$

где функция $U(\mathbf{x})$ описывается линейным уравнением

$$\mathbf{L}\,[U] + h(\mathbf{x}) = 0.$$

17. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \mathbf{L}\,[f(w)] + \dfrac{af(w)+b}{f'(w)} + g(\mathbf{x})[af(w)+b].$

Здесь $\mathbf{L}$ — произвольный линейный дифференциальный оператор второго (произвольного) порядка по пространственным переменным, коэффициенты которого не зависят от t, удовлетворяющий условию $\mathbf{L}\,[\mathrm{const}] = 0$.

Решение в неявном виде:

$$f(w) = e^{at}U(\mathbf{x}) - \frac{b}{a},$$

где функция $U(\mathbf{x})$ описывается линейным уравнением

$$\mathbf{L}\,[U] + ag(\mathbf{x})U = 0.$$

18. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \mathbf{L}\,[f(x,w)] + \dfrac{g(t)}{f_w(x,w)} + h(\mathbf{x})$.

Здесь $\mathbf{L}$ — произвольный линейный дифференциальный оператор второго (произвольного) порядка по пространственным переменным, коэффициенты которого не зависят от t, удовлетворяющий условию $\mathbf{L}[\mathrm{const}] = 0$; f_w — частная производная функции f по w.

Решение в неявном виде:

$$f(x,w) = \int g(t)\,dt + U(\mathbf{x}),$$

где функция $U(\mathbf{x})$ описывается линейным уравнением

$$\mathbf{L}\,[U] + h(\mathbf{x}) = 0.$$

19. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \mathbf{L}\,[f(x,w)] + \dfrac{af(x,w)+b}{f_w(x,w)} + g(\mathbf{x})[af(x,w)+b]$.

Здесь $\mathbf{L}$ — произвольный линейный дифференциальный оператор второго (произвольного) порядка по пространственным переменным, коэффициенты которого не зависят от t, удовлетворяющий условию $\mathbf{L}\,[\mathrm{const}] = 0$; f_w — частная производная функции f по w.

Решение в неявном виде:

$$f(x,w) = e^{at}U(\mathbf{x}) - \frac{b}{a},$$

где функция $U(\mathbf{x})$ описывается линейным уравнением

$$\mathbf{L}\,[U] + ag(\mathbf{x})U = 0.$$

20. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\nabla\cdot(|\nabla w|\nabla w) + bw^2 + f(t)w + g(t)$.

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(\mathbf{x},t) = \varphi(t) + \exp\biggl\{\int\bigl[2b\varphi(t) + f(t)\bigr]\,dt\biggr\}\Theta(\mathbf{x}),$$

где функция $\varphi(t)$ описывается уравнением Риккати

$$\varphi'_t = b\varphi^2 + f(t)\varphi + g(t),$$

а функция $\Theta = \Theta(\mathbf{x})$ — решение стационарного уравнения

$$a\nabla\cdot(|\nabla\Theta|\nabla\Theta) + b\Theta^2 = 0.$$

2.6. Нелинейные уравнения Шредингера

2.6.1. Двумерные уравнения

► *В этом разделе $i^2 = -1$, а w — комплексная функция действительных переменных x, y, t.*

1. $i\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A|w|^2 w = 0$.

Двумерное уравнение Шредингера с кубической нелинейностью. Частный случай уравнения 2.6.1.3 при $f(u) = Au^2$.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение исходного уравнения Шредингера. Тогда функции

$$\begin{aligned}
w_1 &= \pm C_1 w(\pm C_1 x + C_2, \pm C_1 y + C_3, C_1^2 t + C_4),\\
w_2 &= e^{-i[\lambda_1 x + \lambda_2 y + (\lambda_1^2+\lambda_2^2)t + C_5]}w(x + 2\lambda_1 t, y + 2\lambda_2 t, t),\\
w_3 &= w(x\cos\beta - y\sin\beta, x\sin\beta + y\cos\beta, t),
\end{aligned}$$

где $C_1, \ldots, C_5, \lambda_1, \lambda_2, \beta$ — произвольные действительные постоянные, также будут решениями этого уравнения. Знаки в выражении для w_1 выбираются произвольно.

2°. Точные решения:

$$\begin{aligned}
w(x,y,t) &= C_1\exp\bigl\{i\,[C_2 x + C_3 y + (AC_1^2 - C_2^2 - C_3^2)t + C_4]\bigr\},\\
w(x,y,t) &= \frac{C_1}{t}\exp\biggl[i\,\frac{(x+C_2)^2 + (y+C_3)^2 - 4AC_1^2}{4t} + iC_4\biggr],
\end{aligned}$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные действительные постоянные.

3°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = e^{i(C_1 t + C_2)} u(x,y),$$

где C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные, а функция $u = u(x,y)$ описывается стационарным уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Au^3 - C_1 u = 0.$$

4°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = (f_1 x + f_2 y + f_3)\exp\bigl[i(g_1 x^2 + g_2 xy + g_3 y^2 + h_1 x + h_2 y + h_3)\bigr],$$

где функции $f_k = f_k(t)$, $g_k = g_k(t)$, $h_k = h_k(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
f_1' + 2(3g_1 + g_3)f_1 + 2f_2 g_2 &= 0,\\
f_2' + 2(g_1 + 3g_3)f_2 + 2f_1 g_2 &= 0,\\
f_3' + 2(g_1 + g_3)f_3 + 2(f_1 h_1 + f_2 h_2) &= 0,\\
g_1' + 4g_1^2 + g_2^2 - Af_1^2 &= 0,\\
g_2' + 4(g_1 + g_3)g_2 - 2Af_1 f_2 &= 0,\\
g_3' + g_2^2 + 4g_3^2 - Af_2^2 &= 0,\\
h_1' + 4g_1 h_1 + 2g_2 h_2 - 2Af_1 f_3 &= 0,\\
h_2' + 2g_2 h_1 + 4g_3 h_2 - 2Af_2 f_3 &= 0,\\
h_3' + h_1^2 + h_2^2 - Af_3^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Штрих обозначает производную по t.

5°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = U(\xi_1,\xi_2)e^{i(k_1 x + k_2 y + at + b)}, \quad \xi_1 = x - 2k_1 t, \quad \xi_2 = y - 2k_2 t,$$

где k_1, k_2, a, b — произвольные постоянные, а функция $U = U(\xi_1,\xi_2)$ описывается дифференциальным уравнением вида 5.4.1.1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_2^2} + A|U|^2 U - (k_1^2 + k_2^2 + a)U = 0.$$

6°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = \Phi(z_1,z_2)\exp\bigl[i(k_1 xt + k_2 yt - \tfrac{2}{3}k_1^2 t^3 - \tfrac{2}{3}k_2^2 t^3 + at + b)\bigr], \quad z_1 = x - k_1 t^2, \quad z_2 = y - k_2 t^2,$$

где k_1, k_2, a, b — произвольные постоянные, а функция $\Phi = \Phi(z_1,z_2)$ описывается дифференциальным уравнением вида 5.4.1.1:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_2^2} + A|\Phi|^2\Phi - (k_1 z_1 + k_2 z_2 + a)\Phi = 0.$$

7°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{C_1 t + C_2}}u(\xi,\eta), \quad \xi = \frac{x + C_3}{\sqrt{C_1 t + C_2}}, \quad \eta = \frac{y + C_4}{\sqrt{C_1 t + C_2}},$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, а функция $u = u(\xi,\eta)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{2}iC_1\left(\xi\frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial u}{\partial \eta} + u\right) + A|u|^2 u = 0.$$

⊙ *Литература для уравнения* 2.6.1.1: L. Gagnon, P. Winternitz (1988, 1989), N. H. Ibragimov (1995, pp. 437–438), А. М. Виноградов, И. С. Красильщик (1997), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, стр. 186–187).

2. $i\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A|w|^{2n}w = 0.$

Двумерное уравнение Шредингера со степенной нелинейностью, A и n — вещественные константы. Частный случай уравнения 2.6.1.3 при $f(u) = Au^{2n}$.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение исходного уравнения Шредингера. Тогда функции

$$w_1 = \pm C_1 w(\pm C_1^n x + C_2, \pm C_1^n y + C_3, C_1^{2n} t + C_4),$$
$$w_2 = e^{-i[\lambda_1 x+\lambda_2 y+(\lambda_1^2+\lambda_2^2)t+C_5]} w(x+2\lambda_1 t, y+2\lambda_2 t, t),$$
$$w_3 = w(x\cos\beta - y\sin\beta, x\sin\beta + y\cos\beta, t),$$

где $C_1, \ldots, C_5, \beta, \lambda_1, \lambda_2$ — произвольные действительные постоянные, также будут решениями этого уравнения. Знаки в выражении для w_1 выбираются произвольно.

2°. Точные решения:

$$w(x,y,t) = C_1 \exp\bigl\{i\,[C_2 x + C_3 y + (A|C_1|^{2n} - C_2^2 - C_3^2)t + C_4]\bigr\},$$
$$w(x,y,t) = \frac{C_1}{t}\exp\left[i\,\frac{(x+C_2)^2+(y+C_3)^2}{4t} + i\,\frac{AC_1^{2n}}{1-2n}t^{1-2n} + iC_4\right],$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные действительные постоянные.

3°. О других точных решениях см. уравнение 2.6.1.3 при $f(w) = Aw^{2n}$.

3. $\boldsymbol{i\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f(|w|)w = 0}$.

Двумерное нелинейное уравнение Шредингера общего вида.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение исходного уравнения Шредингера. Тогда функции

$$w_1 = e^{-i[\lambda_1 x+\lambda_2 y+(\lambda_1^2+\lambda_2^2)t+A]} w(x+2\lambda_1 t + C_1, y+2\lambda_2 t + C_2, t + C_3),$$
$$w_2 = w(x\cos\beta - y\sin\beta, x\sin\beta + y\cos\beta, t),$$

где A, C_1, C_2, C_3, λ_1, λ_2, β — произвольные действительные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w(x,y,t) = C_1 \exp\bigl[i\,(C_2 x + C_3 y + \lambda t + C_4)\bigr], \qquad \lambda = f(|C_1|) - C_2^2 - C_3^2,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные действительные постоянные.

3°. Точные решения, зависящие только от радиальной переменной $r = \sqrt{x^2+y^2}$ и времени t, описываются уравнением

$$i\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + f(|w|)w = 0,$$

которое является частным случаем уравнения 1.7.5.2 при $n = 1$.

4°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = e^{i(At+B)}u(x,y),$$

где A, B — произвольные действительные постоянные, а функция $u = u(x,y)$ описывается стационарным уравнением вида 5.4.1.1:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(|u|)u - Au = 0.$$

5°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = U(\xi,\eta)e^{i(A_1 x + A_2 y + Bt + C)}, \quad \xi = x - 2A_1 t, \quad \eta = y - 2A_2 t,$$

где A_1, A_2, B, C — произвольные постоянные, а функция $U = U(\xi,\eta)$ описывается дифференциальным уравнением вида 5.4.1.1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + f(|U|)U - (A_1^2 + A_2^2 + B)U = 0.$$

6°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = \Phi(z_1,z_2)\exp\bigl[i(k_1 xt + k_2 yt - \tfrac{2}{3}k_1^2 t^3 - \tfrac{2}{3}k_2^2 t^3 + at + b)\bigr], \quad z_1 = x - k_1 t^2, \quad z_2 = y - k_2 t^2,$$

где k_1, k_2, a, b — произвольные постоянные, а функция $\Phi = \Phi(z_1,z_2)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_2^2} + f(|\Phi|)\Phi - (k_1 z_1 + k_2 z_2 + a)\Phi = 0.$$

7°. Существует «двумерное» решение вида

$$w(x,y,t) = U(z_1,z_2), \quad z_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 t, \quad z_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 t.$$

⦿ *Литература для уравнения* 2.6.1.3: L. Gagnon, P. Winternitz (1988), N. H. Ibragimov (1995, pp. 437–438), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, стр. 188).

2.6.2. Трех- и n-мерные уравнения

1. $\boldsymbol{i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}+A|w|^2w=0}$.

Трехмерное уравнение Шредингера с кубической нелинейностью. Частный случай уравнения 2.6.2.2 при $f(u)=Au^2$.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение исходного уравнения Шредингера. Тогда функции

$$w_1=\pm C_1w(\pm C_1x+C_2,\pm C_1y+C_3,\pm C_1z+C_4,C_1^2t+C_5),$$
$$w_2=e^{-i[\lambda_1x+\lambda_2y+\lambda_3z+(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)t+C_6]}w(x+2\lambda_1t,y+2\lambda_2t,z+2\lambda_3t,t),$$

где $C_1,\dots,C_6,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ — произвольные действительные постоянные, также будут решениями этого уравнения. Знаки в выражении для w_1 выбираются произвольно.

2°. Уравнение имеет точное решение вида

$$w=(f_1x+f_2y+f_3z+f_4)\exp\bigl[i(g_1x^2+g_2y^2+g_3z^2+g_4xy+g_5xz+g_6yz+h_1x+h_2y+h_3z+h_4)\bigr],$$

где $f_k=f_k(t)$, $g_k=g_k(t)$, $h_k=h_k(t)$.

3°. Точное решение:

$$w(x,y,z,t)=U(\xi_1,\xi_2,\xi_3)e^{i(k_1x+k_2y+k_3z+at+b)},\quad \xi_1=x-2k_1t,\quad \xi_2=y-2k_2t,\quad \xi_3=z-2k_3t,$$

где k_1, k_2, k_3, a, b — произвольные постоянные, а функция $U=U(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2U}{\partial\xi_1^2}+\frac{\partial^2U}{\partial\xi_2^2}+\frac{\partial^2U}{\partial\xi_3^2}+A|U|^2U-(k_1^2+k_2^2+k_3^2+a)U=0.$$

4°. «Трехмерное» решение:

$$w(x,y,z,t)=\frac{1}{\sqrt{C_1t+C_2}}u(\xi,\eta,\zeta),\quad \xi=\frac{x+C_3}{\sqrt{C_1t+C_2}},\quad \eta=\frac{y+C_4}{\sqrt{C_1t+C_2}},\quad \zeta=\frac{z+C_5}{\sqrt{C_1t+C_2}},$$

где $C_1,\dots,C_5$ — произвольные постоянные, а функция $u=u(\xi,\eta,\zeta)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\zeta^2}-\frac12iC_1\left(\xi\frac{\partial u}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}+\zeta\frac{\partial u}{\partial\zeta}+u\right)+A|u|^2u=0.$$

⊙ *Литература*: L. Gagnon, P. Winternitz (1988, 1989), N. H. Ibragimov (1995, стр. 437–438), А. М. Виноградов, И. С. Красильщик (1997), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, стр. 189).

2. $\boldsymbol{i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}+f(|w|)w=0}$.

Трехмерное нелинейное уравнение Шредингера общего вида. Допускает сдвиг по любой из независимых переменных и изменение знаков пространственных переменных.

1°. Пусть $w(x,y,z,t)$ — решение исходного уравнения Шредингера. Тогда функция

$$w_1=e^{-i[\lambda_1x+\lambda_2y+\lambda_3z+(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)t+A]}w(x+2\lambda_1t+C_1,y+2\lambda_2t+C_2,z+2\lambda_3t+C_3,t+C_4),$$

где A, C_1, …, C_4, λ_1, λ_2, λ_3 — произвольные действительные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение, зависящее только от радиальной координаты $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ и времени t, описывается уравнением

$$i\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial w}{\partial r}\right)+f(|w|)w=0,$$

которое является частным случаем уравнения 1.7.5.2 при $n=2$.

3°. «Трехмерное» решение:

$$w(x,y,z,t)=e^{i(At+B)}u(x,y,z),$$

где A, B — произвольные действительные постоянные, а функция $u=u(x,y,z)$ описывается стационарным уравнением

$$\Delta u+f(|u|)u-Au=0.$$

4°. Осесимметричные решения в цилиндрической и сферической системах координат описываются уравнениями, в которых оператор Лапласа соответственно имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial \rho}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \qquad \rho=\sqrt{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial w}{\partial \theta}\right), \quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

5°. «Трехмерное» решение:

$$w=U(\xi,\eta,t), \quad \xi=y+\frac{x}{C}, \quad \eta=(C^2-1)x^2-2Cxy+C^2z^2,$$

где C — произвольная постоянная ($C\neq 0$), а функция $U=U(\xi,\eta,t)$ описывается уравнением

$$i\frac{\partial U}{\partial t}+\left(1+\frac{1}{C^2}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}-4\xi\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial\eta}+4C^2(\xi^2+\eta)\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}+2(2C^2-1)\frac{\partial U}{\partial \eta}+f(|U|)U=0.$$

6°. «Трехмерное» решение:

$$w=V(\xi,\eta,t), \quad \xi=Ax+By+Cz, \quad \eta=\sqrt{(Bx-Ay)^2+(Cy-Bz)^2+(Az-Cx)^2},$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $V=V(\xi,\eta,t)$ описывается уравнением

$$i\frac{\partial V}{\partial t}+(A^2+B^2+C^2)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)+f(|V|)V=0.$$

⊙ *Литература для уравнения* 2.6.2.4: L. Gagnon, P. Winternitz (1988, 1989), N. H. Ibragimov (1995, pp. 437–438), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, стр. 189–190).

3. $\boldsymbol{i\frac{\partial w}{\partial t}+\Delta w+A|w|^2w=0}$.

n-мерное уравнение Шредингера с кубической нелинейностью.

1°. Пусть $w(x_1,\dots,x_n,t)$ — решение исходного уравнения Шредингера. Тогда функции

$$w_1=\pm C_1w(\pm C_1x_1+C_2,\ \dots,\ \pm C_1x_n+C_{n+1},C_1^2t+C_{n+2}),$$

$$w_2=e^{-i[\lambda_1x_1+\dots+\lambda_nx_n+(\lambda_1^2+\dots+\lambda_n^2)t+C_{n+3}]}w(x_1+2\lambda_1t,\ \dots,\ x_n+2\lambda_nt,t),$$

где C_1, …, C_{n+3}, λ_1, …, λ_n — произвольные действительные постоянные, также будут решениями этого уравнения. Знаки в выражении для w_1 выбираются произвольно.

2°. Уравнение имеет точное решение вида

$$w=\Bigl(\sum_{k=1}^n f_kx_k+f_{n+1}\Bigr)\exp\Bigl[i\Bigl(\sum_{k,m=1}^n g_{km}x_kx_m+\sum_{k=1}^n h_kx_k+p\Bigr)\Bigr],$$

где $f_k=f_k(t)$, $g_{km}=g_{km}(t)$, $h_k=h_k(t)$, $p=p(t)$.

3°. Точное решение:

$$w(x_1,\dots,x_n,t)=U(\xi_1,\dots,\xi_n)e^{i(k_1x_1+\dots+k_nx_n+at+b)}, \quad \xi_1=x_1-2k_1t, \quad \dots, \quad \xi_n=x_n-2k_nt,$$

где k_1, …, k_n, a, b — произвольные постоянные, а функция $U=U(\xi_1,\dots,\xi_n)$ описывается стационарным уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1^2}+\dots+\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_n^2}+A|U|^2U-(k_1^2+\dots+k_n^2+a)U=0.$$

4°. Уравнение имеет точное решение вида

$$w(x_1,\dots,x_n,t)=\frac{1}{\sqrt{C_1t+C_2}}u(\xi_1,\dots,\xi_n), \quad \xi_1=\frac{x_1+C_3}{\sqrt{C_1t+C_2}}, \quad \dots, \quad \xi_n=\frac{x_n+C_{n+2}}{\sqrt{C_1t+C_2}}.$$

4. $\boldsymbol{i\frac{\partial w}{\partial t}=\Delta w+|w|^2w=0}$.

n-мерное модифицированное уравнение Шредингера с кубической нелинейностью.

Законы сохранения:

$$\bigl(|w|^2\bigr)_t+i\nabla\cdot\bigl(\bar w\nabla w-w\nabla\bar w\bigr)_x=0,$$

$$\bigl(|\nabla w|^2-\tfrac{1}{2}|w|^4\bigr)_t+i\nabla\cdot\bigl[(\Delta w+|w|^2w)\nabla\bar w-(\Delta\bar w+|w|^2\bar w)\nabla w\bigr]_x=0.$$

Чертой сверху обозначены комплексно сопряженные величины.

⊙ *Литература*: А. М. Виноградов, И. С. Красильщик (1997, стр. 293).