Из книги A. D. Polyanin and V. F. Zaitsev, «Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition», Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2011 [русский перевод].

3. Уравнения гиперболического типа с одной пространственной переменной

3.1. Уравнения со степенными нелинейностями

3.1.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw + bw^n + cw^{2n-1}$

► *Общие свойства уравнений этого типа описаны в 3.4.1.1, там же рассмотрены решения типа бегущей волны и другие решения.*

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw^n.$

Частный случай уравнения 3.4.1.1 при $f(w) = aw^n$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^2 w\bigl(\pm C_1^{n-1}x + C_2,\ \pm C_1^{n-1}t + C_3\bigr),$$
$$w_2 = w(x\operatorname{ch}\lambda + t\operatorname{sh}\lambda,\ x\operatorname{sh}\lambda + t\operatorname{ch}\lambda),$$

где C_1, C_2, C_3, λ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Точные решения:

$$w(x,t) = b\bigl(x + C_1 t + C_2\bigr)^{\frac{2}{1-n}}, \qquad b = \left[\frac{2(1+n)(C_1^2-1)}{a(1-n)^2}\right]^{\frac{1}{n-1}};$$
$$w(x,t) = \bigl[k(t+C_1)^2 - k(x+C_2)^2\bigr]^{\frac{1}{1-n}}, \qquad k = \tfrac{1}{4}a(1-n)^2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Решения из п. 2° являются частными случаями решений вида:

$$w(x,t) = F(z), \quad z = x + C_1 t + C_2;$$
$$w(x,t) = G(\xi), \quad \xi = (t+C_1)^2 - (x+C_2)^2.$$

4°. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = (t+C_1)^{\frac{2}{1-n}} u(\xi), \quad \xi = \frac{x+C_2}{t+C_1},$$

где функция $u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(1-\xi^2)u''_{\xi\xi} + \frac{2(1+n)}{1-n}\xi u'_\xi - \frac{2(1+n)}{(1-n)^2}u + au^n = 0.$$

Преобразование

$$u = (\operatorname{ch}\theta)^{\frac{2}{n-1}} U(\theta), \quad \xi = \operatorname{th}\theta$$

приводит последнее уравнение к автономному виду

$$U''_{\theta\theta} - \frac{4}{(1-n)^2}U + aU^n = 0.$$

Интегрируя, получим его общее решение в неявной форме

$$\int\left[\frac{4}{(n-1)^2}U^2 - \frac{2a}{n+1}U^{n+1} + C_3\right]^{-1/2} dU = C_4 \pm \theta,$$

где C_3, C_4 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 121).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw + bw^n.$

Частный случай уравнения 3.4.1.1 при $f(w) = aw + bw^n$.

1°. Решения типа бегущей волны при $a > 0$:

$$w(x,t) = \left[\frac{2b\,\mathrm{sh}^2 z}{a(n+1)}\right]^{\frac{1}{1-n}}, \qquad z = \tfrac{1}{2}\sqrt{a}\,(1-n)(x\,\mathrm{sh}\,C_1 \pm t\,\mathrm{ch}\,C_1) + C_2 \quad \text{при} \quad b(n+1) > 0,$$

$$w(x,t) = \left[-\frac{2b\,\mathrm{ch}^2 z}{a(n+1)}\right]^{\frac{1}{1-n}}, \quad z = \tfrac{1}{2}\sqrt{a}\,(1-n)(x\,\mathrm{sh}\,C_1 \pm t\,\mathrm{ch}\,C_1) + C_2 \quad \text{при} \quad b(n+1) < 0,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Решения типа бегущей волны при $a < 0$ и $b(n+1) > 0$:

$$w(x,t) = \left[-\frac{2b\cos^2 z}{a(n+1)}\right]^{\frac{1}{1-n}}, \quad z = \tfrac{1}{2}\sqrt{|a|}\,(1-n)(x\,\mathrm{sh}\,C_1 \pm t\,\mathrm{ch}\,C_1) + C_2.$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw^n + bw^{2n-1}.$

Частный случай уравнения 3.4.1.1 при $f(w) = aw^n + bw^{2n-1}$.

Точные решения:

$$w(x,t) = \left[\frac{a(1-n)^2}{2(n+1)}(x\,\mathrm{sh}\,C_1 \pm t\,\mathrm{ch}\,C_1 + C_2)^2 - \frac{b(n+1)}{2an}\right]^{\frac{1}{1-n}},$$

$$w(x,t) = \left\{\frac{1}{4}a(1-n)^2\big[(t+C_1)^2 - (x+C_2)^2\big] - \frac{b}{an}\right\}^{\frac{1}{1-n}},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw - a(n+1)w^n + bw^{2n-1}.$

1°. Решения типа бегущей волны:

$$w(x,t) = \big(\lambda + C_1 \exp z\big)^{\frac{1}{1-n}}, \qquad z = \sqrt{a}\,(1-n)(x\,\mathrm{sh}\,C_2 \pm t\,\mathrm{ch}\,C_2),$$

где $\lambda = \lambda_{1,2}$ — корни квадратного уравнения $a\lambda^2 - a(n+1)\lambda + b = 0$, а C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. См. также уравнение 3.1.1.5, в котором надо сделать переобозначения $b \to -a(n+1)$ и $c \to b$.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw + bw^n + cw^{2n-1}.$

Частный случай уравнения 3.4.1.1 при $f(w) = aw + bw^n + cw^{2n-1}$.

1°. Решения типа бегущей волны при $a > 0$:

$$w(x,t) = (A + B\,\mathrm{ch}\,z)^{\frac{1}{1-n}}, \quad z = \sqrt{a}\,(1-n)(x\,\mathrm{sh}\,C_1 \pm t\,\mathrm{ch}\,C_1) + C_2,$$

$$A = -\frac{b}{a(n+1)}, \quad B = \pm\left[\frac{b^2}{a^2(n+1)^2} - \frac{c}{an}\right]^{1/2};$$

$$w(x,t) = (A + B\,\mathrm{sh}\,z)^{\frac{1}{1-n}}, \quad z = \sqrt{a}\,(1-n)(x\,\mathrm{sh}\,C_1 \pm t\,\mathrm{ch}\,C_1) + C_2,$$

$$A = -\frac{b}{a(n+1)}, \quad B = \pm\left[\frac{c}{an} - \frac{b^2}{a^2(n+1)^2}\right]^{1/2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные (выражения в квадратных скобках должны быть неотрицательны).

2°. Решения типа бегущей волны при $a<0$:

$$w(x,t)=(A+B\cos z)^{\frac{1}{1-n}},\quad z=\sqrt{|a|}\,(1-n)(x\operatorname{sh}C_1\pm t\operatorname{ch}C_1)+C_2,$$
$$A=-\frac{b}{a(n+1)},\quad B=\pm\left[\frac{b^2}{a^2(n+1)^2}-\frac{c}{an}\right]^{1/2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Подстановка $u=w^{1-n}$ приводит к уравнению с квадратичной нелинейностью:

$$u\left(\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)+\frac{n}{1-n}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]=a(1-n)u^2+b(1-n)u+c(1-n).$$

3.1.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2w}{\partial t^2}=a\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+f(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial^2w}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2w}{\partial x^2}+a(x^2-t^2)w^k.$

Частный случай уравнения 3.4.1.2 при $f(w)=aw^k$.

2. $\dfrac{\partial^2w}{\partial t^2}=a\dfrac{\partial^2w}{\partial x^2}+c(x+bt)^nw^k.$

Частный случай уравнения 3.4.1.4 при $f(z,w)=cz^nw^k$. При $b=\pm1$ см. также уравнения 3.4.1.13 и 3.4.1.14 при $f(\xi)=c\xi^n$ и $g(w)=w^k$.

3. $\dfrac{\partial^2w}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2w}{\partial x^2}+a(x^2-t^2)(xt)^nw^k.$

Частный случай уравнения 3.4.1.5 при $f(z,w)=az^nw^k$.

4. $\dfrac{\partial^2w}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2w}{\partial x^2}+ae^{\beta t}w^k.$

Частный случай уравнения 3.4.1.7 при $f(w)=aw^k$.

Решения с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t)=\left\{C\exp\left[\frac{\beta(k-1)}{4(k+1)}(t\pm x)\right]+\frac{\sqrt{a}}{\beta}(1-k)e^{\beta t/2}\right\}^{\frac{2}{1-k}},$$
$$w(x,t)=\left\{C\exp\left[\frac{\beta(k-1)}{4(k+1)}(t\pm x)\right]-\frac{\sqrt{a}}{\beta}(1-k)e^{\beta t/2}\right\}^{\frac{2}{1-k}},$$

где C — произвольная постоянная.

5. $\dfrac{\partial^2w}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2w}{\partial x^2}+aw+be^{\beta t}w^k.$

Решения с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t)=\left\{C\exp\left[\frac{k-1}{4\beta(k+1)}\Bigl(\pm\sqrt{[\beta^2-(k-1)^2a][\beta^2-(k+3)^2a]}\,x\right.\right.$$
$$\left.\left.+[\beta^2+(k-1)(k+3)a]\,t\Bigr)\right]+(k-1)\sqrt{\frac{b}{\beta^2-(k-1)^2a}}\,e^{\beta t/2}\right\}^{\frac{2}{1-k}},$$
$$w(x,t)=\left\{C\exp\left[\frac{k-1}{4\beta(k+1)}\Bigl(\pm\sqrt{[\beta^2-(k-1)^2a][\beta^2-(k+3)^2a]}\,x\right.\right.$$
$$\left.\left.+[\beta^2+(k-1)(k+3)a]\,t\Bigr)\right]-(k-1)\sqrt{\frac{b}{\beta^2-(k-1)^2a}}\,e^{\beta t/2}\right\}^{\frac{2}{1-k}},$$

где C — произвольная постоянная.

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998).

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e^{\beta t}(a + be^{\beta t})w^k.$

Решения с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \left\{C\exp\left[\frac{\beta(k-1)}{2(k+1)}(t \pm x)\right] + \frac{1}{\beta\sqrt{b}}\left[a + \tfrac{1}{2}(1-k)be^{\beta t}\right]\right\}^{\frac{2}{1-k}},$$

$$w(x,t) = \left\{C\exp\left[\frac{\beta(k-1)}{2(k+1)}(t \pm x)\right] - \frac{1}{\beta\sqrt{b}}\left[a + \tfrac{1}{2}(1-k)be^{\beta t}\right]\right\}^{\frac{2}{1-k}},$$

где C — произвольная постоянная.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998).

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\beta^2}{k^2+4}w + (a^2 e^{2\beta t} + abke^{\beta t} - b^2)w^{-3}, \qquad k \neq 0.$

Решения с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \pm\sqrt{C\exp\left(\beta t + \frac{\beta k x}{\sqrt{k^2+4}}\right) + \frac{\sqrt{k^2+4}}{\beta}\left(\frac{2a}{k}e^{\beta t} + b\right)},$$

$$w(x,t) = \pm\sqrt{C\exp\left(\beta t - \frac{\beta k x}{\sqrt{k^2+4}}\right) + \frac{\sqrt{k^2+4}}{\beta}\left(\frac{2a}{k}e^{\beta t} + b\right)},$$

$$w(x,t) = \pm\sqrt{C\exp\left(\beta t + \frac{\beta k x}{\sqrt{k^2+4}}\right) - \frac{\sqrt{k^2+4}}{\beta}\left(\frac{2a}{k}e^{\beta t} + b\right)},$$

$$w(x,t) = \pm\sqrt{C\exp\left(\beta t - \frac{\beta k x}{\sqrt{k^2+4}}\right) - \frac{\sqrt{k^2+4}}{\beta}\left(\frac{2a}{k}e^{\beta t} + b\right)},$$

где C — произвольная постоянная.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998).

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \dfrac{\beta^2}{k^2-4}w + (a^2 e^{2\beta t} + abke^{\beta t} + b^2)w^{-3}, \quad |k| > 2.$

Решения с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \pm\sqrt{C\exp\left(\beta t + \frac{\beta k x}{\sqrt{k^2-4}}\right) + \frac{\sqrt{k^2-4}}{\beta}\left(\frac{2a}{k}e^{\beta t} + b\right)},$$

$$w(x,t) = \pm\sqrt{C\exp\left(\beta t - \frac{\beta k x}{\sqrt{k^2-4}}\right) + \frac{\sqrt{k^2-4}}{\beta}\left(\frac{2a}{k}e^{\beta t} + b\right)},$$

$$w(x,t) = \pm\sqrt{C\exp\left(\beta t + \frac{\beta k x}{\sqrt{k^2-4}}\right) - \frac{\sqrt{k^2-4}}{\beta}\left(\frac{2a}{k}e^{\beta t} + b\right)},$$

$$w(x,t) = \pm\sqrt{C\exp\left(\beta t - \frac{\beta k x}{\sqrt{k^2-4}}\right) - \frac{\sqrt{k^2-4}}{\beta}\left(\frac{2a}{k}e^{\beta t} + b\right)},$$

где C — произвольная постоянная.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998).

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - ae^{\beta x}w^k.$

Частный случай уравнения 3.4.1.6 при $f(w) = -aw^k$.

Решения с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \left\{C\exp\left[\frac{\beta(k-1)}{4(k+1)}(x \pm t)\right] + \frac{\sqrt{a}}{\beta}(1-k)e^{\beta x/2}\right\}^{\frac{2}{1-k}},$$

$$w(x,t) = \left\{C\exp\left[\frac{\beta(k-1)}{4(k+1)}(x \pm t)\right] - \frac{\sqrt{a}}{\beta}(1-k)e^{\beta x/2}\right\}^{\frac{2}{1-k}},$$

где C — произвольная постоянная.

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - aw - be^{\beta x} w^k.$

Решения с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \left\{ C \exp\left[\frac{k-1}{4\beta(k+1)} \left(\pm\sqrt{[\beta^2 - (k-1)^2 a][\beta^2 - (k+3)^2 a]}\, t + [\beta^2 + (k-1)(k+3)a]\, x \right) \right] + (k-1)\sqrt{\frac{b}{\beta^2 - (k-1)^2 a}}\, e^{\beta x/2} \right\}^{\frac{2}{1-k}},$$

$$w(x,t) = \left\{ C \exp\left[\frac{k-1}{4\beta(k+1)} \left(\pm\sqrt{[\beta^2 - (k-1)^2 a][\beta^2 - (k+3)^2 a]}\, t + [\beta^2 + (k-1)(k+3)a]\, x \right) \right] - (k-1)\sqrt{\frac{b}{\beta^2 - (k-1)^2 a}}\, e^{\beta x/2} \right\}^{\frac{2}{1-k}},$$

где C — произвольная постоянная.

11. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - e^{\beta x}(a + be^{\beta x}) w^k.$

Решения с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \left\{ C \exp\left[\frac{\beta(k-1)}{2(k+1)} (x \pm t) \right] + \frac{1}{\beta\sqrt{b}} \left[a + \tfrac{1}{2}(1-k) b e^{\beta x} \right] \right\}^{\frac{2}{1-k}},$$

$$w(x,t) = \left\{ C \exp\left[\frac{\beta(k-1)}{2(k+1)} (x \pm t) \right] - \frac{1}{\beta\sqrt{b}} \left[a + \tfrac{1}{2}(1-k) b e^{\beta x} \right] \right\}^{\frac{2}{1-k}},$$

где C — произвольная постоянная.

12. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ce^{ax+bt} w^k.$

Частный случай уравнения 3.4.1.8 при $f(w) = cw^k$.

3.1.3. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f\Big(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{a}{x^n} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^n \dfrac{\partial w}{\partial x} \right) + bw^m, \qquad a > 0.$

Это уравнение можно записать в эквивалентном виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{n}{x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + bw^m.$$

Значению $n = 1$ соответствуют двумерные (плоские) нелинейные задачи с осевой симметрией, а значению $n = 2$ — трехмерные задачи с центральной симметрией.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^2 w\big(\pm C_1^{k-1} x,\ \pm C_1^{k-1} t + C_2\big),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \left\{ \frac{b(1-m)^2}{2a(2+n-nm)} \left[a(t+C)^2 - x^2 \right] \right\}^{\frac{1}{1-m}}, \tag{1}$$

где C — произвольная постоянная.

3°. Решение (1) является частным случаем более широкого семейства точных решений вида

$$w = w(r), \qquad r^2 = A\big[a(t+C)^2 - x^2\big],$$

где знак коэффициента A должен совпадать со знаком выражения в квадратных скобках, а функция $w = w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + \frac{n+1}{r} w'_r = \frac{b}{Aa} w^m. \tag{2}$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 a) приведено более 20 точных решений уравнения (2) для некоторых пар чисел n и m.

4°. Имеется автомодельное решение вида $w = t^{\frac{2}{1-m}} f(\xi)$, где $\xi = x/t$.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^m \dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 3.4.2.3 при $f(w) = bw^m$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1 w\big(C_1^m x + C_2,\ \pm C_1^m t + C_3\big),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w(x,t) = \left[\frac{bm(x+\lambda t+C)}{(m+1)(a-\lambda^2)}\right]^{-1/m}, \tag{1}$$

где C, λ — произвольные постоянные.

Решение (1) является частным случаем более широкого семейства точных решений типа бегущей волны:

$$\int \frac{dw}{A + bw^{m+1}} = \frac{x+\lambda t+C}{(m+1)(\lambda^2 - a)},$$

где A, C, λ — произвольные постоянные.

3°. Имеется автомодельное решение вида $w = t^{-1/m} f(x/t)$.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + cw + s$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$\begin{aligned} w_1 &= w(\pm x + C_1, \pm t + C_2) + C_3 \operatorname{ch}(kt) + C_4 \operatorname{sh}(kt) \quad &&\text{при } c = k^2 > 0,\\ w_2 &= w(\pm x + C_1, \pm t + C_2) + C_3 \cos(kt) + C_4 \sin(kt) \quad &&\text{при } c = -k^2 < 0, \end{aligned}$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной x:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= -\frac{c}{4b}(\pm x + C_1 t + C_2)^2 + \frac{1}{2b}(a - C_1^2) - \frac{s}{c} + U(t),\\ U(t) &= \begin{cases} C_3 \operatorname{ch}(kt) + C_4 \operatorname{sh}(kt) & \text{при } c = k^2 > 0,\\ C_3 \cos(kt) + C_4 \sin(kt) & \text{при } c = -k^2 < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

3°. О других решениях см. уравнение 3.4.2.4 при $f(t) = s$.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + cw + st^n$.

Частный случай уравнения 3.4.2.4 при $f(t) = st^n$.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + cw + sx^n$.

Частный случай уравнения 3.4.2.5 при $f(x) = sx^n$.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + bcw^2 + kw + s$.

Частный случай уравнения 3.4.2.10 при $f(t) = c$, $g(t) = k$, $h(t) = s$.

Пусть A — корень квадратного уравнения $bcA^2 + kA + s = 0$.

1°. Пусть выполнено неравенство $2Abc + k - ab = \sigma^2 > 0$. Тогда существует решение с обобщенным разделением переменных

$$w(x,t) = A + \bigl[C_1 \exp(\sigma t) + C_2 \exp(-\sigma t)\bigr] \exp\bigl(\pm x\sqrt{-b}\,\bigr),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Пусть выполнено неравенство $2Abc + k - ab = -\sigma^2 < 0$. Тогда существует решение с обобщенным разделением переменных

$$w(x,t) = A + \bigl[C_1 \cos(\sigma t) + C_2 \sin(\sigma t)\bigr] \exp\bigl(\pm x\sqrt{-b}\,\bigr).$$

О более сложных решениях см. 3.4.2.10.

⦿ *Литература*: V. A. Galaktionov (1995, рассматривался случай $a = c$), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 448).

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx^n\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + cx^m + st^k.$

Частный случай уравнения 3.4.2.8 при $f(x) = bx^n$, $g(x) = cx^m$, $h(t) = st^k$.

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ct^n\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + bct^n w^2 + st^m w + pt^k.$

Частный случай уравнения 3.4.2.10 при $f(t) = ct^n$, $g(t) = st^m$, $h(t) = pt^k$.

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bt^n\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + ct^k x\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Имеется точное решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по x:

$$w = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t).$$

3.1.4. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g\Bigl(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a(x+\beta)^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^m, \qquad a > 0.$

Это уравнение описывает распространение нелинейных волн в неоднородной среде.

1°. Решение с функциональным разделением переменных при $n \neq 2$:

$$w(x,t) = \Bigl\{s\bigl[a(2-n)^2(t+C)^2 - 4(x+\beta)^{2-n}\bigr]\Bigr\}^{\frac{1}{1-m}}, \qquad s = \frac{b(1-m)^2}{2a(2-n)(nm-3n+4)},$$

где C — произвольная постоянная.

2°. Решение с функциональным разделением переменных (обобщает решение из п. 1°):

$$w = w(r), \qquad r^2 = k\left[\frac{1}{4}(t+C)^2 - \frac{(x+\beta)^{2-n}}{a(2-n)^2}\right],$$

где знак постоянной k должен совпадать со знаком выражения в квадратных скобках, а функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + \frac{2(1-n)}{2-n}\,\frac{1}{r}\,w'_r = \frac{4b}{k}w^m. \tag{1}$$

Подстановка $\xi = r^{\frac{n}{2-n}}$ приводит к уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{\xi\xi} = \frac{4b(2-n)^2}{kn^2}\xi^{\frac{4(1-n)}{n}}w^m. \tag{2}$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведено более 20 точных решений уравнения (2) для некоторых пар чисел n и m.

Специальный случай. При $n = 1$ общее решение уравнения (1) записывается в неявном виде

$$\int\left[C_1 + \frac{8b}{k(m+1)}w^{m+1}\right]^{-1/2} dw = \pm r + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Точное решение при $n=2$:

$$w=w(y),\quad y=At+B\ln|x+\beta|,$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $w=w(y)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(aB^2-A^2)w''_{yy}-aBw'_y+bw^m=0. \tag{3}$$

Решение уравнения (3) при $A=\pm B\sqrt{a}$ имеет вид:

$$w(y)=\left[\frac{b(1-m)}{aB}y+C\right]^{\frac{1}{1-m}},$$

где C — произвольная постоянная.

При $A\neq\pm B\sqrt{a}$ подстановка $U(w)=\dfrac{aB^2-A^2}{aB}w'_y$ приводит (3) к уравнению Абеля

$$UU'_w-U=\frac{b(A^2-aB^2)}{a^2B^2}w^m,$$

общие решения которого для $m=-2,\,-1,\,-\frac{1}{2},\,0,\,1$ указаны в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

4°. Имеется автомодельное решение вида $w=t^{\frac{2}{1-m}}f(\xi)$, где $\xi=(x+\beta)t^{\frac{2}{n-2}}$.

⦿ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 444).

2. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\frac{\partial w}{\partial x}\right)+bw^m,\qquad a>0.$

Это уравнение описывает распространение нелинейных волн в неоднородной среде.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=C_1w\Bigl(C_1^{\frac{m-1}{2-n}}x,\ \pm C_1^{\frac{m-1}{2}}t+C_2\Bigr),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение с функциональным разделением переменных при $n\neq2$:

$$w(x,t)=\Bigl\{s\bigl[a(2-n)^2(t+C)^2-4x^{2-n}\bigr]\Bigr\}^{\frac{1}{1-m}},\qquad s=\frac{b(1-m)^2}{2a(2-n)(4-n-nm)},$$

где C — произвольная постоянная.

3°. Решение с функциональным разделением переменных (обобщает решение из п. 2°):

$$w=w(r),\qquad r^2=k\left[\frac{1}{4}(t+C)^2-\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}\right],$$

где знак постоянной k должен совпадать со знаком выражения в квадратных скобках, а функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr}+\frac{2}{2-n}\,\frac{1}{r}w'_r=\frac{4b}{k}w^m.$$

Подстановка $\xi=r^{\frac{n}{n-2}}$ приводит к уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{\xi\xi}=\frac{4b(2-n)^2}{kn^2}\xi^{-\frac{4}{n}}w^m. \tag{1}$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) указано более 20 точных решений уравнения (1) для некоторых пар чисел n и m.

4°. Точное решение при $n=2$:

$$w=w(z),\quad z=At+B\ln|x|,$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $w=w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(aB^2-A^2)w''_{zz}+aBw'_z+bw^m=0. \tag{2}$$

Решение уравнения (2) при $A = \pm B\sqrt{a}$ имеет вид:

$$w(z) = \left[\frac{b(m-1)}{aB}z + C\right]^{\frac{1}{1-m}},$$

где C — произвольная постоянная.

При $A \neq \pm B\sqrt{a}$ подстановка $U(w) = \dfrac{A^2 - aB^2}{aB}w'_z$ приводит (2) к уравнению Абеля

$$UU'_w - U = \frac{b(A^2 - aB^2)}{a^2B^2}w^m,$$

точные решения которого для $m = -2,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ 1$ указаны в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

5°. Имеется автомодельное решение вида $w = t^{\frac{2}{1-m}}f(\xi)$, где $\xi = xt^{\frac{2}{n-2}}$.

⊙ *Литература для уравнения* 3.1.4.2: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 445–446).

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx^{n-1}w^m\dfrac{\partial w}{\partial x}, \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 3.4.3.5 при $f(w) = bw^m$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(C_1^2x,\ \pm C_1^{2-n}t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение с функциональным разделением переменных при $n \neq 2$:

$$w = w(z), \quad z = \left|a(2-n)^2(t+C)^2 - 4x^{2-n}\right|^{1/2},$$

где C — произвольная постоянная, а функция $w = w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{zz} + \frac{2}{a(2-n)z}\left[a(1-n) + bw^m\right]w'_z = 0. \tag{1}$$

Подстановка $u(w) = zw'_z$ приводит уравнение (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка с разделяющимися переменными. После интегрирования получим решение в неявном виде:

$$\int \frac{dw}{anw - \dfrac{2b}{m+1}w^{m+1} + C_1} = \frac{1}{a(2-n)}\ln z + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Имеется автомодельное решение вида

$$w = U(\zeta), \qquad \zeta = xt^{\frac{2}{n-2}}.$$

4°. Точное решение при $n = 2$:

$$w = w(\xi), \quad z = At + B\ln|x| + C,$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $w = w(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(aB^2 - A^2)w''_{\xi\xi} + B(bw^m - a)w'_\xi = 0.$$

Интегрируя, получим

$$\int \frac{dw}{bw^{m+1} - a(m+1)w + C_1} = -\frac{B\xi}{(m+1)(aB^2 - A^2)}.$$

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx^{n-1}w^m\dfrac{\partial w}{\partial x} + cw^k, \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 3.4.3.6 при $f(w) = bw^m$, $g(w) = cw^k$.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + cw^m, \qquad a > 0.$

Уравнение распространения нелинейных волн в неоднородной среде. Частный случай уравнения 3.4.3.9 при $b = 0$, $f(w) = cw^m$.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\lambda x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + cw^m.$

Частный случай уравнения 3.4.3.9 при $b = a\lambda$, $f(w) = cw^m$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1 w\Big(x + \frac{1-m}{\lambda}\ln C_1,\ \pm C_1^{\frac{m-1}{2}} t + C_2\Big),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение с функциональным разделением переменных при $m \neq \pm 1$, $\lambda \neq 0$:

$$w = \left[-\frac{c(m-1)^2}{2k(1+m)}(r+C_1)^2\right]^{\frac{1}{1-m}}, \qquad r^2 = 4k\left[\frac{e^{-\lambda x}}{a\lambda^2} - \frac{1}{4}(t+C_2)^2\right],$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные.

3°. Решение с функциональным разделением переменных при $\lambda \neq 0$ (обобщает решение из п. 2°):

$$w = w(r), \qquad r^2 = 4k\left[\frac{e^{-\lambda x}}{a\lambda^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

где функция $w(r)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + ck^{-1}w^m = 0.$$

Интегрируя, получим его общее решение в неявном виде

$$\int\left[C_1 - \frac{2c}{k(m+1)}w^{m+1}\right]^{-1/2} dw = C_2 \pm r,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4°. Уравнение имеет точное решение вида

$$w(x,t) = |t|^{\frac{2}{1-m}} F(z), \quad z = x + \frac{2}{\lambda}\ln|t|.$$

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + cw^m, \qquad a > 0.$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$w = w(z), \quad z = \left[4ke^{-\lambda x} - ak\lambda^2(t+C)^2\right]^{1/2}, \qquad k = \pm 1,$$

где C — произвольная постоянная, а функция $w = w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{zz} + \frac{2(a\lambda - b)}{a\lambda}\,\frac{1}{z}w'_z + \frac{c}{ak\lambda^2}w^m = 0. \tag{1}$$

Это уравнение имеет точное решение

$$w(z) = \left\{\frac{2k\lambda\big[a\lambda(m-3) + 2b(1-m)\big]}{c(1-m)^2 z^2}\right\}^{\frac{1}{m-1}}.$$

При $b = a\lambda$ общее решение уравнения (1) задается неявно:

$$\int\left[C_1 - \frac{2c}{ak\lambda^2(m+1)}w^{m+1}\right]^{-1/2} dw = \pm z + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

При $b \neq \frac{1}{2}a\lambda$ подстановка $\xi = z^{\frac{2b-a\lambda}{a\lambda}}$ приводит (1) к обобщенному уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{\xi\xi} + \frac{ac}{k(2b-a\lambda)^2}\xi^{\frac{4(a\lambda-b)}{2b-a\lambda}}w^m = 0. \tag{2}$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 a) указано более 20 общих решений уравнения (2) для некоторых значений параметра m.

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda x}w^n\dfrac{\partial w}{\partial x}, \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 3.4.3.10 при $f(w) = bw^n$.

3.1.5. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, w)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Частный случай уравнения 3.1.5.5 при $n = 1$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^2C_2^2w(\pm C_1^{-1}x + C_3, \pm C_2t + C_4),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Точные решения:

$$w = C_1xt + C_2x + C_3t + C_4,$$
$$w = \frac{3x^2 + C_1x + C_2}{a(t+C_3)^2} + C_4(x+C_5)(t+C_3)^3,$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные. Первое решение является вырожденным, а второе — решением с обобщенным разделением переменных.

3°. Точное решение:

$$w = U(z) + 4aC_1^2t^2 + 4aC_1C_2t, \qquad z = x + aC_1t^2 + aC_2t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(U - aC_2^2)U''_{zz} - 2C_1U'_z = 8C_1^2.$$

4°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w = (x^2 + C_1x + C_2)f(t) + (C_3x + C_4)f(t)\int\frac{dt}{f^2(t)},$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, а функция $f = f(t)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $f''_{tt} = 2af^2$.

5°. О других решениях см. уравнение 3.1.5.5 при $n = 1$.

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 129).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = \pm C_1^{-2}w(\pm C_1^2x + C_2, C_1t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Точные решения:

$$w = (C_1t + C_2)x + \tfrac{1}{2}bt^2 + C_3t + C_4,$$
$$w = \frac{3x^2}{at^2} + \Big(C_1t^3 + \frac{C_2}{t^2}\Big)x + C_3t^3 + \frac{C_4}{t^2} - \frac{1}{4}bt^2.$$

Первое решение является вырожденным, а второе — решением с обобщенным разделением переменных (в это решение можно добавить еще одну произвольную постоянную путем сдвига по t).

3°. Автомодельное решение:

$$w(x,t)=t^2u(\xi), \quad \xi=xt^{-2},$$

где функция $u=u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2u-2\xi u'_\xi+4\xi^2u''_{\xi\xi}=auu''_{\xi\xi}+b.$$

4°. Точное решение:

$$w=U(z)+4aC_1^2t^2+4aC_1C_2t, \qquad z=x+aC_1t^2+aC_2t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(aU-a^2C_2^2)U''_{zz}-2aC_1U'_z=8aC_1^2-b.$$

5°. Второе решение из п. 2° является частным случаем решения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t)=f(t)x^2+g(t)x+h(t).$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=aw^4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+bx^nw^5.$

Частный случай уравнения 3.4.4.2 при $f(x)=bx^n$.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=aw^4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+be^{\lambda x}w^5.$

Частный случай уравнения 3.4.4.2 при $f(x)=be^{\lambda x}$.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=aw^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad a>0.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=(C_2/C_1)^{2/n}w(\pm C_1x+C_3, \pm C_2t+C_4),$$

где C_1, …, C_4 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t)=k(x+C_1)^{\frac{2}{n}}(At+C_2)^{-\frac{2}{n}}, \qquad k=\left[\frac{A^2(n+2)}{a(2-n)}\right]^{\frac{1}{n}}, \tag{1}$$

где A, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Выражение (1) является частным случаем более широкого семейства точных решений в виде произведения функций разных аргументов:

$$w=f(x)g(t),$$

где функции $f=f(x)$ и $g=g(t)$ определяются путем решения уравнений

$$g''_{tt}-a\lambda g^{n+1}=0, \tag{2}$$
$$f''_{xx}-\lambda f^{1-n}=0. \tag{3}$$

Общие решения уравнений (2)–(3) можно записать в неявном виде

$$\int\left(C_1+\frac{2a\lambda}{n+2}g^{n+2}\right)^{-1/2}dg=C_2\pm t,$$
$$\int\left(C_3+\frac{2\lambda}{2-n}f^{2-n}\right)^{-1/2}df=C_4\pm x,$$

где C_1, …, C_4 — произвольные постоянные.

Отсюда, в частности, при $C_1 = 0$ для функции $g(t)$ имеем

$$g(t) = (At + C)^{-2/n}, \qquad A = \pm\sqrt{\frac{a\lambda n^2}{2(n+2)}}.$$

4°. Существуют также решения следующих видов:

$$\begin{aligned}
&w(x,t) = (t+A)^{-\frac{2k+2}{n}} F(z), && z = (x+B)(t+A)^k;\\
&w(x,t) = e^{-2\lambda t} U(y), && y = (x+A)e^{\lambda n t};\\
&w(x,t) = (At+B)^{-2/n} V(\xi), && \xi = x + k\ln(At+B) + C,
\end{aligned}$$

где A, B, C, k, λ — произвольные постоянные.

3.1.6. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + f(w)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Частный случай уравнения 3.1.6.5 при $n = 1$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^2 C_2^2 w(\pm C_1^{-1} x + C_3, \pm C_2 t + C_4),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Точные решения:

$$\begin{aligned}
w(x,t) &= \tfrac{1}{2} a A^2 t^2 + Bt + Ax + C,\\
w(x,t) &= \tfrac{1}{12} a A^{-2} (At+B)^4 + Ct + D + x(At+B),\\
w(x,t) &= \frac{1}{a}\left(\frac{x+A}{t+B}\right)^2,\\
w(x,t) &= (At+B)\sqrt{Cx+D},\\
w(x,t) &= \pm\sqrt{A(x+a\lambda t)+B} + a\lambda^2,
\end{aligned}$$

где A, B, C, D, λ — произвольные постоянные.

3°. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной x:

$$w(x,t) = f(t)x^2 + g(t)x + h(t),$$

где функции $f = f(t)$, $g = g(t)$, $h = h(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
f''_{tt} &= 6af^2,\\
g''_{tt} &= 6afg,\\
h''_{tt} &= 2afh + ag^2.
\end{aligned}$$

Частное решение этой системы имеет вид

$$f = \frac{1}{at^2}, \quad g = \frac{C_1}{t^2} + C_2 t^3, \quad h = \frac{aC_1^2}{4t^2} + \frac{C_3}{t} + C_4 t^2 + \frac{1}{2} a C_1 C_2 t^3 + \frac{1}{54} a C_2^2 t^8,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные. В это решение можно добавить еще одну произвольную постоянную путем сдвига по t.

4°. Точное решение:

$$w = U(z) + 4aC_1^2 t^2 + 4aC_1 C_2 t, \qquad z = x + aC_1 t^2 + aC_2 t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$(U - aC_2^2)U'_z - 2C_1 U = 8C_1^2 z + C_3.$$

За счет подходящих сдвигов по обеим переменным можно добиться, чтобы уравнение стало однородным (т. е. уравнение интегрируется в квадратурах).

⊙ *Литература*: S. Tomotika, K. Tamada (1950), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 129).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + b.$

Частный случай уравнения 8.2.1.3 при $F(u,v) = au^2 + b$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2} w(\pm C_1^2 x + C_2, C_1 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$ak^2w^2 - 2\lambda^2 w = -b(kx+\lambda t)^2 + C_1(kx+\lambda t) + C_2,$$

где C_1, C_2, k, λ — произвольные постоянные.

3°. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = t^2 u(\xi), \quad \xi = xt^{-2},$$

где функция $u = u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2u - 2\xi u'_\xi + 4\xi^2 u''_{\xi\xi} = a(uu'_\xi)'_\xi + b.$$

4°. Точное решение:

$$w = U(z) + 4aC_1^2t^2 + 4aC_1C_2t, \qquad z = x + aC_1t^2 + aC_2t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$(aU - a^2C_2^2)U'_z - 2aC_1U = (8aC_1^2 - b)z + C_3.$$

За счет подходящих сдвигов по обеим переменным можно добиться, чтобы уравнение стало однородным (т. е. уравнение интегрируется в квадратурах).

5°. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной x:

$$w(x,t) = f(t)x^2 + g(t)x + h(t),$$

где функции $f = f(t)$, $g = g(t)$, $h = h(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f''_{tt} = 6af^2,$$
$$g''_{tt} = 6afg,$$
$$h''_{tt} = 2afh + ag^2 + b.$$

Частное решение этой системы имеет вид

$$f = \frac{1}{at^2}, \quad g = \frac{C_1}{t^2} + C_2t^3, \quad h = \frac{aC_1^2}{4t^2} + \frac{C_3}{t} + C_4t^2 + \frac{1}{2}aC_1C_2t^3 + \frac{1}{54}aC_2^2t^8 + \frac{1}{9}bt^2\bigl(3\ln|t| - 1\bigr),$$

где C_1, …, C_4 — произвольные постоянные. В это решение можно добавить еще одну произвольную постоянную путем сдвига по t.

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 205–206).

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Частный случай уравнения 3.1.6.5 при $n = -1$.

1°. Точные решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = (At+B)e^{Cx},$$
$$w(x,t) = (at^2 + At + B)(x+C)^{-2},$$
$$w(x,t) = (-aA^2t^2 + Bt + C)\,\mathrm{ch}^{-2}(Ax+D),$$
$$w(x,t) = (aA^2t^2 + Bt + C)\,\mathrm{sh}^{-2}(Ax+D),$$
$$w(x,t) = (aA^2t^2 + Bt + C)\cos^{-2}(Ax+D),$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\lambda^2 w = ak^2 \ln|w| + C_1(kx+\lambda t) + C_2,$$

где C_1, C_2, k, λ — произвольные постоянные.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{w}}\,\dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Частный случай уравнения 3.1.6.5 при $n = -1/2$.

1°. Точные решения:

$$w(x,t) = \left(\tfrac{1}{2}A^2ax^2 + Bx + Aat + C\right)^2,$$
$$w(x,t) = \left[\tfrac{1}{12}A^{-2}a^{-1}(Ax+B)^4 + Cx + D + t(Ax+B)\right]^2,$$
$$w(x,t) = a^2\left(\frac{t+A}{x+B}\right)^4,$$
$$w(x,t) = (Ax+B)^2(Ct+D),$$
$$w(x,t) = \left[\pm\sqrt{A(t+\lambda x)+B} + a\lambda^2\right]^2,$$

где A, B, C, D, λ — произвольные постоянные.

2°. Замена $w = u^2$ приводит к уравнению вида 3.1.4.2:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(u\frac{\partial u}{\partial t}\right).$$

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^n\,\dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Это уравнение встречается в задачах волновой и газовой динамики. Частный случай уравнения 3.4.4.6 при $f(w) = a^2w^n$ (поэтому данное уравнение может быть линеаризовано).

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = (C_2/C_1)^{2/n}w(\pm C_1x + C_3, \pm C_2t + C_4),$$

где C_1, …, C_4 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Вырожденное решение:

$$w = (At+B)(Cx+D)^{\frac{1}{n+1}},$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w = f(x)g(t),$$

где зависимости функций $f = f(x)$ и $g = g(t)$ задаются неявно

$$\int\left(C_1 + \frac{2\lambda}{n+2}f^{n+2}\right)^{-1/2}f^n\,df = C_2 \pm x, \qquad (1)$$
$$\int\left(C_3 + \frac{2a^2\lambda}{n+2}g^{n+2}\right)^{-1/2}dg = C_4 \pm t, \qquad (2)$$

C_1, …, C_4, λ — произвольные постоянные.

Функции $f = f(x)$ и $g = g(t)$, заданные формулами (1) и (2), можно записать в явном виде соответственно при $C_1 = 0$ и $C_3 = 0$. Частному случаю $C_1 = C_3 = 0$ соответствует решение

$$w(x,t) = \left(\frac{\pm bx + c}{abt + s}\right)^{2/n}, \qquad (3)$$

где b, c, s — произвольные постоянные.

4°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x \pm \lambda t,$$

где зависимость $w = w(z)$ задается неявно с помощью формулы

$$\lambda^2 w - \frac{a^2}{n+1}w^{n+1} = Az + B, \qquad (4)$$

A, B — произвольные постоянные. При $n = -\frac{1}{2}, 1, 2, 3$ из формулы (4) можно получить явный вид зависимости $w = w(z)$.

5°. Автомодельное решение:

$$w = w(\xi), \quad \xi = \frac{x + A}{t + B},$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка (C — произвольная постоянная):

$$\bigl(\xi^2 - a^2 w^n\bigr) w'_\xi = C. \tag{5}$$

Частному случаю $C = 0$ отвечает решение $w = (\xi/a)^{2/n}$, см. формулу (3). При $C \neq 0$, принимая в (5) w за независимую переменную, для функции $\xi = \xi(w)$ получим уравнение Риккати

$$C\xi'_w = \xi^2 - a^2 w^n. \tag{6}$$

Общее решение уравнения (6) выражается через функции Бесселя, см. книги Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

6°. Существует более сложное автомодельное решение вида

$$w = (t + \beta)^{2k} F(z), \quad z = \frac{x + \alpha}{(t + \beta)^{nk+1}},$$

где α, β, k — произвольные постоянные, а функция $F = F(z)$ определяется путем решения обобщенно-однородного обыкновенного дифференциального уравнения

$$2k(2k-1)F + (nk+1)(nk-4k+2)zF'_z + (nk+1)^2 z^2 F''_{zz} = a^2 (F^n F'_z)'_z,$$

которое допускает понижение порядка.

7°. Обобщенно-автомодельное решение (μ — произвольная постоянная):

$$w = e^{-2\mu t} \varphi(y), \quad y = x e^{\mu n t},$$

где функция $\varphi = \varphi(y)$ определяются путем решения обобщенно-однородного обыкновенного дифференциального уравнения

$$4\mu^2 \varphi + \mu^2 n(n-4) y \varphi'_y + (\mu n)^2 y^2 \varphi''_{yy} = a^2 (\varphi^n \varphi'_y)'_y,$$

которое допускает понижение порядка.

8°. Точное решение (A, b, c — произвольные постоянные):

$$w = (\pm t + A)^{-2/n} \psi(u), \quad u = x + b\ln(\pm t + A) + c,$$

где функция $\psi = \psi(u)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{2(n+2)}{n^2}\psi - \frac{b(n+4)}{n}\psi'_u + b^2 \psi''_{uu} = a^2 (\psi^n \psi'_u)'_u. \tag{7}$$

Отметим два частных случая, когда полученное уравнение интегрируется в квадратурах. При $n = -2$ уравнение (7) допускает первый интеграл, который представляет собой уравнение с разделяющимися переменными. При $n = -4$ уравнение (7) заменой $G(\psi) = (\psi'_u)^2$ сводится к линейному уравнению первого порядка.

В общем случае уравнение (7) заменой $H(\psi) = \psi'_u$ сводится к уравнению первого порядка.

9°. При $n \neq -1$ преобразование

$$\tau = x, \quad \zeta = t, \quad V = w^{n+1}$$

приводит исходное уравнение к уравнению того же типа

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} = a^{-2} \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(V^{-\frac{n}{n+1}} \frac{\partial V}{\partial \zeta}\right).$$

При $n = -1$ преобразование

$$\tau = x, \quad \zeta = t, \quad V = \ln w$$

приводит исходное уравнение к уравнению вида 3.2.4.3:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} = a^{-2} \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(e^V \frac{\partial V}{\partial \zeta}\right).$$

⊙ *Литература для уравнения* 3.1.6.5: W. F. Ames, R. J. Lohner, E. Adams (1981), N. H. Ibragimov (1994, pp. 211–212), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 131–132).

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bw^{n+1} + cw.$

1°. Точные решения в виде произведения функций разных аргументов при $c = \lambda^2 > 0$:

$$w = \left(A_1e^{\lambda t} + A_2e^{-\lambda t}\right)\left[B_1\cos(kx) + B_2\sin(kx)\right]^{\frac{1}{n+1}} \quad \text{при} \quad b(n+1)/a = k^2 > 0,$$
$$w = \left(A_1e^{\lambda t} + A_2e^{-\lambda t}\right)\left(B_1e^{kx} + B_2e^{-kx}\right)^{\frac{1}{n+1}} \quad \text{при} \quad b(n+1)/a = -k^2 < 0,$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные.

2°. Точные решения в виде произведения функций разных аргументов при $c = -\lambda^2 < 0$:

$$w = \left[A_1\cos(\lambda t) + A_2\sin(\lambda t)\right]\left[B_1\cos(kx) + B_2\sin(kx)\right]^{\frac{1}{n+1}} \quad \text{при} \quad b(n+1)/a = k^2 > 0,$$
$$w = \left[A_1\cos(\lambda t) + A_2\sin(\lambda t)\right]\left(B_1e^{kx} + B_2e^{-kx}\right)^{\frac{1}{n+1}} \quad \text{при} \quad b(n+1)/a = -k^2 < 0,$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные.

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями (K — произвольная постоянная)

$$a(\varphi^n\varphi'_x)'_x + b\varphi^{n+1} + K\varphi = 0,$$
$$\psi''_{tt} - c\psi + K\psi^{n+1} = 0.$$

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bw^k.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^2 w(\pm C_1^{k-n-1}x + C_2, \pm C_1^{k-1}t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Существуют также решения следующих типов:

$$w(x,t) = U(z), \quad z = \lambda x + \beta t \qquad \text{(решение типа бегущей волны);}$$
$$w(x,t) = t^{\frac{2}{1-k}}V(\xi), \quad \xi = xt^{\frac{k-n-1}{1-k}} \qquad \text{(автомодельное решение).}$$

3.1.7. Другие уравнения

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^n + c.$

Частный случай уравнения 8.2.1.3 при $F(u,v) = bu^n + c$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2}w(\pm C_1^2 x + C_2, C_1t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = t^2u(\xi), \quad \xi = xt^{-2},$$

где функция $u = u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2u - 2\xi u'_\xi + 4\xi^2u''_{\xi\xi} = a(uu'_\xi)'_\xi + b(u'_\xi)^n + c.$$

3°. Точное решение:

$$w = U(z) + 4aC_1^2t^2 + 4aC_1C_2t, \qquad z = x + aC_1t^2 + aC_2t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(aU - a^2C_2^2)U''_{zz} + b(U'_z)^n - 2aC_1U'_z = 8aC_1^2 - c.$$

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = w^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \dfrac{1}{2} w \left(\dfrac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + aw + b.$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w = \varphi_2(t)x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t),$$

где функции $\varphi_n(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\varphi_2'' &= \varphi_2\bigl(2\varphi_0\varphi_2 - \tfrac{1}{2}\varphi_1^2\bigr) + a\varphi_2,\\
\varphi_1'' &= \varphi_1\bigl(2\varphi_0\varphi_2 - \tfrac{1}{2}\varphi_1^2\bigr) + a\varphi_1,\\
\varphi_0'' &= \varphi_0\bigl(2\varphi_0\varphi_2 - \tfrac{1}{2}\varphi_1^2\bigr) + a\varphi_0 + b.
\end{aligned}$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a x^n w^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad a > 0.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^2 w\bigl(C_2^2 x,\ \pm C_1^m C_2^{2-n} t + C_3\bigr),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = k x^{\frac{2-n}{m}} (C_1 t + C_2)^{-\frac{2}{m}}, \qquad k = \left[\frac{2C_1^2(m+2)}{a(2-n)(2-n-m)} \right]^{\frac{1}{m}}. \tag{1}$$

3°. Выражение (1) является частным случаем более широкого семейства точных решений в виде произведения функций разных аргументов:

$$w = f(x) g(t),$$

где функции $f = f(x)$ и $g = g(t)$ определяются путем решения уравнений

$$g_{tt}'' - \lambda g^{m+1} = 0, \tag{2}$$

$$f_{xx}'' - (\lambda/a) x^{-n} f^{1-m} = 0. \tag{3}$$

Общее решение уравнения (2) записывается в неявном виде

$$\int \left(C_1 + \frac{2\lambda}{m+2} g^{m+2} \right)^{-1/2} dg = C_2 \pm t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Отсюда, в частности, при $C_1 = 0$ для функции $g(t)$ имеем

$$g(t) = (At + C)^{-2/m}, \qquad A = \pm \sqrt{\frac{\lambda m^2}{2(m+2)}}.$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведено более 20 точных решений уравнения Эмдена — Фаулера (3) для некоторых значений параметра m.

4°. Имеется автомодельное решение вида

$$w = t^{\frac{(n-2)k-2}{m}} F(y), \quad y = x t^k,$$

где k — произвольная постоянная.

5°. Преобразование

$$u(z,t) = \frac{1}{x} w(x,t), \quad z = \frac{1}{z}$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a z^{4-n-m} u^m \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{4}$$

В частном случае $n = 4 - m$ уравнение (4) сильно упрощается:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a u^m \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

и допускает, например, решение типа бегущей волны $u = u(kz + \mu t)$; см. также уравнение 3.1.6.5.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x} w^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad a > 0.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w\Big(x + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{C_1^m}{C_2^2},\ C_2 t + C_3\Big),$$

где C_1, C_2, C_3, λ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = U(z), \qquad z = x + \frac{2}{\lambda}\ln|t|,$$

где функция $U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(a\lambda^2 e^{\lambda z} U^m - 4)U''_{zz} + 2\lambda U'_z = 0.$$

3°. О других решениях см. уравнение 3.4.5.1 при $f(x) = ae^{\lambda x}$.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^n w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right), \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 3.4.5.2 при $f(x) = ax^n$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^2 w\big(C_2^2 x,\ \pm C_1^m C_2^{2-n} t + C_3\big),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = kx^{\frac{2-n}{m}}(C_1 t + C_2)^{-\frac{2}{m}}, \qquad k = \left[\frac{2C_1^2(m+2)}{a(2-n)(m-n+2)}\right]^{\frac{1}{m}}. \tag{1}$$

3°. Выражение (1) является частным случаем более широкого семейства точных решений в виде произведения функций разных аргументов:

$$w = f(x)g(t),$$

где функции $f = f(x)$ и $g = g(t)$ определяются путем решения уравнений

$$g''_{tt} - \lambda g^{m+1} = 0, \tag{2}$$

$$a(x^n f^{m+1} f'_x)'_x - \lambda f = 0. \tag{3}$$

Общее решение уравнения (2) записывается в неявном виде

$$\int\left(C_1 + \frac{2\lambda}{m+2} f^{m+2}\right)^{-1/2} df = C_2 \pm t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Отсюда, в частности, при $C_1 = 0$ для функции $f(t)$ имеем

$$f(t) = (At + C)^{-2/m}, \qquad A = \pm\sqrt{\frac{\lambda m^2}{2(m+2)}}.$$

При $n \neq 1$, $m \neq -1$ преобразование

$$z = x^{1-n}, \quad \varphi = u^{m+1}$$

приводит (3) к уравнению Эмдена — Фаулера

$$\varphi''_{zz} = \frac{\lambda(m+1)}{a(1-n)^2} z^{\frac{n}{1-n}} \varphi^{\frac{1}{m+1}}. \tag{4}$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) указано более 20 точных решений уравнения (4) для некоторых значений параметра m.

4°. Имеется автомодельное решение вида

$$w = (t+b)^{\frac{(n-2)k-2}{m}} F(y), \quad y = xt^k,$$

где b, k — произвольные постоянные.

5°. Пусть $m \neq -1$ и $2m - 2n - nm + 3 \neq 0$. Преобразование

$$w(x,t) = x^{\frac{1-n}{m+1}} u(\xi,t), \quad \xi = x^{\frac{2m-2n-nm+3}{m+1}}$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^{\frac{3m-3n-2nm+4}{2m-2n-nm+3}} u^m \frac{\partial u}{\partial \xi}\right), \tag{5}$$

где $A = a\left(\dfrac{2m-2n-nm+3}{m+1}\right)^2$.

В частном случае $n = \dfrac{3m+4}{2m+3}$ уравнение (5) сильно упрощается и совпадает (с точностью до переобозначений) с уравнением 3.1.6.5:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \frac{\partial}{\partial \xi}\left(u^m \frac{\partial u}{\partial \xi}\right).$$

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = k(ax^2 + bx + c)^m w^{4-2m} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

Частный случай уравнения 3.4.5.4 при $f(u) = ku^{-2m}$.

1°. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\sqrt{ax^2 + bx + c}, \qquad z = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

приводит к уравнению вида 3.4.4.8:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ku^{4-2m} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k(ac - \tfrac{1}{4}b^2)u^{5-2m},$$

которое имеет точное решение типа бегущей волны $u = u(z + \lambda t)$ и решение в виде произведения функций разных аргументов $u = f(t)g(z)$.

2°. Исходное уравнение преобразованием

$$w(x,t) = \left[v(\xi,t)\right]^{\frac{1}{2m+3}}, \qquad \xi = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^m} \tag{1}$$

приводится к дивергентному виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[F(\xi) v^{\frac{4-2m}{2m-3}} \frac{\partial v}{\partial \xi}\right], \tag{2}$$

где функция $F(\xi)$ задается параметрически следующими формулами:

$$F(\xi) = \frac{k}{(ax^2 + bx + c)^m}, \qquad \xi = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^m}. \tag{3}$$

Отметим некоторые частные случаи уравнения (2), когда функцию $F = F(\xi)$ в (3) можно записать в явном виде:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = k \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\cos^2 \xi}{v^2} \frac{\partial v}{\partial \xi}\right), \qquad m = 1, \quad a = 1, \quad b = 0, \ c = 1;$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = k \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\operatorname{ch}^2 \xi}{v^2} \frac{\partial v}{\partial \xi}\right), \qquad m = 1, \quad a = -1, \ b = 0, \ c = 1;$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = k \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi^{-3/2}}{\cos \xi} \frac{\partial v}{\partial \xi}\right), \qquad m = \tfrac{1}{2}, \ a = -1, \ b = 0, \ c = 1.$$

3.2. Уравнения с экспоненциальными нелинейностями

3.2.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\beta w} + ce^{\gamma w}$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\beta w}$.

Частный случай уравнения 3.4.1.1 при $f(w) = be^{\beta w}$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1 x + C_2,\ \pm C_1 t + C_3) + \frac{2}{\beta}\ln|C_1|,$$
$$w_2 = w(x\operatorname{ch}\lambda + at\operatorname{sh}\lambda,\ t\operatorname{ch}\lambda + a^{-1}x\operatorname{sh}\lambda),$$

где C_1, C_2, C_3, λ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Решения типа бегущей волны:

$$w(x,t) = \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{2(B^2 - a^2A^2)}{b\beta(Ax + Bt + C)^2}\right],$$
$$w(x,t) = \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{2(a^2A^2 - B^2)}{b\beta\operatorname{ch}^2(Ax + Bt + C)}\right],$$
$$w(x,t) = \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{2(B^2 - a^2A^2)}{b\beta\operatorname{sh}^2(Ax + Bt + C)}\right],$$
$$w(x,t) = \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{2(B^2 - a^2A^2)}{b\beta\cos^2(Ax + Bt + C)}\right],$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

3°. Решения с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{8a^2C}{b\beta}\right) - \frac{2}{\beta}\ln\bigl|(x+A)^2 - a^2(t+B)^2 + C\bigr|,$$
$$w(x,t) = -\frac{2}{\beta}\ln\left[C_1 e^{\lambda x} \pm \frac{\sqrt{2b\beta}}{2a\lambda}\operatorname{sh}(a\lambda t + C_2)\right],$$
$$w(x,t) = -\frac{2}{\beta}\ln\left[C_1 e^{\lambda x} \pm \frac{\sqrt{-2b\beta}}{2a\lambda}\operatorname{ch}(a\lambda t + C_2)\right],$$
$$w(x,t) = -\frac{2}{\beta}\ln\left[C_1 e^{a\lambda t} \pm \frac{\sqrt{-2b\beta}}{2a\lambda}\operatorname{sh}(\lambda x + C_2)\right],$$
$$w(x,t) = -\frac{2}{\beta}\ln\left[C_1 e^{a\lambda t} \pm \frac{\sqrt{2b\beta}}{2a\lambda}\operatorname{ch}(\lambda x + C_2)\right],$$

где A, B, C, C_1, C_2, λ — произвольные постоянные.

4°. Преобразование независимых переменных

$$z = x - at, \quad y = x + at$$

приводит к уравнению Лиувилля 3.5.1.2:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial y} = -\tfrac{1}{4}a^{-2}b\exp(\beta w).$$

Поэтому общее решение исходного уравнения описывается формулами

$$w(x,t) = \frac{1}{\beta}\bigl[f(z) + g(y)\bigr] - \frac{2}{\beta}\ln\left|k\int\exp\bigl[f(z)\bigr]\,dz - \frac{b\beta}{8a^2k}\int\exp\bigl[g(y)\bigr]\,dy\right|,$$
$$z = x - at, \qquad y = x + at,$$

где $f = f(z)$, $g = g(y)$ — произвольные функции, k — произвольная постоянная.

⊙ *Литература*: J. Liouville (1853), Р. Буллаф, Ф. Кодри (1983), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 453).

2. $\displaystyle\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ae^{\beta w} + be^{2\beta w}.$

1°. Решение типа бегущей волны при $b\beta > 0$:

$$w(x,t) = -\frac{1}{\beta}\ln\left\{-\frac{b}{a} + C_1\exp\left[a\sqrt{\frac{\beta}{b}}\,\bigl(x\operatorname{sh}C_2 \pm t\operatorname{ch}C_2\bigr)\right]\right\},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Решение типа бегущей волны (обобщает решение из п. 1°):

$$w(x,t) = -\frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{a\beta}{C_1^2 - C_2^2} + C_3\exp(C_1x + C_2t) + \frac{a^2\beta^2 + b\beta(C_1^2 - C_2^2)}{4C_3(C_1^2 - C_2^2)^2}\exp(-C_1x - C_2t)\right],$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

3°. Решение типа бегущей волны:

$$w(x,t) = -\frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{a\beta}{C_2^2 - C_1^2} + \frac{\sqrt{a^2\beta^2 + b\beta(C_2^2 - C_1^2)}}{C_2^2 - C_1^2}\sin(C_1x + C_2t + C_3)\right].$$

⦿ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 214).

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ae^{\beta w} - be^{-\beta w}$.

Замена

$$w(x,t) = u(x,t) + k, \quad k = \frac{1}{2\beta}\ln\frac{b}{a}$$

приводит к уравнению вида 3.3.1.1:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sqrt{ab}\,\mathrm{sh}(\beta u).$$

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ae^{\beta w} - be^{-2\beta w}$.

1°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \frac{1}{\beta}\ln[\varphi(x) + \psi(t)],$$

где функции $\psi(t)$ и $\varphi(x)$ описываются автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка

$$(\varphi_x')^2 = -2a\beta\varphi^3 + C_1\varphi^2 - C_2\varphi + C_3 - b\beta,$$
$$(\psi_t')^2 = 2a\beta\psi^3 + C_1\psi^2 + C_2\psi + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Разрешив эти уравнения относительно производных, получим уравнения с разделяющимися переменными.

2°. Преобразование

$$t = (a^2b\beta^3)^{-1/6}(\xi + \eta), \quad x = (a^2b\beta^3)^{-1/6}(\xi - \eta), \quad w = \frac{1}{\beta}U + \frac{1}{3\beta}\ln\frac{b}{a}$$

приводит к уравнению вида 3.5.1.3:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta} = e^U - e^{-2U}.$$

3°. Данное уравнение интегрируется методом обратной задачи рассеяния.

⦿ *Литература*: А. В. Михайлов (1979), A. P. Fordy, J. A. Gibbons (1980), Ф. Калоджеро, А. Дегасперис (1985), A. M. Grundland, E. Infeld (1992), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994), R. Z. Zhdanov (1994).

3.2.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ae^{\beta t}e^{\lambda w}$.

Частный случай уравнения 3.4.1.7 при $f(w) = ae^{\lambda w}$.

1°. Точные решения:

$$w(x,t) = -\frac{\beta}{\lambda}t - \frac{2}{\lambda}\ln\left(C_1 + C_2x \pm \sqrt{C_2^2 + \tfrac{1}{2}\lambda a}\,t\right),$$
$$w(x,t) = -\frac{\beta}{\lambda}t - \frac{2}{\lambda}\ln\left(C_1e^{-\sigma t} + C_2e^{\sigma x} - \frac{\lambda a}{8\sigma^2C_1}e^{\sigma t}\right),$$

где C_1, C_2, σ — произвольные постоянные.

2°. Замена $\lambda U = \lambda w + \beta t$ приводит к уравнению вида 3.2.1.1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a\lambda e^{\lambda U}.$$

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ae^{\beta x}e^{\lambda w}.$

Частный случай уравнения 3.4.1.6 при $f(w) = ae^{\lambda w}$.

1°. Точные решения:

$$w(x,t) = -\frac{\beta}{\lambda}x - \frac{2}{\lambda}\ln\biggl(C_1 + C_2 t \pm \sqrt{C_2^2 - \tfrac{1}{2}\lambda a\, x}\biggr),$$
$$w(x,t) = -\frac{\beta}{\lambda}x - \frac{2}{\lambda}\ln\biggl(C_1 e^{-\sigma x} + C_2 e^{\sigma t} + \frac{\lambda a}{8\sigma^2 C_1}e^{\sigma x}\biggr),$$

где C_1, C_2, σ — произвольные постоянные.

2°. Замена $\lambda U = \lambda w + \beta x$ приводит к уравнению вида 3.2.1.1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a\lambda e^{\lambda U}.$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ce^{ax+bt}e^{\lambda w}.$

Частный случай уравнения 3.4.1.8 при $f(w) = ce^{\lambda w}$.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta e^{\lambda w} + (\alpha t + \gamma)e^{2\lambda w}.$

Решения с функциональным разделением переменных

$$w(x,t) = -\frac{1}{\lambda}\ln\biggl\{C\exp\biggl[-\frac{\beta^2\lambda}{2\alpha}(t \pm x)\biggr] - \frac{1}{\beta}(\alpha t + \gamma) + \frac{\alpha^2}{\beta^3\lambda}\biggr\},$$

где C — произвольная постоянная.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998).

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta e^{\lambda w} + (\alpha x + \gamma)e^{2\lambda w}.$

Решения с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = -\frac{1}{\lambda}\ln\biggl\{C\exp\biggl[\frac{\beta^2\lambda}{2\alpha}(x \pm t)\biggr] - \frac{1}{\beta}(\alpha x + \gamma) - \frac{\alpha^2}{\beta^3\lambda}\biggr\},$$

где C — произвольная постоянная.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta e^{\lambda w} + (\alpha e^{kt} + \gamma)e^{2\lambda w}.$

1°. Решения с функциональным разделением переменных при $k^2\gamma - \beta^2\lambda \neq 0$:

$$w(x,t) = -\frac{1}{\lambda}\ln\biggl[C\exp\biggl(\pm\frac{k^2\gamma - \beta^2\lambda}{2k\gamma}x + \frac{k^2\gamma + \beta^2\lambda}{2k\gamma}t\biggr) + \frac{\alpha\beta\lambda}{k^2\gamma - \beta^2\lambda}e^{kt} - \frac{\gamma}{\beta}\biggr],$$

где C — произвольная постоянная.

2°. Решения типа обобщенной бегущей волны при $k^2\gamma - \beta^2\lambda = 0$:

$$w(x,t) = -\frac{1}{\lambda}\ln\biggl[Ce^{kt} + \frac{\alpha k}{2\beta}(t \pm x)e^{kt} - \frac{\lambda\beta}{k^2}\biggr].$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998).

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k\beta e^{\lambda w} + (\alpha e^{kt} + \lambda\beta^2)e^{2\lambda w}.$

Решения типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = -\frac{1}{\lambda}\ln\biggl[Ce^{kt} + \frac{\alpha}{2\beta}(t \pm x)e^{kt} - \frac{\lambda\beta}{k}\biggr],$$

где C — произвольная постоянная.

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta e^{\lambda w} + (\alpha e^{kx} + \gamma) e^{2\lambda w}.$

1°. Решения с функциональным разделением переменных при $k^2\gamma + \beta^2\lambda \neq 0$:

$$w(x,t) = -\frac{1}{\lambda} \ln\left[C \exp\left(\pm \frac{k^2\gamma + \beta^2\lambda}{2k\gamma} t + \frac{k^2\gamma - \beta^2\lambda}{2k\gamma} x\right) - \frac{\alpha\beta\lambda}{k^2\gamma + \beta^2\lambda} e^{kx} - \frac{\gamma}{\beta}\right],$$

где C — произвольная постоянная.

2°. Решения типа обобщенной бегущей волны при $k^2\gamma + \beta^2\lambda = 0$:

$$w(x,t) = -\frac{1}{\lambda} \ln\left[C e^{kx} + \frac{\alpha k}{2\beta}(x \pm t) e^{kx} + \frac{\lambda\beta}{k^2}\right].$$

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998).

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k\beta e^{\lambda w} - (\alpha e^{kx} + \lambda\beta^2) e^{2\lambda w}.$

Решения с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = -\frac{1}{\lambda} \ln\left[C e^{kx} + \frac{\alpha}{2\beta}(x \pm t) e^{kx} - \frac{\lambda\beta}{k}\right],$$

где C — произвольная постоянная.

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta e^{kt} e^{\lambda w} + (\alpha e^{2kt} + \gamma) e^{2\lambda w}.$

Решения с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = -\frac{1}{\lambda} \ln\left[C \exp\left(\pm \frac{4k^2\alpha - \beta^2\lambda}{4k\alpha} x - \frac{\beta^2\lambda}{4k\alpha} t\right) + \frac{\beta\gamma\lambda}{4k^2\alpha - \beta^2\lambda} e^{-kt} - \frac{\alpha}{\beta} e^{kt}\right],$$

где C — произвольная постоянная.

11. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta e^{kx} e^{\lambda w} + (\alpha e^{2kx} + \gamma) e^{2\lambda w}.$

Решения с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = -\frac{1}{\lambda} \ln\left[C \exp\left(\pm \frac{4k^2\alpha + \beta^2\lambda}{4k\alpha} t + \frac{\beta^2\lambda}{4k\alpha} x\right) - \frac{\beta\gamma\lambda}{4k^2\alpha + \beta^2\lambda} e^{-kx} - \frac{\alpha}{\beta} e^{kx}\right],$$

где C — произвольная постоянная.

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998).

3.2.3. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x) \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g\Big(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b e^{\lambda w} \dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 3.4.2.3 при $f(w) = b e^{\lambda w}$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w\big(C_1 x + C_2,\ \pm C_1 t + C_3\big) + \frac{1}{\lambda} \ln C_1,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w = -\frac{1}{\lambda} \ln\left[\frac{\exp(Ax + A\mu t + B) - b}{A(a - \mu^2)}\right],$$

где μ, A, B — произвольные постоянные.

3°. Уравнение имеет точное решение вида

$$w(x,t) = F(z) - \frac{1}{\lambda} \ln|t|, \quad z = \frac{x}{t}.$$

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + ce^{\lambda w}, \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 3.2.3.5 при $b = an$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w\bigl(C_1^{\frac{2}{2-n}}x,\ \pm C_1 t + C_2\bigr) + \frac{2}{\lambda}\ln C_1,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение с функциональным разделением переменных при $n \neq 2$, $\lambda \neq 0$:

$$w = -\frac{1}{\lambda}\ln\left\{\frac{2c\lambda(2-n)}{n}\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right]\right\}.$$

3°. Решение с функциональным разделением переменных при $n \neq 2$ (обобщает решение из п. 2°):

$$w = w(r), \qquad r^2 = 4k\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

где C, k — произвольные постоянные ($k \neq 0$), а функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + \frac{A}{r}w'_r + ck^{-1}e^{\lambda w} = 0, \qquad A = \frac{2}{2-n}.$$

4°. Уравнение имеет точное решение вида

$$w(x,t) = F(z) - \frac{2}{\lambda}\ln|t|, \quad z = x|t|^{\frac{2}{n-2}}.$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + ce^{\lambda w}, \qquad a > 0.$

При $n=1$ и $n=2$ уравнение описывает нелинейные волны с осевой и центральной симметрией.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w\bigl(C_1 x,\ \pm C_1 t + C_2\bigr) + \frac{2}{\lambda}\ln C_1,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение с функциональным разделением переменных при $n \neq 0$, $\lambda \neq 0$:

$$w = -\frac{1}{\lambda}\ln\left\{\frac{c\lambda}{2an}\bigl[x^2 - a(t+C)^2\bigr]\right\}.$$

3°. Решение с функциональным разделением переменных (обобщает решение из п. 2°):

$$w = w(r), \qquad r^2 = k\bigl[x^2 - a(t+C)^2\bigr],$$

где C, k — произвольные постоянные ($k \neq 0$), а функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + \frac{n+1}{r}w'_r + \frac{c}{ak}e^{\lambda w} = 0.$$

4°. Уравнение имеет точное решение вида

$$w(x,t) = F(z) - \frac{2}{\lambda}\ln|t|, \quad z = \frac{x}{t}.$$

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a(x+\beta)^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ce^{\lambda w}, \qquad a > 0.$

Уравнение распространения нелинейных волн в неоднородной среде. Подстановка $z = x + \beta$ приводит к частному случаю уравнения 3.2.3.5 при $b = 0$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = az^n \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + ce^{\lambda w}.$$

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx^{n-1} \dfrac{\partial w}{\partial x} + ce^{\lambda w}, \qquad a > 0.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w\bigl(C_1^2 x,\ \pm C_1^{2-n} t + C_2\bigr) + \frac{4-2n}{\lambda} \ln C_1,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение с функциональным разделением переменных при $n \neq 2$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \tfrac{1}{4} a(2-n)^2 (t+C)^2 - x^{2-n}.$$

Здесь C — произвольная постоянная, а функция $w = w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\xi w''_{\xi\xi} + A w'_\xi = B e^{\lambda w}, \tag{1}$$

где

$$A = \frac{a(4-3n)+2b}{2a(2-n)}, \quad B = \frac{c}{a(2-n)^2}.$$

При $A \neq 1$ точное решение уравнения (1) дается формулой

$$w(\xi) = \frac{1}{\lambda} \ln\biggl(\frac{1-A}{\lambda B \xi}\biggr).$$

При $A = 1$, что соответствует $b = \frac{1}{2} an$, точные решения уравнения (1) имеют вид

$$w(\xi) = \frac{1}{\lambda} \ln\biggl[\frac{2a(2-n)^2}{c\lambda\xi(\ln|\xi| + q)^2}\biggr],$$
$$w(\xi) = \frac{1}{\lambda} \ln\biggl[\frac{2ap^2(2-n)^2}{c\lambda\xi \cos^2(p\ln|\xi| + q)}\biggr],$$
$$w(\xi) = \frac{1}{\lambda} \ln\biggl[\frac{-2ap^2(2-n)^2}{c\lambda\xi \operatorname{ch}^2(p\ln|\xi| + q)}\biggr],$$

где p, q — произвольные постоянные.

При $A \neq 1$ подстановка $\xi = kz^{\frac{1}{1-A}}$ $(k = \pm 1)$ приводит (1) к обобщенному уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{zz} = \frac{kB}{(1-A)^2} z^{\frac{2A-1}{1-A}} e^{\lambda w}. \tag{2}$$

В частном случае $A = \frac{1}{2}$, что соответствует $b = a(n-1)$, решения уравнения (2) имеют вид

$$w(z) = \frac{1}{\lambda} \ln\biggl[\frac{-a(2-n)^2}{2kc\lambda(z+q)^2}\biggr],$$
$$w(z) = \frac{1}{\lambda} \ln\biggl[\frac{ap^2(2-n)^2}{2kc\lambda \operatorname{ch}^2(pz+q)}\biggr],$$
$$w(z) = \frac{1}{\lambda} \ln\biggl[\frac{-ap^2(2-n)^2}{2kc\lambda \cos^2(pz+q)}\biggr],$$

где p, q — произвольные постоянные.

3°. Точное решение при $n = 2$:

$$w = w(y), \quad y = At + B\ln|x| + C,$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $w = w(y)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(aB^2 - A^2) w''_{yy} + (b-a) B w'_y + ce^{\lambda w} = 0. \tag{3}$$

Решения уравнения (3) при $A = \pm B\sqrt{a}$:

$$w(y) = -\frac{1}{\lambda} \ln\biggl[\frac{c\lambda}{B(b-a)} y + C_1\biggr].$$

Решения уравнения (3) при $b = a$:

$$w(y) = \frac{1}{\lambda} \ln \left[\frac{2(A^2 - aB^2)}{c\lambda(y+q)^2} \right],$$

$$w(y) = \frac{1}{\lambda} \ln \left[\frac{2p^2(aB^2 - A^2)}{c\lambda \operatorname{ch}^2(py+q)} \right],$$

$$w(y) = \frac{1}{\lambda} \ln \left[\frac{2p^2(A^2 - aB^2)}{c\lambda \cos^2(py+q)} \right],$$

где p, q — произвольные постоянные.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx^{n-1} e^{\lambda w} \dfrac{\partial w}{\partial x}, \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 3.4.3.5 при $f(w) = be^{\lambda w}$.

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\lambda x} \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + ce^{\mu w}, \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 3.2.3.9 при $b = a\lambda$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w\Big(x - \frac{2}{\lambda} \ln |C_1|,\ \pm C_1 t + C_2\Big) + \frac{2}{\mu} \ln |C_1|,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение с функциональным разделением переменных при $\lambda \neq 0$:

$$w = w(r), \qquad r^2 = 4k \left[\frac{e^{-\lambda x}}{a\lambda^2} - \frac{1}{4}(t + C_1)^2 \right],$$

где C_1, k — произвольные постоянные ($k \neq 0$), а функция $w(r)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + ck^{-1} e^{\mu w} = 0.$$

Его общее решение определяется формулами:

$$w = \begin{cases} -\dfrac{1}{\mu} \ln \left[-\dfrac{c\mu}{2k} (r + C_3)^2 \right] & \text{при } ck\mu < 0, \\ -\dfrac{1}{\mu} \ln \left[-\dfrac{c\mu}{2kC_2^2} \sin^2(C_2 r + C_3) \right] & \text{при } ck\mu < 0, \\ -\dfrac{1}{\mu} \ln \left[-\dfrac{c\mu}{2kC_2^2} \operatorname{sh}^2(C_2 r + C_3) \right] & \text{при } ck\mu < 0, \\ -\dfrac{1}{\mu} \ln \left[\dfrac{c\mu}{2kC_2^2} \operatorname{ch}^2(C_2 r + C_3) \right] & \text{при } ck\mu > 0, \end{cases}$$

где C_2, C_3 — произвольные постоянные.

3°. Уравнение имеет точное решение вида

$$w(x,t) = F(z) - \frac{2}{\mu} \ln |t|, \quad z = x + \frac{2}{\lambda} \ln |t|.$$

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ce^{\mu w}, \qquad a > 0.$

Уравнение распространения нелинейных волн в неоднородной среде. Частный случай уравнения 3.2.3.9 при $b = 0$.

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda x} \dfrac{\partial w}{\partial x} + ce^{\mu w}, \qquad a > 0.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w\Big(x - \frac{2}{\lambda} \ln |C_1|,\ \pm C_1 t + C_2\Big) + \frac{2}{\mu} \ln |C_1|,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$w = w(z), \quad z = \left[4ke^{-\lambda x} - ak\lambda^2(t+C)^2\right]^{1/2}, \qquad k = \pm 1,$$

где C — произвольная постоянная, а функция $w = w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{zz} + \frac{2(a\lambda - b)}{a\lambda}\,\frac{1}{z}\,w'_z + \frac{c}{ak\lambda^2}\,e^{\mu w} = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) имеет точное решение

$$w(z) = \frac{1}{\mu}\ln\left[\frac{2k\lambda(a\lambda - 2b)}{c\mu z^2}\right].$$

Укажем некоторые другие точные решения уравнения (1):

$$w(z) = \frac{1}{\mu}\ln\left[\frac{-2ak\lambda^2}{c\mu(z+B)^2}\right] \qquad \text{при } b = a\lambda,$$

$$w(z) = \frac{1}{\mu}\ln\left[\frac{2aA^2k\lambda^2}{c\mu\,\mathrm{ch}^2(Az+B)}\right] \qquad \text{при } b = a\lambda,$$

$$w(z) = \frac{1}{\mu}\ln\left[\frac{-2aA^2k\lambda^2}{c\mu\,\mathrm{sh}^2(Az+B)}\right] \qquad \text{при } b = a\lambda,$$

$$w(z) = \frac{1}{\mu}\ln\left[\frac{-2aA^2k\lambda^2}{c\mu\cos^2(Az+B)}\right] \qquad \text{при } b = a\lambda,$$

$$w(z) = \frac{1}{\mu}\ln\left[\frac{8ABak\lambda^2}{c\mu(Az^2+B)^2}\right] \qquad \text{при } b = \tfrac{1}{2}a\lambda,$$

где A, B — произвольные постоянные.

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda x + \mu w}\dfrac{\partial w}{\partial x}, \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 3.4.3.10 при $f(w) = be^{\mu w}$.

11. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda x + \mu w}\dfrac{\partial w}{\partial x} + ce^{\beta w}, \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 3.4.3.11 при $f(w) = be^{\mu w}$, $g(w) = ce^{\beta w}$.

3.2.4. Другие уравнения

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad a > 0.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(C_1C_2^\lambda x + C_3, \pm C_1 t + C_4,) - 2\ln|C_2|,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x,t) = Axt + Bx + Ct + D,$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{B^2}{a}\,\frac{(x+A)^2}{\mathrm{ch}^2(Bt+C)}\right], \qquad w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{1}{aA^2}\,\frac{\mathrm{ch}^2(Ax+B)}{(t+C)^2}\right],$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{C^2}{aA^2}\,\frac{\mathrm{sh}^2(Ax+B)}{\mathrm{ch}^2(Ct+D)}\right], \qquad w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{C^2}{aA^2}\,\frac{\mathrm{ch}^2(Ax+B)}{\mathrm{sh}^2(Ct+D)}\right],$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{C^2}{aA^2}\,\frac{\cos^2(Ax+B)}{\mathrm{ch}^2(Ct+D)}\right], \qquad w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{C^2}{aA^2}\,\frac{\mathrm{ch}^2(Ax+B)}{\cos^2(Ct+D)}\right],$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{4BC\beta^2(x+A)^2}{a(Be^{\beta t} + Ce^{-\beta t})^2}\right], \qquad w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{(Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x})^2}{4aAB\beta^2(t+C)^2}\right],$$

где A, B, C, D, β — произвольные постоянные. Первое решение является вырожденным, а остальные могут быть записаны в виде суммы функций разных аргументов.

3°. Автомодельное решение:

$$w = w(z), \quad z = \frac{x + A}{t + B},$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(ae^{\lambda w} - z^2)w''_{zz} - zw'_z = 0,$$

которое допускает понижение порядка с помощью преобразования $\xi = z^{-2}e^{\lambda w}$, $U(\xi) = zw'_z$.

4°. Точное решение:

$$w = \frac{2(k-1)}{\lambda}\ln(t + C_1) + f(\zeta), \quad \zeta = \frac{x + C_2}{(t + C_1)^k},$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, а функция $f = f(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k^2\zeta^2 f''_{\zeta\zeta} + k(k+1)\zeta f'_\zeta - \frac{2(k-1)}{\lambda} = ae^{\lambda f} f''_{\zeta\zeta}.$$

5°. Существуют точные решения следующих видов:

$$w(x,t) = F(\eta) - \frac{2}{\lambda}\ln|t|, \quad \eta = x + k\ln|t|;$$
$$w(x,t) = H(\rho) - \frac{2}{\lambda}t, \quad \rho = xe^t,$$

где k — произвольная постоянная.

⦿ *Литература для уравнения* 3.2.4.1: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 458–459).

2. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda w}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\beta w}.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1^{\beta-\lambda}x + C_2, \pm C_1^{\beta}t + C_3) + 2\ln|C_1|,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w = u(z), \quad z = k_2 x + k_1 t,$$

где k_1, k_2 — произвольные постоянные, а функция $u(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(k_1^2 - ak_2^2 e^{\lambda u})u''_{zz} = be^{\beta u}.$$

Его решение можно записать в неявном виде

$$\int \frac{du}{\sqrt{F(u)}} = C_1 \pm z, \qquad F(u) = 2b\int \frac{e^{\beta u}\,du}{k_1^2 - ak_2^2 e^{\lambda u}} + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Точное решение:

$$w = U(\xi) - \frac{2}{\beta}\ln|t|, \quad \xi = x|t|^{\frac{\lambda-\beta}{\beta}},$$

где функция $U(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{2}{\beta} + \frac{(\lambda-\beta)(\lambda-2\beta)}{\beta^2}\xi U'_\xi + \frac{(\lambda-\beta)^2}{\beta^2}\xi^2 U''_{\xi\xi} = ae^{\lambda U}U''_{\xi\xi} + be^{\beta U}.$$

3. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\lambda w}\frac{\partial w}{\partial x}\right), \qquad a > 0.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(C_1 C_2^{\lambda}x + C_3, \pm C_1 t + C_4,) - 2\ln|C_2|,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln|Ax+B| + Ct + D, \tag{1}$$

$$w(x,t) = \frac{2}{\lambda}\ln|Ax+B| - \frac{2}{\lambda}\ln|\pm A\sqrt{a}\,t + C|, \tag{2}$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(aA^2x^2 + Bx + C) - \frac{2}{\lambda}\ln(aAt + D), \tag{3}$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(Ax^2 + Bx + C) + \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{p^2}{aA\cos^2(pt+q)}\right], \tag{4}$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(Ax^2 + Bx + C) + \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{p^2}{aA\,\mathrm{sh}^2(pt+q)}\right], \tag{5}$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(Ax^2 + Bx + C) + \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{-p^2}{aA\,\mathrm{ch}^2(pt+q)}\right], \tag{6}$$

где A, B, C, D, p, q — произвольные постоянные. Формулы (1) — (6) исчерпывают все решения, которые являются суммой функций разных переменных.

3°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x \pm \mu t,$$

где зависимость $w = w(z)$ задается неявно с помощью формулы (A, B — произвольные постоянные)

$$\lambda\mu^2 w - ae^{\lambda w} = Az + B.$$

4°. Автомодельное решение:

$$w = u(\xi), \quad \xi = \frac{x+A}{t+B}.$$

Здесь A, B — произвольные постоянные, а функция $u = u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\xi^2 u'_\xi)'_\xi = (ae^{\lambda u}u'_\xi)'_\xi,$$

которое допускает первый интеграл

$$\left(\xi^2 - ae^{\lambda u}\right)u'_\xi = C. \tag{7}$$

Частному случаю $C = 0$ отвечает решение вида (2). При $C \neq 0$ принимая в (7) u за независимую переменную, для функции $\xi = \xi(u)$ получим уравнение Риккати

$$C\xi'_u = \xi^2 - ae^{\lambda u},$$

которое рассмотрено в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

5°. Точное решение:

$$w = \frac{2(k-1)}{\lambda}\ln(t + C_1) + f(\zeta), \quad \zeta = \frac{x + C_2}{(t+C_1)^k},$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, а функция $f = f(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k^2\zeta^2 f''_{\zeta\zeta} + k(k+1)\zeta f'_\zeta - \frac{2(k-1)}{\lambda} = a(e^{\lambda f}f'_\zeta)'_\zeta.$$

6°. Существуют точные решения следующих видов:

$$w(x,t) = F(\eta) - \frac{2}{\lambda}\ln|t|, \quad \eta = x + k\ln|t|;$$

$$w(x,t) = H(\zeta) - \frac{2}{\lambda}t, \quad \eta = xe^t,$$

где k — произвольная постоянная.

7°. О других решениях см. уравнение 3.4.4.6 при $f(w) = ae^{\lambda w}$.

⊙ *Литература для уравнения* 3.2.4.3: W. F. Ames, R. J. Lohner, E. Adams (1981), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 141).

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + ae^{\lambda w}.$

Частный случай уравнения 3.2.4.5 при $\beta = \lambda$. При $a = 0$ см. уравнение 3.2.4.3.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm x + C_1,\, C_2 t + C_3) + \frac{1}{\lambda}\ln C_2^2,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Вырожденные решения в виде суммы функций разных аргументов:

$$w = \theta(x) + C_1 t,$$

где

$$\begin{aligned}
&\theta = \frac{1}{\lambda}\ln\bigl|C_2\cos\bigl(\sqrt{a\lambda}\,x\bigr) + C_3\sin\bigl(\sqrt{a\lambda}\,x\bigr)\bigr| && \text{при } a\lambda > 0,\\
&\theta = \frac{1}{\lambda}\ln\bigl|C_2\exp\bigl(\sqrt{|a\lambda|}\,x\bigr) + C_3\exp\bigl(-\sqrt{|a\lambda|}\,x\bigr)\bigr| && \text{при } a\lambda < 0,\\
&\theta = \frac{1}{\lambda}\ln|x + C_2| + C_3 && \text{при } a = 0,\\
&\theta = \tfrac{1}{2}ax^2 + C_2 x + C_3 && \text{при } \lambda = 0,
\end{aligned}$$

C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

3°. Невырожденные решения в виде суммы функций разных аргументов:

$$w = \varphi(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ описываются формулами

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\ln\Bigl|\dfrac{C}{a} + A_1\cos\bigl(\sqrt{a\lambda}\,x\bigr) + A_2\sin\bigl(\sqrt{a\lambda}\,x\bigr)\Bigr| & \text{при } \ a\lambda > 0,\\ \dfrac{1}{\lambda}\ln\Bigl|\dfrac{C}{a} + A_1\exp\bigl(\sqrt{|a\lambda|}\,x\bigr) + A_2\exp\bigl(-\sqrt{|a\lambda|}\,x\bigr)\Bigr| & \text{при } \ a\lambda < 0,\end{cases}$$

$$\psi(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\lambda}\ln\Bigl[\dfrac{C\lambda}{2B_1^2}\sin^2(B_1 t + B_2)\Bigr] & \text{при } \ C\lambda > 0,\\ -\dfrac{1}{\lambda}\ln\Bigl[\dfrac{C\lambda}{2B_1^2}\operatorname{sh}^2(B_1 t + B_2)\Bigr] & \text{при } \ C\lambda > 0,\\ -\dfrac{1}{\lambda}\ln\Bigl[\dfrac{C\lambda}{2}(t + B_2)^2\Bigr] & \text{при } \ C\lambda > 0,\\ -\dfrac{1}{\lambda}\ln\Bigl[-\dfrac{C\lambda}{2B_1^2}\operatorname{ch}^2(B_1 t + B_2)\Bigr] & \text{при } \ C\lambda < 0,\end{cases}$$

где A_1, A_2, B_1, B_2, C — произвольные постоянные.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + be^{\beta w}.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1^{\beta-\lambda}x + C_2, \pm C_1^{\beta}t + C_3) + 2\ln|C_1|,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w = u(z), \quad z = k_2 x + k_1 t,$$

где k_1, k_2 — произвольные постоянные, а функция $u(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k_1^2 u''_{zz} - ak_2^2(e^{\lambda u}u'_z)'_z = be^{\beta u}.$$

Подстановка $\Theta(u) = (u'_z)^2$ приводит к линейному уравнению первого порядка

$$(k_1^2 - ak_2^2 e^{\lambda u})\Theta'_u - 2ak_2^2\lambda e^{\lambda u}\Theta = 2be^{\beta u}.$$

3°. Точное решение:

$$w = U(\xi) - \frac{2}{\beta}\ln|t|, \quad \xi = x|t|^{\frac{\lambda-\beta}{\beta}},$$

где функция $U(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{2}{\beta} + \frac{(\lambda-\beta)(\lambda-2\beta)}{\beta^2}\xi U'_\xi + \frac{(\lambda-\beta)^2}{\beta^2}\xi^2 U''_{\xi\xi} = (ae^{\lambda U}U'_\xi)'_\xi + be^{\beta U}.$$

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + b - ce^{-2\lambda w}$.

Решение с функциональным разделением переменных:

$$w = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\sqrt{c\lambda}\,t - \frac{b\lambda}{2a}x^2 + C_1 x + C_2\right),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x+\mu t+\beta w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad a > 0$.

Замена $\beta u = \lambda x + \mu t + \beta w$ приводит к уравнению вида 3.2.4.1:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ae^{\beta u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3.3. Другие уравнения, содержащие произвольные параметры

3.3.1. Уравнения с гиперболическими нелинейностями

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\,\mathrm{sh}(\lambda w)$.

Уравнение sh-*Гордон*. Встречается в некоторых областях физики. Частный случай уравнения 3.4.1.1 при $f(w) = b\,\mathrm{sh}(\lambda w)$.

1°. Решения типа бегущей волны:

$$w(x,t) = \pm\frac{2}{\lambda}\ln\left[\mathrm{tg}\,\frac{b\lambda(kx+\mu t+\theta_0)}{2\sqrt{b\lambda(\mu^2 - ak^2)}}\right],$$

$$w(x,t) = \pm\frac{4}{\lambda}\,\mathrm{Arth}\left[\exp\frac{b\lambda(kx+\mu t+\theta_0)}{\sqrt{b\lambda(\mu^2 - ak^2)}}\right],$$

где k, μ, θ_0 — произвольные постоянные. В обеих формулах считается, что $b\lambda(\mu^2 - ak^2) > 0$.

2°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \frac{4}{\lambda}\,\mathrm{Arth}\big[f(t)g(x)\big], \qquad \mathrm{Arth}\,z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z},$$

где функции $f = f(t)$ и $g = g(x)$ определяются автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка

$$\big(f_t'\big)^2 = Af^4 + Bf^2 + C,$$

$$a\big(g_x'\big)^2 = Cg^4 + (B - b\lambda)g^2 + A,$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

3°. О других точных решениях этого уравнения см. уравнение 3.4.1.1 при $f(w) = b\,\mathrm{sh}(\lambda w)$, п. 2°.

⦿ *Литература*: A. Grauel (1985), A. M. Grundland, E. Infeld (1992), M. Musette, R. Conte (1994), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994), R. Z. Zhdanov (1994).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\,\mathrm{sh}(\beta w) + b\,\mathrm{sh}(2\beta w)$.

Двойное уравнение sh-*Гордон*. Введем обозначение: $k = \dfrac{a}{2b}$.

Решения типа бегущей волны:

$$w = \pm\frac{1}{\beta}\,\mathrm{Arch}\,\frac{1 - k\sin z}{\sin z - k}, \qquad z = \sqrt{2b\beta(1-k^2)}\,(x\,\mathrm{sh}\,C_1 \pm t\,\mathrm{ch}\,C_1 + C_2) \quad \text{при} \quad |k| < 1;$$

$$w = \pm\frac{2}{\beta}\,\mathrm{Arth}\left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\,\mathrm{th}\,\frac{\xi}{2}\right), \quad \xi = \sqrt{2b\beta(k^2-1)}\,(x\,\mathrm{sh}\,C_1 \pm t\,\mathrm{ch}\,C_1 + C_2) \quad \text{при} \quad |k| > 1,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\beta t} \operatorname{sh}^k(\lambda w)$.

Частный случай уравнения 3.4.1.7 при $f(w) = b \operatorname{sh}^k(\lambda w)$. Поэтому при $k = 1$ это уравнение сводится к более простому уравнению 3.3.1.1.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\beta x} \operatorname{sh}^k(\lambda w)$.

Частный случай уравнения 3.4.1.6 при $f(w) = b \operatorname{sh}^k(\lambda w)$. Поэтому при $k = 1$ это уравнение сводится к более простому уравнению 3.3.1.1.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{a}{x^n} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + k \operatorname{sh}(\lambda w)$.

Частный случай уравнения 3.4.2.1 при $f(w) = k \operatorname{sh}(\lambda w)$, $n = b/a$.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[a \operatorname{ch}(\lambda w) \dfrac{\partial w}{\partial x}\right], \qquad a > 0$.

Частный случай уравнения 3.4.4.6 при $f(w) = a \operatorname{ch}(\lambda w)$.

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[a \operatorname{sh}(\lambda w) \dfrac{\partial w}{\partial x}\right], \qquad a > 0$.

Частный случай уравнения 3.4.4.6 при $f(w) = a \operatorname{sh}(\lambda w)$.

3.3.2. Уравнения с логарифмическими нелинейностями

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw \ln w + kw$.

Частный случай уравнения 3.4.1.1 при $f(w) = bw \ln w + kw$.

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t)\psi(x),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ описываются автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} - b\varphi \ln \varphi - k\varphi = 0,$$
$$a\psi''_{xx} + b\psi \ln \psi = 0,$$

общие решения которых можно представить в неявном виде.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw \ln w + (cx^k + st^n)w$.

Частный случай уравнения 3.4.1.10 при $f(x) = cx^k$, $g(t) = st^n$.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^k \ln w$.

Частный случай уравнения 3.4.1.1 при $f(w) = bw^k \ln w$. Для $k = 1$ см. также уравнение 3.4.1.9 при $f(t) = 0$.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a(x^2 - t^2) \ln^k(\lambda w)$.

Частный случай уравнения 3.4.1.2 при $f(w) = a \ln^k(\lambda w)$.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\beta t} w \ln w$.

Преобразование

$$w = U(z,\tau), \quad z = \tfrac{1}{2}\beta \exp\left(\tfrac{1}{2}\beta t\right) \operatorname{sh}\left(\tfrac{1}{2}\beta x\right), \quad \tau = \tfrac{1}{2}\beta \exp\left(\tfrac{1}{2}\beta t\right) \operatorname{ch}\left(\tfrac{1}{2}\beta x\right)$$

приводит к более простому уравнению вида 3.3.2.1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + bU \ln U.$$

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\beta x} w \ln w.$

Преобразование

$$w = U(z,\tau), \quad z = \tfrac{1}{2}\exp\left(\tfrac{1}{2}\beta x\right)\operatorname{ch}\left(\tfrac{1}{2}\beta t\right), \quad \tau = \tfrac{1}{2}\exp\left(\tfrac{1}{2}\beta x\right)\operatorname{sh}\left(\tfrac{1}{2}\beta t\right)$$

приводит к более простому уравнению вида 3.3.2.1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + bU \ln U.$$

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + cw^k \ln w.$

Частный случай уравнения 3.4.2.1 при $f(w) = cw^k \ln w,\ b = an$.

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\ln^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 3.4.3.2 при $\beta = 0,\ f(w) = b\ln^k(\lambda w)$.

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx^{n-1}\ln^k(\lambda w)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 3.4.3.5 при $f(w) = b\ln^k(\lambda w)$.

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\ln^k(\lambda w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right].$

Частный случай уравнения 3.4.4.6 при $f(w) = a\ln^k(\lambda w)$.

3.3.3. Уравнение синус-Гордона и другие уравнения с тригонометрическими нелинейностями

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\sin(\lambda w).$

Уравнение синус-Гордона. Встречается в дифференциальной геометрии и различных областях физики (сверхпроводимость, дислокация в кристаллах, волны в ферромагнитных материалах, лазерные импульсы в двухфазной среде и др.).

1°. Пусть $w = \varphi(x,t)$ — решение уравнения синус-Гордона. Тогда функции

$$w_1 = \frac{2\pi n}{\lambda} \pm \varphi(C_1 \pm x, C_2 \pm t), \qquad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots;$$
$$w_2 = \pm\varphi\left(x\operatorname{ch}\sigma + t\sqrt{a}\,\operatorname{sh}\sigma,\ x\frac{\operatorname{sh}\sigma}{\sqrt{a}} + t\operatorname{ch}\sigma\right),$$

где C_1, C_2, σ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения. В первой формуле знаки функции и аргументов выбираются независимо в любой комбинации.

2°. Решения типа бегущей волны:

$$w(x,t) = \frac{4}{\lambda}\operatorname{arctg}\left\{\exp\left[\pm\frac{b\lambda(kx + \mu t + \theta_0)}{\sqrt{b\lambda(\mu^2 - ak^2)}}\right]\right\} \qquad \text{при} \quad b\lambda(\mu^2 - ak^2) > 0,$$
$$w(x,t) = -\frac{\pi}{\lambda} + \frac{4}{\lambda}\operatorname{arctg}\left\{\exp\left[\pm\frac{b\lambda(kx + \mu t + \theta_0)}{\sqrt{b\lambda(ak^2 - \mu^2)}}\right]\right\} \quad \text{при} \quad b\lambda(\mu^2 - ak^2) < 0,$$

где k, μ, θ_0 — произвольные постоянные. Первое решение отвечает односолитонному решению.

3°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(x,t) = \frac{4}{\lambda}\operatorname{arctg}\bigl[f(x)g(t)\bigr], \tag{1}$$

где функции $f = f(x)$ и $g = g(t)$ определяются автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными

$$\begin{aligned} (f'_x)^2 &= Af^4 + Bf^2 + C, \\ (g'_t)^2 &= -aCg^4 + (aB + b\lambda)g^2 - aA, \end{aligned} \tag{2}$$

где A, B, C — произвольные постоянные. Отметим некоторые точные решения, являющиеся следствием (1) — (2).

3.1. При $A=0$, $B=k^2>0$, $C>0$ имеем

$$w(x,t)=\frac{4}{\lambda}\operatorname{arctg}\left[\frac{\mu\operatorname{sh}(kx+A_1)}{k\sqrt{a}\operatorname{ch}(\mu t+B_1)}\right],\quad \mu^2=ak^2+b\lambda>0, \tag{3}$$

где k, A_1, B_1 — произвольные постоянные. Формула (3) отвечает двухсолитонному решению Перринга — Скирма.

3.2. При $A=0$, $B=-k^2<0$, $C>0$ имеем

$$w(x,t)=\frac{4}{\lambda}\operatorname{arctg}\left[\frac{\mu\sin(kx+A_1)}{k\sqrt{a}\operatorname{ch}(\mu t+B_1)}\right],\quad \mu^2=b\lambda-ak^2>0,$$

где k, A_1, B_1 — произвольные постоянные.

3.3. При $A=k^2>0$, $B=k^2\gamma^2>0$, $C=0$ имеем

$$w(x,t)=\frac{4}{\lambda}\operatorname{arctg}\left[\frac{\gamma}{\mu}\,\frac{e^{\mu(t+A_1)}+ak^2e^{-\mu(t+A_1)}}{e^{k\gamma(x+B_1)}+e^{-k\gamma(x+B_1)}}\right],\quad \mu^2=ak^2\gamma^2+b\lambda>0,$$

где k, A_1, B_1, γ — произвольные постоянные.

4°. N-солитонное решение описывается следующими формулами ($a=1$, $b=-1$, $\lambda=1$):

$$w(x,t)=\arccos\left[1-2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(\ln F)\right],$$
$$F=\det\bigl[M_{ij}\bigr],\quad M_{ij}=\frac{2}{a_i+a_j}\operatorname{ch}\left(\frac{z_i+z_j}{2}\right),$$
$$z_i=\pm\frac{x-\mu_i t+C_i}{\sqrt{1-\mu_i^2}},\quad a_i=\pm\sqrt{\frac{1-\mu_i}{1+\mu_i}},$$

где μ_i, C_i — произвольные постоянные.

5°. О других точных решениях данного уравнения см. уравнение 3.4.1.1 при $f(w)=b\sin(\lambda w)$, п. 3°.

6°. Уравнение синус-Гордона интегрируется методом обратной задачи рассеяния, см. книгу В. Е. Захарова, С. В. Манакова, С. П. Новикова, Л. П. Питаевского (1980). Е. Д. Белоколос (1995) получил общую формулу для решения уравнения синус-Гордона с произвольными начальными и граничными условиями.

7°. Преобразование

$$z=x-at,\quad y=x+at$$

приводит к уравнению вида 3.5.1.5: $\partial_{zy}w=-\frac{1}{4}a^{-2}\sin w$.

⊙ *Литература для уравнения* 3.3.3.1: R. Steuerwald (1936), J. K. Perring, T. H. R. Skyrme (1962), M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur (1973), В. Е. Захаров, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев (1973), Дж. Уизем (1977), G. Liebbrandt (1978), В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский (1980), И. М. Кричевер (1980), Р. Буллаф, Ф. Кодри (1983), Дж. Лэмб (1984), J. Weiss (1984), М. Абловиц, Х. Сигур (1987), M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson (1991), M. Musette, R. Conte (1994).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+b\sin(\lambda w)+c\sin\bigl(\tfrac{1}{2}\lambda w\bigr).$

Двойное уравнение синус-Гордона. Встречается в нелинейной оптике (распространение ультракоротких импульсов в резонансной пятикратно вырожденной среде) и физике низких температур (распространение спиновых волн в анизотропных спиновых жидкостях).

1°. Решения типа бегущей волны:

$$w(x,t)=\frac{4}{\lambda}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{4b^2-c^2}}{2b-c}\,\operatorname{th}\frac{\lambda\sqrt{4b^2-c^2}(kx+\mu t+\theta_0)}{4\sqrt{b\lambda(ak^2-\mu^2)}}\right]\quad\text{при}\quad c^2<4b^2,$$
$$w(x,t)=\frac{4}{\lambda}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{c^2-4b^2}}{c-2b}\,\operatorname{tg}\frac{\lambda\sqrt{c^2-4b^2}(kx+\mu t+\theta_0)}{4\sqrt{b\lambda(ak^2-\mu^2)}}\right]\quad\text{при}\quad c^2>4b^2.$$

где k, μ, θ_0 — произвольные постоянные. В обеих формулах считается, что $b\lambda(ak^2-\mu^2)>0$.

2°. Решения типа бегущей волны:

$$w(x,t) = A + \frac{4}{\lambda}\operatorname{arctg}\bigl(B_1 e^\theta + C_1\bigr) + \frac{4}{\lambda}\operatorname{arctg}\bigl(B_2 e^\theta + C_2\bigr), \quad \theta = \mu t \pm kx + \theta_0,$$

где θ_0 — произвольная постоянная, а параметры A, B_1, B_2, C_1, C_2, μ, k алгебраическими соотношениями связаны с параметрами исходного уравнения a, b, c, λ.

Выделим интересные частные случаи, встречающиеся в приложениях.

2.1. При $a = 1$, $b = -1$, $c = -\frac{1}{2}$, $\lambda = 1$:

$$w(x,t) = 4\operatorname{arctg}\bigl(e^{\theta-\Delta}\bigr) + 4\operatorname{arctg}\bigl(e^{\theta+\Delta}\bigr); \qquad \Delta = \ln\bigl(\sqrt{5}+2\bigr), \quad k = \mu + \tfrac{5}{4}\mu^{-1}.$$

2.2. При $a = 1$, $b = -1$, $c = -\frac{1}{2}$, $\lambda = 1$:

$$w(x,t) = 2\pi + 4\operatorname{arctg}\bigl(e^{\theta-\Delta}\bigr) - 4\operatorname{arctg}\bigl(e^{\theta+\Delta}\bigr); \qquad \Delta = \ln\bigl(\sqrt{3}+2\bigr), \quad k = \mu + \tfrac{3}{4}\mu^{-1}.$$

2.3. При $a = 1$, $b = 1$, $c = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$:

$$w(x,t) = \delta - 2\pi + 4\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{\sqrt{15}}e^\theta + \frac{1}{\sqrt{15}}\right); \qquad \delta \text{ — любое}, \quad k = \mu + \tfrac{15}{16}\mu^{-1}.$$

2.4. При $a = 1$, $b = 1$, $c = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$:

$$w(x,t) = 2\pi - \delta + 4\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{\sqrt{15}}e^\theta - \frac{1}{\sqrt{15}}\right); \qquad \delta \text{ — любое}, \quad k = \mu + \tfrac{15}{16}\mu^{-1}.$$

⊙ *Литература*: P. B. Burt (1978), Р. Буллаф, Ф. Кодри (1983), Ф. Калоджеро, А. Дегасперис (1985).

3. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\cos(\lambda w)}$.

Замена $w = u + \dfrac{\pi}{2\lambda}$ приводит к уравнению вида 3.3.3.1:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b\sin(\lambda u).$$

4. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\beta t}\sin^k(\lambda w)}$.

Частный случай уравнения 3.4.1.7 при $f(w) = b\sin^k(\lambda w)$. Поэтому при $k = 1$ это уравнение сводится к более простому уравнению 3.3.3.1.

5. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\beta x}\sin^k(\lambda w)}$.

Частный случай уравнения 3.4.1.6 при $f(w) = b\sin^k(\lambda w)$. Поэтому при $k = 1$ это уравнение сводится к более простому уравнению 3.3.3.1.

6. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\beta t}\cos^k(\lambda w)}$.

Частный случай уравнения 3.4.1.7 при $f(w) = b\cos^k(\lambda w)$. Поэтому при $k = 1$ это уравнение сводится к более простому уравнению 3.3.3.3.

7. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\beta x}\cos^k(\lambda w)}$.

Частный случай уравнения 3.4.1.6 при $f(w) = b\cos^k(\lambda w)$. Поэтому при $k = 1$ это уравнение сводится к более простому уравнению 3.3.3.3.

8. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + k\sin(\lambda w)}$.

Частный случай уравнения 3.4.2.1 при $f(w) = k\sin(\lambda w)$, $b = an$.

9. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[a\cos^n(\lambda w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right], \qquad a > 0}$.

Частный случай уравнения 3.4.4.6 при $f(w) = a\cos^n(\lambda w)$.

10. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[a\sin^n(\lambda w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right], \qquad a > 0}$.

Частный случай уравнения 3.4.4.6 при $f(w) = a\sin^n(\lambda w)$.

3.3.4. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^{-2}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big).$

Преобразование по решению

$$\tau = t + \ln|w|, \quad dz = aw^{-2}w_x dt + (w + w_t)dx, \quad u = 1/w \qquad (dz = z_t\,dt + z_x\,dx),$$

где индексы снизу обозначают соответствующие частные производные, приводит к линейному телеграфному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

⊙ *Литература*: C. Rogers, T. Ruggeri (1985), C. Rogers, W. F. Ames (1989).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[a(w+b)^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big].$

1°. Точное решение при $n \neq -1$:

$$w(x,t) = (x + C_2)^{1/(1+n)}(C_1 e^{-kt} + C_2) - b,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = (x + C)^{2/n}u(t) - b,$$

где C — произвольная постоянная, а функция $u = u(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$u''_{tt} + ku'_t = \frac{2a(n+2)}{n^2}u^{n+1}.$$

Это уравнение легко интегрируется при $n = -2$ и $n = -1$; при $n = -3/2, -3$ его точные решения приведены в справочнике В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

3°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\int_0^{w+b} \frac{bu^n - \lambda^2}{k\lambda u + C_1}\,dw = x + \lambda t + C_2,$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные.

4°. Точное решение при $n = -1$:

$$w(x,t) = \frac{2at + C_1 e^{-kt} + C_2}{k(x + C_3)^2} - b,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

5°. Решение с обобщенным разделением переменных при $n = 1$:

$$w(x,t) = f(t)x^2 + g(t)x + h(t) - b,$$

где функции $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f''_{tt} + kf'_t = 6af^2,$$
$$g''_{tt} + kg'_t = 6afg,$$
$$h''_{tt} + kh'_t = 2afh + ag^2.$$

⊙ *Литература*: N. H. Ibragimov (1994, pp. 169–170), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 147).

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(be^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w\big(C_1 x + C_2,\, t + C_3\big) - \frac{2}{\lambda}\ln|C_1|,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(C_1x + C_2) + C_3e^{-at} + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

3°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(\lambda C_1x^2 + C_2x + C_3) + u(t),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функция $u = u(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$u''_{tt} + au'_t = 2bC_1e^{\lambda u}.$$

4°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\int \frac{be^{\lambda w} - \lambda^2}{a\lambda w + C_1}\,dw = x + \lambda t + C_2,$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: N. H. Ibragimov (1994, pp. 169–170), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 146).

3.3.5. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + f(w)\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[g(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]$

► *Уравнения этого вида допускают решения типа бегущей волны* $w = w(kx + \lambda t)$ (*значению* $k = 0$ *соответствует однородное решение, зависящее только от* t, *а значению* $\lambda = 0$ — *стационарное решение, зависящее только от* x). *При* $g(w) = \mathrm{const}$ *такие уравнения встречаются в теории электрического поля при нелинейных законах Ома, где* w — *напряженность электрического поля.*

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + w^n\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1w(\pm C_1^n x + C_2,\ C_1^n t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решения типа бегущей волны в неявном виде:

$$\int \frac{(n+1)\,dw}{w^{n+1} + C_1} = -\frac{a(x - at)}{1 - a^2} + C_2 \quad \text{при} \quad n \neq -1,$$
$$\int \frac{dw}{\ln|w| + C_1} = -\frac{a(x - at)}{1 - a^2} + C_2 \quad \text{при} \quad n = -1,$$

где C_1, C_2, a — произвольные постоянные ($a \neq 0, \pm 1$).

Частный случай 1. Решение типа бегущей волны при $n \neq 0, -1$:

$$w = \left(\frac{n}{n+1}\xi + C\right)^{-1/n}, \quad \xi = \frac{a(x - at)}{1 - a^2},$$

где C, a — произвольные постоянные ($a \neq 0, \pm 1$).

Частный случай 2. Решения типа бегущей волны при $n = 1$:

$$w = 2C_1\,\mathrm{th}(C_1\xi + C_2), \qquad w = -2C_1\,\mathrm{tg}(C_1\xi + C_2), \qquad \xi = \frac{a(x - at)}{1 - a^2},$$

где C_1, C_2, a — произвольные постоянные ($a \neq 0, \pm 1$).

3°. Автомодельное решение:

$$w = t^{-1/n}\varphi(\xi), \quad \xi = \frac{x}{t},$$

где функция $\varphi = \varphi(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(1 - \xi^2)\varphi''_{\xi\xi} + \left[\varphi^n - \frac{2(n+1)}{n}\right]\xi\varphi'_\xi + \frac{1}{n}\varphi^{n+1} + \frac{n+1}{n^2}\varphi = 0.$$

4°. Решение с обобщенным разделением переменных при $n=1$:

$$w = \varphi(x)\left[t + C_1 + C_2 \int \frac{dx}{\varphi^2(x)}\right].$$

Здесь функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $\varphi''_{xx} = \varphi^2$, которое имеет частное решение $\varphi = 6(x+C)^{-2}$.

⦿ *Литература*: Ю. П. Емец, В. Б. Таранов (1972), N. H. Ibragimov (1994, pp. 243–244; 1995, pp. 334–337), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 148).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + aw^n \dfrac{\partial w}{\partial t} = b\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

1°. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = u(z)t^{-1/n}, \quad z = xt^{-1},$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$n^2(z^2 - b)u''_{zz} + nz(2n + 2 - nau^n)u'_z + u(1 + n - nau^n) = 0.$$

2°. Переходя к новым независимым переменным $\tau = at$, $z = a\beta^{-1/2}x$, приходим к уравнению вида 3.3.5.1:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + w^n \frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + aw^n \dfrac{\partial w}{\partial t} = b\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^k \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^2 w(\pm C_1^{2n-k}x + C_2,\, C_1^{2n}t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = u(z)t^{-1/n}, \quad z = xt^{(k-2n)/(2n)},$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned}\left[4bn^2u^k - (2n-k)^2z^2\right]u''_{zz} + 4bkn^2u^{k-1}\left(u'_z\right)^2 &+ \\ + (2n-k)(k - 4 - 4n + 2nau^n)zu'_z &= 4u(1 + n - anu^n).\end{aligned}$$

⦿ *Литература*: N. H. Ibragimov (1994, pp. 243–244).

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + e^w \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1x + C_2,\, C_1t + C_3) + \ln C_1,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решения типа бегущей волны:

$$w(x,t) = -\ln\left\{\frac{1}{C_1}\left[\exp\left(\frac{C_1}{a^2-1}(ax - t) + C_2\right) - 1\right]\right\},$$

$$w(x,t) = -\ln\left\{\frac{1}{a^2-1}(ax - t) + C_1\right\},$$

где C_1, C_2, a — произвольные постоянные ($a \neq \pm 1$).

3°. Точные решения:

$$w(x,t) = -\ln\left(\frac{t + Cx}{1 - C^2} + 2a\sqrt{|t^2 - x^2|}\left|\frac{x+t}{x-t}\right|^a\right),$$

$$w(x,t) = -\ln\left(\mp\frac{x}{2} + C(x \pm t) + \frac{1}{4}(x \pm t)\ln\left|\frac{x+t}{x-t}\right|\right),$$

где C, a — произвольные постоянные ($C \neq \pm 1$).

⦿ *Литература*: Ю. П. Емец, В. Б. Таранов (1972), N. H. Ibragimov (1994, pp. 243–244; 1995, pp. 334–335).

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a e^{\lambda w} \dfrac{\partial w}{\partial t} = b \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

1°. Точное решение:

$$w(x,t) = u(z) - \frac{1}{\lambda} \ln t, \quad z = xt^{-1},$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\lambda(z^2 - b)u''_{zz} + \lambda z(2 - ae^{\lambda u})u'_z + 1 - ae^{\lambda u} = 0.$$

2°. Переходя к новым независимым переменным $\tau = at$, $z = a\beta^{-1/2}x$, приходим к уравнению вида 3.3.5.4:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + e^u \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a e^{\lambda w} \dfrac{\partial w}{\partial t} = b \dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\mu w} \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1^{2\lambda-\mu} x + C_2,\ C_1^{2\lambda} t + C_3) + 2 \ln C_1,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = u(z) - \frac{1}{\lambda} \ln t, \quad z = xt^{(\lambda-2\mu)/(2\mu)},$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned}\big[(\mu - 2\lambda)^2 z^2 - 4b\lambda^2 e^{\mu u}\big] u''_{zz} - 4b\mu\lambda^2 e^{\mu u}(u'_z)^2 + {}\\ + (\mu - 2\lambda)(\mu - 4\lambda + 2a\lambda e^{\lambda u}) z u'_z + 4\lambda(1 - ae^{\lambda u}) = 0.\end{aligned}$$

⊙ *Литература*: N. H. Ibragimov (1994, pp. 243–244).

3.4. Уравнения, содержащие произвольные функции

3.4.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \alpha \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)$.

Нелинейное уравнение Клейна — Гордона общего вида.

1°. Пусть $w = w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm x + C_1, \pm t + C_2),$$
$$w_2 = w\big(x \operatorname{ch}\beta + t\alpha^{1/2} \operatorname{sh}\beta,\ t \operatorname{ch}\beta + x\alpha^{-1/2} \operatorname{sh}\beta\big),$$

где C_1, C_2, β — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки в w_1 выбираются произвольно).

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\int \left[C_1 + \frac{2}{\lambda^2 - \alpha k^2} \int f(w)\,dw\right]^{-1/2} dw = kx + \lambda t + C_2, \tag{1}$$

где C_1, C_2, k, λ — произвольные постоянные.

Укажем несколько случаев, когда решение (1) можно записать в явном виде ($a = \mu = 1$):

$$f(w) = -b^2 \frac{\operatorname{th} w}{\operatorname{ch}^2 w}, \quad w(z) = \operatorname{Arsh}\left[\operatorname{sh} k\, \sin\left(\frac{bz + c}{\operatorname{ch} k\, \sqrt{\lambda^2 - 1}}\right)\right],$$
$$f(w) = -b^2 \frac{\operatorname{tg} w}{\cos^2 w}, \quad w(z) = \arcsin\left[\sin k\, \sin\left(\frac{bz + c}{\cos k\, \sqrt{\lambda^2 - 1}}\right)\right],$$

где k, c — произвольные постоянные. В этих случаях периодическим решениям по z с периодом 2π отвечают следующие зависимости скорости волны λ от амплитуды b:

$$\lambda^2 = 1 + b^2 \operatorname{ch}^{-2} k,$$
$$\lambda^2 = 1 + b^2 \cos^{-2} k.$$

3°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \tfrac{1}{4}\alpha(t + C_1)^2 - \tfrac{1}{4}(x + C_2)^2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $w = w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\xi w''_{\xi\xi} + w'_\xi - \frac{1}{\alpha} f(w) = 0.$$

4°. О точных решениях нелинейного уравнения Клейна — Гордона при $f(w) = bw^m$, $f(w) = be^{\lambda w}$, $f(w) = b\,\mathrm{sh}(\lambda w)$, $f(w) = bw\ln w$, $f(w) = b\sin(\lambda w)$ см. соответственно уравнения 3.1.1.1, 3.2.1.1, 3.3.1.1, 3.3.2.1, 3.3.3.1.

⦿ *Литература*: С. В. Нестеров (1978), P. A. Clarkson, J. B. McLeod, P. J. Olver, R. Ramani (1986), A. M. Grundland, E. Infeld (1992), R. Z. Zhdanov (1994), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 149–150).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (x^2 - t^2) f(w).$

1°. Пусть $w = w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm x,\, \pm t),$$
$$w_2 = w(x\,\mathrm{ch}\,\beta + t\,\mathrm{sh}\,\beta,\; x\,\mathrm{sh}\,\beta + t\,\mathrm{ch}\,\beta),$$

где β — произвольная постоянная, также будут решениями этого уравнения (знаки в w_1 выбираются произвольно).

2°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \tfrac{1}{2}(x^2 - t^2),$$

где функция $w = w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\xi w''_{\xi\xi} + w'_\xi + \xi f(w) = 0.$$

3°. Автомодельное решение:

$$w = w(\tau), \qquad \tau = xt.$$

Здесь функция $w = w(\tau)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\tau\tau} = f(w),$$

общее решение которого можно представить в неявном виде

$$\int \bigl[C_1 + 2F(w)\bigr]^{-1/2} dw = C_2 \pm \tau, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$w = w(z), \qquad z = \tfrac{1}{2}(x^2 + t^2).$$

Здесь функция $w = w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{zz} + f(w) = 0,$$

общее решение которого можно представить в неявном виде

$$\int \bigl[C_1 - 2F(w)\bigr]^{-1/2} dw = C_2 \pm z, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

5°. Решение с функциональным разделением переменных (обобщает решения из пп. 3° и 4°):

$$w = w(r), \qquad r = C_1 x^2 + C_2 xt + C_1 t^2 + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функция $w = w(r)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(C_2^2 - 4C_1^2) w''_{rr} = f(w),$$

6°. Преобразование

$$w = U(z,\tau), \quad z = \tfrac{1}{2}(x^2 + t^2), \quad \tau = xt$$

приводит к более простому уравнению вида 3.4.1.1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + f(U).$$

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 150–151).

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (t^2 - x^2)^n f(w), \qquad n = 2,\ 3,\ \ldots$

Частный случай уравнения 3.4.1.16 при $f(y) = y^n,\ g(z) = z^n$.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x + bt, w)$.

Точное решение:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = x + bt,$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(a - b^2)w''_{\xi\xi} + f(\xi, w) = 0.$$

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (x^2 - t^2) f(xt, w)$.

1°. Автомодельное решение:

$$w = w(\tau), \qquad \tau = xt,$$

где функция $w = w(\tau)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\tau\tau} = f(\tau, w).$$

2°. Преобразование

$$z = \tfrac{1}{2}(x^2 + t^2), \quad \tau = xt$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f(\tau, w).$$

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e^{\beta x} f(w)$.

Преобразование

$$w = U(z, \tau), \quad z = \exp\bigl(\tfrac{1}{2}\beta x\bigr)\operatorname{ch}\bigl(\tfrac{1}{2}\beta t\bigr), \quad \tau = \exp\bigl(\tfrac{1}{2}\beta x\bigr)\operatorname{sh}\bigl(\tfrac{1}{2}\beta t\bigr)$$

приводит к более простому уравнению вида 3.4.1.1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + 4\beta^{-2} f(U).$$

Это уравнение для произвольной зависимости $f = f(U)$ допускает точное решение типа бегущей волны $U = U(kz + \lambda\tau)$ и решение вида $U = U(z^2 - \tau^2)$.

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 152).

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e^{\beta t} f(w)$.

Преобразование

$$w = U(z, \tau), \quad z = \exp\bigl(\tfrac{1}{2}\beta t\bigr)\operatorname{sh}\bigl(\tfrac{1}{2}\beta x\bigr), \quad \tau = \exp\bigl(\tfrac{1}{2}\beta t\bigr)\operatorname{ch}\bigl(\tfrac{1}{2}\beta x\bigr)$$

приводит к более простому уравнению вида 3.4.1.1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + 4\beta^{-2} f(U).$$

Это уравнение для произвольной зависимости $f = f(U)$ допускает точное решение типа бегущей волны $U = U(kz + \lambda\tau)$ и решение вида $U = U(z^2 - \tau^2)$.

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 152).

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e^{ax+bt} f(w)$.

1°. Существует точное решение вида $w = w(ax + bt)$.

2°. При $b \neq \pm a$, преобразование

$$\xi = ax + bt, \quad \tau = bx + at$$

приводит это уравнение к виду 3.4.1.6:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{a^2 - b^2} e^{\xi} f(w).$$

3°. В случае $b = a$ см. уравнение 3.4.1.13 при $f(z) = e^{az}$; в случае $b = -a$ см. уравнение 3.4.1.14 при $f(z) = e^{-az}$.

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw\ln w + f(t)w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t)\psi(x),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} - \bigl[b\ln\varphi + f(t) + C\bigr]\varphi = 0,$$
$$a\psi''_{xx} + \bigl(b\ln\psi - C\bigr)\psi = 0,$$

C — произвольная постоянная.

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw\ln w + \bigl[f(x) + g(t)\bigr]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t)\psi(x),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} - \bigl[b\ln\varphi + g(t) + C\bigr]\varphi = 0,$$
$$a\psi''_{xx} + \bigl[b\ln\psi + f(x) - C\bigr]\psi = 0,$$

C — произвольная постоянная.

11. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)w\ln w + \bigl[bf(t)x + g(t)\bigr]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = e^{-bx}\varphi(t),$$

где функция $\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi''_{tt} = f(t)\varphi\ln\varphi + \bigl[g(t) + ab^2\bigr]\varphi.$$

12. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)w\ln w + \bigl[bf(x)t + g(x)\bigr]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = e^{-bt}\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''_{xx} + f(x)\varphi\ln\varphi + \bigl[g(x) - b^2\bigr]\varphi = 0.$$

13. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t+x)g(w).$

Преобразование

$$w = U(\xi,\tau), \quad z = \frac{1}{2}\int_a^{t+x} f(\lambda)\,d\lambda - \frac{1}{2}(t-x), \quad \tau = \frac{1}{2}\int_a^{t+x} f(\lambda)\,d\lambda + \frac{1}{2}(t-x)$$

где a — произвольная постоянная, приводит к уравнению вида 3.4.1.1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + g(U).$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 153).

14. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t-x)g(w).$

Преобразование

$$w = U(z,\tau), \quad z = \frac{1}{2}(t+x) - \frac{1}{2}\int_a^{t-x} f(\sigma)\,d\sigma, \quad \tau = \frac{1}{2}(t+x) + \frac{1}{2}\int_a^{t-x} f(\sigma)\,d\sigma$$

где a — произвольная постоянная, приводит к уравнению вида 3.4.1.1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + g(U).$$

15. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t+x)g(t-x)e^{\beta w}$.

Преобразование

$$w = U(z,\tau), \quad z = \frac{1}{2}\int_a^{t+x} f(\lambda)\,d\lambda - \frac{1}{2}\int_b^{t-x} g(\sigma)\,d\sigma, \quad \tau = \frac{1}{2}\int_a^{t+x} f(\lambda)\,d\lambda + \frac{1}{2}\int_b^{t-x} g(\sigma)\,d\sigma,$$

где a, b — произвольные постоянные, приводит к уравнению вида 3.2.1.1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + e^{\beta U}.$$

16. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t+x)g(t-x)h(w)$.

Преобразование

$$w = U(z,\tau), \quad z = \frac{1}{2}\int_a^{t+x} f(\lambda)\,d\lambda - \frac{1}{2}\int_b^{t-x} g(\sigma)\,d\sigma, \quad \tau = \frac{1}{2}\int_a^{t+x} f(\lambda)\,d\lambda + \frac{1}{2}\int_b^{t-x} g(\sigma)\,d\sigma,$$

где a, b — произвольные постоянные, приводит к уравнению вида 3.4.1.1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + h(U).$$

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 153).

3.4.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f\Big(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{b}{x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(w)$.

1°. Частный случай уравнения 3.4.3.4 при $n = 0$. Это уравнение может быть записано в виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{a}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m \frac{\partial w}{\partial x}\right) + f(w), \qquad m = \frac{b}{a}.$$

Значениям $m = 1$ и $m = 2$ отвечают пространственные нелинейные волны соответственно с осевой и центральной симметрией.

2°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$w = w(\xi), \quad \xi = \sqrt{ak(t+C)^2 - kx^2},$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi} + \frac{a+b}{a\xi} w'_\xi = \frac{1}{ak} f(w).$$

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + bw\ln w + \big[g(x) + h(t)\big]w$.

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t)\psi(x),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} - \big[b\ln\varphi + h(t) + C\big]\varphi = 0,$$
$$a\psi''_{xx} + f(x)\psi'_x + \big[b\ln\psi + g(x) - C\big]\psi = 0,$$

C — произвольная постоянная.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$(\lambda^2 - a)\int \frac{dw}{F(w) + C_1} = x + \lambda t + C_2, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw.$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные. Стационарному решению соответствует значение $\lambda = 0$.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + cw + f(t).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm x + C_1, t) + C_2 \operatorname{ch}(kt) + C_3 \operatorname{sh}(kt) \quad \text{при} \ \ c = k^2 > 0,$$
$$w_2 = w(\pm x + C_1, t) + C_2 \cos(kt) + C_3 \sin(kt) \quad \text{при} \ \ c = -k^2 < 0,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x,t) = U(t) + \Theta(\xi), \quad \xi = \pm x + \lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функции $U(t)$ и $\Theta(\xi)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$U''_{tt} - cU - f(t) = 0, \tag{1}$$
$$(a-\lambda^2)\Theta''_{\xi\xi} + b\bigl(\Theta'_\xi\bigr)^2 + c\Theta = 0. \tag{2}$$

Решение уравнения (1) имеет вид

$$\begin{aligned} U(t) &= C_1 \operatorname{ch}(kt) + C_2 \operatorname{sh}(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t f(\tau)\operatorname{sh}\bigl[k(t-\tau)\bigr]\,d\tau \quad \text{при} \quad c = k^2 > 0,\\ U(t) &= C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t f(\tau)\sin\bigl[k(t-\tau)\bigr]\,d\tau \quad \text{при} \quad c = -k^2 < 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Решение уравнения (2) можно найти с помощью замены $z(\Theta) = \bigl(\Theta'_\xi\bigr)^2$, которая приводит к линейному уравнению первого порядка.

Частное решение уравнения (2):

$$\Theta = -\frac{c}{4b}(\xi + C_3)^2 + \frac{1}{2b}(a - \lambda^2).$$

3°. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной x:

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t), \tag{4}$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''_{tt} = 4b\varphi^2 + c\varphi, \tag{5}$$
$$\psi''_{tt} = (4b\varphi + c)\psi, \tag{6}$$
$$\chi''_{tt} = c\chi + b\psi^2 + 2a\varphi + f(t). \tag{7}$$

Уравнение (5) имеет тривиальное частное решение $\varphi(t) \equiv 0$, которому соответствует решение (4), линейное по координате x. Другое частное решение уравнения (5) определяется формулой $\varphi = -\frac{1}{4}c/b$.

Общее решение автономного уравнения (5) можно записать в неявном виде

$$\int \bigl(\tfrac{8}{3}b\varphi^3 + c\varphi^2 + C_1\bigr)^{-1/2} d\varphi = C_2 \pm t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Функции $\psi = \psi(t)$ и $\chi = \chi(t)$ можно найти последовательно путем решения уравнений (6) и (7), которые линейны относительно ψ и χ.

Отметим, что уравнение (6) имеет частное решение $\psi = \varphi(t)$, где $\bar\varphi(t)$ — любое нетривиальное решение уравнения (5). Поэтому общее решение уравнения (6) имеет вид

$$\psi(t) = C_3\bar\varphi(t) + C_4\bar\varphi(t)\int \frac{dt}{\bar\varphi^2(t)},$$

где C_3, C_4 — произвольные постоянные.

4°. Подстановка

$$w = z(x,t) + U(t),$$

где функция $U(t)$ описывается формулой (3), приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + cz.$$

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 154–155).

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + cw + f(x).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(x, \pm t + C_1) + C_2 \operatorname{ch}(kt) + C_3 \operatorname{sh}(kt) \quad \text{при} \quad c = k^2 > 0,$$
$$w_2 = w(x, \pm t + C_1) + C_2 \cos(kt) + C_3 \sin(kt) \quad \text{при} \quad c = -k^2 < 0,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + \psi(t).$$

Здесь

$$\psi(t) = \begin{cases} C_1 \operatorname{ch}(kt) + C_2 \operatorname{sh}(kt) & \text{при } c = k^2 > 0, \\ C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt) & \text{при } c = -k^2 < 0, \end{cases}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''_{xx} + b\bigl(\varphi'_x\bigr)^2 + c\varphi + f(x) = 0.$$

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + cw\dfrac{\partial w}{\partial x} + kw^2 + f(t)w + g(t).$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp(\lambda x),$$

где λ — корень квадратного уравнения $b\lambda^2 + c\lambda + k = 0$, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''_{tt} = k\varphi^2 + f(t)\varphi + g(t), \tag{1}$$
$$\psi''_{tt} = \bigl[(c\lambda + 2k)\varphi + f(t) + a\lambda^2\bigr]\psi. \tag{2}$$

В частном случае при $f(t) = \text{const}$, $g(t) = \text{const}$ уравнение (1) имеет частные решения вида $\varphi = \text{const}$ и ввиду его автономности может быть проинтегрировано в квадратурах. Уравнение (2) линейно относительно функции ψ, поэтому при $\varphi = \text{const}$ его общее решение выражается через экспоненты или синус и косинус.

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + g(t)w + h(t).$

Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной x:

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t), \tag{1}$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f, g, h не указываются)

$$\varphi''_{tt} = 4f\varphi^2 + g\varphi, \tag{2}$$
$$\psi''_{tt} = (4f\varphi + g)\psi, \tag{3}$$
$$\chi''_{tt} = g\chi + f\psi^2 + h + 2a\varphi. \tag{4}$$

Уравнение (2) имеет тривиальное частное решение $\varphi(t) \equiv 0$, которому соответствует решение (1), линейное по координате x.

Если удается найти решение $\varphi = \varphi(t)$ нелинейного уравнения (2), то функции $\psi = \psi(t)$ и $\chi = \chi(t)$ можно найти последовательно путем решения уравнений (3) и (4), которые линейны относительно ψ и χ.

Отметим, что уравнение (3) имеет частное решение $\psi = \bar{\varphi}(t)$, где $\bar{\varphi}(t)$ — любое нетривиальное частное решение уравнения (2). Поэтому общее решение уравнения (3) имеет вид

$$\psi(t) = C_1\bar{\varphi}(t) + C_2\bar{\varphi}(t)\int \frac{dt}{\bar{\varphi}^2(t)},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Если функции f и g пропорциональны, то частное решение уравнения (2) определяется формулой $\varphi = -\frac{1}{4}g/f$ ($\varphi = \text{const}$).

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + g(x) + h(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}At^2 + Bt + C + \int_0^t (t-\tau)h(\tau)\,d\tau + \varphi(x).$$

Здесь A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''_{xx} + f(x)\bigl(\varphi'_x\bigr)^2 + g(x) - A = 0.$$

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + bw + g(x) + h(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(x).$$

Здесь функции $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} - b\varphi - h(t) = 0,$$
$$a\psi''_{xx} + f(x)(\psi'_x)^2 + b\psi + g(x) = 0.$$

Решение первого уравнения для $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) = C_1\operatorname{ch}(kt) + C_2\operatorname{sh}(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t h(\tau)\operatorname{sh}\bigl[k(t-\tau)\bigr]\,d\tau \quad \text{при} \quad b = k^2 > 0,$$
$$\varphi(t) = C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t h(\tau)\sin\bigl[k(t-\tau)\bigr]\,d\tau \quad \text{при} \quad b = -k^2 < 0,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + bf(t)w^2 + g(t)w + h(t).$

1°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp\bigl(\pm x\sqrt{-b}\bigr), \qquad b<0, \tag{1}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f, g, h не указываются)

$$\varphi''_{tt} = bf\varphi^2 + g\varphi + h, \tag{2}$$
$$\psi''_{tt} = (2bf\varphi + g - ab)\psi. \tag{3}$$

Если удается найти решение $\varphi = \varphi(t)$ уравнения (2), то функцию $\psi = \psi(t)$ можно получить путем решения уравнения (3), линейного относительно ψ.

Если функции f, g, h пропорциональны:

$$g = \alpha f, \quad h = \beta f \qquad (\alpha,\, \beta = \mathrm{const}),$$

то частные решения уравнения (2) имеют вид

$$\varphi = k_1, \quad \varphi = k_2, \tag{4}$$

где k_1 и k_2 — корни квадратного уравнения $bk^2 + \alpha k + \beta = 0$. В этом случае уравнение (3) записывается так

$$\psi''_{tt} = \bigl[(2bk_n + \alpha)f - ab\bigr]\psi, \qquad n = 1,\, 2. \tag{5}$$

В книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведено много точных решений линейного уравнения (5) для различных зависимостей $f = f(t)$. В частном случае $f = \mathrm{const}$ общее решение уравнения (5) является суммой экспонент (или синуса и косинуса).

2°. Решение с обобщенным разделением переменных (обобщает решение из п. 1°):

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\bigl[A\exp\bigl(x\sqrt{-b}\bigr) + B\exp\bigl(-x\sqrt{-b}\bigr)\bigr], \qquad b<0, \tag{6}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi''_{tt} = bf\bigl(\varphi^2 + 4AB\psi^2\bigr) + g\varphi + h, \tag{7}$$

$$\psi''_{tt} = \bigl(2bf\varphi + g - ab\bigr)\psi. \tag{8}$$

Из уравнения (8) можно выразить φ через ψ, а затем подставить в (7). В итоге получается нелинейное уравнение четвертого порядка для функции ψ (при f, g, $h = \mathrm{const}$ это уравнение является автономным и допускает понижение порядка).

Отметим два частных случая решения вида (6), которые выражаются через гиперболические функции:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\,\mathrm{ch}\bigl(x\sqrt{-b}\bigr), \qquad A = \tfrac{1}{2}, \quad B = \tfrac{1}{2};$$

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\,\mathrm{sh}\bigl(x\sqrt{-b}\bigr), \qquad A = \tfrac{1}{2}, \quad B = -\tfrac{1}{2}.$$

3°. Решение с обобщенным разделением переменных (c — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\cos\bigl(x\sqrt{b} + c\bigr), \qquad b > 0,$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi''_{tt} = bf\bigl(\varphi^2 + \psi^2\bigr) + g\varphi + h,$$

$$\psi''_{tt} = \bigl(2bf\varphi + g - ab\bigr)\psi.$$

⊙ *Литература*: V. A. Galaktionov (1995), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 467–468).

11. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \bigl[g_1(t)x + g_0(t)\bigr]\frac{\partial w}{\partial x} + h(t)w + p_2(t)x^2 + p_1(t)x + p_0(t).$

Существует решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по x:

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t).$$

12. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^k + g(x)\frac{\partial w}{\partial x} + bw + h_1(t) + h_2(x).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + \psi(t).$$

Здесь

$$\psi(t) = \begin{cases} C_1\,\mathrm{ch}(kt) + C_2\,\mathrm{sh}(kt) + \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_0^t \mathrm{sh}\bigl[k(t-\tau)\bigr]h_1(\tau)\,d\tau & \text{при} \quad b = k^2 > 0, \\ C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt) + \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_0^t \sin\bigl[k(t-\tau)\bigr]h_1(\tau)\,d\tau & \text{при} \quad b = -k^2 < 0, \\ C_1 + C_2 t + \displaystyle\int_0^t (t-\tau)h_1(\tau)\,d\tau & \text{при} \quad b = 0, \end{cases}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''_{xx} + f(x)\bigl(\varphi'_x\bigr)^k + g(x)\varphi'_x + b\varphi + h_2(x) = 0.$$

13. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f\left(x, \frac{\partial w}{\partial x}\right) + g(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}At^2 + Bt + C + \int_0^t (t-\tau)g(\tau)\,d\tau + \varphi(x).$$

Здесь A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''_{xx} + f\bigl(x, \varphi'_x\bigr) - A = 0.$$

14. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f\left(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bw + g(t)$.

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(x).$$

Здесь функции $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} - b\varphi - g(t) = 0,$$
$$a\psi''_{xx} + f\bigl(x, \psi'_x\bigr) + b\psi = 0.$$

Решение первого уравнения для $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) = C_1 \operatorname{ch}(kt) + C_2 \operatorname{sh}(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t g(\tau)\operatorname{sh}\bigl[k(t-\tau)\bigr]\,d\tau \qquad \text{при} \quad b = k^2 > 0,$$
$$\varphi(t) = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t g(\tau)\sin\bigl[k(t-\tau)\bigr]\,d\tau \quad \text{при} \quad b = -k^2 < 0,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

15. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + wf\left(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$.

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = e^{\lambda x}\varphi(t),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi(t)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\varphi''_{tt} = \bigl[a\lambda^2 + f(t,\lambda)\bigr]\varphi.$$

3.4.3. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g\Bigl(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (ax^2 + b)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ax\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(w)$.

Замена $z = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+b}}$ приводит к уравнению вида 3.4.1.1:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f(w).$$

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a(x+\beta)^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w), \qquad a > 0$.

Это уравнение описывает распространение нелинейных волн в неоднородной среде. При $n = 0$ см. уравнение 3.4.1.1.

1°. Подстановка $y = x + \beta$ приводит к частному случаю уравнения 3.4.3.4 при $b = 0$.

2°. Решение с функциональным разделением переменных при $n \neq 2$:

$$w = w(r), \qquad r^2 = k\left[\frac{1}{4}(t+C)^2 - \frac{(x+\beta)^{2-n}}{a(2-n)^2}\right],$$

где знак постоянной k должен совпадать со знаком выражения в квадратных скобках, а функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + \frac{2(1-n)}{2-n}\,\frac{1}{r}\,w'_r = \frac{4}{k}f(w). \tag{1}$$

Подстановка $\xi = r^{\frac{n}{2-n}}$ приводит к обобщенному уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{\xi\xi} = \frac{4(2-n)^2}{kn^2}\xi^{\frac{4(1-n)}{n}}f(w). \tag{2}$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведен ряд точных решений уравнения (2) для некоторых зависимостей $f = f(w)$.

Специальный случай. При $n = 1$ общее решение уравнения (1) записывается в неявном виде

$$\int \left[C_1 + \frac{8}{k}F(w)\right]^{-1/2} dw = \pm r + C_2, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Точное решение при $n = 2$:

$$w = w(y), \quad y = At + B\ln|x+\beta|,$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $w = w(y)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(aB^2 - A^2)w''_{yy} - aBw'_y + f(w) = 0. \tag{3}$$

Решение уравнения (3) при $A = \pm B\sqrt{a}$ в неявном виде:

$$aB\int \frac{dw}{f(w)} = y + C,$$

где C — произвольная постоянная.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 462–463).

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[a(x+\beta)^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + f(w), \qquad a > 0.$

Это уравнение описывает распространение нелинейных волн в неоднородной среде.

1°. Решение с функциональным разделением переменных при $n \neq 2$:

$$w = w(r), \qquad r^2 = k\left[\frac{1}{4}(t+C)^2 - \frac{(x+\beta)^{2-n}}{a(2-n)^2}\right],$$

где знак постоянной k должен совпадать со знаком выражения в квадратных скобках, а функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + \frac{2}{2-n}\frac{1}{r}w'_r = \frac{4}{k}f(w).$$

Подстановка $\xi = r^{\frac{n}{n-2}}$ приводит к обобщенному уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{\xi\xi} = \frac{4(2-n)^2}{kn^2}\xi^{-\frac{4}{n}} f(w). \tag{1}$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *а*) указан ряд точных решений уравнения (1) для некоторых зависимостей $f = f(w)$.

2°. Точное решение при $n = 2$:

$$w = w(z), \quad z = At + B\ln|x+\beta|,$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $w = w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(aB^2 - A^2)w''_{zz} + aBw'_z + f(w) = 0. \tag{2}$$

Решение уравнения (2) при $A = \pm B\sqrt{a}$ в неявном виде:

$$aB\int \frac{dw}{f(w)} = -z + C,$$

где C — произвольная постоянная.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 463).

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx^{n-1}\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(w), \qquad a > 0.$

1°. Решение с функциональным разделением переменных при $n \neq 2$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \tfrac{1}{4}a(2-n)^2(t+C)^2 - x^{2-n}.$$

Здесь C — произвольная постоянная, а функция $w = w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\xi w''_{\xi\xi} + Aw'_\xi - Bf(w) = 0, \tag{1}$$

где
$$A=\frac{a(4-3n)+2b}{2a(2-n)},\quad B=\frac{1}{a(2-n)^2}.$$

При $A\neq 1$ подстановка $\xi=kz^{\frac{1}{1-A}}$ $(k=\pm 1)$ приводит (1) к обобщенному уравнению Эмдена — Фаулера
$$w''_{zz}-\frac{kB}{(1-A)^2}z^{\frac{2A-1}{1-A}}f(w)=0. \tag{2}$$

В частном случае $A=\frac{1}{2}$, что соответствует $b=a(n-1)$, решение уравнения (2) имеет вид
$$\int\Bigl[C_1+8kBF(w)\Bigr]^{-1/2}dw=\pm z+C_2,\qquad F(w)=\int f(w)\,dw,$$
где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведен ряд точных решений уравнения (2) для некоторых зависимостей $f=f(w)$.

2°. Точное решение при $n=2$:
$$w=w(y),\quad y=At+B\ln|x|+C,$$
где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $w(y)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением
$$(aB^2-A^2)w''_{yy}+(b-a)Bw'_y+f(w)=0. \tag{3}$$

Решения уравнения (3) при $A=\pm B\sqrt{a}$ в неявном виде:
$$(b-a)B\int\frac{dw}{f(w)}=-y+C_1.$$

Решения уравнения (3) при $b=a$:
$$\int\Bigl[C_1+\frac{2}{A^2-aB^2}F(w)\Bigr]^{-1/2}dw=\pm y+C_2,\qquad F(w)=\int f(w)\,dw.$$

При $A\neq\pm B\sqrt{a}$ и $b\neq a$ подстановка $u(w)=\dfrac{aB^2-A^2}{B(a-b)}w'_y$ приводит (3) к уравнению Абеля
$$uu'_w-u=\frac{A^2-aB^2}{B^2(a-b)^2}f(w),$$
точные решения которого для различных функций $f=f(w)$ приведены в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+x^{n-1}f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции
$$w_1=w\bigl(C_1^2x,\ \pm C_1^{2-n}t+C_2\bigr),$$
где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение с функциональным разделением переменных при $n\neq 2$:
$$w=w(z),\quad z=\bigl|a(2-n)^2(t+C)^2-4x^{2-n}\bigr|^{1/2},$$
где C — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением
$$w''_{zz}+\frac{2}{a(2-n)z}\bigl[a(1-n)+f(w)\bigr]w'_z=0. \tag{1}$$

Подстановка $u(w)=zw'_z$ приводит (1) к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными. После интегрирования получим решение в неявном виде:
$$\int\frac{dw}{anw-2F(w)+C_1}=\frac{1}{a(2-n)}\ln z+C_2,\qquad F(w)=\int f(w)\,dw,$$
где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Автомодельное решение при $n \neq 2$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = x|t|^{\frac{2}{n-2}},$$

где функция $w = w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\left[a\xi^{n-1} - \frac{4}{(n-2)^2}\xi\right] w''_{\xi\xi} + \left[\xi^{n-2} f(w) + \frac{2(n-4)}{(n-2)^2}\right] w'_\xi = 0.$$

4°. Точное решение при $n = 2$:

$$w = w(y), \quad y = At + B\ln|x| + C,$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $w(y)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(aB^2 - A^2)w''_{yy} + B\big[f(w) - a\big]w'_y = 0,$$

решение которого при $A \neq \pm B\sqrt{a}$ дается формулой

$$\frac{aB^2 - A^2}{B}\int \frac{dw}{F(w) - aw + C_1} = -y, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw.$$

⊙ *Литература для уравнения* 3.4.3.5: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 465–466).

6. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x^{n-1} f(w)\frac{\partial w}{\partial x} + g(w).$

1°. Решение с функциональным разделением переменных при $n \neq 2$:

$$w = w(z), \quad z = \big[ka(2-n)^2(t+C)^2 - 4kx^{2-n}\big]^{1/2}, \qquad k = \pm 1,$$

где C — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{zz} + \frac{2}{a(2-n)}\big[a(1-n) + f(w)\big]\frac{1}{z}w'_z - \frac{1}{ak(2-n)^2}g(w) = 0.$$

2°. Точное решение при $n = 2$:

$$w = w(\xi), \quad \xi = At + B\ln|x| + C,$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $w(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(aB^2 - A^2)w''_{\xi\xi} + B\big[f(w) - a\big]w'_\xi + g(w) = 0. \qquad (1)$$

Решение уравнения (1) при $A = \pm B\sqrt{a}$:

$$B\int \big[f(w) - a\big]\frac{dw}{g(w)} = -\xi + C_1.$$

В общем случае замена $u(w) = w'_\xi$ приводит (1) к уравнению Абеля, точные решения которого для различных функций $f = f(w)$ и $g = g(w)$ можно найти в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 466).

7. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w), \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 3.4.3.9 при $b = 0$.

8. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\lambda x}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + f(w), \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 3.4.3.9 при $b = a\lambda$.

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(w), \qquad a > 0.$

Уравнение распространения нелинейных волн в неоднородной среде.

Решение с функциональным разделением переменных:

$$w = w(z), \quad z = \bigl[4ke^{-\lambda x} - ak\lambda^2(t+C)^2\bigr]^{1/2}, \qquad k = \pm 1,$$

где C — произвольная постоянная, а функция $w = w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{zz} + \frac{2(a\lambda - b)}{a\lambda}\,\frac{1}{z}\,w'_z + \frac{1}{ak\lambda^2}f(w) = 0. \tag{1}$$

При $b = a\lambda$ общее решение уравнения (1) имеет вид

$$\int \left[C_1 - \frac{2}{ak\lambda^2}F(w)\right]^{-1/2} dw = \pm z + C_2, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

При $b \neq \frac{1}{2}a\lambda$ подстановка $\xi = z^{\frac{2b - a\lambda}{a\lambda}}$ приводит (1) к обобщенному уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{\xi\xi} + \frac{a}{k(2b - a\lambda)^2}\,\xi^{\frac{4(a\lambda - b)}{2b - a\lambda}} f(w) = 0. \tag{2}$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведен ряд точных решений уравнения (2) для некоторых зависимостей $f = f(w)$.

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e^{\lambda x}f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

При $\lambda = 0$ см. уравнение 3.4.2.3. Далее считаем, что $\lambda \neq 0$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w\bigl(x + 2C_1,\ \pm e^{\lambda C_1}t + C_2\bigr),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение с функциональным разделением переменных при $\lambda \neq 0$:

$$w = w(z), \quad z = \bigl|4e^{-\lambda x} - a\lambda^2(t+C)^2\bigr|^{1/2},$$

где C — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{zz} + \frac{2}{z}\left[1 - \frac{1}{a\lambda}f(w)\right]w'_z = 0. \tag{1}$$

Подстановка $u(w) = zw'_z$ приводит (1) к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными. После интегрирования получим решение в неявном виде

$$\int \frac{dw}{2F(w) - a\lambda w + C_1} = \frac{1}{a\lambda}\ln z + C_2, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Обобщенно-автомодельное решение:

$$w = w(\xi), \quad \xi = t^2 e^{\lambda x},$$

где функция $w = w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(a\lambda^2\xi^2 - 4\xi)w''_{\xi\xi} + \bigl[\lambda\xi f(w) + a\lambda^2\xi - 2\bigr]w'_\xi = 0.$$

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 466–467).

11. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e^{\lambda x}f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(w).$

1°. Решение с функциональным разделением переменных при $\lambda \neq 0$:

$$w = w(z), \quad z = \bigl[4ke^{-\lambda x} - ak\lambda^2(t+C)^2\bigr]^{1/2}, \qquad k = \pm 1,$$

где C — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{zz} + \frac{2}{z}\left[1 - \frac{1}{a\lambda}f(w)\right]w'_z + \frac{1}{ak\lambda^2}g(w) = 0.$$

2°. При $\lambda = 0$ существует точное решение типа бегущей волны: $w = w(\alpha x + \beta t)$.

12. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + aw\ln w + \bigl[h(x) + p(t)\bigr]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$f(x)\varphi''_{xx} + g(x)\varphi'_x + a\varphi\ln\varphi + \bigl[C + h(x)\bigr]\varphi = 0,$$
$$\psi''_{tt} - a\psi\ln\psi + \bigl[C - p(t)\bigr]\psi = 0,$$

C — произвольная постоянная.

3.4.4. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(w)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g\Bigl(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2 + g(t)w + h_2(t)x^2 + h_1(t)x + h_0(t).$

Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной x:

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''_{tt} = 2[2f(t) + a]\varphi^2 + g(t)\varphi + h_2(t),$$
$$\psi''_{tt} = 2[2f(t) + a]\varphi\psi + g(t)\psi + h_1(t),$$
$$\chi''_{tt} = 2a\varphi\chi + f(t)\psi^2 + g(t)\chi + h_0(t).$$

⊙ *Литература*: V. A. Galaktionov (1995); рассматривался случай $f = \text{const}$ и $h_1 = h_2 = 0$.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw^4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)w^5.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1 w\bigl(x, \pm C_1^2 t + C_2\bigr),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Пусть $u = u(x)$ — любое нетривиальное решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$au''_{xx} + f(x)u = 0. \qquad (1)$$

Преобразование

$$\xi = \int\frac{dx}{u^2}, \quad z = \frac{w}{u}$$

приводит исходное уравнение к более простому уравнению вида 3.1.5.5 при $n = 4$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = az^4\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}.$$

Это уравнение имеет, например, такие решения (A, B, C, D, λ — произвольные постоянные):

$$z(\xi,t) = A\xi t + B\xi + Ct + D,$$
$$z(\xi,t) = \lambda^{-1/4}(t + C)^{-1/2}\left[\frac{3\lambda}{4A^2 a} + (A\xi + B)^2\right]^{1/2}.$$

Первое решение является вырожденным, а второе — частным случаем решения в виде произведения функций разных аргументов $z(\xi,t) = f(\xi)g(t)$. Существует также решение типа бегущей волны $z = z(\alpha\xi + \beta t)$ и автомодельное решение вида

$$z = t^k\varphi(\zeta), \quad \zeta = \xi t^{-2k-1},$$

где k — произвольная постоянная.

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = (\pm 2\lambda t + C)^{-1/2} g(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $g = g(x)$ определяется из уравнения Ермакова

$$a g''_{xx} + f(x) g - 3\lambda^2 g^{-3} = 0. \tag{2}$$

Если известно частное решение $u = u(x)$ линейного уравнения (1), то общее решение нелинейного уравнения (2) имеет вид (см., например, В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001 *a*):

$$Ag^2 = \frac{3\lambda^2}{a} u^2 + u^2 \left(B + A \int \frac{dx}{u^2} \right)^2,$$

где A, B — произвольные постоянные ($A \neq 0$).

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 468–469).

3. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial}{\partial x}\left(w^{-4/3} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + f(x) w^{-1/3}, \quad a > 0.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^3 w\bigl(x,\, \pm C_1^{-2} t + C_2\bigr),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Пусть $u = u(x)$ — любое нетривиальное (частное) решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$a u''_{xx} - \tfrac{1}{3} f(x) u = 0. \tag{1}$$

Преобразование

$$\xi = \int \frac{dx}{u^2}, \quad z = w u^3 \tag{2}$$

приводит исходное уравнение к более простому уравнению вида 3.1.6.5 при $n = -4/3$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a \frac{\partial}{\partial \xi}\left(z^{-4/3} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right).$$

3°. При $f = b = \text{const}$ решение вспомогательного уравнения (1), которое входит в преобразование (2), описывается формулами:

$$u(x) = \begin{cases} C_1 \exp(\lambda x) + C_2 \exp(-\lambda x) & \text{при } ab > 0, \\ C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x) & \text{при } ab < 0, \end{cases}$$

где $\lambda = \bigl|\tfrac{1}{3} b/a\bigr|^{1/2}$; C_1, C_2 — произвольные постоянные.

При $f(x) = bx^m$ или $f(x) = be^{\beta x}$ решения уравнения (1) выражаются через функции Бесселя.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 469).

4. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial}{\partial x}\left(w^n \frac{\partial w}{\partial x} \right) + f(x) w^{n+1} + g(t) w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (C — произвольная постоянная)

$$a(\varphi^n \varphi'_x)'_x + f(x)\varphi^{n+1} + C\varphi = 0,$$
$$\psi''_{tt} - g(t)\psi + C\psi^{n+1} = 0.$$

5. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + f(x) e^{\lambda w} + g(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w = \varphi(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (C — произвольная постоянная)

$$a(e^{\lambda\varphi} \varphi'_x)'_x + f(x) e^{\lambda\varphi} + C = 0,$$
$$\psi''_{tt} - g(t) + C e^{\lambda\psi} = 0.$$

Первое из этих уравнений с помощью замены $U = e^{\lambda\varphi}$ приводится к линейному уравнению $aU''_{xx} + \lambda f(x) U + \lambda C = 0$.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right].$

Это уравнение встречается в задачах волновой и газовой динамики.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1 x + C_2, C_1 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Преобразование

$$x = \tau, \quad t = z, \quad u = \int f(w)\,dw$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left[g(u)\frac{\partial w}{\partial z}\right],$$

где функция $g = g(u)$ задается параметрически

$$u = \int f(w)\,dw, \quad g(u) = \frac{1}{f(w)}.$$

3°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x \pm \lambda t,$$

где зависимость $w = w(z)$ задается неявно с помощью формулы (A, B — произвольные постоянные)

$$\lambda^2 w - \int f(w)\,dw = Az + B.$$

4°. Автомодельное решение:

$$w = w(\xi), \quad \xi = \frac{x+a}{t+b},$$

где a, b — произвольные постоянные, а функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\xi^2 w'_\xi)'_\xi = \left[f(w)w'_\xi\right]'_\xi,$$

которое допускает первый интеграл

$$\left[\xi^2 - f(w)\right]w'_\xi = C. \qquad (1)$$

Частному случаю $C = 0$ отвечает решение (задается в неявном виде):

$$\xi^2 = f(w).$$

При $C \neq 0$ принимая в (1) w за независимую переменную, для функции $\xi = \xi(w)$ получим уравнение Риккати

$$C\xi'_w = \xi^2 - f(w). \qquad (2)$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведено много точных решений уравнения (2) для различных зависимостей $f = f(w)$.

Замечание. Уравнение (2) подстановкой $\xi = -Cy'_w/y$ сводится к линейному уравнению второго порядка $y''_{ww} = C^{-2} f(w) y$.

5°. Точные решения в неявном виде:

$$x + t\sqrt{f(w)} = \varphi(w),$$
$$x - t\sqrt{f(w)} = \psi(w),$$

где $\varphi(w)$, $\psi(w)$ — произвольные функции.

6°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = C_1 v^2 + C_2 v + \int f(w)(2C_1 w + C_3)\,dw + C_4,$$
$$t = (2C_1 w + C_3)v + C_2 w + C_5.$$

Здесь и далее $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные.

7°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = [C_1F(w) + C_2]v + C_3F(w) + C_4, \quad F(w) = \int f(w)\,dw,$$
$$t = \frac{1}{2}C_1v^2 + C_3v + \int [C_1F(w) + C_2]\,dw + C_5.$$

8°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = [C_1F(w) + C_2]v^2 + C_3F(w) + C_4 + 2\int \left\{ f(w)\int [C_1F(w) + C_2]\,dw \right\} dw,$$
$$t = \frac{1}{3}C_1v^3 + C_3v + 2v\int [C_1F(w) + C_2]\,dw + C_5.$$

9°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = (C_1e^{\lambda v} + C_2e^{-\lambda v})H(w) + C_3,$$
$$t = \frac{1}{\lambda}(C_1e^{\lambda v} - C_2e^{-\lambda v})\frac{1}{f(w)}H'_w(w) + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4, \lambda$ — произвольные постоянные, функция $H = H(w)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\mathbf{L}_f[H] - \lambda^2 H = 0$, а дифференциальный оператор $\mathbf{L}_f$ определяется выражением

$$\mathbf{L}_f[\varphi] \equiv \frac{d}{dw}\left[\frac{1}{f(w)}\frac{d\varphi}{dw}\right]. \tag{3}$$

10°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = [C_1\sin(\lambda v) + C_2\cos(\lambda v)]Z(w) + C_3,$$
$$t = \frac{1}{\lambda}[C_2\sin(\lambda v) - C_1\cos(\lambda v)]\frac{1}{f(w)}Z'_w(w) + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4, \lambda$ — произвольные постоянные, функция $Z = Z(w)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\mathbf{L}_f[Z] + \lambda^2 Z = 0$, а дифференциальный оператор $\mathbf{L}_f$ определяется выражением (3).

11°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = [2C_1F(w) + C_3]v + C_2F(w) + C_5, \quad F(w) = \int f(w)\,dw,$$
$$t = C_1v^2 + C_2v + \int [2C_1F(w) + C_3]\,dw + C_4.$$

12°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = \frac{1}{2}C_1v^2 + C_3v + \int f(w)(C_1w + C_2)\,dw + C_5,$$
$$t = (C_1w + C_2)v + C_3w + C_4.$$

13°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = \frac{1}{3}C_1v^3 + C_3v + 2v\int f(w)(C_1w + C_2)\,dw + C_5,$$
$$t = (C_1w + C_2)v^2 + C_3w + C_4 + 2\int \left\{ \int f(w)(C_1w + C_2)\,dw \right\} dw.$$

14°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = \frac{1}{\lambda}(C_1e^{\lambda v} - C_2e^{-\lambda v})H'_w(w) + C_3,$$
$$t = (C_1e^{\lambda v} + C_2e^{-\lambda v})H(w) + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4, \lambda$ — произвольные постоянные, а функция $H = H(w)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $H''_{ww} - \lambda^2 f(w)H = 0$.

15°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = \frac{1}{\lambda}[C_2\sin(\lambda v) - C_1\cos(\lambda v)]Z'_w(w) + C_3,$$
$$t = [C_1\sin(\lambda v) + C_2\cos(\lambda v)]Z(w) + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4, \lambda$ — произвольные постоянные, а функция $Z = Z(w)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $Z''_{ww} + \lambda^2 f(w)Z = 0$.

16°. Исходное уравнение можно представить в виде системы уравнений

$$f(w)\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4}$$

Преобразование годографа

$$x = x(w,v), \quad t = t(w,v), \tag{5}$$

(w, v принимаются за независимые переменные, а x, t — за зависимые переменные) приводит (4) к линейной системе

$$f(w)\frac{\partial t}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial w}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial t}{\partial w}. \tag{6}$$

Исключая отсюда t, для функции $x = x(w,v)$ получим линейное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{1}{f(w)}\frac{\partial x}{\partial w}\right] - \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0. \tag{7}$$

Аналогичным образом из системы (6) для функции $t = t(w,v)$ имеем другое линейное уравнение

$$\frac{\partial^2 t}{\partial w^2} - f(w)\frac{\partial^2 t}{\partial v^2} = 0. \tag{8}$$

Процедура построения точных решений исходного нелинейного уравнения состоит из двух этапов. Сначала строится точное решение линейного уравнения (7) для $x = x(w,v)$. Затем это решение подставляется в линейную систему (6), откуда определяется функция $t = t(w,v)$ в виде

$$t = \int_{v_0}^{v} \frac{1}{f(w)}\frac{\partial x}{\partial w}(w,\xi)\,d\xi + \int_{w_0}^{w}\frac{\partial x}{\partial v}(\eta, v_0)\,d\eta, \tag{9}$$

где w_0 и v_0 — любые. Полученные указанным способом выражения вида (5) будут давать точное исходного уравнения в параметрической форме.

Аналогичным образом сначала можно строить точное решение линейного уравнения (8) для $t = t(w,v)$, а затем из (6) определять функцию $x = x(w,v)$.

17°. Точные решения уравнения (7), содержащие четные степени v:

$$x = \sum_{k=0}^{n}\varphi_k(w)v^{2k}. \tag{10}$$

Здесь функции $\varphi_k = \varphi_k(w)$ задаются рекуррентными формулами

$$\varphi_n(w) = A_nF(w) + B_n, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$
$$\varphi_{k-1}(w) = A_kF(w) + B_k + 2k(2k-1)\int f(w)\left\{\int\varphi_k(w)\,dw\right\}dw,$$

где A_k, B_k — произвольные постоянные ($k = n, \ldots, 1$).

Зависимость $t = t(w,v)$ определяется по формуле (9) и вместе с выражением (10) дает решение исходного нелинейного уравнения в параметрической форме.

18°. Точные решения уравнения (7), содержащие нечетные степени v:

$$x = \sum_{k=0}^{n}\psi_k(w)v^{2k+1}. \tag{11}$$

Здесь функции $\psi_k = \psi_k(w)$ задаются рекуррентными формулами

$$\psi_n(w) = A_nF(w) + B_n, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$
$$\psi_{k-1}(w) = A_kF(w) + B_k + 2k(2k+1)\int f(w)\left\{\int\psi_k(w)\,dw\right\}dw,$$

где A_k, B_k — произвольные постоянные ($k = n, \ldots, 1$).

Зависимость $t = t(w, v)$ определяется по формуле (9) и вместе с выражением (11) дает решение исходного нелинейного уравнения в параметрической форме.

⊙ *Литература для уравнения* 3.4.4.6: W. F. Ames, R. J. Lohner, E. Adams (1981), N. H. Ibragimov (1994, pp. 208–211), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2001 *b*), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 163–166).

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + g(w).$

1°. Пусть функция $f = f(w)$ задается произвольно, а функция $g = g(w)$ определяется по формуле

$$g(w) = -a^2 \frac{f'(w)}{f^3(w)} + b,$$

где a, b — некоторые числа. В этом случае существует решение с функциональным разделением переменных, которое задается неявно

$$\int f(w)\,dw = at - \frac{1}{2}bx^2 + C_1 x + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Пусть функции $f(w)$ и $g(w)$ задаются параметрически следующими формулами:

$$\begin{aligned} f &= \frac{Ae^{bz}}{\varphi'_z(z)}, \\ g &= a^2\varphi''_{zz}(z) + Ace^{bz}, \\ w &= \varphi(z), \end{aligned}$$

где $\varphi(z)$ — произвольная функция, z — параметр, A, a, b, c — некоторые числа. Тогда рассматриваемое уравнение имеет точное решение

$$w = \varphi(z), \quad z = at + \theta(x),$$

где

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{b}\ln\bigl|C_1\cos\bigl(\sqrt{bc}\,x\bigr) + C_2\sin\bigl(\sqrt{bc}\,x\bigr)\bigr| && \text{при } bc > 0, \\ \theta &= \frac{1}{b}\ln\bigl|C_1\exp\bigl(\sqrt{|bc|}\,x\bigr) + C_2\exp\bigl(-\sqrt{|bc|}\,x\bigr)\bigr| && \text{при } bc < 0, \\ \theta &= \frac{1}{b}\ln|x + C_1| + C_2 && \text{при } c = 0, \\ \theta &= \tfrac{1}{2}cx^2 + C_1 x + C_2 && \text{при } b = 0, \end{aligned}$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 256).

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(w)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(w).$

Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[f(w) - \lambda^2]w''_{zz} + g(w)w'_z + h(w) = 0.$$

Последнее с помощью замены $u(w) = w'_z$ приводится к уравнению Абеля

$$[f(w) - \lambda^2]uu'_w + g(w)u + h(w) = 0. \tag{1}$$

Подстановка $\xi = -\displaystyle\int \frac{g(w)\,dw}{f(w) - \lambda^2}$ приводит (1) к каноническому виду

$$uu'_\xi - u = F(\xi), \tag{2}$$

где функция $F = F(\xi)$ задается параметрически с помощью формул

$$F(\xi) = \frac{h(w)}{g(w)}, \qquad \xi = -\int \frac{g(w)\,dw}{f(w) - \lambda^2}.$$

Большое число точных решений уравнений Абеля (2) для различных зависимостей $F = F(\xi)$ приведено в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + g(w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(w).$

Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\{[f(w) - \lambda^2]w'_z\}'_z + g(w)w'_z + h(w) = 0.$$

Последнее с помощью замены

$$u(w) = [f(w) - \lambda^2]w'_z,$$

приводится к уравнению Абеля

$$uu'_w + g(w)u + h(w)[f(w) - \lambda^2] = 0. \tag{1}$$

Подстановка $\xi = -\int g(w)\,dw$ преобразует (1) к каноническому виду

$$uu'_\xi - u = F(\xi), \tag{2}$$

где функция $F = F(\xi)$ задается параметрически с помощью формул

$$F(\xi) = \frac{h(w)}{g(w)}[f(w) - \lambda^2], \qquad \xi = -\int g(w)\,dw.$$

Большое число точных решений уравнений Абеля (2) для различных зависимостей $F = F(\xi)$ приведено в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(w)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + af'_w(w)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$

Уравнения этого вида встречаются в теории жидких кристаллов.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1 x + C_2, C_1 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. В общем случае это уравнение имеет точные решения следующих видов:

$$w(x,t) = w(z), \quad z = kx + \lambda t \quad \text{(решение типа бегущей волны)},$$
$$w(x,t) = w(\xi), \quad \xi = \frac{x+b}{t+c} \quad \text{(автомодельное решение)},$$

где k, λ, b, c — произвольные постоянные.

3°. Структура других точных решений для конкретных функций $f(w)$:

$$f(w) = Aw + B, \qquad w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t);$$
$$f(w) = Aw^k, \qquad w(x,t) = \varphi(x)\psi(t);$$
$$f(w) = Ae^{\beta w}, \qquad w(x,t) = \varphi(x) + \psi(t).$$

4°. Качественный анализ структуры решений исходного уравнения рассматривался в работах R. T. Glassey, J. K. Hunter, Y. Zheng (1997), A. A. Melikyan (1998).

3.4.5. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x,w)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g\Bigl(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x)w^m\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^2 w\bigl(x, \pm C_1^m t + C_2\bigr),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = g(t)h(x),$$

где функции $g = g(t)$ и $h = h(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$g''_{tt} - \lambda g^{m+1} = 0, \qquad (1)$$

$$h''_{xx} - \lambda\bigl[f(x)\bigr]^{-1} h^{1-m} = 0, \qquad (2)$$

λ — произвольная постоянная.

Общее решение уравнения (1) записывается в неявном виде

$$\int \left(C_1 + \frac{2\lambda}{m+2} g^{m+2}\right)^{-1/2} dg = C_2 \pm t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Отсюда, в частности, при $C_1 = 0$ для функции $g(t)$ получим

$$g(t) = (at + C)^{-2/m}, \qquad a = \pm\sqrt{\frac{\lambda m^2}{2(m+2)}}.$$

При $m = 1$ общее решение уравнения (2) имеет вид

$$h(x) = \lambda \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)}{f(\xi)}\, d\xi + Ax + B,$$

где A, B, x_0 — произвольные постоянные.

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*, разд. 2.3 и 2.7) приведено много точных решений обобщенного уравнения Эмдена — Фаулера (2) для различных функций $f = f(x)$.

3°. Преобразование

$$u(z,t) = \frac{1}{x} w(x,t), \quad z = \frac{1}{x}$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = z^{4-m} f\left(\frac{1}{z}\right) u^m \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

2. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(x) w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right].}$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^2 w\bigl(x,\, \pm C_1^m t + C_2\bigr),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = g(t)h(x),$$

где функции $g = g(t)$ и $h = h(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$g''_{tt} - \lambda g^{m+1} = 0, \qquad (1)$$

$$[f(x) h^m h'_x]'_x - \lambda h = 0, \qquad (2)$$

λ — произвольная постоянная.

Общее решение уравнения (1) записывается в неявном виде

$$\int \left(C_1 + \frac{2\lambda}{m+2} g^{m+2}\right)^{-1/2} dg = C_2 \pm t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Отсюда, в частности, при $C_1 = 0$ для функции $g(t)$ имеем

$$g(t) = (at + C)^{-2/m}, \qquad a = \pm\sqrt{\frac{\lambda m^2}{2(m+2)}}.$$

Преобразование

$$z = \int \frac{dx}{f(x)}, \quad \Phi = h^{m+1}$$

приводит (2) к обобщенному уравнению Эмдена — Фаулера

$$\Phi''_{zz} - F(z)\Phi^{\frac{1}{m+1}} = 0, \tag{3}$$

где функция $F = F(z)$ задается параметрически с помощью формул

$$F = \lambda(m+1)f(x), \qquad z = \int \frac{dx}{f(x)}.$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*, разд. 2.3 и 2.7) приведено много точных решений обобщенного уравнения Эмдена — Фаулера (2) для различных функций $F = F(z)$.

3°. Преобразование

$$w(x,t) = \bigl[\psi(x)\bigr]^{\frac{1}{m+1}} u(\xi,t), \quad \xi = \int \bigl[\psi(x)\bigr]^{\frac{m+2}{m+1}} dx, \qquad \psi(x) = \int \frac{dx}{f(x)}$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\mathcal{F}(\xi) u^m \frac{\partial u}{\partial \xi}\right],$$

где функция $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\xi)$ задается параметрически с помощью формул

$$\mathcal{F} = f(x)\bigl[\psi(x)\bigr]^{\frac{3m+4}{m+1}}, \quad \xi = \int \bigl[\psi(x)\bigr]^{\frac{m+2}{m+1}} dx, \qquad \psi(x) = \int \frac{dx}{f(x)}.$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = w^4 f\left(\dfrac{w}{x}\right)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1 w\bigl(C_1^{-1}x,\ \pm C_1 t + C_2\bigr),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Выполнив преобразование

$$u(z,t) = \frac{1}{x} w(x,t), \quad z = \frac{1}{x}$$

получим более простое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u^4 f(u)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

которое имеет точное решение типа бегущей волны $u = u(z + \lambda t)$ и автомодельное решение вида $u = u(z/t)$.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = w^4 f\left(\dfrac{w}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\right)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\sqrt{ax^2+bx+c}, \qquad z = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

приводит к уравнению вида 3.4.4.8:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u^4 f(u)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (ac - \tfrac{1}{4}b^2)u^5 f(u),$$

которое имеет точное решение типа бегущей волны $u = u(z + \lambda t)$.

3.4.6. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(t,w)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g\Bigl(x,t,w,\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-2} w\bigl(C_1 x + C_2,\ t\bigr),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Вырожденные решения:

$$w(x,t) = (C_1 t + C_2)(C_3 x + C_4)^{1/2},$$
$$w(x,t) = (C_1 t + C_2)x + \int_a^t (t-\tau)(C_1\tau + C_2)^2 f(\tau)\,d\tau + C_3 t + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$, a — произвольные постоянные.

3°. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной x:

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''_{tt} = 6f(t)\varphi^2,$$
$$\psi''_{tt} = 6f(t)\varphi\psi,$$
$$\chi''_{tt} = 2f(t)\varphi\chi + f(t)\psi^2.$$

4°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \Phi(t)\Psi(x),$$

где функции $\Phi = \Phi(t)$ и $\Psi = \Psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (C — произвольная постоянная)

$$\Phi''_{tt} = Cf(t)\Phi^2,$$
$$(\Psi\Psi'_x)'_x = C\Psi.$$

Последнее уравнение является автономным и имеет частное решение $\Psi = \frac{1}{6}Cx^2$; в общем случае оно интегрируется в квадратурах.

2. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(t)\frac{\partial}{\partial x}\left(w\frac{\partial w}{\partial x}\right) + g(t)w + h_2(t)x^2 + h_1(t)x + h_0(t).$

Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной x:

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''_{tt} = 6f(t)\varphi^2 + g(t)\varphi + h_2(t),$$
$$\psi''_{tt} = 6f(t)\varphi\psi + g(t)\psi + h_1(t),$$
$$\chi''_{tt} = 2f(t)\varphi\chi + f(t)\psi^2 + g(t)\chi + h_0(t).$$

3. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = [a(t)w + b(t)]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c(t)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + d(t)w + e(t)x^2 + f(t)x + g(t).$

Имеется точное решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по x:

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t).$$

⊙ *Литература*: V. A. Galaktionov (1995); рассматривался случай $a = 1$, $b = e = f = 0$, $c = \mathrm{const}$.

3.4.7. Другие уравнения, линейные относительно старших производных

1. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + f(t)\frac{\partial w}{\partial t} = g(t)\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\frac{\partial w}{\partial x}\right).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w\bigl(C_1 x + C_2,\, t\bigr) - \frac{2}{\lambda}\ln|C_1|,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(C_1 x + C_2) + C_3\int F(t)\,dt + C_4, \qquad F(t) = \exp\left[-\int f(t)\,dt\right],$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

3°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(\lambda C_1 x^2 + C_2 x + C_3) + u(t),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функция $u = u(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$u''_{tt} + f(t)u'_t = 2C_1 g(t)e^{\lambda u}.$$

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + f(w)\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[g(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right].$

1°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\int \frac{k^2 g(w) - \lambda^2}{\lambda F(w) + C_1}\,dw = kx + \lambda t + C_2, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2, k, λ — произвольные постоянные.

2°. О точных решениях данного уравнения для некоторых конкретных функций $f(w)$ и $g(w)$ см. работы В. А. Байкова, Р. К. Газизова, Н. Х. Ибрагимова (1989), N. H. Ibragimov (1994, pp. 243–244).

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f\left(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bw + g(t).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$\begin{aligned} w_1 &= w(x,t) + C_1\operatorname{ch}(kt) + C_2\operatorname{sh}(kt) &&\text{при } b = k^2 > 0,\\ w_2 &= w(x,t) + C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt) &&\text{при } b = -k^2 < 0, \end{aligned}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(x).$$

Здесь функции $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \varphi''_{tt} - b\varphi - g(t) &= 0,\\ a\psi''_{xx} + f\bigl(x,\psi'_x\bigr) + b\psi &= 0. \end{aligned}$$

Решение первого уравнения для $\varphi(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= C_1\operatorname{ch}(kt) + C_2\operatorname{sh}(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t g(\tau)\operatorname{sh}\bigl[k(t-\tau)\bigr]\,d\tau &&\text{при } b = k^2 > 0,\\ \varphi(t) &= C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t g(\tau)\sin\bigl[k(t-\tau)\bigr]\,d\tau &&\text{при } b = -k^2 < 0, \end{aligned}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Специальный случай. При $f(x,w_x) = f(w_x)$ существуют более сложные решения вида $w(x,t) = \varphi(t) + \psi(z)$, где $z = x + \lambda t$.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f\left(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + g\left(t,\ \dfrac{\partial w}{\partial t}\right).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (C — произвольная постоянная)

$$\begin{aligned} a\varphi''_{xx} + f\bigl(x,\varphi'_x\bigr) &= C,\\ \psi''_{tt} - g\bigl(t,\psi'_t\bigr) &= C. \end{aligned}$$

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f\left(x,\, \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + g\left(t,\, \dfrac{\partial w}{\partial t}\right) + bw.$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (C — произвольная постоянная)

$$a\varphi''_{xx} + f\bigl(x, \varphi'_x\bigr) + b\varphi = C,$$
$$\psi''_{tt} - g\bigl(t, \psi'_t\bigr) - b\psi = C.$$

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + wf\left(x,\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + wg\left(t,\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial t}\right) + bw\ln w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (C — произвольная постоянная)

$$a\varphi''_{xx} + \varphi f\bigl(x, \varphi'_x/\varphi\bigr) + b\varphi\ln\varphi + C\varphi = 0,$$
$$\psi''_{tt} - \psi g\bigl(t, \psi'_t/\psi\bigr) - b\psi\ln\psi + C\psi = 0.$$

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

При $f(z) = -z$ это уравнение встречается в аэродинамике (в теории околозвуковых течений газа).

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-1} w(C_1 x + C_2, C_1 t + C_3) + C_4 t + C_5,$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Вырожденное решение:

$$w(x,t) = Axt + Bx + Ct + D,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

3°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = At^2 + Bt + \varphi(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $2A = f(\varphi'_x)\varphi''_{xx}$. Его общее решение можно представить в параметрической форме (C_1, C_2 — произвольные постоянные):

$$x = \frac{1}{2A}\int f(\xi)\,d\xi + C_1, \qquad \varphi = \frac{1}{2A}\int \xi f(\xi)\,d\xi + C_2.$$

4°. Точное решение более общего вида:

$$w(x,t) = At^2 + Bt + \varphi(z), \qquad z = x + \lambda t,$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $2A = \bigl[f(\varphi'_z) - \lambda^2\bigr]\varphi''_{zz}$. Его общее решение можно представить в параметрической форме (C_1, C_2 — произвольные постоянные):

$$z = \frac{1}{2A}\int f(\xi)\,d\xi - \frac{\lambda^2}{2A}\xi + C_1, \qquad \varphi = \frac{1}{2A}\int \xi f(\xi)\,d\xi - \frac{\lambda^2}{4A}\xi^2 + C_2.$$

5°. Автомодельное решение:

$$w = x\psi(z), \quad z = x/t,$$

где функция $\psi = \psi(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[f(z\psi'_z + \psi) - z^2](z\psi''_{zz} + 2\psi'_z) = 0.$$

Приравнивая выражение в квадратных скобках нулю, имеем

$$f(z\psi'_z + \psi) - z^2 = 0.$$

Его общее решение можно представить в параметрической форме:

$$z = \pm\sqrt{f(\tau)}, \quad \psi = \frac{1}{2\sqrt{f(\tau)}} \int \frac{\tau f'_\tau(\tau)}{\sqrt{f(\tau)}}\, d\tau + C.$$

6°. Преобразование Лежандра

$$u(z,\tau) = tz + x\tau - w(x,t), \quad z = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \tau = \frac{\partial w}{\partial x},$$

где u — новая зависимая переменная, а z, τ — новые независимые переменные, приводит к линейному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = f(\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

7°. Замена $v(x,t) = \dfrac{\partial w}{\partial x}$ приводит к уравнению вида 3.4.4.6:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(v)\frac{\partial v}{\partial x}\right].$$

8°. Ниже указаны точные решения уравнения для некоторых конкретных зависимостей $f = f(U)$.

Специальный случай 1. Пусть $f(U) = aU$.

1°. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной x:

$$w = (C_1t + C_2)x^2 + \left[\tfrac{1}{3}aC_1^{-2}(C_1t + C_2)^4 + C_3t + C_4\right]x + \\ + \tfrac{1}{63}a^2C_1^{-4}(C_1t + C_2)^7 + \tfrac{1}{6}aC_1C_3t^4 + \tfrac{1}{3}a(C_1C_4 + C_2C_3)t^3 + aC_2C_4t^2 + C_5t + C_6,$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных, кубическое по переменной x:

$$w = f(t)x^3 + g(t)x^2 + h(t)x + p(t),$$

где функции $f = f(t)$, $g = g(t)$, $h = h(t)$, $p = p(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} f''_{tt} &= 18af^2, \\ g''_{tt} &= 18afg, \\ h''_{tt} &= 6afh + 4ag^2, \\ p''_{tt} &= 2agh. \end{aligned}$$

Частное решение первых трех уравнений имеет вид

$$f = \frac{1}{3a(t + C_1)^2}, \quad g = \frac{C_2}{(t + C_1)^2} + C_3(t + C_1)^3,$$
$$h = \frac{C_4}{t + C_1} + C_5(t + C_1)^2 + \frac{aC_2^2}{(t + C_1)^2} + 2aC_2C_3(t + C_1)^3 + \frac{2aC_3^2}{27}(t + C_1)^8,$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные. Функция $p = p(t)$ определяется из последнего уравнения простым интегрированием правой части.

3°. Существует точное решение в виде произведения функций разных аргументов: $w = \varphi(x)\psi(t)$.

Специальный случай 2. Пусть $f(U) = aU^k$.

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ описываются автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$(\psi'_t)^2 = \frac{2aC_1}{k+2}\psi^{k+2} + C_2, \qquad \frac{2}{k+2}(\varphi'_x)^{k+2} = C_1\varphi^2 + C_3,$$

C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Общие решения этих уравнений можно представить в неявной форме. Приведем частные решения, которые можно записать в явном виде:

$$\psi(t) = A_1t^{-2/k} \quad \text{если} \quad C_2 = 0, \qquad \varphi(x) = A_2x^{(k+2)/k} \quad \text{если} \quad C_3 = 0.$$

Коэффициенты A_1 и A_2 определяются путем подстановки данных выражений в указанные уравнения.

2°. Автомодельное решение:

$$w = t^\sigma u(\zeta), \quad \zeta = t^\beta x, \quad \sigma = -(k\beta + 2\beta + 2)/k,$$

где β — произвольная постоянная, а функция $u(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\sigma(\sigma-1)u + \beta(2\sigma+\beta-1)\zeta u'_\zeta + \beta^2\zeta^2 u''_{\zeta\zeta} = a(u'_\zeta)^k u''_{\zeta\zeta}.$$

3°. Законы сохранения при $a = 1$:

$$D_t(w_t) + D_x\left(-\frac{1}{k+1}w_x^{k+1}\right) = 0,$$

$$D_t(w_t w_x) + D_x\left(-\frac{1}{k+2}w_x^{k+2} - \frac{1}{2}w_t^2\right) = 0,$$

$$D_t\left(\frac{1}{2}w_t^2 + \frac{1}{(k+1)(k+2)}w_x^{k+2}\right) + D_x\left(-\frac{1}{k+1}w_t w_x^{k+1}\right) = 0,$$

$$D_t(tw_t - w) + D_x\left(-\frac{1}{k+1}tw_x^{k+1}\right) = 0,$$

где $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$.

Специальный случай 3. Пусть $f(U) = a\exp(\lambda U)$.

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w = (x + C_1)\varphi(t) + \psi(x).$$

Здесь функции $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} = aC_2\exp(\lambda\varphi), \tag{1}$$

$$\exp(\lambda\psi'_x)\psi''_{xx} = C_2(x + C_1), \tag{2}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Общее решение уравнения (1) дается формулами

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{aC_2\lambda}{2\beta^2}\cos^2(\beta t + C_3)\right] \quad \text{при} \quad aC_2\lambda > 0,$$

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{aC_2\lambda}{2\beta^2}\operatorname{sh}^2(\beta t + C_3)\right] \quad \text{при} \quad aC_2\lambda > 0,$$

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\lambda}\ln\left[-\frac{aC_2\lambda}{2\beta^2}\operatorname{ch}^2(\beta t + C_3)\right] \quad \text{при} \quad aC_2\lambda < 0,$$

где C_3, β — произвольные постоянные. Общее решение уравнения (2) имеет вид

$$\psi(x) = \int \ln\left(\tfrac{1}{2}C_2x^2 + C_1C_2x + C_4\right)dx + \frac{\ln\lambda}{\lambda}x + C_5,$$

где C_4, C_5 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература для уравнения* 3.4.7.7: N. H. Ibragimov (1994, pp. 212–218), В. А. Винокуров, И. Г. Нургалиева (1985), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 172–173), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 262–264).

8. $\boldsymbol{a\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \dfrac{\partial w}{\partial t} = f\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad a \neq 0.}$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1(x,t) = \pm w(t + C_1, \pm x + C_2) + C_3e^{-t/a} + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (берутся либо верхние, либо нижние знаки).

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = U(z) + C_1e^{-t/a} + C_2, \quad z = x + \lambda t,$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные, а функция $U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\lambda U'_z = \left[f(U'_z) - a\lambda^2\right]U''_{zz}.$$

Интегрируя, получим его решение в параметрической форме

$$U = \frac{1}{\lambda}\int f(\tau)\,d\tau - a\lambda\tau + C_3, \quad z = \frac{1}{\lambda}\int\frac{f(\tau)}{\tau}\,d\tau - a\lambda\ln|\tau| + C_4,$$

где C_3, C_4 — произвольные постоянные (C_3 можно положить равной нулю).

3°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = C_1 t + C_2 + C_3 e^{-t/a} + \varphi(x),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $f(\varphi'_x)\varphi''_{xx} = C_1$. Интегрируя, получим его решение в параметрической форме

$$\varphi = \frac{1}{C_1}\int \xi f(\xi)\,d\xi + C_4, \qquad x = \frac{1}{C_1}\int f(\xi)\,d\xi + C_5,$$

где C_4, C_5 — произвольные постоянные (C_4 можно положить равной нулю).

4°. Решения из пп. 3° и 4° являются частными случаями решения вида

$$w(x,t) = C_1 t + C_2 + C_3 e^{-t/a} + \varphi(z), \qquad z = x + \lambda t,$$

где функция $\varphi(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\lambda\varphi'_z + C_1 = \bigl[f(\varphi'_z) - a\lambda^2\bigr]\varphi''_{zz}.$$

5°. Контактное преобразование

$$\bar t = t + a\ln|w_x|, \quad \bar x = w + a w_t, \quad \bar w = x + a w_t/w_x, \quad \bar w_{\bar x} = 1/w_x, \quad \bar w_{\bar t} = -w_t/w_x \tag{1}$$

приводит к уравнению того же вида

$$a\frac{\partial^2 \bar w}{\partial \bar t^2} + \frac{\partial \bar w}{\partial \bar t} = F\biggl(\frac{\partial \bar w}{\partial \bar x}\biggr)\frac{\partial^2 \bar w}{\partial \bar x^2}, \qquad \text{где} \qquad F(u) = \frac{1}{u^2}f\biggl(\frac{1}{u}\biggr).$$

Преобразование (1) допускает обращение

$$t = \bar t + a\ln|\bar w_{\bar x}|, \quad x = \bar w + a\bar w_{\bar t}, \quad w = \bar x + a\bar w_{\bar t}/\bar w_{\bar x}, \quad w_x = 1/\bar w_{\bar x}, \quad w_t = -\bar w_{\bar t}/\bar w_{\bar x}. \tag{2}$$

Формулы (2) можно использовать, если якобиан $J = \bigl[(\bar w_{\bar x} + a\bar w_{\bar x\bar t})^2 - a\bar w_{\bar x\bar x}(\bar w_{\bar t} + a\bar w_{\bar t\bar t})\bigr]$ отличен от нуля.

Специальный случай 1. При $f(w_x) = b(w_x)^{-2}$ преобразование (1) дает линейное телеграфное уравнение

$$a\frac{\partial^2 \bar w}{\partial \bar t^2} + \frac{\partial \bar w}{\partial \bar t} = b\frac{\partial^2 \bar w}{\partial \bar x^2}.$$

6°. Законы сохранения:

$$D_t\bigl(a w_t + w\bigr) + D_x\bigl[-\Psi'(w_x)\bigr] = 0,$$
$$D_t\bigl(a e^{t/a} w_t\bigr) + D_x\bigl[-e^{t/a}\Psi'(w_x)\bigr] = 0,$$
$$D_t\bigl(a e^{t/a} w_t w_x\bigr) + D_x\bigl\{e^{t/a}\bigl[\Psi(w_x) - w_x\Psi'(w_x) - \tfrac{1}{2}a(w_t)^2\bigr]\bigr\} = 0.$$

Здесь штрих обозначает производную и использованы обозначения

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad D_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \Psi(u) = \int_0^u (u-\zeta) f(\zeta)\,d\zeta + C_1 u + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Специальный случай 2. При $f(w_x) = b w_x^n$ $(n \neq 0, -2)$ имеется дополнительный закон сохранения:

$$D_t\biggl\{a e^{t/a}\biggl[\frac{3n+4}{2}a w_t^2 + w_t\bigl((n+2)w - n x w_x\bigr) + (3n+4)\Psi\biggr]\biggr\} +$$
$$+ D_t\biggl\{e^{t/a}\biggl[\frac{n}{2}a x w_t^2 + \frac{d\Psi}{dw_x}\bigl(n x w_x - a(3n+4)w_t - (n+2)w\bigr) - n x\Psi + \Phi\biggr]\biggr\} = 0,$$

где

$$\Psi = \frac{b}{(n+1)(n+2)}w_x^{n+2}, \quad \Phi = 0 \quad \text{при } n \neq -1;$$
$$\Psi = b w_x(\ln|w_x| - 1), \quad \Phi = 2bw \quad \text{при } n = -1.$$

Специальный случай 3. При $f(w_x) = b e^{k w_x}$ имеется дополнительный закон сохранения ($k \neq 0$):

$$D_t\biggl\{a e^{t/a}\biggl[\frac{3}{2}a k w_t^2 + w_t(kw + 2x - k x w_x) + \frac{3b}{k}e^{k w_x}\biggr]\biggr\} +$$
$$+ D_x\biggl\{e^{t/a}\biggl[\frac{1}{2}a k x w_t^2 - b\biggl(w + \frac{3}{k}x - x w_x + 3 a w_t\biggr)e^{k w_x}\biggr]\biggr\} = 0.$$

⊙ *Литература для уравнения* 3.4.7.8: С. Р. Свирщевский (1986, 1988), N. H. Ibragimov (1994, pp. 165–166, 168), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 264–265).

9. $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \left(\dfrac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^4.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1 x + C_2, C_1 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$x + t\biggl(\int f(w)\,dw + C_1\biggr)^{1/2} = \varphi(w),$$
$$x - t\biggl(\int f(w)\,dw + C_2\biggr)^{1/2} = \psi(w),$$

где $\varphi(w)$, $\psi(w)$ — произвольные функции; C_1, C_2 — произвольные постоянные.

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f\left(\dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-1} w\bigl(C_1 x + C_2,\, C_1 t + C_3\bigr) + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Вырожденное решение:

$$w(x,t) = Axt + Bx + Ct + D,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

3°. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = tu(z), \quad z = x/t,$$

где функция $u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$z(zu'_z - u)'_z = f(u - zu'_z,\, u'_z)u''_{zz}.$$

4°. Преобразование Лежандра

$$u(z,\tau) = tz + x\tau - w(x,t), \quad z = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \tau = \frac{\partial w}{\partial x},$$

где u — новая зависимая переменная, а z, τ — новые независимые переменные, приводит к линейному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = f(z,\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

О решениях этого уравнения для некоторых $f(z,\tau)$ см. книгу А. Д. Полянина (2001 *b*).

3.5. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial y}\right)$

3.5.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = f(w)$, содержащие произвольные параметры

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = aw^n.$

Частный случай уравнения 3.5.3.1 при $f(w) = aw^n$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = (C_1 C_2)^{\frac{1}{n-1}}\, w\bigl(C_1 x + C_3,\, C_2 y + C_4\bigr),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x,y) = \left[\frac{a(1-n)^2}{2(1+n)}\right]^{\frac{1}{1-n}} \left(C_1 x + \frac{y}{C_1} + C_2\right)^{\frac{2}{1-n}},$$

$$w(x,y) = \left[a(1-n)^2\right]^{\frac{1}{1-n}} \left(xy + C_1 x + C_2 y + C_1 C_2\right)^{\frac{1}{1-n}}.$$

3°. Решение типа бегущей волны в неявном виде (обобщает первое решение из п. 2°):

$$\int \left(C_2 + \frac{2a}{n+1} w^{n+1}\right)^{-1/2} dw = C_1 x + \frac{y}{C_1} + C_3.$$

4°. Автомодельное решение:

$$w = x^{\frac{\beta-1}{n-1}} U(\xi), \quad \xi = y x^\beta,$$

где β — произвольная постоянная, а функция $U(\xi)$ описывается модифицированным уравнением Эмдена — Фаулера

$$\beta \xi U''_{\xi\xi} + \frac{n\beta - 1}{n-1} U'_\xi = a U^n.$$

О точных решения этого уравнения см. книгу В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *а*).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = a e^{\lambda w}.$

Уравнение Лиувилля (Liouville). Частный случай уравнения 3.5.3.1 при $f(w) = a e^{\lambda w}$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w\big(C_1 x + C_2,\, C_3 y + C_4\big) + \frac{1}{\lambda} \ln(C_1 C_3),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Общее решение:

$$w = \frac{1}{\lambda}\big[f(x) + g(y)\big] - \frac{2}{\lambda} \ln\left| k \int \exp\big[f(x)\big]\, dx + \frac{a\lambda}{2k} \int \exp\big[g(y)\big]\, dy \right|,$$

где $f = f(x)$, $g = g(y)$ — произвольные функции, k — произвольная постоянная.

3°. Уравнение Лиувилля связано с линейным уравнением $\partial_{xy} u = 0$ преобразованием Беклунда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{2k}{\lambda} \exp\left[\frac{1}{2}\lambda(w+u)\right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{a}{k} \exp\left[\frac{1}{2}\lambda(w-u)\right].$$

4°. Линеаризация исходного уравнения может быть произведена также любой из двух дифференциальных подстановок:

$$w = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{2}{v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}\right), \qquad v = v(x,y);$$

$$w = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{2}{\cos^2 z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad z = z(x,y).$$

5°. Точные решения (при $a = \lambda = 1$):

$$w = \ln\left[f(x) g(y) \operatorname{ch}^{-2}\left(C_1 + C_2 \int g(y)\, dy - \frac{1}{2C_2} \int f(x)\, dx\right)\right],$$

$$w = \ln\left[f(x) g(y) \operatorname{sh}^{-2}\left(C_1 + C_2 \int g(y)\, dy + \frac{1}{2C_2} \int f(x)\, dx\right)\right],$$

$$w = \ln\left[f(x) g(y) \cos^{-2}\left(C_1 + C_2 \int g(y)\, dy + \frac{1}{2C_2} \int f(x)\, dx\right)\right],$$

где $f(x)$, $g(y)$ — произвольные функции; C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: J. Liouville (1853), Р. Буллаф, Ф. Кодри (1983), С. В. Хабиров (1990 *a*), N. H. Ibragimov (1994, pp. 204–206).

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = e^w - e^{-2w}$.

Частный случай уравнения 3.5.3.1 при $f(w) = e^w - e^{-2w}$.

1°. Точные решения:

$$w = \ln\left[1 - 2\frac{\partial^2(\ln \zeta_k)}{\partial x \partial y}\right]. \qquad (1)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= 1 + A\exp\biggl(kx + \frac{3}{k}y\biggr),\\
\zeta_2 &= 1 + A_1\exp\biggl(k_1x + \frac{3}{k_1}y\biggr) + A_2\exp\biggl(k_2x + \frac{3}{k_2}y\biggr)\\
&\quad + A_1A_2\frac{(k_1-k_2)^2(k_1^2-k_1k_2+k_2^2)}{(k_1+k_2)^2(k_1^2+k_1k_2+k_2^2)}\exp\biggl[(k_1+k_2)x + \biggl(\frac{3}{k_1}+\frac{3}{k_2}\biggr)y\biggr],\\
\zeta_3 &= 1 + A(k^2x - 3y)\exp\biggl(kx + \frac{3}{k}y\biggr) - \frac{A^2k^2}{12}\exp\biggl(2kx + \frac{6}{k}y\biggr),\\
\zeta_4 &= \sin\biggl(kx - \frac{3}{k}y\biggr) + \sqrt{3}\biggl(kx + \frac{3}{k}y\biggr),
\end{aligned}$$

где A, A_1, A_2, k, k_1, k_2 — произвольные постоянные.

2°. Переходя к новым независимым переменным $z = x - y$, $t = x + y$, получим уравнение вида 3.2.1.4:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + e^w - e^{-2w}.$$

3°. Преобразование $u = e^w$ приводит к *уравнению Цицейки*:

$$\frac{\partial^2(\ln u)}{\partial x \partial y} = u - \frac{1}{u^2}.$$

⊙ *Литература*: С. С. Сафин, Р. А. Шарипов (1993), О. В. Капцов, Ю. В. Шанько (1999, в этой работе описаны также другие точные решения).

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = a \operatorname{sh} w$.

Уравнение sh-*Гордона* в характеристических переменных. Переходя к новым независимым переменным $z = x - y$, $t = x + y$, получим уравнение вида 3.3.1.1:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + a \operatorname{sh} w.$$

⊙ *Литература*: В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский (1980), A. Grauel (1985).

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = a \sin w$.

Уравнение синус-Гордона в характеристических переменных (это уравнение иногда называют также *уравнением Бонне*). Частный случай уравнения 3.5.3.1 при $f(w) = a\sin w$.

1°. Решение типа бегущей волны:

$$w(x,y) = \begin{cases} 4\operatorname{arctg}\biggl[\exp\biggl(\sqrt{\dfrac{a}{AB}}\,(Ax+By+C)\biggr)\biggr] & \text{при } aAB > 0,\\[2ex] 4\operatorname{Arth}\biggl[\exp\biggl(\sqrt{-\dfrac{a}{AB}}\,(Ax+By+C)\biggr)\biggr] & \text{при } aAB < 0,\end{cases}$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

2°. Точное решение:

$$w(x,y) = 4\operatorname{arctg}\biggl[\frac{C_1+C_2}{C_1-C_2}\,\frac{\operatorname{sh}(v_1-v_2)}{\operatorname{ch}(v_1+v_2)}\biggr], \quad v_k = \frac{1}{2}\biggl(C_kx - \frac{a}{C_k}y\biggr), \quad k = 1,\ 2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Автомодельное решение:

$$w = U(\xi), \qquad \xi = xy,$$

где функция $U = U(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка $\xi U''_{\xi\xi} + U'_\xi = a \sin U$.

4°. Преобразование Беклунда

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial x} + 2k \sin\left(\frac{w+u}{2}\right), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{2a}{k} \sin\left(\frac{w-u}{2}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

«переводит» исходное уравнение в такое же уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a \sin u.$$

Формулы (1) позволяют по одному точному решению последовательно генерировать другие решения рассматриваемого уравнения.

5°. Уравнение синус-Гордона имеет бесконечно много законов сохранения. Первые три закона сохранения имеют вид

$$\begin{aligned} &D_x\bigl(w_y^2\bigr) + D_y\bigl(2a \cos w\bigr) = 0, \\ &D_x\bigl(w_y^4 - 4w_{yy}^2\bigr) + D_y\bigl(4aw_y^2 \cos w\bigr) = 0, \\ &D_x\bigl(3w_y^6 - 12w_y^2 w_{yy}^2 + 16w_y^3 w_{yyy} + 24w_{yyy}^2\bigr) + D_y\bigl[a(2w_y^4 - 24w_{yy}^2) \cos w\bigr] = 0, \end{aligned}$$

где $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$ и $D_y = \frac{\partial}{\partial y}$ (аналогичные законы можно получить поменяв местами независимые переменные $x \rightleftarrows y$).

6°. Рассматриваемое уравнение связано с уравнением

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z \sqrt{a^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

преобразованием

$$z = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = a \sin w.$$

⊙ *Литература для уравнения* 3.5.1.5: R. Steuerwald (1936), A. C. Scott, F. Y. Chu, D. W. McLaughlin (1973), J. L. Lamb (1974), R. K. Dodd, R. K. Bullough (1977), В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский (1980), И. М. Кричевер (1980), Р. Буллаф, Ф. Кодри (1983, стр. 90), N. H. Ibragimov (1994, pp. 206–208).

6. $\displaystyle \boldsymbol{\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = a \sin w + b \sin\bigl(\tfrac{1}{2} w\bigr)}.$

Переходя к новым независимым переменным $z = x - y$, $t = x + y$, получим уравнение вида 3.3.3.2:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + a \sin w + b \sin\bigl(\tfrac{1}{2} w\bigr).$$

⊙ *Литература*: Ф. Калоджеро, А. Дегасперис (1985).

3.5.2. Другие уравнения, содержащие произвольные параметры

1. $\displaystyle \boldsymbol{\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = a \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}}.$

Общее решение:

$$w(x, y) = -\frac{1}{a} \ln\bigl[f(x) + g(y)\bigr],$$

где $f(x)$, $g(y)$ — произвольные функции.

17*

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + a\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + c\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Это уравнение встречается в некоторых задачах химической технологии и хромотографии. Замена $u = e^{aw}$ приводит к линейному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + b\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

⊙ *Литература*: H. C. Thomas (1944), Дж. Уизем (1977).

3. $w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y}.$

Общее решение:

$$w(x,y) = f(x)g(y),$$

где $f(x)$, $g(y)$ — произвольные функции.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = aw^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y}.$

Частный случай уравнения 3.5.3.7 при $f(w) = aw^n$.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = ae^{\beta w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y}.$

Частный случай уравнения 3.5.3.7 при $f(w) = ae^{\beta w}$.

Общее решение в неявном виде:

$$\int \exp\left(-\frac{a}{\beta}e^{\beta w}\right) dw = \varphi(x) + \psi(y),$$

где $\varphi(x)$, $\psi(y)$ — произвольные функции.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = a\sqrt{\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y}}.$

Частный случай уравнения 3.5.3.8 при $f(x,y) = \frac{1}{4}a^2$ (рассматриваемое уравнение сводится к линейному).

7. $w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2}\sqrt{1 - \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2}.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-1}w\bigl(C_1x + C_2,\ C_1y + C_3\bigr),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Существуют решения следующих видов:

$$w = w(k_1x + k_2y) \quad \text{(решение типа бегущей волны)},$$
$$w = xU(y/x) \quad \text{(автомодельное решение)}.$$

3°. Об этом и некоторых других интегрируемых нелинейных гиперболических уравнениях см. статью А. В. Жибера, В. В. Соколова (2001).

3.5.3. Уравнения, содержащие произвольные функции

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = f(w).$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w\bigl(C_1x + C_2,\ C_1^{-1}y + C_3\bigr),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \qquad z = ax + by,$$

где a, b — произвольные постоянные, а функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $abw''_{zz} = f(w)$.

3°. Автомодельное решение:

$$w = w(\xi), \quad \xi = xy,$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка $\xi w''_{\xi\xi} + w'_\xi = f(w)$.

4°. Переходя от x, y к новым независимым переменным $z = x - y$, $t = x + y$, получим нелинейное уравнение Клейна — Гордона общего вида 3.4.1.1:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f(w).$$

5°. Законы сохранения:

$$D_x\left(\tfrac{1}{2} w_y^2\right) + D_y\left[-F(w)\right] = 0,$$
$$D_x\left[-F(w)\right] + D_y\left(\tfrac{1}{2} w_x^2\right) = 0,$$

где $D_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $D_y = \dfrac{\partial}{\partial y}$, $F(w) = \displaystyle\int f(w)\,dw$.

2. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = f(x) g(y) e^{\beta w}}$.

Преобразование

$$\xi = \int f(x)\,dx, \quad \eta = \int g(y)\,dy$$

приводит к уравнению вида 3.5.1.2:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = e^{\beta w}.$$

3. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = f(x) g(y) h(w)}$.

Преобразование

$$\xi = \int f(x)\,dx, \quad \eta = \int g(y)\,dy$$

приводит к уравнению вида 3.5.3.1:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = h(w).$$

4. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = f(x) g(w) \dfrac{\partial w}{\partial y}}$.

1°. Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$\int \frac{dw}{G(w)} = \varphi(y) + \int f(x)\,dx, \qquad \text{где} \quad G(w) = \int g(w)\,dw.$$

Здесь $\varphi(y)$ — произвольная функция.

2°. Интегрируя исходное уравнение по y, приходим к уравнению с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f(x) \int g(w)\,dw + \psi(x),$$

где $\psi(x)$ — произвольная функция.

5. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = f(x, w) \dfrac{\partial w}{\partial y} + g(x, y)}$.

Интегрируя исходное уравнение по y, приходим к уравнению с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \int_a^w f(x, \tau)\,d\tau + \int_b^y g(x, s)\,ds + \psi(x),$$

где $\psi(x)$ — произвольная функция; a, b — произвольные постоянные. Полученное уравнение можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $w = w(x)$ с параметром y.

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 177).

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = a \dfrac{\partial w}{\partial x} \dfrac{\partial w}{\partial y} + f(x,y) \dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x,y) \dfrac{\partial w}{\partial y} + h(x,y)$.

Замена $u = e^{-aw}$ приводит к линейному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x,y) \frac{\partial u}{\partial x} + g(x,y) \frac{\partial u}{\partial y} - ah(x,y)u.$$

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 272).

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = f(w) \dfrac{\partial w}{\partial x} \dfrac{\partial w}{\partial y}$.

1°. Замена

$$u = \int F(w)\,dw, \qquad F(w) = \exp\left[-\int f(w)\,dw\right]$$

приводит к линейному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

2°. Общее решение в неявном виде:

$$\int \exp\left[-\int f(w)\,dw\right] dw = \varphi(x) + \psi(y),$$

где $\varphi(x)$, $\psi(y)$ — произвольные функции.

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 272).

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2\sqrt{f(x,y) \dfrac{\partial w}{\partial x} \dfrac{\partial w}{\partial y}}$.

Уравнение Гурса. Введем функции $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ по формулам (дифференциальные подстановки):

$$u = \sqrt{\frac{\partial w}{\partial x}}, \qquad v = \sqrt{\frac{\partial w}{\partial y}}.$$

Дифференцируя эти соотношения соответственно по y и x, а затем исключая w с помощью рассматриваемого уравнения, получим систему

$$\frac{\partial u}{\partial y} = v\sqrt{f(x,y)}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = u\sqrt{f(x,y)}.$$

Исключая v, приходим к линейному уравнению для функции $u = u(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = g(x,y) \frac{\partial u}{\partial y} + f(x,y)u, \qquad \text{где} \quad g(x,y) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \ln f(x,y).$$

⊙ *Литература*: Е. И. Ганжа (2000).

9. $\dfrac{\partial w}{\partial x} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = f(x) g(w) \dfrac{\partial w}{\partial y}$.

1°. Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$\int \frac{dw}{\sqrt{G(w)}} = \varphi(y) \pm \int \sqrt{2f(x)}\,dx, \qquad \text{где} \quad G(w) = \int g(w)\,dw.$$

Здесь $\varphi(y)$ — произвольная функция.

2°. Интегрируя исходное уравнение по y, приходим к уравнению с частными производными первого порядка

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = 2f(x) \int g(w)\,dw + \psi(x),$$

где $\psi(x)$ — произвольная функция. Полученное уравнение можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $w = w(x)$ с параметром y (константа интегрирования в решении — произвольная функция y).

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 178).

10. $\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = f(x, w)\dfrac{\partial w}{\partial y} + g(x, y).$

Интегрируя исходное уравнение по y, приходим к уравнению с частными производными первого порядка

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = 2\int_a^w f(x,\tau)\,d\tau + 2\int_b^y g(x,s)\,ds + \psi(x),$$

где $\psi(x)$ — произвольная функция; a, b — произвольные постоянные. Полученное уравнение можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $w = w(x)$ с параметром y.

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 178).

11. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial w}{\partial x} f\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + aw\right).$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y) = \varphi(y) + C\exp\left[-ax + \int f(a\varphi(y))\,dy\right],$$

где $\varphi(y)$ — произвольная функция, C — произвольная постоянная.

⦿ *Литература*: I. Tsyfra (1997).

12. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = f\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + aw\right)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y) = \varphi(y) + C\exp\left[-ax - a\int f(a\varphi(y))\,dy\right],$$

где $\varphi(y)$ — произвольная функция, C — произвольная постоянная.

13. $f\left(x, \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = g(x, w)\dfrac{\partial w}{\partial y} + h(x, y).$

Интегрируя исходное уравнение по y, приходим к уравнению с частными производными первого порядка

$$\int_a^{w_x} f(x,\lambda)\,d\lambda = \int_b^w g(x,\tau)\,d\tau + \int_c^y h(x,s)\,ds + \psi(x),$$

где w_x частная производная от w по x; $\psi(x)$ — произвольная функция; a, b, c — произвольные постоянные. Полученное уравнение можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $w = w(x)$ с параметром y.

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 178).

► *Некоторые более сложные уравнения гиперболического типа рассматриваются в главе 7.*