Из книги A. D. Polyanin and V. F. Zaitsev, «Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition», Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2011 [русский перевод].

# 4. Уравнения гиперболического типа с двумя и более пространственными переменными

## 4.1. Уравнения с двумя пространственными переменными, содержащие степенные нелинейности

### 4.1.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big[g(y)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big] + aw^p$

**1.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big) + cw^p.$

Частный случай уравнения 4.4.1.2 при $f(w) = cw^p$.

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1 w\Big(C_1^{\frac{p-1}{2-n}}x,\ C_1^{\frac{p-1}{2-m}}y,\ \pm C_1^{\frac{p-1}{2}}t + C_2\Big),$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

$2^\circ$. Точное решение при $n\neq 2$, $m\neq 2$, $p\neq 1$:

$$w = \left[\frac{1}{2c(p-1)}\left(\frac{1+p}{1-p} + \frac{2}{2-n} + \frac{2}{2-m}\right)\right]^{\frac{1}{p-1}}\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} - \frac14(t+C)^2\right]^{\frac{1}{1-p}}.$$

$3^\circ$. Точное решение при $n\neq 2$, $m\neq 2$ (обобщает решение из п. $2^\circ$):

$$w = w(r),\qquad r^2 = 4k\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} - \frac14(t+C)^2\right],$$

где $C$, $k$ — произвольные постоянные ($k\neq 0$), а функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + \frac{A}{r}w'_r + ck^{-1}w^p = 0,\qquad A = \frac{2(4-n-m)}{(2-n)(2-m)}.$$

$4^\circ$. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,t) = U(\xi,t),\quad \xi^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2}\right],$$
$$w(x,y,t) = V(x,\eta),\quad \eta^2 = \pm 4\left[\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} - \frac14(t+C)^2\right],$$
$$w(x,y,t) = W(y,\zeta),\quad \zeta^2 = \pm 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} - \frac14(t+C)^2\right],$$
$$w(x,y,t) = |t|^{\frac{2}{1-p}}F(z_1,z_2),\quad z_1 = x|t|^{\frac{2}{n-2}},\quad z_2 = y|t|^{\frac{2}{m-2}}.$$

**2.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\lambda y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big) + cw^p.$

Частный случай уравнения 4.4.1.3 при $f(w) = cw^p$.

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1 w\Big(C_1^{\frac{p-1}{2-n}} x,\ y + \frac{1-p}{\lambda}\ln C_1,\ \pm C_1^{\frac{p-1}{2}} t + C_2\Big),$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

$2^\circ$. Точное решение при $n \neq 2$, $\lambda \neq 0$, $p \neq 1$:

$$w = \left[\frac{1}{2c(p-1)}\left(\frac{1+p}{1-p} + \frac{2}{2-n}\right)\right]^{\frac{1}{p-1}} \left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right]^{\frac{1}{1-p}}.$$

$3^\circ$. Точное решение при $n \neq 2$, $\lambda \neq 0$ (обобщает решение из п. $2^\circ$):

$$w = w(r), \qquad r^2 = 4k\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

где $C$, $k$ — произвольные постоянные ($k \neq 0$), а функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + \frac{A}{r}w'_r + ck^{-1}w^p = 0, \qquad A = \frac{2}{2-n}.$$

$4^\circ$. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,t) = U(\xi,t), \quad \xi^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2}\right],$$

$$w(x,y,t) = V(x,\eta), \quad \eta^2 = \pm 4\left[\frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

$$w(x,y,t) = W(y,\zeta), \quad \zeta^2 = \pm 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

$$w(x,y,t) = |t|^{\frac{2}{1-p}} F(z_1,z_2), \quad z_1 = x|t|^{\frac{2}{n-2}}, \quad z_2 = y + \frac{2}{\lambda}\ln|t|.$$

**3.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(be^{\lambda y}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + cw^p.$

Частный случай уравнения 4.4.1.4 при $f(w) = cw^p$.

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1 w\Big(x + \frac{1-p}{\beta}\ln C_1,\ y + \frac{1-p}{\lambda}\ln C_1,\ \pm C_1^{\frac{p-1}{2}} t + C_2\Big),$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

$2^\circ$. Точное решение при $p \neq \pm 1$, $\beta \neq 0$, $\lambda \neq 0$:

$$w = \left[-\frac{c(p-1)^2}{2k(1+p)}(r+C_1)^2\right]^{\frac{1}{1-p}}, \quad r^2 = 4k\left[\frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2} + \frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2} - \frac{1}{4}(t+C_2)^2\right],$$

где $C_1$, $C_2$, $k$ — произвольные постоянные.

$3^\circ$. Точное решение при $\beta \neq 0$, $\lambda \neq 0$ (обобщает решение из п. $2^\circ$):

$$w = w(r), \qquad r^2 = 4k\left[\frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2} + \frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

где функция $w(r)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + ck^{-1}w^p = 0.$$

Интегрируя, получим его общее решение в неявном виде

$$\int \left[C_1 - \frac{2c}{k(p+1)}w^{p+1}\right]^{-1/2} dw = C_2 \pm r,$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные.

$4^\circ$. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,t) = U(\xi,t), \quad \xi^2 = 4\left(\frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2} + \frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2}\right),$$
$$w(x,y,t) = V(x,\eta), \quad \eta^2 = \pm 4\left[\frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$
$$w(x,y,t) = W(y,\zeta), \quad \zeta^2 = \pm 4\left[\frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$
$$w(x,y,t) = |t|^{\frac{2}{1-p}} F(z_1,z_2), \quad z_1 = x + \frac{2}{\beta}\ln|t|, \quad z_2 = y + \frac{2}{\lambda}\ln|t|.$$

### 4.1.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^n\frac{\partial w}{\partial x}\right) + b\frac{\partial}{\partial y}\left(w^k\frac{\partial w}{\partial y}\right)$

**1.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial}{\partial y}\left(w\dfrac{\partial w}{\partial y}\right).$

Частный случай уравнения 4.1.3.1 при $c=0$.

**2.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(w\dfrac{\partial w}{\partial y}\right).$

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_2^2 w(\pm C_1 x + C_3, \pm C_1 y + C_4, \pm C_1 C_2 t + C_5),$$
$$w_2 = w(x\cos\beta + y\sin\beta, -x\sin\beta + y\cos\beta,\ t),$$

где $C_1, \ldots, C_5, \beta$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

$2^\circ$. Решения типа бегущей волны:

$$w = \frac{\lambda^2 \pm \sqrt{A(k_1 x + k_2 y + \lambda t) + B}}{k_1^2 + k_2^2},$$

где $A$, $B$, $k_1$, $k_2$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

$3^\circ$. Вырожденное решение с обобщенным разделением переменных, линейное по пространственным переменным:

$$w(x,y,t) = (A_1 t + B_1)x + (A_2 t + B_2)y + \tfrac{1}{12}(A_1^2 + A_2^2)t^4 + \\ + \tfrac{1}{3}(A_1 B_1 + A_2 B_2)t^3 + \tfrac{1}{2}(B_1^2 + B_2^2)t^2 + Ct + D,$$

где $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, $C$, $D$ — произвольные постоянные.

$4^\circ$. Точные решения:

$$w(x,y,t) = \tfrac{3}{4}t^{-2}\bigl[(x+C_1)^2 + (y+C_2)^2\bigr],$$
$$w(x,y,t) = t^{-2}\bigl(x\sin\lambda + y\cos\lambda + C_1\bigr)^2,$$
$$w(x,y,t) = \frac{1}{C_1^2 + C_2^2}\left(\frac{C_1 x + C_2 y + C_3}{t + C_4}\right)^2,$$
$$w(x,y,t) = \frac{C_2^2(x+C_4)^2}{(C_1 y + C_2 t + C_3)^2 + C_1^2(x+C_4)^2},$$
$$w(x,y,t) = t\bigl[C_1\ln\bigl(x^2+y^2\bigr) + C_2\bigr]^{1/2},$$
$$w(x,y,t) = t\bigl[C_1\exp\bigl(\lambda x\bigr)\sin\bigl(\lambda y + C_2\bigr) + C_3\bigr]^{1/2},$$

где $C_1, \ldots, C_4$, $\lambda$ — произвольные постоянные (два последних решения являются вырожденными).

$5^\circ$. «Двумерное» вырожденное решение в виде произведения функций разных аргументов (обобщает два последних решения из п. $4^\circ$):

$$w(x,y,t) = (C_1 t + C_2)\sqrt{|U(x,y)|},$$

где функция $U = U(x, y)$ определяется уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Об этом линейном уравнении см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 $b$).

$6^\circ$. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по пространственным переменным:

$$w(x, y, t) = f(t)x^2 + g(t)xy + h(t)y^2,$$

где функции $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f''_{tt} = 6f^2 + 2fh + g^2, \tag{1}$$
$$g''_{tt} = 6(f + h)g, \tag{2}$$
$$h''_{tt} = 6h^2 + 2fh + g^2. \tag{3}$$

Частное решение системы (1)–(3) имеет вид

$$h(t) = f(t), \quad g(t) = \pm 2f(t), \quad \text{где} \quad f''_{tt} = 12f^2$$

(решение уравнения для $f$ можно записать в неявном виде).

$7^\circ$. Решение с обобщенным разделением переменных (обобщает решение из п. $6^\circ$):

$$w(x, y, t) = f(t)x^2 + g(t)xy + h(t)y^2 + \varphi(t)x + \psi(t)y + \chi(t),$$

где функции $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} f''_{tt} &= 6f^2 + 2fh + g^2, & \varphi''_{tt} &= 2(3f + h)\varphi + 2g\psi, \\ g''_{tt} &= 6(f + h)g, & \psi''_{tt} &= 2g\varphi + 2(f + 3h)\psi, \\ h''_{tt} &= 6h^2 + 2fh + g^2, & \chi''_{tt} &= \varphi^2 + \psi^2 + 2(f + h)\chi. \end{aligned}$$

Первые три уравнения решаются независимо (см. п. $6^\circ$).

$8^\circ$. Существует «двумерное» решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x, y, t) = (At + B)^{-2}\Theta(x, y).$$

$9^\circ$. О других решениях см. уравнение 4.1.2.6 при $a = b = n = 1$ и уравнение 4.1.2.7 при $a = b = n = m = 1$.

⦿ *Литература для уравнения* 4.1.2.2: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 181).

**3.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{w}}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + b\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{w}}\frac{\partial w}{\partial y}\right).$

Частный случай уравнения 4.1.2.7 при $n = k = -1/2$ и уравнения 4.4.2.3 при $f(w) = aw^{-1/2}$, $g(w) = bw^{-1/2}$.

$1^\circ$. Пусть $w(x, y, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$\begin{aligned} w_1 &= C_1^4 w(\pm C_1 C_2 x + C_3, \pm C_1 C_2 y + C_4, \pm C_2 t + C_5), \\ w_2 &= w(x\cos\beta + y\sqrt{a/b}\,\sin\beta, -x\sqrt{b/a}\,\sin\beta + y\cos\beta,\ t), \end{aligned}$$

где $C_1, \ldots, C_5, \beta$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

$2^\circ$. Решения типа бегущей волны:

$$w(x, y, t) = \left(\frac{aC_1^2 + bC_2^2}{C_3^2} \pm \sqrt{C_1 x + C_2 y + C_3 t + C_4}\right)^2,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

$3^\circ$. Точные решения:

$$w(x,y,t) = t^4\left(\frac{\sin\lambda}{\sqrt{a}}x + \frac{\cos\lambda}{\sqrt{b}}y + C_1\right)^{-4},$$
$$w(x,y,t) = \left(\tfrac{2}{3}ab\right)^2 t^4 (bx^2+ay^2)^{-2},$$
$$w(x,y,t) = (aC_1^2+bC_2^2)^2\left(\frac{t+C_4}{C_1x+C_2y+C_3}\right)^4,$$
$$w(x,y,t) = \frac{\left[a(C_1y+C_2t+C_3)^2+bC_1^2(x+C_4)^2\right]^2}{C_2^4(x+C_4)^4},$$
$$w(x,y,t) = t\left[C_1\ln\left(bx^2+ay^2\right)+C_2\right]^2,$$
$$w(x,y,t) = t\left[C_1\exp\left(\lambda\sqrt{b}\,x\right)\sin\left(\lambda\sqrt{a}\,y+C_2\right)+C_3\right]^2,$$

где $C_1, \ldots, C_4$, $\lambda$ — произвольные постоянные (два последних решения являются вырожденными).

$4^\circ$. «Двумерное» вырожденное решение в виде произведения функций разных аргументов (обобщает два последних решения из п. $3^\circ$):

$$w(x,y,t) = (C_1t+C_2)U^2(\xi,\eta), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{b}},$$

где функция $U = U(\xi,\eta)$ определяется уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2} = 0.$$

Об этом линейном уравнении см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

$5^\circ$. «Двумерное» решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное относительно $t$:

$$w(x,y,t) = \left[f(\xi,\eta)t+g(\xi,\eta)\right]^2, \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{b}},$$

где функции $f = f(\xi,\eta)$ и $g = g(\xi,\eta)$ описываются системой уравнений

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2} = 0, \qquad (1)$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial\eta^2} = f^2. \qquad (2)$$

Уравнение (1) является уравнением Лапласа, а уравнение (2) — уравнением Гельмгольца (при известной $f$). Об этих линейных уравнениях см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

$6^\circ$. Существует «двумерное» точное решение с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,y,t) = \left[f_2(x,y)t^2+f_1(x,y)t+f_0(x,y)\right]^2.$$

$7^\circ$. О других решениях см. уравнение 4.1.2.6 при $n = -1/2$ и уравнение 4.1.2.7 при $n = m = -1/2$.

**4.** $\displaystyle\boldsymbol{\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]}.$

Частный случай уравнения 4.1.2.7 при $a = b$, $n = k = -1$ и уравнения 4.4.2.3 при $f(w) = a/w$, $g(w) = b/w$.

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^2 w(\pm C_1C_2x+C_3, \pm C_1C_2y+C_4, \pm C_2t+C_5),$$
$$w_2 = w(x\cos\beta+y\sin\beta, -x\sin\beta+y\cos\beta,\ t),$$

где $C_1, \ldots, C_5, \beta$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

$2^\circ$. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$a(k_1^2+k_2^2)\ln|w|-\lambda^2 w=A(k_1x+k_2y+\lambda t)+B,$$

где $A$, $B$, $k_1$, $k_2$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

$3^\circ$. Точные решения:

$$w(x,y,t)=(C_1t+C_2)e^{Ax+By},$$
$$w(x,y,t)=(C_1t+C_2)\exp\bigl[A(x^2-y^2)\bigr],$$
$$w(x,y,t)=(C_1t+C_2)\exp\bigl[Ae^{\lambda x}\sin(\lambda y+B)\bigr],$$
$$w(x,y,t)=\frac{a[(Ay+Bt+C_1)^2+A^2(x+C_2)^2]}{B^2(x+C_2)^2},$$
$$w(x,y,t)=\frac{at^2+At+B}{(x\sin\lambda+y\cos\lambda+C)^2},$$
$$w(x,y,t)=\frac{at^2+At+B}{(\sin y+Ce^x)^2},$$
$$w(x,y,t)=\frac{C_1^2(at^2+At+B)}{e^{2x}\operatorname{sh}^2(C_1e^{-x}\sin y+C_2)},$$
$$w(x,y,t)=\frac{C_1^2(-at^2+At+B)}{e^{2x}\operatorname{ch}^2(C_1e^{-x}\sin y+C_2)},$$
$$w(x,y,t)=\frac{C_1^2(at^2+At+B)}{e^{2x}\cos^2(C_1e^{-x}\sin y+C_2)},$$

где $A$, $B$, $C$, $C_1$, $C_2$, $\lambda$ — произвольные постоянные (первые три решения являются вырожденными).

$4^\circ$. «Двумерное» вырожденное решение в виде произведения функций разных аргументов (обобщает первые три решения п. $3^\circ$):

$$w(x,y,t)=(C_1t+C_2)e^{U(x,y)},$$

где функция $U=U(x,y)$ определяется уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0.$$

Об этом линейном уравнении см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

$5^\circ$. «Двумерное» решение в виде произведения функций разных аргументов (обобщает четыре последних решения из п. $3^\circ$):

$$w(x,y,t)=(\tfrac{1}{2}Aat^2+Bt+C)e^{\Theta(x,y)},$$

где $A$, $B$, $C$ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(x,y)$ является решением стационарного уравнения

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}=Ae^{\Theta},$$

которое встречается в теории горения. О решениях этого уравнения см. 5.2.1.1.

$6^\circ$. О других решениях см. уравнение 4.1.2.6 при $a=b$, $n=-1$ и уравнение 4.1.2.7 при $a=b$, $n=m=-1$.

⊙ *Литература для уравнения* 4.1.2.4: В. А. Байков (1990), N. H. Ibragimov (1994, p. 225), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 182).

**5.** $\displaystyle\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+b\frac{\partial}{\partial y}\left(w^n\frac{\partial w}{\partial y}\right).$

Частный случай уравнения 4.4.2.1 при $g(w)=bw^n$.

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=C_1^{-2}w(\pm C_2x+C_3,\pm C_1^nC_2y+C_4,\pm C_2t+C_5),$$
$$w_2=w(x\operatorname{ch}\lambda+ta^{1/2}\operatorname{sh}\lambda,\ y,\ xa^{-1/2}\operatorname{sh}\lambda+t\operatorname{ch}\lambda),$$

где $C_1,\dots,C_5$, $\lambda$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки в выражении для $w_1$ выбираются произвольно).

$2^\circ$. Точные решения:

$$w(x,y,t) = y^{\frac{1}{n+1}}\left[\varphi(x - t\sqrt{a}\,) + \psi(x + t\sqrt{a}\,)\right],$$

$$w(x,y,t) = \left[y\varphi(x - t\sqrt{a}\,) + \psi(x - t\sqrt{a}\,)\right]^{\frac{1}{n+1}},$$

$$w(x,y,t) = \left[y\varphi(x + t\sqrt{a}\,) + \psi(x + t\sqrt{a}\,)\right]^{\frac{1}{n+1}},$$

где $\varphi(z_1)$, $\psi(z_2)$ — произвольные функции.

$3^\circ$. Точные решения:

$$w(x,y,t) = y^{\frac{2}{n}}\left(C_1 x \pm t\sqrt{aC_1^2 + b} + C_2\right)^{-\frac{2}{n}},$$

$$w(x,y,t) = \left[\frac{2a}{b(n+2)}\right]^{\frac{1}{n}} y^{\frac{2}{n}}\left[a(t + C_1)^2 - (x + C_2)^2\right]^{-\frac{1}{n}},$$

$$w(x,y,t) = \left[\frac{1}{bC_2^2}\left(\frac{C_1 x + C_2 y + C_3}{t + C_4}\right)^2 - \frac{aC_1^2}{bC_2^2}\right]^{\frac{1}{n}},$$

$$w(x,y,t) = \left[\frac{C_2^2}{bC_1^2} - \frac{a}{bC_1^2}\left(\frac{C_1 y + C_2 t + C_3}{x + C_4}\right)\right]^{\frac{1}{n}},$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

$4^\circ$. Точные решения в неявном виде:

$$2\lambda\sqrt{a}\,(y + \lambda t) + (t\sqrt{a} \pm x)(bw^n - \lambda^2) = \psi(w),$$

где $\psi(w)$ — произвольная функция, $\lambda$ — произвольная постоянная.

$5^\circ$. Точное решение:

$$w(x,y,t) = V(z)y^{2/n}, \quad z = x^2 - at^2,$$

где функция $V = V(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2an^2(zV_z'' + V_z') + b(n+2)V^{n+1} = 0.$$

$6^\circ$. «Двумерное» решение в виде произведения функций разных аргументов

$$w(x,y,t) = u(x,t)y^{2/n},$$

где функция $u = u(x,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2b(n+2)}{n^2}u^{n+1}.$$

При $n = -1$ и $n = -2$ полученное уравнение является линейным.

**Замечание.** Первое решение из п. $2^\circ$, два первых решения из п. $3^\circ$, а также решения из пп. $5^\circ$ и $6^\circ$ являются частными случаями решения в виде произведения функций разных аргументов $w = u(x,t)\theta(y)$, где $\theta = \theta(y)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $(\theta^n\theta_y')_y' = C\theta$.

$7^\circ$. Существуют «двумерные» точные решения следующих видов:

$$w(x,y,t) = F(y,r), \quad r = x^2 - at^2;$$

$$w(x,y,t) = |t|^{2\lambda}G(\xi,\eta), \quad \xi = \frac{x}{t}, \quad \eta = \frac{y}{|t|^{n\lambda+1}};$$

$$w(x,y,t) = |t|^{-2/n}H(y,z), \quad z = x/t;$$

$$w(x,y,t) = |y|^{2/n}U(z_1,z_2), \quad z_1 = t + k_1\ln|y|, \quad z_2 = x + k_2\ln|y|;$$

$$w(x,y,t) = \exp\Bigl(-\frac{2y}{n+1}\Bigr)V(\rho_1,\rho_2), \quad \rho_1 = t\exp\Bigl(-\frac{ny}{n+1}\Bigr), \quad \rho_2 = x\exp\Bigl(-\frac{ny}{n+1}\Bigr),$$

где $k_1$, $k_2$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

$8^\circ$. Уравнение имеет точное решение вида

$$w(x,y,t) = W(z), \quad z = (x^2 - at^2)y^{-2}.$$

$9^\circ$. О других решениях см. уравнение 4.1.2.7, в котором надо положить $n = 0$, а затем переобозначить $k$ на $n$.

⊙ *Литература для уравнения* 4.1.2.5: N. H. Ibragimov (1994, pp. 222–225), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 281–282).

**6.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + b\dfrac{\partial}{\partial y}\left(w^n \dfrac{\partial w}{\partial y}\right).$

Частный случай уравнения 4.1.2.7 при $n = k$.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = (C_2/C_1)^{2/n} w(\pm C_1 x + C_3, \pm C_1 y + C_4, \pm C_2 t + C_5),$$
$$w_2 = w(x\cos\beta + y\sqrt{a/b}\,\sin\beta, -x\sqrt{b/a}\,\sin\beta + y\cos\beta,\, t),$$

где $C_1, \ldots, C_5, \beta$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Точные решения:

$$w(x,y,t) = t^{-\frac{2}{n}}\left(\frac{\sin\lambda}{\sqrt{a}}x + \frac{\cos\lambda}{\sqrt{b}}y + C_1\right)^{\frac{2}{n}},$$
$$w(x,y,t) = \left[\frac{n+2}{2ab(n+1)}\right]^{\frac{1}{n}} t^{-\frac{2}{n}}(bx^2 + ay^2)^{\frac{1}{n}},$$
$$w(x,y,t) = \frac{1}{(aC_1^2 + bC_2^2)^{1/n}}\left(\frac{C_1 x + C_2 y + C_3}{t + C_4}\right)^{2/n},$$
$$w(x,y,t) = \frac{C_2^{2/n}(x + C_4)^{2/n}}{\left[a(C_1 y + C_2 t + C_3)^2 + bC_1^2(x + C_4)^2\right]^{1/n}},$$
$$w(x,y,t) = t\left[C_1\ln\bigl(bx^2 + ay^2\bigr) + C_2\right]^{\frac{1}{n+1}},$$
$$w(x,y,t) = t\left[C_1\exp\bigl(\lambda\sqrt{b}\,x\bigr)\sin\bigl(\lambda\sqrt{a}\,y + C_2\bigr) + C_3\right]^{\frac{1}{n+1}},$$

где $C_1, \ldots, C_4, \lambda$ — произвольные постоянные (два последних решения являются вырожденными).

3°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\frac{ak_1^2 + bk_2^2}{n+1}w^{n+1} - \lambda^2 w = C_1(k_1 x + k_2 y + \lambda t) + C_2,$$

где $C_1, C_2, k_1, k_2, \lambda$ — произвольные постоянные.

4°. «Двумерное» вырожденное решение в виде произведения функций разных аргументов (обобщает пятое и шестое решения из п. 2°):

$$w(x,y,t) = (C_1 t + C_2)\left[U(\xi,\eta)\right]^{\frac{1}{n+1}}, \quad \xi = \sqrt{b}\,x, \quad \eta = \sqrt{a}\,y,$$

где функция $U = U(\xi,\eta)$ определяется уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0.$$

Об этом линейном уравнении см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

5°. «Двумерное» решение в виде произведения функций разных аргументов (обобщает первое и второе решения из п. 2°):

$$w(x,y,t) = f(t)\Theta(x,y),$$

где функция $f(t)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f''_{tt} = \lambda f^{n+1}, \tag{1}$$

$\lambda$ — произвольная постоянная, а функция $\Theta = \Theta(x,y)$ — решение двумерного стационарного уравнения

$$a\frac{\partial}{\partial x}\left(\Theta^n \frac{\partial\Theta}{\partial x}\right) + b\frac{\partial}{\partial y}\left(\Theta^n \frac{\partial\Theta}{\partial y}\right) - \lambda\Theta = 0. \tag{2}$$

Частное решение уравнения (1) имеет вид ($C$ — произвольная постоянная):

$$f = (C \pm kt)^{-2/n}, \quad k = n\sqrt{\frac{\lambda}{2(n+2)}}.$$

$6^\circ$. Существуют точные решения следующих видов:

$w(x,y,t) = F(r,t), \quad r = bx^2 + ay^2$ «двумерное» решение;

$w(x,y,t) = t^{2\lambda} G(\xi,\eta), \quad \xi = \dfrac{x}{t^{n\lambda+1}}, \quad \eta = \dfrac{y}{t^{n\lambda+1}}$ «двумерное» решение;

$w(x,y,t) = y^{2/n} H(z,t), \quad z = y/x$ «двумерное» решение;

$w(x,y,t) = |t|^{-2/n} U(z_1,z_2), \quad z_1 = x + k_1 \ln|t|, \quad z_2 = y + k_2 \ln|t|$ «двумерное» решение;

$w(x,y,t) = e^{-2t} V(\rho_1,\rho_2), \quad \rho_1 = xe^{nt}, \quad \rho_2 = ye^{nt}$ «двумерное» решение;

$w(x,y,t) = W(\theta), \quad \theta = (bx^2 + ay^2)t^{-2}$ «одномерное» решение,

где $k_1$, $k_2$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

$7^\circ$. О других решениях см. уравнение 4.1.2.7 при $k = n$.

⦿ *Литература для уравнения* 4.1.2.6: N. H. Ibragimov (1994, pp. 222–225), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 183).

**7.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^n \frac{\partial w}{\partial x}\right) + b\frac{\partial}{\partial y}\left(w^k \frac{\partial w}{\partial y}\right).$

Частный случай уравнения 4.4.2.3 при $f(w) = aw^n$, $g(w) = bw^k$.

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2} w(\pm C_1^n C_2 x + C_3, \pm C_1^k C_2 y + C_4, \pm C_2 t + C_5),$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

$2^\circ$. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\frac{a\beta_1^2}{n+1} w^{n+1} + \frac{b\beta_2^2}{k+1} w^{k+1} - \lambda^2 w = C_1(\beta_1 x + \beta_2 y + \lambda t) + C_2,$$

где $C_1$, $C_2$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

$3^\circ$. Точные решения в неявном виде:

$$\left(\frac{C_1 x + C_2 y + C_3}{t + C_4}\right)^2 = aC_1^2 w^n + bC_2^2 w^k,$$
$$a\left(\frac{C_1 y + C_2 t + C_3}{x + C_4}\right)^2 w^n + bC_1^2 w^k = C_2^2,$$
$$b\left(\frac{C_1 x + C_2 t + C_3}{y + C_4}\right)^2 w^k + aC_1^2 w^n = C_2^2,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

$4^\circ$. «Двумерное» решение ($c_1$, $c_2$ — произвольные постоянные):

$$w(x,y,t) = u(z,t), \quad z = c_1 x + c_2 y,$$

где функция $u = u(z,t)$ определяется уравнением вида 3.4.4.6:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\varphi(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right], \quad \varphi(u) = ac_1^2 u^n + bc_2^2 u^k,$$

которое может быть линеаризовано.

$5^\circ$. «Двумерное» решение ($s_1$, $s_2$ — произвольные постоянные):

$$w(x,y,t) = v(x,\xi), \quad \xi = s_1 y + s_2 t,$$

где функция $v = v(x,\xi)$ определяется уравнением вида 5.4.4.8:

$$a\frac{\partial}{\partial x}\left(v^n \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left[\psi(v)\frac{\partial v}{\partial z}\right] = 0, \quad \psi(v) = bs_1^2 v^k - s_2^2,$$

которое может быть линеаризовано.

$6^\circ$. Существуют «двумерные» решения следующих видов (обобщают решения из пп. $3^\circ$ и $4^\circ$):

$$w(x,y,t) = U(z_1,z_2), \quad z_1 = a_1x + b_1y + c_1t, \quad z_2 = a_2x + b_2y + c_2t.$$

$7^\circ$. Существуют точные решения следующих видов:

$$w(x,y,t) = t^{2\lambda}F(\xi,\eta), \quad \xi = \frac{x}{t^{n\lambda+1}}, \quad \eta = \frac{y}{t^{k\lambda+1}} \quad \text{«двумерное» решение;}$$

$$w(x,y,t) = x^{2/n}G(\zeta,t), \quad \zeta = x^{-k/n}y \quad \text{«двумерное» решение;}$$

$$w(x,y,t) = e^{-2t}H(z_1,z_2), \quad z_1 = xe^{nt}, \quad z_2 = ye^{kt} \quad \text{«двумерное» решение;}$$

$$w(x,y,t) = (x/t)^{2/n}U(\theta), \quad \theta = x^{-k/n}yt^{k/n-1} \quad \text{«одномерное» решение;}$$

где $\lambda$ — произвольная постоянная.

⊙ *Литература для уравнения* 4.1.2.7: N. H. Ibragimov (1994, pp. 222–225), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 284–285).

### 4.1.3. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big[g(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big]$

**1.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big[(bw+c)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big].$

Частный случай уравнения 4.4.2.1 при $g(w) = bw + c$.

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2}w(\pm C_2x + C_3, \pm C_1C_2y + C_4, \pm C_2t + C_5) + \frac{c(1-C_1^2)}{bC_1^2},$$

$$w_2 = w(x\operatorname{ch}\lambda + ta^{1/2}\operatorname{sh}\lambda,\ y,\ xa^{-1/2}\operatorname{sh}\lambda + t\operatorname{ch}\lambda),$$

где $C_1, \ldots, C_5, \lambda$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

$2^\circ$. Точные решения:

$$w(x,y,t) = |y|^{1/2}\big[\varphi(x - t\sqrt{a}\,) + \psi(x + t\sqrt{a}\,)\big] - \frac{c}{b},$$

$$w(x,y,t) = \big|y\varphi(x - t\sqrt{a}\,) + \psi(x - t\sqrt{a}\,)\big|^{1/2} - \frac{c}{b},$$

$$w(x,y,t) = \big|y\varphi(x + t\sqrt{a}\,) + \psi(x + t\sqrt{a}\,)\big|^{1/2} - \frac{c}{b},$$

где $\varphi(z_1)$, $\psi(z_2)$ — произвольные функции.

$3^\circ$. Точные решения:

$$w(x,y,t) = A\sqrt{C_1x + C_2y + C_3t + C_4} + \frac{C_3^2 - aC_1^2}{bC_2^2} - \frac{c}{b},$$

$$w(x,y,t) = \frac{(y+C_1)^2}{\big(C_2x \pm t\sqrt{aC_2^2 + b} + C_3\big)^2} - \frac{c}{b},$$

$$w(x,y,t) = \frac{2a(y+C_1)^2}{3b\big[a(t+C_2)^2 - (x+C_3)^2\big]} - \frac{c}{b},$$

$$w(x,y,t) = \frac{1}{bC_2^2}\left(\frac{C_1x + C_2y + C_3}{t + C_4}\right)^2 - \frac{aC_1^2}{bC_2^2} - \frac{c}{b},$$

$$w(x,y,t) = \frac{C_2^2 - aC_1^2}{b}\left(\frac{y + C_4}{C_1x + C_2t + C_3}\right)^2 - \frac{c}{b},$$

$$w(x,y,t) = \frac{C_2^2}{bC_1^2} - \frac{a}{bC_1^2}\left(\frac{C_1y + C_2t + C_3}{x + C_4}\right)^2 - \frac{c}{b},$$

где $A$, $C_1$, $\ldots$, $C_4$ — произвольные постоянные (первое решение является решением типа бегущей волны).

$4^\circ$. Точные решения в неявном виде:

$$2\lambda\sqrt{a}\,(y + \lambda t) + (t\sqrt{a} \pm x)(bw + c - \lambda^2) = \varphi(w),$$

где $\varphi(w)$ — произвольная функция, $\lambda$ — произвольная постоянная.

5°. Точное решение:

$$w = u(z) - 4abC_1^2x^2, \quad z = y + bC_1x^2 + C_2t,$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, а функция $u(z)$ определяется обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$(bu + c - C_2^2)u'_z + 2abC_1u = 8a^2bC_1^2z + C_3.$$

За счет подходящих сдвигов по обеим переменным можно добиться, чтобы уравнение стало однородным (т. е. уравнение интегрируется в квадратурах).

6°. Точное решение:

$$w = v(r) - 4abC_1^2x^2 + 4bC_2^2t^2, \quad r = y + bC_1x^2 + bC_2t^2,$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, а функция $v(r)$ определяется обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$(bv + c)v'_r + 2b(aC_1 - C_2)v = 8b(a^2C_1^2 + C_2^2)r + C_3.$$

За счет подходящих сдвигов по обеим переменным можно добиться, чтобы уравнение стало однородным (т. е. уравнение интегрируется в квадратурах).

7°. Точное решение (обобщает решения из пп. 5° и 6°):

$$w = U(\xi) + A_1x^2 + A_2t^2 + A_3xt + A_4x + A_5t, \quad \xi = y + b(B_1x^2 + B_2t^2 + B_3xt + B_4x + B_5t),$$

где $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, $B_5$ — произвольные постоянные, коэффициенты $A_n$ выражаются через $B_n$ по формулам

$$\begin{aligned}
A_1 &= b(B_3^2 - 4aB_1^2),\\
A_2 &= b(4B_2^2 - aB_3^2),\\
A_3 &= 4bB_3(B_2 - aB_1),\\
A_4 &= 2b(B_3B_5 - 2aB_1B_4),\\
A_5 &= 2b(2B_2B_5 - aB_3B_4),
\end{aligned}$$

а функция $U(\xi)$ определяется обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$(bU + c + ab^2B_4^2 - b^2B_5^2)U'_\xi + 2b(aB_1 - B_2)U = 2(A_2 - aA_1)\xi + C_1.$$

За счет подходящих сдвигов по обеим переменным можно добиться, чтобы уравнение стало однородным (т. е. уравнение интегрируется в квадратурах).

8°. Точное решение с обобщенным разделением переменных, линейное по $y$:

$$w = F(x,t)y + G(x,t),$$

где функции $F$ и $G$ описываются системой уравнений

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - a\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - a\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = bF^2. \qquad (2)$$

Уравнение (1) является линейным однородным волновым уравнением. Уравнение (2) при известной функции $F = F(x,t)$ представляет собой линейное неоднородное волновое уравнение.

Общее решение системы (1)–(2) имеет вид:

$$\begin{aligned}
&F(x,t) = \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\eta),\\
&G(x,t) = \psi_1(\xi) + \psi_2(\eta) - \frac{b}{4a}\eta\int\varphi_1^2(\xi)\,d\xi - \frac{b}{4a}\xi\int\varphi_2^2(\eta)\,d\eta - \frac{b}{2a}\int\varphi_1(\xi)\,d\xi\int\varphi_2(\eta)\,d\eta,\\
&\qquad \xi = x + t\sqrt{a}, \quad \eta = x - t\sqrt{a},
\end{aligned}$$

где $\varphi_1(\xi)$, $\varphi_2(\eta)$, $\psi_1(\xi)$, $\psi_2(\eta)$ — произвольные функции.

9°. «Двумерное» решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное относительно $y$ (обобщает второе и третье решения из п. 2°):

$$w = f(x,t)y^2 + g(x,t)y + h(x,t),$$

где функции $f=f(x,t)$, $g=g(x,t)$, $h=h(x,t)$ описываются системой уравнений

$$
\begin{aligned}
f_{tt} &= af_{xx}+6bf^2,\\
g_{tt} &= ag_{xx}+6bfg,\\
h_{tt} &= ah_{xx}+bg^2+2bfh+2cf.
\end{aligned}
$$

Здесь индексы обозначают соответствующие частные производные.

10°. «Двумерное» решение:

$$w=V(\eta,t)-4abC_1^2x^2-4abC_1C_2x,\qquad \eta=y+bC_1x^2+bC_2x,$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, а функция $V(\eta,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(bV+c+ab^2C_2^2)\frac{\partial V}{\partial\eta}\right]+2abC_1\frac{\partial V}{\partial\eta}-8a^2bC_1^2.$$

11°. «Двумерное» решение:

$$w=W(x,\zeta)+4bC_1^2t^2+4bC_1C_2t,\qquad \zeta=y+bC_1t^2+bC_2t,$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, а функция $W(\zeta,t)$ описывается уравнением

$$a\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(bW+c-b^2C_2^2)\frac{\partial W}{\partial\zeta}\right]-2bC_1\frac{\partial W}{\partial\zeta}-8bC_1^2=0.$$

12°. Точное решение:

$$w=R(\rho)-4aC_1\varphi(\xi),\quad \rho=y+bC_1\bigl(x-t\sqrt{a}\,\bigr)+\int\varphi(\xi)\,d\xi,\quad \xi=x+t\sqrt{a},$$

где $C_1$ — произвольная постоянная, $\varphi(\xi)$ — произвольная функция, а функция $R(\rho)$ определяется простым обыкновенным дифференциальным уравнением $[(bR+c)R'_\rho]'_\rho=0$. Интегрируя, получим решение исходного уравнения в виде

$$b(w+4aC_1\varphi)^2+2c(w+4aC_1\varphi)=C_2y+bC_1C_2\bigl(x-t\sqrt{a}\,\bigr)+C_2\int\varphi\,d\xi+C_3,\qquad \varphi=\varphi(\xi).$$

13°. Точное решение (получено таким же образом, как и в п. 12°):

$$b(w+4aC_1\psi)^2+2c(w+4aC_1\psi)=C_2y+bC_1C_2\bigl(x+t\sqrt{a}\,\bigr)+C_2\int\psi\,d\eta+C_3,$$

где $C_1$, $C_2$, $C_3$ — произвольные постоянные, $\psi=\psi(\eta)$ — произвольная функция, $\eta=x-t\sqrt{a}$.

14°. Точное решение:

$$
\begin{aligned}
w &= U(z)-\frac{A^2}{2\sqrt{a}\,b}xt+\frac{A^2}{2b}t^2-\frac{2\sqrt{a}\,AB}{b}t-\frac{1}{b}(A\eta+4aB)\psi(\eta),\\
z &= y+\frac{A}{8a}\bigl(x^2+2\sqrt{a}\,xt-3at^2\bigr)+B(x+\sqrt{a}\,t)+\int\psi(\eta)\,d\eta,\quad \eta=x-t\sqrt{a},
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где $A$, $B$ — произвольные постоянные, $\psi(\eta)$ — произвольная функция, а функция $U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка ($C$ — произвольная постоянная)

$$(bU+c)U'_z+AU-\frac{A^2}{b}z+C=0.$$

За счет подходящих сдвигов по обеим переменным можно добиться, чтобы это уравнение стало однородным (т. е. уравнение интегрируется в квадратурах).

Другое решение можно получить, заменив в (3) $t$ на $-t$.

15°. Существуют также точные решения следующих видов:

$w(x,y,t)=F(y,r),\quad r=x^2-at^2$ «двумерное» решение;

$w(x,y,t)=t^{2\lambda}G(\xi,\eta)-\dfrac{c}{b},\quad \xi=\dfrac{x}{t},\quad \eta=\dfrac{y}{t^{\lambda+1}}$ «двумерное» решение;

$w(x,y,t)=H(z),\quad z=(x^2-at^2)y^{-2}$ «одномерное» решение;

где $\lambda$ — произвольная постоянная.

$16^\circ$. Подстановка $u = w + (c/b)$ приводит к частному случаю уравнения 4.1.2.5 при $n = 1$.

$17^\circ$. О других решениях см. уравнение 4.4.2.3 при $f(w) = a$ и $g(w) = bw + c$.

⦿ *Литература для уравнения* 4.1.3.1: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 285–288).

**2.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(aw+b)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(aw+b)\frac{\partial w}{\partial y}\right].$

Замена $U = aw + b$ приводит к уравнению вида 4.1.2.2:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial U}{\partial y}\right).$$

**3.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(a_1 w+b_1)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(a_2 w+b_2)\frac{\partial w}{\partial y}\right].$

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1 x + C_2, \pm C_1 y + C_3, \pm C_1 t + C_4),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

$2^\circ$. Решение типа бегущей волны:

$$w(x,y,t) = A\sqrt{k_1 x + k_2 y + \lambda t + B} + \frac{\lambda^2 - b_1 k_1^2 - b_2 k_2^2}{a_1 k_1^2 + a_2 k_2^2},$$

где $A$, $B$, $k_1$, $k_2$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

$3^\circ$. Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по пространственным переменным:

$$w(x,y,t) = (A_1 t + B_1)x + (A_2 t + B_2)y + \\ + \tfrac{1}{12}(a_1 A_1^2 + a_2 A_2^2)t^4 + \tfrac{1}{3}(a_1 A_1 B_1 + a_2 A_2 B_2)t^3 + \tfrac{1}{2}(a_1 B_1^2 + a_2 B_2^2)t^2 + Ct + D.$$

где $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, $C$, $D$ — произвольные постоянные.

$4^\circ$. Точные решения:

$$w(x,y,t) = \frac{1}{a_1 C_1^2 + a_2 C_2^2}\left(\frac{C_1 x + C_2 y + C_3}{t + C_4}\right)^2 - \frac{b_1 C_1^2 + b_2 C_2^2}{a_1 C_1^2 + a_2 C_2^2},$$

$$w(x,y,t) = \frac{(C_2^2 - b_2 C_1^2)(x + C_4)^2 - b_1(C_1 y + C_2 t + C_3)^2}{a_2 C_1^2 (x + C_4)^2 + a_1 (C_1 y + C_2 t + C_3)^2},$$

$$w(x,y,t) = \frac{(C_2^2 - b_1 C_1^2)(y + C_4)^2 - b_2(C_1 x + C_2 t + C_3)^2}{a_1 C_1^2 (y + C_4)^2 + a_2 (C_1 x + C_2 t + C_3)^2},$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

$5^\circ$. Существует точное решение с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,y,t) = f(t)x^2 + g(t)xy + h(t)y^2 + \varphi(t)x + \psi(t)y + \chi(t).$$

$6^\circ$. О других решениях см. уравнение 4.4.2.3 при $f(w) = a_1 w + b_1$, $g(w) = a_2 w + b_2$.

⦿ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 288–289).

**4.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{aw+b}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{aw+b}\frac{\partial w}{\partial y}\right).$

Замена $U = aw + b$ приводит к уравнению вида 4.1.2.4:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial y}\right).$$

**5.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(a_1 w^n+b_1)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(a_2 w^n+b_2)\frac{\partial w}{\partial y}\right].$

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1 x + C_2, \pm C_1 y + C_3, \pm C_1 t + C_4),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

$2^\circ$. Решения типа бегущей волны:

$$w(x,y,t) = \left(C_1x + C_2y + \lambda t + C_3\right)^{\frac{1}{n+1}}, \quad \lambda = \pm\sqrt{b_1C_1^2 + b_2C_2^2},$$

где $C_1$, $C_2$, $C_3$ — произвольные постоянные.

$3^\circ$. Точные решения:

$$w(x,y,t) = \left[\frac{1}{a_1C_1^2 + a_2C_2^2}\left(\frac{C_1x + C_2y + C_3}{t + C_4}\right)^2 - \frac{b_1C_1^2 + b_2C_2^2}{a_1C_1^2 + a_2C_2^2}\right]^{1/n},$$

$$w(x,y,t) = \left[\frac{(C_2^2 - b_2C_1^2)(x + C_4)^2 - b_1(C_1y + C_2t + C_3)^2}{a_2C_1^2(x + C_4)^2 + a_1(C_1y + C_2t + C_3)^2}\right]^{1/n},$$

$$w(x,y,t) = \left[\frac{(C_2^2 - b_1C_1^2)(y + C_4)^2 - b_2(C_1x + C_2t + C_3)^2}{a_1C_1^2(y + C_4)^2 + a_2(C_1x + C_2t + C_3)^2}\right]^{1/n},$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

$4^\circ$. О других решениях см. уравнение 4.4.2.3 при $f(w) = a_1w^n + b_1$, $g(w) = a_2w^n + b_2$.

⦿ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 289).

## 4.1.4. Другие уравнения

**1.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\alpha + \beta w)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \gamma w^2 + \delta w + \varepsilon.$

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm x + C_1, \pm y + C_2, \pm t + C_3),$$
$$w_2 = w(x\cos\beta + y\sin\beta, -x\sin\beta + y\cos\beta,\ t),$$

где $C_1$, $C_2$, $C_3$, $\beta$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

$2^\circ$. «Двумерное» решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y,t) = f(t) + g(t)\Theta(x,y). \tag{1}$$

Здесь функция $\Theta(x,y)$ удовлетворяет двумерному уравнению Гельмгольца

$$\Delta\Theta + \varkappa\Theta = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

где $\varkappa = \gamma/\beta$ ($\beta \neq 0$). Об этом линейном уравнении см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001*b*). Функции $f(t)$ и $g(t)$ в (1) находятся из автономной системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f''_{tt} = \gamma f^2 + \delta f + \varepsilon, \tag{2}$$
$$g''_{tt} = (\gamma f + \delta - \alpha\varkappa)g. \tag{3}$$

Уравнение (2) не зависит от функции $g(t)$. Частные решения этого уравнения имеют вид $f = \mathrm{const}$, где $\gamma f^2 + \delta f + \varepsilon = 0$. При $\gamma = 0$ уравнение (2) является линейным уравнением с постоянными коэффициентами. При $\gamma \neq 0$ общее решение уравнения (2) можно представить в неявном виде

$$\int \frac{df}{\sqrt{\frac{2}{3}\gamma f^3 + \delta f^2 + 2\varepsilon f + C_1}} = C_2 \pm t,$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные. Уравнение (3) линейно относительно функции $g(t)$. Для частных решений вида $f = \mathrm{const}$ оно является линейным уравнением с постоянными коэффициентами.

$3^\circ$. Существует «двумерное» решение вида

$$w(x,y,t) = U(z_1,z_2), \quad z_1 = a_1x + b_1y + c_1t, \quad z_2 = a_2x + b_2y + c_2t,$$

где $a_n, b_n, c_n$ — произвольные постоянные ($n = 1,\ 2$). Частному случаю $U = U(z_1)$ соответствует решение типа бегущей волны.

**2.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \alpha w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \alpha\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] - \beta.$

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2} w(\pm C_1^2 x + C_2, \pm C_1^2 y + C_3, C_1 t + C_4),$$
$$w_2 = w(x\cos\beta + y\sin\beta, -x\sin\beta + y\cos\beta,\ t),$$

где $C_1, \ldots, C_4, \beta$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

$2^\circ$. Существуют точные решения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,y,t) = f(t) + g(t)\varphi(x) + h(t)\psi(y).$$

В частности при $\varphi''_{xx} = \nu\varphi$, $\psi''_{yy} = -\nu\psi$, где $\nu$ — произвольная константа, имеем ($A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$ — произвольные постоянные)

$$\varphi(x) = A_1 \operatorname{ch}\mu x + A_2 \operatorname{sh}\mu x, \quad \psi(y) = B_1\cos\mu y + B_2 \sin\mu y \quad (\nu = \mu^2 > 0),$$
$$\varphi(x) = A_1 \cos\mu x + A_2 \sin\mu x, \quad \psi(y) = B_1\operatorname{ch}\mu y + B_2 \operatorname{sh}\mu y \quad (\nu = -\mu^2 < 0).$$

Функции $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f''_{tt} = \alpha\nu(A_1^2 - sA_2^2)g^2 - \alpha\nu(B_1^2 + sB_2^2)h^2 - \beta,$$
$$g''_{tt} = \alpha\nu f g,$$
$$h''_{tt} = -\alpha\nu f h,$$

где $s = \operatorname{sign}\nu$.

$3^\circ$. Существуют точные решения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,y,t) = f(t) + g(t)\varphi(x) + h(t)\psi(y) + u(t)\theta(x)\chi(y). \qquad (1)$$

При $\varphi''_{xx} = 4\nu\varphi$, $\psi''_{yy} = -4\nu\psi$, $\theta''_{xx} = \nu\theta$, $\chi''_{yy} = -\nu\chi$, где $\nu$ — произвольная постоянная, в формуле (1) следует положить:

| при $\nu = \mu^2 > 0$ | при $\nu = -\mu^2 < 0$ |
|---|---|
| $\varphi(x) = A_1 \operatorname{ch} 2\mu x + A_2 \operatorname{sh} 2\mu x$ | $\varphi(x) = A_1 \cos 2\mu x + A_2 \sin 2\mu x$ |
| $\psi(y) = B_1 \cos 2\mu y + B_2 \sin 2\mu y$ | $\psi(y) = B_1 \operatorname{ch} 2\mu y + B_2 \operatorname{sh} 2\mu y$ |
| $\theta(x) = C_1 \operatorname{ch}\mu x + C_2 \operatorname{sh}\mu x$ | $\theta(x) = C_1 \cos\mu x + C_2 \sin\mu x$ |
| $\chi(y) = D_1 \cos\mu y + D_2 \sin\mu y$ | $\chi(y) = D_1 \operatorname{ch}\mu y + D_2 \operatorname{sh}\mu y$ |

Функции $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $u(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений ($s = \operatorname{sign}\nu$):

$$f''_{tt} = -4\alpha\nu(A_1^2 - sA_2^2)g^2 + 4\alpha\nu(B_1^2 + sB_2^2)h^2 - \beta,$$
$$g''_{tt} = -4\alpha\nu f g + \alpha\nu a_1(D_1^2 + sD_2^2)u^2,$$
$$h''_{tt} = 4\alpha\nu f h - \alpha\nu a_2(C_1^2 - sC_2^2)u^2,$$
$$u''_{tt} = -2\alpha\nu(a_3 g - a_4 h)u.$$

Произвольные постоянные $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, $C_1$, $C_2$, $D_1$, $D_2$ связаны двумя соотношениями

$$2A_1C_1C_2 = A_2(C_1^2 + sC_2^2), \quad 2B_1D_1D_2 = B_2(D_1^2 - sD_2^2).$$

Коэффициенты $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ определяются формулами

$$a_1 = \frac{C_1^2 + sC_2^2}{2A_1}, \quad a_2 = \frac{D_1^2 - sD_2^2}{2B_1}, \quad a_3 = A_2\frac{C_1^2 - sC_2^2}{C_1C_2}, \quad a_4 = B_2\frac{D_1^2 + sD_2^2}{D_1D_2},$$

при $A_1 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $C_1C_2 \neq 0$, $D_1D_2 \neq 0$.

Если $A_1 = 0$ ($A_2 \neq 0$), то следует положить $a_1 = C_1C_2/A_2$. Если $B_1 = 0$ ($B_2 \neq 0$), то $a_2 = D_1D_2/B_2$. Если $C_1 = 0$ ($C_2 \neq 0$), то $a_3 = -A_1$. Если $C_2 = 0$ ($C_1 \neq 0$), то $a_3 = A_1$. Если $D_1 = 0$ ($D_2 \neq 0$), то $a_4 = -B_1$. Если $D_2 = 0$ ($D_1 \neq 0$), то $a_4 = B_1$.

$4^\circ$. Существуют точные решения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,y,t) = f(t)x^2 + g(t)xy + h(t)y^2 + \varphi(t)x + \psi(t)y + \chi(t).$$

В частном случае $\varphi(t) = \psi(t) \equiv 0$ функции $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $\chi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f''_{tt} = \alpha(2fh - 2f^2 - g^2), \qquad h''_{tt} = \alpha(2fh - 2h^2 - g^2),$$
$$g''_{tt} = -2\alpha g(f+h), \qquad \chi''_{tt} = 2\alpha(f+h)\chi - \beta.$$

$5^\circ$. Существует «двумерное» решение вида

$$w(x,y,t) = U(z_1,z_2), \quad z_1 = a_1x + b_1y + c_1t, \quad z_2 = a_2x + b_2y + c_2t,$$

где $a_n, b_n, c_n$ — произвольные постоянные ($n=1,\ 2$). Частному случаю $U=U(z_1)$ соответствует решение типа бегущей волны.

**3.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a_1\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + a_2\dfrac{\partial}{\partial y}\left(w^k\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + bw^p.$

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^2 w(\pm C_1^{p-n-1}x + C_2, \pm C_1^{p-k-1}y + C_3, \pm C_1^{p-1}t + C_4),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

$2^\circ$. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,t) = F(\xi,\eta), \quad \xi = \alpha_1x + \alpha_2y + \alpha_3t, \quad \eta = \beta_1x + \beta_2y + \beta_3t;$$
$$w(x,y,t) = t^{\frac{2}{1-p}}U(z_1,z_2), \quad z_1 = xt^{\frac{p-n-1}{1-p}}, \quad z_2 = yt^{\frac{p-k-1}{1-p}}.$$

## 4.2. Уравнения с двумя пространственными переменными, содержащие экспоненциальные нелинейности

### 4.2.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[g(y)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right] + ae^{\lambda w}$

**1.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + ce^{\lambda w}.$

Частный случай уравнения 4.4.1.2 при $f(w) = ce^{\lambda w}$.

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w\Big(C_1^{\frac{2}{2-n}}x,\ C_1^{\frac{2}{2-m}}y,\ \pm C_1t + C_2\Big) + \frac{2}{\lambda}\ln C_1,$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

$2^\circ$. Точное решение при $n \neq 2$, $m \neq 2$, $\lambda \neq 0$:

$$w = -\frac{1}{\lambda}\ln\left\{\frac{2c\lambda(2-n)(2-m)}{4-nm}\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right]\right\}.$$

$3^\circ$. Точное решение при $n \neq 2$, $m \neq 2$ (обобщает решение из п. $2^\circ$):

$$w = w(r), \qquad r^2 = 4k\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

где $C$, $k$ — произвольные постоянные ($k \neq 0$), а функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + \frac{A}{r}w'_r + ck^{-1}e^{\lambda w} = 0, \qquad A = \frac{2(4-n-m)}{(2-n)(2-m)}.$$

$4^\circ$. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,t)=U(\xi,t),\quad \xi^2=4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}+\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2}\right],$$

$$w(x,y,t)=V(x,\eta),\quad \eta^2=\pm4\left[\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2}-\frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

$$w(x,y,t)=W(y,\zeta),\quad \zeta^2=\pm4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}-\frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

$$w(x,y,t)=F(z_1,z_2)-\frac{2}{\lambda}\ln|t|,\quad z_1=x|t|^{\frac{2}{n-2}},\quad z_2=y|t|^{\frac{2}{m-2}}.$$

**2.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(be^{\lambda y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+ce^{\beta w}.$

Частный случай уравнения 4.4.1.3 при $f(w)=ce^{\beta w}$.

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=w\Big(C_1^{\frac{2}{2-n}}x,\ y-\frac{2}{\lambda}\ln C_1,\ \pm C_1t+C_2\Big)+\frac{2}{\beta}\ln C_1,$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

$2^\circ$. Точное решение при $n\neq2$, $\beta\neq0$, $\lambda\neq0$:

$$w=-\frac{1}{\beta}\ln\left\{\frac{2c\beta(2-n)}{n}\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}+\frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2}-\frac{1}{4}(t+C)^2\right]\right\}.$$

$3^\circ$. Точное решение при $n\neq2$, $\lambda\neq0$ (обобщает решение из п. $2^\circ$):

$$w=w(r),\qquad r^2=4k\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}+\frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2}-\frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

где $C$, $k$ — произвольные постоянные ($k\neq0$), а функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr}+\frac{A}{r}w'_r+ck^{-1}e^{\beta w}=0,\qquad A=\frac{2}{2-n}.$$

$4^\circ$. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,t)=U(\xi,t),\quad \xi^2=4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}+\frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2}\right],$$

$$w(x,y,t)=V(x,\eta),\quad \eta^2=\pm4\left[\frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2}-\frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

$$w(x,y,t)=W(y,\zeta),\quad \zeta^2=\pm4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}-\frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

$$w(x,y,t)=F(z_1,z_2)-\frac{2}{\beta}\ln|t|,\quad z_1=x|t|^{\frac{2}{n-2}},\quad z_2=y+\frac{2}{\lambda}\ln|t|.$$

**3.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(be^{\lambda y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+ce^{\mu w}.$

Частный случай уравнения 4.4.1.4 при $f(w)=ce^{\mu w}$.

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=w\Big(x-\frac{2}{\beta}\ln C_1,\ y-\frac{2}{\lambda}\ln C_1,\ \pm C_1t+C_2\Big)+\frac{2}{\mu}\ln C_1,$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

$2^\circ$. Точное решение при $\beta\neq0$, $\lambda\neq0$:

$$w=w(r),\qquad r^2=4k\left[\frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2}+\frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2}-\frac{1}{4}(t+C_1)^2\right],$$

где $C_1$, $k$ — произвольные постоянные ($k \neq 0$), а функция $w(r)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + ck^{-1}e^{\mu w} = 0.$$

Его общее решение описывается формулами:

$$w = \begin{cases} -\dfrac{1}{\mu}\ln\left[-\dfrac{c\mu}{2k}(r+C_3)^2\right] & \text{при } ck\mu < 0, \\ -\dfrac{1}{\mu}\ln\left[-\dfrac{c\mu}{2kC_2^2}\sin^2(C_2r+C_3)\right] & \text{при } ck\mu < 0, \\ -\dfrac{1}{\mu}\ln\left[-\dfrac{c\mu}{2kC_2^2}\operatorname{sh}^2(C_2r+C_3)\right] & \text{при } ck\mu < 0, \\ -\dfrac{1}{\mu}\ln\left[\dfrac{c\mu}{2kC_2^2}\operatorname{ch}^2(C_2r+C_3)\right] & \text{при } ck\mu > 0, \end{cases}$$

где $C_2$, $C_3$ — произвольные постоянные.

$3^\circ$. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,t) = U(\xi,t), \quad \xi^2 = 4\left(\frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2} + \frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2}\right),$$
$$w(x,y,t) = V(x,\eta), \quad \eta^2 = \pm 4\left[\frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$
$$w(x,y,t) = W(y,\zeta), \quad \zeta^2 = \pm 4\left[\frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$
$$w(x,y,t) = F(z_1,z_2) - \frac{2}{\mu}\ln|t|, \quad z_1 = x + \frac{2}{\beta}\ln|t|, \quad z_2 = y + \frac{2}{\lambda}\ln|t|.$$

### 4.2.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\beta w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + b\dfrac{\partial}{\partial y}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)$

**1.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial}{\partial y}\left(e^{w}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right).$

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(C_1x + C_3, C_2y + C_4, \pm C_1t + C_5) + \ln\frac{C_1^2}{C_2^2},$$
$$w_2 = w(x\operatorname{ch}\lambda + ta^{1/2}\operatorname{sh}\lambda,\ y,\ xa^{-1/2}\operatorname{sh}\lambda + t\operatorname{ch}\lambda),$$

где $C_1, \ldots, C_5$, $\lambda$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

$2^\circ$. Точные решения:

$$w(x,y,t) = \varphi(x - t\sqrt{a}\,) + \psi(x + t\sqrt{a}\,) + \ln|C_1y + C_2|,$$
$$w(x,y,t) = \ln\bigl[y\varphi(x - t\sqrt{a}\,) + \psi(x - t\sqrt{a}\,)\bigr],$$
$$w(x,y,t) = \ln\bigl[y\varphi(x + t\sqrt{a}\,) + \psi(x + t\sqrt{a}\,)\bigr],$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные; $\varphi(z_1)$, $\psi(z_2)$ — произвольные функции.

$3^\circ$. Точные решения:

$$w(x,y,t) = \ln\left[\frac{(B^2 - aA^2)(y+D)^2}{b(Ax+Bt+C)^2}\right],$$
$$w(x,y,t) = \ln\left[\frac{(B^2 - aA^2)(y+D)^2}{2\cos^2(Ax+Bt+C)}\right],$$
$$w(x,y,t) = \ln\left[\frac{(aA^2 - B^2)(y+D)^2}{b\operatorname{ch}^2(Ax+Bt+C)}\right],$$
$$w(x,y,t) = \ln\left[\frac{(B^2 - aA^2)(y+D)^2}{b\operatorname{sh}^2(Ax+Bt+C)}\right],$$

$$w(x,y,t)=\ln\left(\frac{4aC}{b}\right)-2\ln\bigl|(x+A)^2-a(t+B)^2+C\bigr|+2\ln|y+D|,$$
$$w(x,y,t)=\ln\left[\frac{1}{bB^2}\left(\frac{Ax+By+C}{t+D}\right)^2-\frac{aA^2}{bB^2}\right],$$
$$w(x,y,t)=\ln\left[\frac{B^2}{bA^2}-\frac{a}{bA^2}\left(\frac{Ay+Bt+C}{x+D}\right)^2\right],$$

где $A$, $B$, $C$, $D$ — произвольные постоянные.

$4^\circ$. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t)=U(x,t)+2\ln|y+C|,$$

где функция $U=U(x,t)$ определяется дифференциальным уравнением вида 3.2.1.1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2be^U.$$

Интегрируя, получим решение исходного уравнения:

$$w(x,y,t)=f(\xi)+g(\eta)-2\ln\left|k\int e^{f(\xi)}\,d\xi-\frac{b}{4ak}\int e^{g(\eta)}\,d\eta\right|+2\ln|y+C|,$$
$$\xi=x-\sqrt{a}\,t,\qquad \eta=x+\sqrt{a}\,t,$$

где $f=f(\xi)$, $g=g(\eta)$ — произвольные функции, $k$ — произвольная постоянная.

$5^\circ$. Точные решения в неявном виде:

$$2\lambda\sqrt{a}\,(y+\lambda t)+(t\sqrt{a}\pm x)(be^w-\lambda^2)=\varphi(w),$$

где $\varphi(w)$ — произвольная функция, $\lambda$ — произвольная постоянная.

$6^\circ$. Существуют «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,t)=F(y,r),\quad r=x^2-at^2;$$
$$w(x,y,t)=G(\xi,\eta)-2k\ln|t|,\quad \xi=xt^{-1},\quad \eta=y|t|^{k-1};$$
$$w(x,y,t)=H(\zeta_1,\zeta_2)+2\ln|y|,\quad \zeta_1=t+k_1\ln|y|,\quad \zeta_2=x+k_2\ln|y|;$$
$$w(x,y,t)=U(\rho_1,\rho_2)+2y,\quad \rho_1=te^y,\quad \rho_2=xe^y;$$
$$w(x,y,t)=V(\chi)+2\ln|y/t|,\quad \chi=x/t,$$

где $k$, $k_1$, $k_2$ — произвольные постоянные.

$7^\circ$. Уравнение имеет точное решение вида

$$w(x,y,t)=W(z),\quad z=(x^2-at^2)y^{-2}.$$

$8^\circ$. О других точных решениях см. уравнение 4.4.2.3 при $f(w)=a,\ g(w)=be^w$.

⊙ *Литература для уравнения* 4.2.2.1: N. H. Ibragimov (1994, pp. 222–225), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 294–296).

**2.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+b\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\lambda w}\frac{\partial w}{\partial y}\right).$

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=w(C_1x+C_3,\pm C_1y+C_4,C_2t+C_5)+\frac{1}{\lambda}\ln\frac{C_2^2}{C_1^2},$$
$$w_2=w\bigl(x\cos\beta+y\sqrt{a/b}\,\sin\beta,-x\sqrt{b/a}\,\sin\beta+y\cos\beta,\ t\bigr),$$

где $C_1,\ldots,C_5$, $\beta$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

$2^\circ$. Точные решения:

$$w(x,y,t)=C_1t+C_2+\frac{1}{\lambda}\ln(C_3x+C_4y+C_5);$$
$$w(x,y,t)=C_1t+C_2+\frac{1}{\lambda}\ln\bigl[C_3(bx^2-ay^2)+C_4xy+C_5\bigr];$$
$$w(x,y,t)=C_1t+C_2+\frac{1}{\lambda}\ln\bigl[C_3\ln(bx^2+ay^2)+C_4\bigr];$$

$$w(x,y,t) = C_1 t + C_2 + \sqrt{b}\,C_3 x + \frac{1}{\lambda}\ln\cos\bigl(\sqrt{a}\,C_3\lambda y + C_4\bigr);$$
$$w(x,y,t) = C_1 t + C_2 + \frac{1}{\lambda}\ln\bigl[C_3\exp\bigl(\sqrt{b}\,C_4 x\bigr)\cos\bigl(\sqrt{a}\,C_4 y + C_5\bigr) + C_6\bigr];$$
$$w(x,y,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{1}{aC_1^2 + bC_2^2}\left(\frac{C_1 x + C_2 y + C_3}{t + C_4}\right)^2\right];$$
$$w(x,y,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{C_2^2(x+C_4)^2}{a(C_1 y + C_2 t + C_3)^2 + bC_1^2(x+C_4)^2}\right];$$
$$w(x,y,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{bC_1x^2 + C_2xy + Ky^2 + C_3x + C_4y + C_5}{\cos^2(C_1t + C_6)}\right], \quad K = \frac{C_1^2}{b} - aC_1;$$
$$w(x,y,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{bC_1x^2 + C_2xy + Ky^2 + C_3x + C_4y + C_5}{\operatorname{sh}^2(C_1t + C_6)}\right], \quad K = \frac{C_1^2}{b} - aC_1;$$
$$w(x,y,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{bC_1x^2 + C_2xy - Ky^2 + C_3x + C_4y + C_5}{\operatorname{ch}^2(C_1t + C_6)}\right], \quad K = \frac{C_1^2}{b} + aC_1;$$
$$w(x,y,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{aC_1^2x^2 + C_2\exp\bigl(\sqrt{b}\,C_3x\bigr)\cos\bigl(\sqrt{a}\,C_3y + C_4\bigr)}{\cos^2(aC_1t + C_5)}\right];$$
$$w(x,y,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{bC_1^2y^2 + C_2\exp\bigl(\sqrt{b}\,C_3x\bigr)\cos\bigl(\sqrt{a}\,C_3y + C_4\bigr)}{\cos^2(bC_1t + C_5)}\right];$$
$$w(x,y,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{aC_1^2x^2 + C_2\exp\bigl(\sqrt{b}\,C_3x\bigr)\cos\bigl(\sqrt{a}\,C_3y + C_4\bigr)}{\operatorname{sh}^2(aC_1t + C_5)}\right];$$
$$w(x,y,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{bC_1^2y^2 + C_2\exp\bigl(\sqrt{b}\,C_3x\bigr)\cos\bigl(\sqrt{a}\,C_3y + C_4\bigr)}{\operatorname{sh}^2(bC_1t + C_5)}\right];$$
$$w(x,y,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{-aC_1^2x^2 + C_2\exp\bigl(\sqrt{b}\,C_3x\bigr)\cos\bigl(\sqrt{a}\,C_3y + C_4\bigr)}{\operatorname{ch}^2(aC_1t + C_5)}\right];$$
$$w(x,y,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{-bC_1^2y^2 + C_2\exp\bigl(\sqrt{b}\,C_3x\bigr)\cos\bigl(\sqrt{a}\,C_3y + C_4\bigr)}{\operatorname{ch}^2(bC_1t + C_5)}\right];$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные (первые пять решений являются вырожденными).

$3^\circ$. «Двумерное» вырожденное решение (обобщает первые пять решений из п. $2^\circ$):

$$w(x,y,t) = C_1t + C_2 + \frac{1}{\lambda}\ln U(\xi,\eta), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{b}},$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, а функция $U = U(\xi,\eta)$ определяется уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0.$$

Об этом линейном уравнении см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

$4^\circ$. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = f(t) + \frac{1}{\lambda}\ln V(\xi,\eta), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{b}},$$

где функция $f = f(t)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f''_{tt} = e^{\lambda f}, \tag{1}$$

а функция $V = V(\xi,\eta)$ — решение уравнения Пуассона

$$\Delta V - \lambda = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}. \tag{2}$$

Об этом линейном уравнении см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

Общее решение уравнения (1) описывается формулами

$$f(t)=\begin{cases} -\dfrac{1}{\lambda}\ln\bigl[\frac{1}{2}\lambda(t+C_1)^2\bigr] & \text{при}\ \ \lambda>0,\\ -\dfrac{1}{\lambda}\ln\biggl[\dfrac{\lambda}{2C_1^2}\cos^2(C_1t+C_2)\biggr] & \text{при}\ \ \lambda>0,\\ -\dfrac{1}{\lambda}\ln\biggl[\dfrac{\lambda}{2C_1^2}\operatorname{sh}^2(C_1t+C_2)\biggr] & \text{при}\ \ \lambda>0,\\ -\dfrac{1}{\lambda}\ln\biggl[-\dfrac{\lambda}{2C_1^2}\operatorname{ch}^2(C_1t+C_2)\biggr] & \text{при}\ \ \lambda<0. \end{cases}$$

5°. Имеются точные решения следующих видов:

$w(x,y,t)=F(z,t)+\dfrac{2}{\lambda}\ln x,\quad z=\dfrac{y}{x},$ «двумерное» решение;

$w(x,y,t)=G(r,t),\quad r=bx^2+ay^2$ «двумерное» решение;

$w(x,y,t)=H(z_1,z_2)-\dfrac{2k}{\lambda}\ln|t|,\quad z_1=x|t|^{k-1},\quad z_2=y|t|^{k-1}$ «двумерное» решение;

$w(x,y,t)=U(\xi,\eta)-\dfrac{2}{\lambda}\ln|t|,\quad \xi=x+k_1\ln|t|,\quad \eta=y+k_2\ln|t|$ «двумерное» решение;

$w(x,y,t)=V(\rho_1,\rho_2)-\dfrac{2}{\lambda}t,\quad \rho_1=xe^t,\quad \rho_2=ye^t$ «двумерное» решение;

$w(x,y,t)=W(z)+\dfrac{2}{\lambda}\ln\Bigl|\dfrac{x}{t}\Bigr|,\quad z=\dfrac{y}{x}$ «одномерное» решение,

$w(x,y,t)=R(\zeta),\quad \zeta=\dfrac{bx^2+ay^2}{t^2}$ «одномерное» решение,

где $k$, $k_1$, $k_2$ — произвольные постоянные.

6°. О других точных решениях см. уравнение 4.4.2.3 при $f(w)=ae^{\lambda w}$, $g(w)=be^{\lambda w}$.

⦿ *Литература для уравнения* 4.2.2.2: N. H. Ibragimov (1994, pp. 222–225), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 296–297).

**3.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a\frac{\partial}{\partial x}\Bigl(e^w\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr)+b\frac{\partial}{\partial y}\Bigl(e^{\lambda w}\frac{\partial w}{\partial y}\Bigr).$

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=w(\pm C_1C_2x+C_3,\pm C_1C_2^{\lambda}y+C_4,\pm C_1t+C_5)-2\ln|C_2|,$$

где $C_1$, …, $C_5$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$ak_1^2e^w+bk_2^2\lambda^{-1}e^{\lambda w}-\beta^2w=C_1(k_1x+k_2y+\beta t)+C_2,$$

где $C_1$, $C_2$, $k_1$, $k_2$, $\beta$ — произвольные постоянные.

3°. Точные решения в неявном виде:

$$\left(\frac{C_1x+C_2y+C_3}{t+C_4}\right)^2=aC_1^2e^w+bC_2^2e^{\lambda w},$$

$$a\left(\frac{C_1y+C_2t+C_3}{x+C_4}\right)^2e^w+bC_1^2e^{\lambda w}=C_2^2,$$

$$b\left(\frac{C_1x+C_2t+C_3}{y+C_4}\right)^2e^{\lambda w}+aC_1^2e^w=C_2^2,$$

где $C_1$, …, $C_4$ — произвольные постоянные.

4°. «Двумерное» решение ($c_1$, $c_2$ — произвольные постоянные):

$$w(x,y,t)=u(z,t),\quad z=c_1x+c_2y,$$

где функция $u=u(z,t)$ определяется дифференциальным уравнением вида 3.4.4.6:

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left[\varphi(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right],\qquad \varphi(u)=ac_1^2e^u+bc_2^2e^{\lambda u},$$

которое может быть линеаризовано.

$5^\circ$. «Двумерное» решение ($s_1$, $s_2$ — произвольные постоянные):

$$w(x,y,t)=v(x,\xi),\quad \xi=s_1y+s_2t,$$

где функция $v=v(x,\xi)$ определяется дифференциальным уравнением вида 5.4.4.8:

$$a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^v\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left[\psi(v)\frac{\partial v}{\partial z}\right]=0,\qquad \psi(v)=bs_1^2e^{\lambda v}-s_2^2,$$

которое может быть линеаризовано.

$6^\circ$. Существует «двумерное» решение вида (обобщает решения из пп. $3^\circ$ и $4^\circ$):

$$w(x,y,t)=U(z_1,z_2),\quad z_1=a_1x+b_1y+c_1t,\quad z_2=a_2x+b_2y+c_2t.$$

$7^\circ$. Точное решение:

$$w(x,y,t)=U(\xi)+2\ln(x/t),\quad \xi=x^{-\lambda}yt^{\lambda-1},$$

где функция $U=U(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned}&\bigl[a\lambda^2\xi^2e^U+be^{\lambda U}-(\lambda-1)^2\xi^2\bigr]U''_{\xi\xi}+\lambda\bigl(a\lambda\xi^2e^U+be^{\lambda U}\bigr)(U'_\xi)^2+\\&\qquad+\xi\bigl[a\lambda(\lambda-3)e^U-(\lambda-1)(\lambda-2)\bigr]U'_\xi+2(ae^U-1)=0.\end{aligned}$$

$8^\circ$. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t)=u(z,t)+2\ln x,\quad z=x^{-\lambda}y,$$

где функция $u=u(z,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\bigl(a\lambda^2z^2e^u+be^{\lambda u}\bigr)\frac{\partial^2u}{\partial z^2}+\lambda\bigl(a\lambda z^2e^u+be^{\lambda u}\bigr)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+a\lambda(\lambda-3)ze^u\frac{\partial u}{\partial z}+2ae^u.$$

$9^\circ$. О других точных решениях см. уравнение 4.4.2.3 при $f(w)=ae^w$, $g(w)=be^{\lambda w}$.

⊙ *Литература для уравнения* 4.2.2.3: N. H. Ibragimov (1994, pp. 222–225), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 298).

### 4.2.3. Другие уравнения

**1.** $$\frac{\partial^2w}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[(a_1e^{\lambda w}+b_1)\frac{\partial w}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(a_2e^{\lambda w}+b_2)\frac{\partial w}{\partial y}\right].$$

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=w(\pm C_1x+C_2,\pm C_1y+C_3,\pm C_1t+C_4),$$

где $C_1,\,\ldots,\,C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

$2^\circ$. Решения типа бегущей волны:

$$w(x,y,t)=\frac{1}{\lambda}\ln\bigl(C_1x+C_2y+\beta t+C_3\bigr),\qquad \beta=\pm\sqrt{b_1C_1^2+b_2C_2^2},$$

где $C_1$, $C_2$, $C_3$ — произвольные постоянные.

$3^\circ$. Точные решения:

$$\begin{aligned}w(x,y,t)&=\frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{1}{a_1C_1^2+a_2C_2^2}\left(\frac{C_1x+C_2y+C_3}{t+C_4}\right)^2-\frac{b_1C_1^2+b_2C_2^2}{a_1C_1^2+a_2C_2^2}\right],\\w(x,y,t)&=\frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{(C_2^2-b_2C_1^2)(x+C_4)^2-b_1(C_1y+C_2t+C_3)^2}{a_2C_1^2(x+C_4)^2+a_1(C_1y+C_2t+C_3)^2}\right],\\w(x,y,t)&=\frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{(C_2^2-b_1C_1^2)(y+C_4)^2-b_2(C_1x+C_2t+C_3)^2}{a_1C_1^2(y+C_4)^2+a_2(C_1x+C_2t+C_3)^2}\right],\end{aligned}$$

где $C_1,\,\ldots,\,C_4$ — произвольные постоянные.

$4^\circ$. О других решениях см. уравнение 4.4.2.3 при $f(w)=a_1e^{\lambda w}+b_1$, $g(w)=a_2e^{\lambda w}+b_2$.

**2.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda_1 w}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + b\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\lambda_2 w}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + ce^{\beta w}.$

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1^{\beta-\lambda_1}x + C_2, \pm C_1^{\beta-\lambda_2}y + C_3, \pm C_1^{\beta}t + C_4) + 2\ln|C_1|,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

$2^\circ$. Существуют «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,t) = U(\xi,\eta) - \frac{2}{\beta}\ln|t|, \quad \xi = x|t|^{\frac{\lambda_1-\beta}{\beta}}, \quad \eta = y|t|^{\frac{\lambda_2-\beta}{\beta}};$$

$$w(x,y,t) = V(\eta_1,\eta_2), \quad \eta_1 = a_1x + b_1y + c_1t, \quad \eta_2 = a_2x + b_2y + c_2t.$$

## 4.3. Нелинейные телеграфные уравнения с двумя пространственными переменными

### 4.3.1. Уравнения, содержащие степенные нелинейности

**1.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left[(bw+c)\frac{\partial w}{\partial y}\right].$

$1^\circ$. «Двумерное» решение с обобщенным разделением переменных, линейное относительно $y$:

$$w = f(x,t)y + g(x,t),$$

где функции $f$ и $g$ определяются путем решения одномерных уравнений

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + k\frac{\partial f}{\partial t} = a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + k\frac{\partial g}{\partial t} = a\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + bf^2.$$

Первое уравнение является линейным однородным телеграфным уравнением. Второе уравнение при известной функции $f = f(x,t)$ представляет собой линейное неоднородное телеграфное уравнение. Об этих уравнениях см. книгу А. Д. Полянина (2001 *b*).

$2^\circ$. Существует «двумерное» решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по $y$:

$$w = f(x,t)y^2 + g(x,t)y + h(x,t).$$

$3^\circ$. Подстановка $u = w + (c/b)$ приводит к частному случаю уравнения 4.3.1.4 при $m = 1$.

**2.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(a_1w+b_1)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(a_2w+b_2)\frac{\partial w}{\partial y}\right].$

$1^\circ$. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y,t) = Akx + Bky + Ce^{-kt} + k(A^2a_1 + B^2a_2)t + D,$$

где $A$, $B$, $C$, $D$ — произвольные постоянные.

$2^\circ$. Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по пространственным переменным:

$$w(x,y,t) = (A_1e^{-kt} + B_1)x + (A_2e^{-kt} + B_2)y + \frac{1}{2k^2}(a_1A_1^2 + a_2A_2^2)e^{-2kt} - \\ - \frac{2}{k}(a_1A_1B_1 + a_2A_2B_2)te^{-kt} + C_1e^{-kt} + \frac{1}{k}(a_1B_1^2 + a_2B_2^2)t + C_2,$$

где $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные.

$3^\circ$. Решение типа бегущей волны в неявном виде ($k \neq 0$):

$$k\lambda(a_1\beta_1^2 + a_2\beta_2^2)w + [k\lambda(b_1\beta_1^2 + b_2\beta_2^2 - \lambda^2) - C_1(a_1\beta_1^2 + a_2\beta_2^2)]\ln(k\lambda w + C_1) = \\ = k^2\lambda^2(\beta_1x + \beta_2y + \lambda t) + C_2,$$

где $C_1$, $C_2$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

$4^\circ$. Существует точное решение с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,y,t) = f(t)x^2 + g(t)xy + h(t)y^2 + \varphi(t)x + \psi(t)y + \chi(t).$$

**3.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\frac{\partial w}{\partial t} = a\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right].$

Частный случай уравнения 4.3.1.6 при $n = m = -1$.

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^2 w(\pm C_1 x + C_2, \pm C_1 y + C_3, t + C_4),$$
$$w_2 = w(x\cos\beta + y\sin\beta,\ -x\sin\beta + y\cos\beta,\ t),$$

где $C_1, \ldots, C_4, \beta$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

$2^\circ$. Точные решения:

$$w(x,y,t) = \frac{2at + A + Be^{-kt}}{k(\sin y + Ce^x)^2},$$
$$w(x,y,t) = \frac{C_1^2(2at + A + Be^{-kt})}{ke^{2x}\operatorname{sh}^2(C_1e^{-x}\sin y + C_2)},$$
$$w(x,y,t) = \frac{C_1^2(-2at + A + Be^{-kt})}{ke^{2x}\operatorname{ch}^2(C_1e^{-x}\sin y + C_2)},$$
$$w(x,y,t) = \frac{C_1^2(2at + A + Be^{-kt})}{ke^{2x}\cos^2(C_1e^{-x}\sin y + C_2)},$$

где $A$, $B$, $C$, $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные.

$3^\circ$. Указанные в п. $2^\circ$ точные решения являются частными случаями более общего решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,t) = (Aat + B + Ce^{-kt})e^{\Theta(x,y)},$$

где $A$, $B$, $C$ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(x,y)$ является решением стационарного уравнения

$$\Delta\Theta - Ake^{\Theta} = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

которое встречается в теории горения. О решении этого уравнения см. 5.2.1.1.

⊙ *Литература*: N. H. Ibragimov (1994, p. 245).

**4.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\frac{\partial}{\partial y}\left(w^m\frac{\partial w}{\partial y}\right).$

Частный случай уравнения 4.3.1.6 при $n = 0$.

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2} w(\pm x + C_2, \pm C_1^m y + C_3, t + C_4),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

$2^\circ$. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = u(x,t)y^{2/m},$$

где функция $u(x,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2b(m+2)}{m^2}u^{m+1}.$$

При $m = -2$ и $m = -1$ это уравнение является линейным.

$3^\circ$. Решение в виде произведения функций, зависящих от разных аргументов:

$$w(x,y,t) = \begin{cases} U(x,t)|y + C|^{1/(m+1)} & \text{при } m \neq -1, \\ U(x,t)\exp(Cy) & \text{при } m = -1, \end{cases}$$

где $C$ — произвольная постоянная, а функция $U(x,t)$ описывается телеграфным уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + k\frac{\partial U}{\partial t} = a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книгу А. Д. Полянина (2001 *b*).

⊙ *Литература*: N. H. Ibragimov (1994, pp. 245–246).

**5.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + b\dfrac{\partial}{\partial y}\left(w^n \dfrac{\partial w}{\partial y}\right).$

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2} w(\pm C_1^n x + C_2, \pm C_1^n y + C_3, t + C_4),$$
$$w_2 = w\bigl(x\cos\beta + y\sqrt{a/b}\,\sin\beta, -x\sqrt{b/a}\,\sin\beta + y\cos\beta,\ t\bigr),$$

где $C_1, \ldots, C_4, \beta$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,t) = F(t)\Phi(x,y),$$

где функция $F(t)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением ($C$ — произвольная постоянная)

$$F''_{tt} + kF'_t = CF^{n+1}, \tag{1}$$

а функция $\Phi(x,y)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$a\frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi^n \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + b\frac{\partial}{\partial y}\left(\Phi^n \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = C\Phi. \tag{2}$$

**Пример.** При $C=0$ из уравнения (1) имеем $F = Ae^{-kt} + B$, где $A$, $B$ — произвольные постоянные. Уравнение (2) при $C=0$ сводится к уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{y}^2} = 0, \qquad \text{где}\ \ \Psi = \Phi^{n+1},\ \ \bar{x} = \frac{x}{\sqrt{a}},\ \ \bar{y} = \frac{y}{\sqrt{b}}.$$

3°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = u(r,t), \quad r = \sqrt{bx^2 + ay^2},$$

где функция $u(r,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{ab}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(ru^n \frac{\partial u}{\partial r}\right).$$

4°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = U(t)(bx^2 + ay^2)^{1/n},$$

где функция $U(t)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$U''_{tt} + kU'_t = \frac{4ab(n+1)}{n^2} U^{n+1}.$$

⦿ *Литература*: N. H. Ibragimov (1994, p. 245).

**6.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + b\dfrac{\partial}{\partial y}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial y}\right).$

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2} w(\pm C_1^n x + C_2, \pm C_1^m y + C_3, t + C_4),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\int \frac{a_1\beta_1^2 w^n + a_2\beta_2^2 w^m - \lambda^2}{k\lambda w + C_1}\,dw = \beta_1 x + \beta_2 y + \lambda t + C_2,$$

где $C_1$, $C_2$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

3°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = U(\xi,t), \quad \xi = \beta x + \mu y,$$

где $\beta$, $\mu$ — произвольные постоянные, а функция $U = U(\xi,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + k\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\bigl(a\beta^2 U^n + b\mu^2 U^m\bigr)\frac{\partial U}{\partial \xi}\right].$$

**Замечание.** Существует более общее «двумерное» решение вида

$$w(x,y,t) = V(\xi_1,\xi_2), \quad \xi_1 = \beta_1 x + \mu_1 y + \lambda_1 t, \quad \xi_2 = \beta_2 x + \mu_2 y + \lambda_2 t,$$

где $\beta_i$, $\mu_i$, $\lambda_i$ — произвольные постоянные.

$4^\circ$. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = y^{2/m} u(z,t), \quad z = xy^{-n/m},$$

где функция $u = u(z,t)$ описывается уравнением

$$m^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \left(am^2u^n + bn^2z^2u^m\right)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \\ + nm\left(amu^{n-1} + bnz^2u^{m-1}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + bn(n-3m-4)zu^m\frac{\partial u}{\partial z} + 2b(m+2)u^{m+1}.$$

⊙ *Литература*: N. H. Ibragimov (1994, pp. 245–246).

### 4.3.2. Уравнения, содержащие экспоненциальные нелинейности

**1.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\frac{\partial}{\partial y}\left(e^w\frac{\partial w}{\partial y}\right).$

Частный случай уравнения 4.4.3.10 при $f(t) = k$, $g(t) = a$, $h(t) = b$, $\lambda = 1$.

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm x + C_2, \pm C_1y + C_3, t + C_4) - 2\ln|C_1|,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

$2^\circ$. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = u(x,t) + \ln|y + C|,$$

где $C$ — произвольная постоянная, а функция $u(x,t)$ описывается линейным телеграфным уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Это уравнение рассматривается в книге А. Д. Полянина (2001 *b*).

$3^\circ$. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = U(x,t) + 2\ln|y + C|,$$

где $C$ — произвольная постоянная, а функция $U(x,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + k\frac{\partial U}{\partial t} = a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2be^U.$$

⊙ *Литература*: N. H. Ibragimov (1994, p. 245).

**2.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^w\frac{\partial w}{\partial x}\right) + b\frac{\partial}{\partial y}\left(e^w\frac{\partial w}{\partial y}\right).$

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1x + C_2, \pm C_1y + C_3, t + C_4) - 2\ln|C_1|,$$
$$w_2 = w\left(x\cos\beta + y\sqrt{a/b}\,\sin\beta, -x\sqrt{b/a}\,\sin\beta + y\cos\beta,\ t\right),$$

где $C_1, \ldots, C_4, \beta$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

$2^\circ$. Решение в виде суммы функций, зависящих от разных аргументов:

$$w(x,y,t) = \varphi(t) + \ln[\psi(x,y)],$$

где функция $u(t)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением ($C$ — произвольная постоянная)

$$\varphi''_{tt} + k\varphi'_t = Ce^\varphi,$$

а функция $\psi(x,y)$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\bar{y}^2} = C, \qquad \text{где } \bar{x} = \frac{x}{\sqrt{a}},\ \ \bar{y} = \frac{y}{\sqrt{b}}.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

$3^\circ$. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = u(r,t), \quad r = \sqrt{bx^2 + ay^2},$$

где функция $u(r,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{ab}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(re^u\frac{\partial u}{\partial r}\right).$$

$4^\circ$. Точное решение:

$$w(x,y,t) = u(t) + \ln(bx^2 + ay^2),$$

где функция $u(t)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$u''_{tt} + ku'_t = 4abe^u.$$

$5^\circ$. Существует «двумерное» решение вида

$$w(x,y,t) = u(z,t) + 2\ln|x|, \quad z = y/x.$$

⦿ *Литература*: N. H. Ibragimov (1994, pp. 245-246).

**3.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^w\frac{\partial w}{\partial x}\right) + b\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\lambda w}\frac{\partial w}{\partial y}\right).$

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1x + C_2, \pm C_1^\lambda y + C_3, t + C_4) - 2\ln|C_1|,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

$2^\circ$. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\int \frac{a_1\beta_1^2 e^w + a_2\beta_2^2 e^{\lambda w} - \gamma^2}{k\gamma w + C_1}\,dw = \beta_1 x + \beta_2 y + \gamma t + C_2,$$

где $C_1$, $C_2$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\gamma$ — произвольные постоянные.

$3^\circ$. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = U(\xi,t), \quad \xi = \beta x + \mu y,$$

где $\beta$, $\mu$ — произвольные постоянные, а функция $U = U(\xi,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + k\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\left(a\beta^2 e^w + b\mu^2 e^{\lambda w}\right)\frac{\partial U}{\partial \xi}\right].$$

**Замечание.** Существует более общее «двумерное» решение вида

$$w(x,y,t) = V(\xi_1,\xi_2), \quad \xi_1 = \beta_1 x + \mu_1 y + \sigma_1 t, \quad \xi_2 = \beta_2 x + \mu_2 y + \sigma_2 t,$$

где $\beta_i$, $\mu_i$, $\sigma_i$ — произвольные постоянные.

$4^\circ$. Существует «двумерное» решение вида

$$w(x,y,t) = u(z,t) + 2\ln|x|, \quad z = y|x|^{-\lambda}.$$

⦿ *Литература*: N. H. Ibragimov (1994, pp. 245–246).

## 4.4. Уравнения с двумя пространственными переменными, содержащие произвольные функции

### 4.4.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(y)\frac{\partial w}{\partial y}\right] + h(w)$

**1.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f(w).$

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$\begin{aligned}
w_1 &= w(\pm x + C_1, \pm y + C_2, \pm t + C_3),\\
w_2 &= w\bigl(x\cos\beta + y\sqrt{a/b}\,\sin\beta,\ -x\sqrt{b/a}\,\sin\beta + y\cos\beta,\ t\bigr),\\
w_3 &= w\bigl(x\operatorname{ch}\lambda + ta^{1/2}\operatorname{sh}\lambda,\ y,\ xa^{-1/2}\operatorname{sh}\lambda + t\operatorname{ch}\lambda\bigr),\\
w_4 &= w\bigl(x,\ y\operatorname{ch}\lambda + tb^{1/2}\operatorname{sh}\lambda,\ yb^{-1/2}\operatorname{sh}\lambda + t\operatorname{ch}\lambda\bigr),
\end{aligned}$$

где $C_1$, $C_2$, $C_3$, $\beta$, $\lambda$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки в выражении для $w_1$ выбираются произвольно).

$2^\circ$. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\int\left[C_1+\frac{2}{\lambda^2-ak_1^2-bk_2^2}F(w)\right]^{-1/2}dw=k_1x+k_2y+\lambda t+C_2,\qquad F(w)=\int f(w)\,dw,$$

где $C_1$, $C_2$, $k_1$, $k_2$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

$3^\circ$. Точное решение ($C_1$, $C_2$, $C_3$ — произвольные постоянные):

$$w=w(r),\qquad r^2=A\left[\frac{(x+C_1)^2}{a}+\frac{(y+C_2)^2}{b}-(t+C_3)^2\right].$$

Здесь знак постоянной $A$ должен совпадать со знаком выражения в квадратных скобках, а функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr}+2r^{-1}w'_r+A^{-1}f(w)=0.$$

$4^\circ$. «Двумерное» решение:

$$w=U(\xi,\eta),\quad \xi=\frac{x}{\sqrt{a}C}+\frac{y}{\sqrt{b}},\quad \eta=(C^2-1)\frac{x^2}{a}-2C\frac{xy}{\sqrt{ab}}-C^2t^2, \tag{1}$$

где $C$ — произвольная постоянная ($C\neq 0$), а функция $U=U(\xi,\eta)$ определяется уравнением

$$\left(1+\frac{1}{C^2}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}-4\xi\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta}+4C^2(\xi^2+\eta)\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2}+2(2C^2-1)\frac{\partial U}{\partial\eta}+f(U)=0. \tag{2}$$

**Замечание.** Выражение (1) и уравнение (2) могут использоваться для получения другого «двумерного» решения после переобозначения: $(x,a)\rightleftarrows(y,b)$.

$5^\circ$. Существует «двумерное» решение вида

$$w(x,y,t)=u(z_1,z_2),\quad z_1=C_1x+C_2y+\lambda_1t,\quad z_2=C_3x+C_4y+\lambda_2t.$$

**2.** $\displaystyle\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(by^m\frac{\partial w}{\partial y}\right)+f(w).$

$1^\circ$. Точное решение при $n\neq 2$, $m\neq 2$:

$$w=w(r),\qquad r^2=4k\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}+\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2}-\frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

где $C$, $k$ — произвольные постоянные ($k\neq 0$), а функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr}+\frac{A}{r}w'_r+k^{-1}f(w)=0,\qquad A=\frac{2(4-n-m)}{(2-n)(2-m)}.$$

$2^\circ$. «Двумерное» решение при $n\neq 2$, $m\neq 2$:

$$w=U(\xi,t),\qquad \xi^2=4k\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}+\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2}\right],$$

где функция $U(\xi,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=k\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}+\frac{B_1}{\xi}\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)+f(U),\qquad B_1=\frac{4-nm}{(2-n)(2-m)}.$$

$3^\circ$. «Двумерное» решение при $m\neq 2$:

$$w=V(x,\eta),\qquad \eta^2=4k\left[\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2}-\frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

где функция $V(x,\eta)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\frac{\partial w}{\partial x}\right)+k\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\eta^2}+\frac{B_2}{\eta}\frac{\partial V}{\partial\eta}\right)+f(V)=0,\qquad B_2=\frac{2}{2-m}.$$

$4^\circ$. «Двумерное» решение при $n\neq 2$:

$$w=W(y,\zeta),\qquad \zeta^2=4k\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}-\frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

где функция $W(y,\zeta)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(by^m\frac{\partial w}{\partial y}\right)+k\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\zeta^2}+\frac{B_3}{\zeta}\frac{\partial W}{\partial\zeta}\right)+f(W)=0,\qquad B_3=\frac{2}{2-n}.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. И. Журов (1998), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 306).

**3.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\lambda y} \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + f(w).$

$1^\circ$. Точное решение при $n \neq 2$, $\lambda \neq 0$:

$$w = w(r), \qquad r^2 = 4k\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

где $C$, $k$ — произвольные постоянные ($k \neq 0$), а функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + \frac{A}{r}w'_r + k^{-1}f(w) = 0, \qquad A = \frac{2}{2-n}.$$

$2^\circ$. «Двумерное» решение при $n \neq 2$, $\lambda \neq 0$:

$$w = U(\xi, t), \qquad \xi^2 = 4k\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2}\right],$$

где функция $U(\xi, t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = k\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{B}{\xi}\frac{\partial U}{\partial \xi}\right) + f(U), \qquad B = \frac{n}{2-n}.$$

$3^\circ$. «Двумерное» решение при $\lambda \neq 0$:

$$w = V(x, \eta), \qquad \eta^2 = 4k\left[\frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

где функция $V(x, \eta)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(ax^n \frac{\partial w}{\partial x}\right) + k\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + f(V) = 0.$$

$4^\circ$. «Двумерное» решение при $n \neq 2$:

$$w = W(y, \zeta), \qquad \zeta^2 = 4k\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

где функция $W(y, \zeta)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(be^{\lambda y}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + k\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} + \frac{A}{\zeta}\frac{\partial W}{\partial \zeta}\right) + f(W) = 0, \qquad A = \frac{2}{2-n}.$$

**4.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x} \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\lambda y} \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + f(w).$

$1^\circ$. Точное решение при $\beta \neq 0$, $\lambda \neq 0$:

$$w = w(r), \qquad r^2 = 4k\left[\frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2} + \frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

где функция $w(r)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + k^{-1}f(w) = 0.$$

Интегрируя, получим его общее решение в неявном виде

$$\int\left[C_1 + 2k^{-1}\int f(w)\,dw\right]^{-1/2} dw = C_2 \pm r,$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные.

$2^\circ$. «Двумерное» решение при $\beta \neq 0$, $\lambda \neq 0$:

$$w = U(\xi, t), \qquad \xi^2 = 4k\left(\frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2} + \frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2}\right),$$

где функция $U(\xi, t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = k\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial U}{\partial \xi}\right) + f(U).$$

$3^\circ$. «Двумерное» решение при $\lambda \neq 0$:

$$w = V(x,\eta), \qquad \eta^2 = 4k\left[\frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

где функция $V(x,\eta)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + k\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + f(V) = 0.$$

$4^\circ$. «Двумерное» решение при $\beta \neq 0$:

$$w = W(y,\zeta), \qquad \zeta^2 = 4k\left[\frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

где функция $W(y,\zeta)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(be^{\lambda y}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + k\frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} + f(W) = 0.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. И. Журов (1998), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002).

**5.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[g(y)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right] + aw\ln w + bw.$

Частный случай уравнения 4.4.3.6 при $g(t) = b$, $h_1(x) = h_2(y) = 0$, а также частный случай уравнения 4.4.3.7 при $f(x,y) = f(x)$, $g(x,y) = g(y)$.

## 4.4.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(w)\frac{\partial w}{\partial y}\right] + h(w)$

**1.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[g(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right].$

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1 x + C_2, \pm C_1 y + C_3, \pm C_1 t + C_4),$$
$$w_2 = w(x\operatorname{ch}\lambda + ta^{1/2}\operatorname{sh}\lambda,\ y,\ xa^{-1/2}\operatorname{sh}\lambda + t\operatorname{ch}\lambda),$$

где $C_1, \ldots, C_4, \lambda$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки в выражении для $w_1$ выбираются произвольно).

$2^\circ$. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$k_2^2\int g(w)\,dw + (ak_1^2 - \lambda^2)w = C_1(k_1 x + k_2 y + \lambda t) + C_2,$$

где $C_1$, $C_2$, $k_1$, $k_2$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

$3^\circ$. Точные решения в неявном виде:

$$\int g(w)\,dw = y\varphi_1\bigl(x \pm t\sqrt{a}\,\bigr) + \varphi_2\bigl(x \pm t\sqrt{a}\,\bigr),$$
$$2\lambda\sqrt{a}\,(y + \lambda t) + (t\sqrt{a} \pm x)[g(w) - \lambda^2] = \psi(w),$$

где $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\psi(w)$ — произвольные функции, $\lambda$ — произвольная постоянная.

$4^\circ$. «Двумерное» решение (обобщает решения из п. $3^\circ$):

$$w(x,y,t) = U(\xi,\eta), \quad \xi = y + \lambda t, \quad \eta = x \pm t\sqrt{a},$$

где $\lambda$ — произвольная постоянная, а функция $U = U(\xi,\eta)$ удовлетворяет уравнению в частных производных первого порядка

$$\bigl[g(U) - \lambda^2\bigr]\frac{\partial U}{\partial \xi} \mp 2\lambda\sqrt{a}\,\frac{\partial U}{\partial \eta} = \varphi(\eta), \qquad (1)$$

$\varphi(\eta)$ — произвольная функция.

В частном случае $\lambda = 0$ уравнение (1) является обыкновенным дифференциальным уравнением по переменной $\xi$ и легко интегрируется. В результате получаем первую группу решений из п. $3^\circ$.

В общем случае соответствующая уравнению (1) характеристическая система имеет вид [см. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2003)]

$$\frac{d\xi}{g(U)-\lambda^2} = \mp\frac{d\eta}{2\lambda\sqrt{a}} = \frac{dU}{\varphi(\eta)}.$$

Ее независимые интегралы описываются формулами

$$U \pm \Phi(\eta) = C_1, \quad \xi \pm \frac{1}{2\lambda\sqrt{a}}\int g\big(C_1 \mp \Phi(\eta)\big)\,d\eta \mp \frac{\lambda}{2\sqrt{a}}\eta = C_2, \qquad (2)$$

где

$$\Phi(\eta) = \frac{1}{2\lambda\sqrt{a}}\int \varphi(\eta)\,d\eta.$$

Во второй формуле (2) сначала вычисляется интеграл, а затем в полученном выражении постоянную $C_1$ надо заменить на левую часть первого равенства (2).

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$F(C_1, C_2) = 0,$$

где $F(C_1, C_2)$ — произвольная функция двух переменных, а $C_1$ и $C_2$ определяются левыми частями равенств (2).

Частному случаю $\varphi(\eta) = 0$ в (1) соответствует вторая группа решений в п. 3°.

5°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = u(y,z), \quad z = x^2 - at^2,$$

где функция $u = u(y,z)$ описывается уравнением

$$4a\left(z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right] = 0.$$

6°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = v(\zeta), \quad \zeta = (x^2 - at^2)y^{-2},$$

где функция $v = v(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2a\zeta v''_{\zeta\zeta} + 2av'_\zeta + 2\zeta^2[g(v)v'_\zeta]'_\zeta + 3\zeta g(v)v'_\zeta = 0.$$

7°. О других точных решениях см. уравнение 4.4.2.3 при $f(w) = a$.

⊙ *Литература для уравнения* 4.4.2.1: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, стр. 308–309).

**2.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial y}\right].$

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1 x + C_2, \pm C_1 y + C_3, \pm C_1 t + C_4),$$
$$w_2 = w(x\cos\beta - y\sin\beta, x\sin\beta + y\cos\beta, t),$$

где $C_1, \ldots, C_4, \beta$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки в выражении для $w_1$ выбираются произвольно).

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$(k_1^2 + k_2^2)\int f(w)\,dw - \lambda^2 w = C_1(k_1 x + k_2 y + \lambda t) + C_2,$$

где $C_1$, $C_2$, $k_1$, $k_2$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

3°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = U(\zeta), \quad \zeta = (x^2 + y^2)t^{-2},$$

где функция $U = U(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2\zeta^2 U''_{\zeta\zeta} + 3\zeta U'_\zeta = 2[\zeta f(U)U'_\zeta]'_\zeta.$$

4°. «Двумерное» решение с осевой симметрией:

$$w(x,y,t) = u(r,t), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

где функция $u = u(r,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[rf(u)\frac{\partial u}{\partial r}\right].$$

5°. О других точных решениях см. уравнение 4.4.2.3 при $f(w) = g(w)$.

**3.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[g(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right].$

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(\pm C_1 x + C_2, \pm C_1 y + C_3, \pm C_1 t + C_4),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения (знаки при $C_1$ выбираются произвольно).

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\int \left[k_1^2 f(w) + k_2^2 g(w)\right] dw - \lambda^2 w = C_1(k_1 x + k_2 y + \lambda t) + C_2,$$

где $C_1$, $C_2$, $k_1$, $k_2$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

3°. Точные решения в неявном виде:

$$\left(\frac{C_1 x + C_2 y + C_3}{t + C_4}\right)^2 = C_1^2 f(w) + C_2^2 g(w),$$
$$\left(\frac{C_1 y + C_2 t + C_3}{x + C_4}\right)^2 f(w) + C_1^2 g(w) = C_2^2,$$
$$\left(\frac{C_1 x + C_2 t + C_3}{y + C_4}\right)^2 g(w) + C_1^2 f(w) = C_2^2,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

4°. Точные решения в неявном виде:

$$x\frac{\sin\varphi_1(w)}{\sqrt{f(w)}} + y\frac{\cos\varphi_1(w)}{\sqrt{g(w)}} + t = \psi_1(w),$$
$$x\frac{\sin\varphi_2(w)}{\sqrt{f(w)}} + y\frac{\cos\varphi_2(w)}{\sqrt{g(w)}} - t = \psi_2(w),$$

где $\varphi_1(w)$, $\varphi_2(w)$, $\psi_1(w)$, $\psi_2(w)$ — произвольные функции.

5°. Точное решение:

$$w = w(\xi), \quad \xi = \frac{C_1 x + C_2 y + C_3}{t + C_4},$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, а функция $u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\xi^2 w'_\xi)'_\xi = [\varphi(w) w'_\xi]'_\xi, \qquad \varphi(w) = C_1^2 f(w) + C_2^2 g(w),$$

которое допускает первый интеграл

$$\left[\xi^2 - C_1^2 f(w) - C_2^2 g(w)\right] w'_\xi = C_5. \tag{1}$$

Частному случаю $C_5 = 0$ отвечает первое решение, указанное в п. 3°.

При $C_5 \neq 0$, принимая $w$ в (1) за независимую переменную, для функции $\xi = \xi(w)$ получим уравнение Риккати

$$C_5 \xi'_w = \xi^2 - C_1^2 f(w) - C_2^2 g(w). \tag{2}$$

О точных решениях уравнения (2), которое сводится к линейному уравнению второго порядка, см. книгу В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

6°. Точное решение:

$$w = u(\eta), \quad \eta = \frac{C_1 y + C_2 t + C_3}{x + C_4},$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, а функция $u(\eta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$C_2^2 u''_{\eta\eta} = [\eta^2 f(u) u'_\eta]'_\eta + C_1^2 [g(u) u'_\eta]'_\eta,$$

которое допускает первый интеграл

$$[\eta^2 f(u) + C_1^2 g(u) - C_2^2] u'_\eta = C_5. \tag{3}$$

Частному случаю $C_5 = 0$ отвечает второе решение, указанное в п. 3°.

При $C_5 \neq 0$, принимая $u$ в (3) за независимую переменную, для функции $\eta = \eta(u)$ получим уравнение Риккати

$$C_5 \eta'_u = \eta^2 f(u) + C_1^2 g(u) - C_2^2. \tag{4}$$

О точных решениях уравнения (4), которое сводится к линейному уравнению второго порядка, см. книгу В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

7°. Точное решение:

$$w = v(\zeta), \quad \zeta = \frac{C_1 x + C_2 t + C_3}{y + C_4},$$

где $C_1$, …, $C_4$ — произвольные постоянные, а функция $v(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$[\zeta^2 g(v) + C_1^2 f(v) - C_2^2] v'_\zeta = C_5.$$

Частному случаю $C_5 = 0$ отвечает третье решение, указанное в п. 3°. Обратная функция $\zeta = \zeta(v)$ описывается уравнением Риккати, которое может быть получено из (4) путем переобозначений $u \to v$, $\eta \to \zeta$ и $f \rightleftarrows g$.

8°. «Двумерное» решение ($a$, $b$ — произвольные постоянные):

$$w(x, y, t) = U(z, t), \quad z = ax + by,$$

где функция $U = U(z, t)$ определяется дифференциальным уравнением вида 3.4.4.6:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\varphi(U)\frac{\partial U}{\partial z}\right], \quad \varphi(U) = a^2 f(U) + b^2 g(U),$$

которое может быть линеаризовано.

9°. «Двумерное» решение ($a$, $b$ — произвольные постоянные):

$$w(x, y, t) = V(x, \xi), \quad \xi = ay + bt,$$

где функция $V = V(x, \xi)$ определяется дифференциальным уравнением вида 5.4.4.8:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(V)\frac{\partial V}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\psi(V)\frac{\partial V}{\partial \xi}\right] = 0, \quad \psi(V) = a^2 g(V) - b^2,$$

которое может быть линеаризовано.

10°. «Двумерное» решение ($a$, $b$ — произвольные постоянные):

$$w(x, y, t) = W(y, \eta), \quad \eta = ax + bt,$$

где функция $W = W(y, \eta)$ определяется дифференциальным уравнением вида 5.4.4.8:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[g(W)\frac{\partial W}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\chi(W)\frac{\partial W}{\partial \eta}\right] = 0, \quad \chi(W) = a^2 f(W) - b^2,$$

которое может быть линеаризовано.

11°. Существует «двумерное» решение вида (обобщает решения из пп. 7°–9°):

$$w(x, y, t) = Q(z_1, z_2), \quad z_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 t, \quad z_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 t.$$

12°. «Двумерное» решение:

$$w(x, y, t) = R(\xi, \eta), \quad \xi = xt^{-1}, \quad \eta = yt^{-1},$$

где функция $R = R(\xi, \eta)$ описывается уравнением

$$\xi^2 \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} + 2\xi\eta \frac{\partial^2 R}{\partial \xi \partial \eta} + \eta^2 \frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2} + 2\xi \frac{\partial R}{\partial \xi} + 2\eta \frac{\partial R}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[f(R)\frac{\partial R}{\partial \xi}\right] + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[g(R)\frac{\partial R}{\partial \eta}\right].$$

13°. О результатах группового анализа данного уравнения см. N. H. Ibragimov (1994).

⊙ *Литература для уравнения* 4.4.2.3: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, стр. 310–312).

**4.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial y}\right] + g(w).$

1°. Пусть $w(x, y, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm x + C_1, \pm y + C_2, \pm t + C_3),$$
$$w_2 = w(x \operatorname{ch}\lambda + ta^{1/2} \operatorname{sh}\lambda,\ y,\ xa^{-1/2} \operatorname{sh}\lambda + t \operatorname{ch}\lambda),$$

где $C_1$, $C_2$, $C_3$, $\lambda$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

$2^\circ$. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\int h(w)\left[C_1 - 2\int h(w)g(w)\,dw\right]^{-1/2} dw = k_1x + k_2y + \lambda t + C_2, \qquad h(w) = k_2^2 f(w) + ak_1^2 - \lambda^2,$$

где $C_1$, $C_2$, $k_1$, $k_2$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

$3^\circ$. Точные решения в неявном виде:

$$\int f(w)\left[\varphi\big(x + t\sqrt{a}\,\big) - 2\int f(w)g(w)\,dw\right]^{-1/2} dw = \psi\big(x + t\sqrt{a}\,\big) \pm y,$$

$$\int f(w)\left[\varphi\big(x - t\sqrt{a}\,\big) - 2\int f(w)g(w)\,dw\right]^{-1/2} dw = \psi\big(x - t\sqrt{a}\,\big) \pm y,$$

где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — произвольные функции.

$4^\circ$. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x, y, t) = U(y, z), \quad z = x^2 - at^2;$$

$$w(x, y, t) = V(\xi, \eta), \quad \xi = A_1x + B_1y + C_1t, \quad \eta = A_2x + B_2y + C_2t.$$

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 312).

**5.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial y}\right] + g(w).$

$1^\circ$. Пусть функция $f = f(w)$ задается произвольно, а функция $g = g(w)$ определяется по формуле

$$g(w) = -a^2\frac{f'(w)}{f^3(w)} + b,$$

где $a$, $b$ — некоторые числа. В этом случае существует решение с функциональным разделением переменных, которое задается неявно

$$\int f(w)\,dw = at + U(x, y),$$

где функция $U = U(x, y)$ описывается уравнением Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + b = 0.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

**Замечание.** В выражении для функции $g$ вместо постоянной $b$ может стоять произвольная функция $b = b(x, y)$.

$2^\circ$. Пусть определяющие функции задаются параметрически

$$f = \frac{Ae^{-bz}}{\varphi'_z(z)}, \quad g = a^2\varphi''_{zz}(z) - Ace^{-bz}, \quad w = \varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ — произвольная функция, $z$ — параметр, $A$, $a$, $b$, $c$ — некоторые числа. Тогда рассматриваемое уравнение имеет точное решение с функциональным разделением переменных вида

$$w = \varphi(z), \quad z = at + \theta(x, y),$$

где функция $\theta$ описывается уравнением

$$\Delta\theta = b|\nabla\theta|^2 + c.$$

Подстановка

$$\theta = -\frac{1}{b}\ln|u|$$

приводит его к уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + bcu = 0.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

### 4.4.3. Другие уравнения

**1.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + by^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f(w).$

$1^\circ$. Точное решение при $n \neq 2$, $m \neq 2$:

$$w = w(r), \qquad r^2 = \frac{4}{k}\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

где $C$, $k$ — произвольные постоянные ($k \neq 0$), а функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + \frac{A}{r}w'_r + kf(w) = 0, \qquad A = 2\left(\frac{1-n}{2-n} + \frac{1-m}{2-m}\right).$$

$2^\circ$. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,t) = U(\xi,t), \quad \xi^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2}\right],$$

$$w(x,y,t) = V(x,\eta), \quad \eta^2 = \pm 4\left[\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

$$w(x,y,t) = W(y,\zeta), \quad \zeta^2 = \pm 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right].$$

**2.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda y} \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f(w).$

$1^\circ$. Точное решение при $n \neq 2$, $\lambda \neq 0$:

$$w = w(r), \qquad r^2 = \frac{4}{k}\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

где $C$, $k$ — произвольные постоянные ($k \neq 0$), а функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + \frac{A}{r}w'_r + kf(w) = 0, \qquad A = \frac{2(3-n)}{2-n}.$$

$2^\circ$. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w = U(\xi,t), \quad \xi^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2}\right],$$

$$w = V(x,\eta), \quad \eta^2 = \pm 4\left[\frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

$$w = W(y,\zeta), \quad \zeta^2 = \pm 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right].$$

**3.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\beta x} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda y} \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f(w).$

$1^\circ$. Точное решение при $\beta \neq 0$, $\lambda \neq 0$:

$$w = w(r), \qquad r^2 = \frac{4}{k}\left[\frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2} + \frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

где $C$, $k$ — произвольные постоянные ($k \neq 0$), а функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + 4r^{-1}w'_r + kf(w) = 0.$$

$2^\circ$. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w = U(\xi,t), \quad \xi^2 = 4\left(\frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2} + \frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2}\right),$$

$$w = V(x,\eta), \quad \eta^2 = \pm 4\left[\frac{e^{-\lambda y}}{b\lambda^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

$$w = W(y,\zeta), \quad \zeta^2 = \pm 4\left[\frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right].$$

**4.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \bigl[aw + f(t)\bigr]\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + bw^2 + g(t)w + h(t), \qquad a \neq 0.$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y,t) = \varphi(t) + \psi(t)\Theta(x,y),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi''_{tt} &= b\varphi^2 + g(t)\varphi + h(t), \\ \psi'_{tt} &= \bigl[b\varphi - \beta f(t) + g(t)\bigr]\psi, \qquad \beta = b/a, \end{aligned}$$

а функция $\Theta = \Theta(x,y)$ удовлетворяет двумерному уравнению Гельмгольца

$$\Delta\Theta + \beta\Theta = 0, \qquad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

**5.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - a\left[\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] + f(t).$

$1^\circ$. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y,t) = \varphi(t) + \psi(t)e^{\beta x + \gamma y},$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''_{tt} = f(t), \qquad \psi''_{tt} = a(\beta^2 + \gamma^2)\varphi\psi.$$

Решение первого уравнения дается формулой ($C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные)

$$\varphi(t) = \int_0^t (t-\tau)f(\tau)\,d\tau + C_1 t + C_2.$$

Решение второго уравнения, которое линейно относительно $\psi$, для многих функций $f(t)$ можно найти в книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

$2^\circ$. Существуют точные решения с обобщенным разделением переменных следующих видов:

$$\begin{aligned} w(x,y,t) &= \varphi(t) + \psi(t)(A_1 \operatorname{ch}\mu x + A_2 \operatorname{sh}\mu x) + \chi(t)(B_1\cos\mu y + B_2\sin\mu y), \\ w(x,y,t) &= \varphi(t) + \psi(t)(A_1 \cos\mu x + A_2 \sin\mu x) + \chi(t)(B_1\operatorname{ch}\mu y + B_2\operatorname{sh}\mu y), \end{aligned}$$

где $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, $\mu$ — произвольные постоянные, а функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ определяются путем решения соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (здесь не приводятся).

$3^\circ$. Существуют точное решение с обобщенным разделением переменных следующего вида:

$$w(x,y,t) = \varphi(t) + \psi(t)F(x) + \chi(t)G(y) + \eta(t)H(x)P(y),$$

где

$$\begin{aligned} F(x) &= A_1\cos 2\mu x + A_2 \sin 2\mu x, \quad & G(y) &= B_1 \operatorname{ch} 2\mu y + B_2 \operatorname{sh} 2\mu y, \\ H(x) &= C_1 \cos\mu x + C_2\sin\mu x, & P(y) &= D_1\operatorname{ch}\mu y + D_2 \operatorname{sh}\mu y. \end{aligned}$$

Произвольные постоянные $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, $C_1$, $C_2$, $D_1$, $D_2$, $\mu$ связаны двумя соотношениями, а функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ и $\eta(t)$ удовлетворяют системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (здесь не приводятся).

**6.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f_1(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[f_2(y)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right] + aw\ln w + \bigl[g(t) + h_1(x) + h_2(y)\bigr]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,t) = \varphi(x)\psi(y)\chi(t).$$

Здесь функции $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(y)$, $\chi = \chi(t)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} [f_1(x)\varphi'_x]'_x + a\varphi\ln\varphi + [h_1(x) + C_1]\varphi &= 0, \\ [f_2(y)\psi'_y]'_y + a\psi\ln\psi + [h_2(y) + C_2]\psi &= 0, \\ \chi''_{tt} - a\chi\ln\chi - [g(t) - C_1 - C_2]\chi &= 0, \end{aligned}$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные.

**7.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x,y)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(x,y)\frac{\partial w}{\partial y}\right] + kw\ln w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,t) = \varphi(t)\Theta(x,y),$$

где функция $\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi''_{tt} - k\varphi\ln\varphi - A\varphi = 0, \qquad (1)$$

$A$ — произвольная постоянная, а функция $\Theta(x,y)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x,y)\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(x,y)\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right] + k\Theta\ln\Theta - A\Theta = 0.$$

Частное решение уравнения (1) дается формулой

$$\varphi(t) = \exp\left[\frac{k}{4}(t+B)^2 + \frac{k-2A}{2k}\right],$$

а общее решение можно записать в неявном виде

$$\int\left[k\varphi^2\ln\varphi + (A - \tfrac{1}{2}k)\varphi^2 + B\right]^{-1/2} d\varphi = C \pm t,$$

где $B$, $C$ — произвольные постоянные.

**8.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f_1(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_2(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + f_3(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + {}$
$\displaystyle \qquad + g_1(x,y)\frac{\partial w}{\partial x} + g_2(x,y)\frac{\partial w}{\partial y} + \big[h(x,y) + s(t)\big]w + kw\ln w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,t) = \varphi(t)\theta(x,y),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi''_{tt} - k\varphi\ln\varphi - \big[s(t) + C\big]\varphi = 0,$$

а функция $\theta = \theta(x,y)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$f_1(x,y)\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + f_2(x,y)\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} + f_3(x,y)\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + g_1(x,y)\frac{\partial\theta}{\partial x} + g_2(x,y)\frac{\partial\theta}{\partial y} + {}$$
$$+ \big[h(x,y) - C\big]\theta + k\theta\ln\theta = 0.$$

**9.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + f(t)\frac{\partial w}{\partial t} = g(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + h(t)\frac{\partial}{\partial y}\left(w^m\frac{\partial w}{\partial y}\right).$

1°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = \begin{cases} u(x,t)|y+C|^{1/(m+1)} & \text{при } m \neq -1, \\ u(x,t)\exp(Cy) & \text{при } m = -1, \end{cases}$$

где $C$ — произвольная постоянная, а функция $u(x,t)$ описывается линейным телеграфным уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(t)\frac{\partial u}{\partial t} = g(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

2°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = v(x,t)|y+C|^{2/m},$$

где функция $v(x,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + f(t)\frac{\partial v}{\partial t} = g(t)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2(m+2)}{m^2}h(t)v^{m+1}.$$

При $m = -2$ и $m = -1$ это уравнение является линейным.

**10.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + f(t)\dfrac{\partial w}{\partial t} = g(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + h(t)\dfrac{\partial}{\partial y}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right).$

1°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = u(x,t) + \frac{1}{\lambda}\ln|y+C|$$

где $C$ — произвольная постоянная, а функция $u(x,t)$ описывается линейным телеграфным уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(t)\frac{\partial u}{\partial t} = g(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

2°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = v(x,t) + \frac{2}{\lambda}\ln|y+C|,$$

где $C$ — произвольная постоянная, а функция $v(x,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + f(t)\frac{\partial v}{\partial t} = g(t)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2}{\lambda}h(t)e^{\lambda v}.$$

## 4.5. Уравнения с тремя пространственными переменными, содержащие произвольные параметры

### 4.5.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big[g(y)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big] + \dfrac{\partial}{\partial z}\Big[h(z)\dfrac{\partial w}{\partial z}\Big] + aw^p$

**1.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(cz^k\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + sw^p.$

1°. Пусть $w(x,y,z,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1 w\Big(C_1^{\frac{p-1}{2-n}}x,\ C_1^{\frac{p-1}{2-m}}y,\ C_1^{\frac{p-1}{2-k}}z,\ \pm C_1^{\frac{p-1}{2}}t + C_2\Big),$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точное решение при $n\neq 2$, $m\neq 2$, $k\neq 2$, $p\neq 1$:

$$w = \left[\frac{A}{2s(p-1)}\right]^{\frac{1}{p-1}}\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{z^{2-k}}{c(2-k)^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right]^{\frac{1}{1-p}},$$
$$A = \frac{1+p}{1-p} + \frac{2}{2-n} + \frac{2}{2-m} + \frac{2}{2-k}.$$

3°. Существует «трехмерное» решение вида

$$w(x,y,z,t) = |t|^{\frac{2}{1-p}}F(\rho_1,\rho_2,\rho_3),\quad \rho_1 = x|t|^{\frac{2}{n-2}},\quad \rho_2 = y|t|^{\frac{2}{m-2}},\quad \rho_3 = z|t|^{\frac{2}{k-2}}.$$

4°. О других точных решениях см. уравнение 4.6.1.2 при $f(w) = sw^p$.

**2.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\lambda x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(ce^{\nu z}\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + sw^p.$

1°. Пусть $w(x,y,z,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1 w\Big(x + \frac{1-p}{\lambda}\ln C_1,\ y + \frac{1-p}{\mu}\ln C_1,\ z + \frac{1-p}{\nu}\ln C_1,\ \pm C_1^{\frac{p-1}{2}}t + C_2\Big),$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точное решение при $p\neq\pm 1$, $\lambda\neq 0$, $\mu\neq 0$, $\nu\neq 0$:

$$w = \left[-\frac{s(p-1)^2}{2k(1+p)}(r+C_1)^2\right]^{\frac{1}{1-p}},\qquad r^2 = 4k\left[\frac{e^{-\lambda x}}{a\lambda^2} + \frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2} - \frac{1}{4}(t+C_2)^2\right],$$

где $C_1$, $C_2$, $k$ — произвольные постоянные.

3°. Существует «трехмерное» решение вида

$$w(x,y,z,t) = |t|^{\frac{2}{1-p}}F(\rho_1,\rho_2,\rho_3),\quad \rho_1 = x + \frac{2}{\lambda}\ln|t|,\quad \rho_2 = y + \frac{2}{\mu}\ln|t|,\quad \rho_3 = z + \frac{2}{\nu}\ln|t|.$$

4°. О других точных решениях см. уравнение 4.6.1.3 при $f(w) = sw^p$.

**3.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(by^m \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(ce^{\nu z} \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + sw^p.$

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,z,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1 w\Big(C_1^{\frac{p-1}{2-n}} x,\ C_1^{\frac{p-1}{2-m}} y,\ z + \frac{1-p}{\nu}\ln C_1,\ \pm C_1^{\frac{p-1}{2}} t + C_2\Big),$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

$2^\circ$. Точное решение при $n \neq 2$, $m \neq 2$, $\nu \neq 0$, $p \neq 1$:

$$w = \left[\frac{A}{2s(p-1)}\right]^{\frac{1}{p-1}} \left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right]^{\frac{1}{1-p}},$$
$$A = \frac{1+p}{1-p} + \frac{2}{2-n} + \frac{2}{2-m}.$$

$3^\circ$. Существует «трехмерное» решение вида

$$w(x,y,z,t) = |t|^{\frac{2}{1-p}} F(\rho_1,\rho_2,\rho_3), \quad \rho_1 = x|t|^{\frac{2}{n-2}}, \quad \rho_2 = y|t|^{\frac{2}{m-2}}, \quad \rho_3 = z + \frac{2}{\nu}\ln|t|.$$

$4^\circ$. О других точных решениях см. уравнение 4.6.1.4 при $f(w) = sw^p$.

**4.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y} \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(ce^{\nu z} \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + sw^p.$

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,z,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1 w\Big(C_1^{\frac{p-1}{2-n}} x,\ y + \frac{1-p}{\mu}\ln C_1,\ z + \frac{1-p}{\nu}\ln C_1,\ \pm C_1^{\frac{p-1}{2}} t + C_2\Big),$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

$2^\circ$. Точное решение при $n \neq 2$, $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$, $p \neq 1$:

$$w = \left[\frac{1}{2s(p-1)}\left(\frac{1+p}{1-p} + \frac{2}{2-n}\right)\right]^{\frac{1}{p-1}} \left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right]^{\frac{1}{1-p}}.$$

$3^\circ$. Существует «трехмерное» решение вида

$$w(x,y,z,t) = |t|^{\frac{2}{1-p}} F(\rho_1,\rho_2,\rho_3), \quad \rho_1 = x|t|^{\frac{2}{n-2}}, \quad \rho_2 = y + \frac{2}{\mu}\ln|t|, \quad \rho_3 = z + \frac{2}{\nu}\ln|t|.$$

$4^\circ$. О других точных решениях см. уравнение 4.6.1.5 при $f(w) = sw^p$.

## 4.5.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big[g(y)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big] + \dfrac{\partial}{\partial z}\Big[h(z)\dfrac{\partial w}{\partial z}\Big] + ae^{\lambda w}$

**1.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(by^m \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(cz^k \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + se^{\lambda w}.$

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,z,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w\Big(C_1^{\frac{2}{2-n}} x,\ C_1^{\frac{2}{2-m}} y,\ C_1^{\frac{2}{2-k}} z,\ \pm C_1 t + C_2\Big) + \frac{2}{\lambda}\ln C_1,$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

$2^\circ$. Точное решение при $n \neq 2$, $m \neq 2$, $k \neq 2$, $\lambda \neq 0$:

$$w = -\frac{1}{\lambda}\ln\left\{\frac{2s\lambda}{A}\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{z^{2-k}}{c(2-k)^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right]\right\},$$
$$A = \frac{2}{2-n} + \frac{2}{2-m} + \frac{2}{2-k} - 1.$$

$3^\circ$. Существует «трехмерное» решение вида

$$w(x,y,z,t) = F(\rho_1,\rho_2,\rho_3) - \frac{2}{\lambda}\ln|t|, \quad \rho_1 = x|t|^{\frac{2}{n-2}}, \quad \rho_2 = y|t|^{\frac{2}{m-2}}, \quad \rho_3 = z|t|^{\frac{2}{k-2}}.$$

$4^\circ$. О других точных решениях см. уравнение 4.6.1.2 при $f(w) = se^{\lambda w}$.

**2.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ae^{\lambda x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial z}\Big(ce^{\nu z}\dfrac{\partial w}{\partial z}\Big) + se^{\beta w}.$

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,z,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w\Big(x - \frac{2}{\lambda}\ln C_1,\ y - \frac{2}{\mu}\ln C_1,\ z - \frac{2}{\nu}\ln C_1,\ \pm C_1 t + C_2\Big) + \frac{2}{\beta}\ln C_1,$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

$2^\circ$. Точные решения при $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$, $\beta \neq 0$:

$$w(x,y,z,t) = -\frac{1}{\beta}\ln\Big[-\frac{s\beta}{2k}(r+C_1)^2\Big] \qquad \text{при} \quad sk\beta < 0;$$

$$w(x,y,z,t) = -\frac{1}{\beta}\ln\Big[-\frac{s\beta}{2kC_1^2}\sin^2(C_1 r + C_2)\Big] \qquad \text{при} \quad sk\beta < 0;$$

$$w(x,y,z,t) = -\frac{1}{\beta}\ln\Big[-\frac{s\beta}{2kC_1^2}\operatorname{sh}^2(C_1 r + C_2)\Big] \qquad \text{при} \quad sk\beta < 0;$$

$$w(x,y,z,t) = -\frac{1}{\beta}\ln\Big[\frac{s\beta}{2kC_1^2}\operatorname{ch}^2(C_1 r + C_2)\Big] \qquad \text{при} \quad sk\beta > 0;$$

где $C_1$, $C_2$, $k$ — произвольные постоянные, а функция $r = r(x,y,z,t)$ определяется по формуле

$$r^2 = 4k\Big[\frac{e^{-\lambda x}}{a\lambda^2} + \frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2} - \frac{1}{4}(t+C_3)^2\Big].$$

Знак $k$ должен совпадать со знаком выражения в квадратных скобках.

$3^\circ$. Существует «трехмерное» решение вида

$$w(x,y,z,t) = F(\rho_1,\rho_2,\rho_3) - \frac{2}{\beta}\ln|t|, \quad \rho_1 = x + \frac{2}{\lambda}\ln|t|, \quad \rho_2 = y + \frac{2}{\mu}\ln|t|, \quad \rho_3 = z + \frac{2}{\nu}\ln|t|.$$

$4^\circ$. О других точных решениях см. уравнение 4.6.1.3 при $f(w) = se^{\beta w}$.

**3.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial z}\Big(ce^{\nu z}\dfrac{\partial w}{\partial z}\Big) + se^{\beta w}.$

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,z,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w\Big(C_1^{\frac{2}{2-n}}x,\ C_1^{\frac{2}{2-m}}y,\ z - \frac{2}{\nu}\ln C_1,\ \pm C_1 t + C_2\Big) + \frac{2}{\beta}\ln C_1,$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

$2^\circ$. Точное решение при $n \neq 2$, $m \neq 2$, $\nu \neq 0$, $\beta \neq 0$:

$$w = -\frac{1}{\beta}\ln\bigg\{\frac{2s\beta}{A}\Big[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\Big]\bigg\},$$

$$A = \frac{2}{2-n} + \frac{2}{2-m} - 1.$$

$3^\circ$. Существует «трехмерное» решение вида

$$w(x,y,z,t) = F(\rho_1,\rho_2,\rho_3) - \frac{2}{\beta}\ln|t|, \quad \rho_1 = x|t|^{\frac{2}{n-2}}, \quad \rho_2 = y|t|^{\frac{2}{m-2}}, \quad \rho_3 = z + \frac{2}{\nu}\ln|t|.$$

$4^\circ$. О других точных решениях см. уравнение 4.6.1.4 при $f(w) = se^{\beta w}$.

**4.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial z}\Big(ce^{\nu z}\dfrac{\partial w}{\partial z}\Big) + se^{\beta w}.$

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,z,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w\Big(C_1^{\frac{2}{2-n}}x,\ y - \frac{2}{\mu}\ln C_1,\ z - \frac{2}{\nu}\ln C_1,\ \pm C_1 t + C_2\Big) + \frac{2}{\beta}\ln C_1,$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

$2^\circ$. Точное решение при $n \neq 2$, $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$, $\beta \neq 0$:

$$w = -\frac{1}{\beta} \ln\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right] + \frac{1}{\beta} \ln \frac{n}{2s\beta(2-n)}.$$

$3^\circ$. Существует «трехмерное» решение вида

$$w(x,y,z,t) = F(\rho_1,\rho_2,\rho_3) - \frac{2}{\beta} \ln|t|, \quad \rho_1 = x|t|^{\frac{2}{n-2}}, \quad \rho_2 = y + \frac{2}{\mu}\ln|t|, \quad \rho_3 = z + \frac{2}{\nu}\ln|t|.$$

$4^\circ$. О других точных решениях см. уравнение 4.6.1.5 при $f(w) = se^{\beta w}$.

### 4.5.3. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + b\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(w^m \dfrac{\partial w}{\partial y}\Big) + c\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(w^k \dfrac{\partial w}{\partial z}\Big) + sw^p$

**1.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a_1 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_3 \dfrac{\partial}{\partial z}\Big(w^k \dfrac{\partial w}{\partial z}\Big).$

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,z,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$\begin{aligned}
w_1 &= C_1^{-2} w(\pm C_2 x + C_3, \pm C_2 y + C_4, \pm C_1^k C_2 z + C_5, \pm C_2 t + C_6),\\
w_2 &= w(x\cos\beta + y\sqrt{a_1/a_2}\,\sin\beta, -x\sqrt{a_2/a_1}\,\sin\beta + y\cos\beta,\ z,\ t),\\
w_3 &= w(x\operatorname{ch}\lambda + ta_1^{1/2}\operatorname{sh}\lambda,\ y,\ z,\ xa_1^{-1/2}\operatorname{sh}\lambda + t\operatorname{ch}\lambda),\\
w_4 &= w(x,\ y\operatorname{ch}\mu + ta_2^{1/2}\operatorname{sh}\mu,\ z,\ ya_2^{-1/2}\operatorname{sh}\mu + t\operatorname{ch}\mu),
\end{aligned}$$

где $C_1, \ldots, C_6$, $\beta$, $\lambda$, $\mu$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки в выражении для $w_1$ выбираются произвольно).

⦿ *Литература*: N. H. Ibragimov (1994, p. 234).

$2^\circ$. Точные решения:

$$\begin{aligned}
w(x,y,z,t) &= |z|^{\frac{1}{k+1}}\big[Ax^2 + By^2 + (a_1A + a_2B)t^2 + C_1xy + C_2xt + C_3yt\\
&\qquad + C_4x + C_5y + C_6t + C_7\big];\\
w(x,y,z,t) &= |z|^{\frac{1}{k+1}}\big[A(a_2x^2 + a_1y^2 - a_1a_2t^2)^{-1/2} + B\big];\\
w(x,y,z,t) &= A|z|^{\frac{1}{k+1}}\exp\big(\lambda_1x + \lambda_2y \pm \gamma t\big) + B, \quad \gamma = \sqrt{a_1\lambda_1^2 + a_2\lambda_2^2};\\
w(x,y,z,t) &= A|z|^{\frac{1}{k+1}}\sin\big(\lambda_1x + C_1\big)\sin\big(\lambda_2y + C_2\big)\sin\big(\gamma t + C_3\big), \quad \gamma = \sqrt{a_1\lambda_1^2 + a_2\lambda_2^2};\\
w(x,y,z,t) &= \left[\frac{1}{a_3C_3^2}\left(\frac{C_1x + C_2y + C_3z + C_4}{t + C_5}\right)^2 - \frac{a_1C_1^2 + a_2C_2^2}{a_3C_3^2}\right]^{1/k};\\
w(x,y,z,t) &= \left[\frac{C_3^2 - a_2C_1^2}{a_3C_2^2} - \frac{a_1}{a_3C_2^2}\left(\frac{C_1y + C_2z + C_3t + C_4}{x + C_5}\right)^2\right]^{1/k};\\
w(x,y,z,t) &= \left[\frac{C_3^2 - a_1C_1^2}{a_3C_2^2} - \frac{a_2}{a_3C_2^2}\left(\frac{C_1x + C_2z + C_3t + C_4}{y + C_5}\right)^2\right]^{1/k};\\
w(x,y,z,t) &= \left[\frac{C_3^2 - a_1C_1^2 - a_2C_2^2}{a_3}\left(\frac{z + C_5}{C_1x + C_2y + C_3t + C_4}\right)^2\right]^{1/k};
\end{aligned}$$

где $A$, $B$, $C_1, \ldots, C_7$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ — произвольные постоянные.

$3^\circ$. Точные решения:

$$w = \big|z\varphi(\xi) + \psi(\xi)\big|^{\frac{1}{k+1}}, \quad \xi = C_1x + C_2y \pm t\sqrt{a_1C_1^2 + a_2C_2^2},$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные; $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$ — произвольные функции.

$4^\circ$. «Трехмерное» решение (обобщает четыре первых решения из п. $2^\circ$):

$$w(x,y,z,t) = |z|^{\frac{1}{k+1}} u(\widehat{x}, \widehat{y}, t), \quad \widehat{x} = a_1^{-1/2}x, \quad \widehat{y} = a_2^{-1/2}y,$$

где функция $u = u(\widehat{x}, \widehat{y}, t)$ определяется линейным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \widehat{x}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \widehat{y}^2}.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

5°. Точные решения в неявном виде:

$$2\lambda\sqrt{a_1C_1^2 + a_2C_2^2}\,(z + \lambda t) \pm \bigl(C_1x + C_2y \pm t\sqrt{a_1C_1^2 + a_2C_2^2}\,\bigr)\bigl(a_3w^k - \lambda^2\bigr) = \Phi(w),$$

где $\Phi(w)$ — произвольная функция; $C_1$, $C_2$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

6°. Существуют точные решения следующих видов:

$w(x,y,z,t) = |z|^{2/k}F(x,y,t)$ «трехмерное» решение;

$w(x,y,z,t) = |t|^{2\lambda}G(\xi,\eta,\zeta),\quad \xi = xt^{-1},\quad \eta = yt^{-1},\quad \zeta = z|t|^{-k\lambda-1}$ «трехмерное» решение;

$w(x,y,z,t) = H(r,z,t),\quad r = a_2x^2 + a_1y^2$ «трехмерное» решение;

$w(x,y,z,t) = U(\xi,y,z),\quad \xi = x^2 - a_1t^2$ «трехмерное» решение;

$w(x,y,z,t) = |t|^{2\lambda}V(\rho,\zeta),\quad \rho = t^{-1}\sqrt{a_2x^2 + a_1y^2},\quad \zeta = z|t|^{-k\lambda-1}$ «двумерное» решение;

$w(x,y,z,t) = W(\zeta,z),\quad \zeta = a_2x^2 + a_1y^2 - a_1a_2t^2$ «двумерное» решение;

$w(x,y,z,t) = R(\eta),\quad \eta = (a_2x^2 + a_1y^2 - a_1a_2t^2)z^{-2}$ «одномерное» решение;

$w(x,y,z,t) = |z|^{2/k}Q(p),\quad p = a_2x^2 + a_1y^2 - a_1a_2t^2$ «одномерное» решение,

где $\lambda$ — произвольная постоянная.

7°. О других точных решениях см. уравнение 4.5.3.6 при $n = m = 0$.

⦿ *Литература для уравнения* 4.5.3.1: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, стр. 320–321).

**2.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_2\frac{\partial}{\partial y}\left(w^k\frac{\partial w}{\partial y}\right) + a_3\frac{\partial}{\partial z}\left(w^k\frac{\partial w}{\partial z}\right).$

1°. Пусть $w(x,y,z,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2}w(\pm C_2x + C_3, \pm C_1^kC_2y + C_4, \pm C_1^kC_2z + C_5, \pm C_2t + C_6),$$
$$w_2 = w\bigl(x,\ y\cos\beta + z\sqrt{a_2/a_3}\,\sin\beta, -y\sqrt{a_3/a_2}\,\sin\beta + z\cos\beta,\ t\bigr),$$
$$w_3 = w\bigl(x\operatorname{ch}\lambda + ta_1^{1/2}\operatorname{sh}\lambda,\ y,\ z,\ xa_1^{-1/2}\operatorname{sh}\lambda + t\operatorname{ch}\lambda\bigr),$$

где $C_1, \ldots, C_6, \beta, \lambda$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки в выражении для $w_1$ выбираются произвольно).

2°. Точные решения:

$$w(x,y,z,t) = \left[\frac{(C_1x + C_2y + C_3z + C_4)^2 - a_1C_1^2(t + C_5)^2}{(a_2C_2^2 + a_3C_3^2)(t + C_5)^2}\right]^{1/k},$$
$$w(x,y,z,t) = \left[\frac{C_3^2(x + C_5)^2 - a_1(C_1y + C_2z + C_3t + C_4)^2}{(a_2C_1^2 + a_3C_2^2)(x + C_5)^2}\right]^{1/k},$$
$$w(x,y,z,t) = \left[\frac{(C_3^2 - a_1C_1^2)(y + C_5)^2}{a_2(C_1x + C_2z + C_3t + C_4)^2 + a_3C_2^2(y + C_5)^2}\right]^{1/k},$$
$$w(x,y,z,t) = \left[\frac{(C_3^2 - a_1C_1^2)(z + C_5)^2}{a_3(C_1x + C_2y + C_3t + C_4)^2 + a_2C_2^2(z + C_5)^2}\right]^{1/k},$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные.

3°. Точное решение:

$$w(x,y,z,t) = \bigl[\varphi(x + t\sqrt{a_1}\,) + \psi(x - t\sqrt{a_1}\,)\bigr]u^{\frac{1}{k+1}}(\widehat{y},\widehat{z}),\quad \widehat{y} = a_2^{-1/2}y,\quad \widehat{z} = a_3^{-1/2}z,$$

где $\varphi(\rho_1)$, $\psi(\rho_2)$ — произвольные функции, а функция $u(\widehat{y},\widehat{z})$ определяется уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \widehat{y}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \widehat{z}^2} = 0.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

4°. «Трехмерные» решения:

$$w = \left|v(\widehat{y}, \widehat{z}, \zeta)\right|^{\frac{1}{k+1}}, \quad \widehat{y} = a_2^{-1/2} y, \quad \widehat{z} = a_3^{-1/2} z, \quad \zeta = x \pm t\sqrt{a_1},$$

где функция $v(\widehat{y}, \widehat{z}, \zeta)$ определяется уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \widehat{y}^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \widehat{z}^2} = 0,$$

которое не зависит явно от циклической переменной $\zeta$ (входящие в решения постоянные интегрирования произвольным образом зависят от $\zeta$).

5°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов (обобщает решение из п. 3°):

$$w(x, y, z, t) = R(x, t) Q(y, z),$$

где функции $R = R(x, t)$ и $Q = Q(y, z)$ описываются уравнениями

$$\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} = a_1 \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + AR^{k+1},$$

$$a_2 \frac{\partial}{\partial y}\left(Q^k \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + a_3 \frac{\partial}{\partial z}\left(Q^k \frac{\partial Q}{\partial z}\right) = AQ,$$

$A$ — произвольная постоянная.

6°. Существует «трехмерные» решения следующих видов:

$$\begin{aligned} &w(x, y, z, t) = t^{2\lambda} F(\xi, \eta, \zeta), && \xi = xt^{-1}, \quad \eta = yt^{-k\lambda-1}, \quad \zeta = zt^{-k\lambda-1}; \\ &w(x, y, z, t) = G(x, r, t), && r = a_3 y^2 + a_2 z^2; \\ &w(x, y, z, t) = H(\xi, y, z), && \xi = x^2 - a_1 t^2, \end{aligned}$$

где $\lambda$ — произвольная постоянная.

7°. Существуют точные решения следующих видов:

$$\begin{aligned} &w(x, y, z, t) = U(\xi, \rho), && \xi = xt^{-1}, \quad \rho = t^{-k\lambda-1}\sqrt{a_3 y^2 + a_2 z^2} && \text{«двумерное» решение;} \\ &w(x, y, z, t) = V(r, \xi), && r = a_3 y^2 + a_2 z^2, \quad \xi = x^2 - a_1 t^2 && \text{«двумерное» решение;} \\ &w(x, y, z, t) = W(p, q), && p = (a_3 y^2 + a_2 z^2) t^{-2}, \quad q = xt^{-1} && \text{«двумерное» решение;} \\ &w(x, y, z, t) = \Theta(\eta), && \eta = (a_3 y^2 + a_2 z^2)(x^2 - a_1 t^2)^{-1} && \text{«одномерное» решение,} \end{aligned}$$

где $\lambda$ — произвольная постоянная.

8°. О других точных решениях см. уравнение 4.5.3.6 при $n = 0$, $m = k$.

⊙ *Литература для уравнения* 4.5.3.2: N. H. Ibragimov (1994, p. 233), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 322–323).

**3.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial}{\partial y}\left(w^m \frac{\partial w}{\partial y}\right) + a_3 \frac{\partial}{\partial z}\left(w^k \frac{\partial w}{\partial z}\right).$

1°. Пусть $w(x, y, z, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$\begin{aligned} w_1 &= C_1^{-2} w(\pm C_2 x + C_3, \pm C_1^m C_2 y + C_4, \pm C_1^k C_2 z + C_5, \pm C_2 t + C_6), \\ w_2 &= w(x \operatorname{ch}\lambda + t a_1^{1/2} \operatorname{sh}\lambda,\ y,\ z,\ x a_1^{-1/2} \operatorname{sh}\lambda + t \operatorname{ch}\lambda), \end{aligned}$$

где $C_1, \ldots, C_6, \lambda$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки в выражении для $w_1$ выбираются произвольно).

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x, y, z, t) = \left[\varphi(x + t\sqrt{a_1}\,) + \psi(x - t\sqrt{a_1}\,)\right] |y + C_1|^{\frac{1}{m+1}} |z + C_2|^{\frac{1}{k+1}},$$

где $\varphi(\rho_1)$, $\psi(\rho_2)$ — произвольные функции; $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные.

3°. Существует «трехмерные» решения следующих видов:

$$\begin{aligned} &w(x, y, z, t) = t^{2\lambda} F(\xi, \eta, \zeta), \quad \xi = xt^{-1}, \quad \eta = yt^{-m\lambda-1}, \quad \zeta = zt^{-k\lambda-1}; \\ &w(x, y, z, t) = G(r, y, z), \quad r = x^2 - a_1 t^2; \\ &w(x, y, z, t) = y^{2/m} H(x, s, t), \quad s = zy^{-k/m}, \end{aligned}$$

где $\lambda$ — произвольная постоянная.

$4^\circ$. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,z,t) = U(p,q), \quad p = (x^2 - a_1 t^2) y^{-2}, \quad q = zy^{-1};$$
$$w(x,y,z,t) = y^{2/m} V(r,s), \quad r = x^2 - a_1 t^2, \quad s = zy^{-k/m}.$$

$5^\circ$. О других точных решениях см. уравнение 4.5.3.6 при $n = 0$.

⊙ *Литература*: N. H. Ibragimov (1994, p. 235), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 323).

**4.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(w^k \frac{\partial w}{\partial x}\right) + a_2 \frac{\partial}{\partial y}\left(w^k \frac{\partial w}{\partial y}\right) + a_3 \frac{\partial}{\partial z}\left(w^k \frac{\partial w}{\partial z}\right).$

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,z,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2} w(\pm C_1^k C_2 x + C_3, \pm C_1^k C_2 y + C_4, \pm C_1^k C_2 z + C_5, \pm C_2 t + C_6),$$
$$w_2 = w\bigl(x\cos\beta + y\sqrt{a_1/a_2}\,\sin\beta, -x\sqrt{a_2/a_1}\,\sin\beta + y\cos\beta, z, t\bigr),$$

где $C_1, \ldots, C_6, \beta$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки в выражении для $w_1$ выбираются произвольно).

$2^\circ$. Точные решения:

$$w(x,y,z,t) = (C_1 t + C_2)\bigl[a_3 C_3 x^2 + a_3 C_4 y^2 - (a_1 C_3 + a_2 C_4) z^2 + C_5\bigr]^{\frac{1}{k+1}},$$
$$w(x,y,z,t) = (C_1 t + C_2)\left(\frac{C_3}{\sqrt{a_2 a_3 x^2 + a_1 a_3 y^2 + a_1 a_2 z^2}} + C_4\right)^{\frac{1}{k+1}},$$
$$w(x,y,z,t) = \left[\frac{1}{a_1 C_1^2 + a_2 C_2^2 + a_3 C_3^2}\left(\frac{C_1 x + C_2 y + C_3 z + C_4}{t + C_5}\right)^2\right]^{1/k},$$
$$w(x,y,z,t) = \left[\frac{C_3^2 (x + C_5)^2}{a_1 (C_1 y + C_2 z + C_3 t + C_4)^2 + (a_2 C_1^2 + a_3 C_2^2)(x + C_5)^2}\right]^{1/k},$$
$$w(x,y,z,t) = \left[\frac{C_3^2 (y + C_5)^2}{a_2 (C_1 x + C_2 z + C_3 t + C_4)^2 + (a_1 C_1^2 + a_3 C_2^2)(y + C_5)^2}\right]^{1/k},$$
$$w(x,y,z,t) = \left[\frac{C_3^2 (z + C_5)^2}{a_3 (C_1 x + C_2 y + C_3 t + C_4)^2 + (a_1 C_1^2 + a_2 C_2^2)(z + C_5)^2}\right]^{1/k},$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные (первые два решения являются вырожденными).

$3^\circ$. Вырожденное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,z,t) = (C_1 t + C_2)\bigl[\Theta(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z})\bigr]^{\frac{1}{k+1}}, \quad \widehat{x} = a_1^{-1/2} x, \quad \widehat{y} = a_2^{-1/2} y, \quad \widehat{z} = a_3^{-1/2} z,$$

где функция $\Theta = \Theta(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z})$ определяется уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \widehat{x}^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \widehat{y}^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \widehat{z}^2} = 0.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

$4^\circ$. Существует «трехмерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,z,t) = |t|^{2\lambda} F(\xi, \eta, \zeta), \quad \xi = x|t|^{-k\lambda - 1}, \quad \eta = y|t|^{-k\lambda - 1}, \quad \zeta = z|t|^{-k\lambda - 1};$$
$$w(x,y,z,t) = |z|^{2/k} G(p, q, t), \quad p = xz^{-1}, \quad q = yz^{-1};$$
$$w(x,y,z,t) = H(\rho, z, t), \quad \rho = a_2 x^2 + a_1 y^2,$$

где $\lambda$ — произвольная постоянная.

$5^\circ$. Существуют точные решения следующих видов:

$$w(x,y,z,t) = U(r,t), \quad r = a_2 a_3 x^2 + a_1 a_3 y^2 + a_1 a_2 z^2 \qquad \text{«двумерное» решение;}$$
$$w(x,y,z,t) = V(\chi), \quad \chi = (a_2 a_3 x^2 + a_1 a_3 y^2 + a_1 a_2 z^2) t^{-2} \qquad \text{«одномерное» решение.}$$

$6^\circ$. О других точных решениях см. уравнение 4.5.3.6 при $n = m = k$.

⊙ *Литература для уравнения* 4.5.3.4: N. H. Ibragimov (1994, p. 232), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 324).

**5.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a_1 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + a_2 \dfrac{\partial}{\partial y}\left(w^n \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + a_3 \dfrac{\partial}{\partial z}\left(w^k \dfrac{\partial w}{\partial z}\right).$

1°. Пусть $w(x, y, z, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2} w(\pm C_1^n C_2 x + C_3, \pm C_1^n C_2 y + C_4, \pm C_1^k C_2 z + C_5, \pm C_2 t + C_6),$$
$$w_2 = w\bigl(x\cos\beta + y\sqrt{a_1/a_2}\,\sin\beta, -x\sqrt{a_2/a_1}\,\sin\beta + y\cos\beta, z, t\bigr),$$

где $C_1, \ldots, C_6, \beta$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки в выражении для $w_1$ выбираются произвольно).

2°. Существует «трехмерные» решения следующих видов:

$$w(x, y, z, t) = t^{2\lambda} F(\xi, \eta, \zeta), \quad \xi = xt^{-n\lambda-1}, \quad \eta = yt^{-n\lambda-1}, \quad \zeta = zt^{-k\lambda-1};$$
$$w(x, y, z, t) = G(r, z, t), \quad r = a_2 x^2 + a_1 y^2;$$
$$w(x, y, z, t) = z^{2/k} H(p, q, t), \quad p = xz^{-n/k}, \quad q = yz^{-n/k},$$

где $\lambda$ — произвольная постоянная.

3°. Существуют точные решения следующих видов:

$$w(x, y, z, t) = U(r, s), \quad r = (a_2 x^2 + a_1 y^2)t^{-2}, \quad s = zt^{-1} \qquad \text{«двумерное» решение,}$$
$$w(x, y, z, t) = t^{-2/k} z^{2/k} V(\chi), \quad \chi = (a_2 x^2 + a_1 y^2)t^{2n/k-2} z^{-2n/k} \qquad \text{«одномерное» решение.}$$

4°. О других точных решениях см. уравнение 4.5.3.6 при $m = n$.

**6.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a_1 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + a_2 \dfrac{\partial}{\partial y}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + a_3 \dfrac{\partial}{\partial z}\left(w^k \dfrac{\partial w}{\partial z}\right).$

Частный случай уравнения 4.6.2.6 при $f(w) = a_1 w^n$, $g(w) = a_2 w^m$, $h(w) = a_3 w^k$.

1°. Пусть $w(x, y, z, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2} w(\pm C_1^n C_2 x + C_3, \pm C_1^m C_2 y + C_4, \pm C_1^k C_2 z + C_5, \pm C_2 t + C_6),$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x, y, z, t) = (C_1 t + C_2)|x + C_3|^{\frac{1}{n+1}} |y + C_4|^{\frac{1}{m+1}} |z + C_5|^{\frac{1}{k+1}}.$$

3°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\frac{a_1 b_1^2}{n+1} w^{n+1} + \frac{a_2 b_2^2}{m+1} w^{m+1} + \frac{a_3 b_3^2}{k+1} w^{k+1} - \lambda^2 w = C_1(b_1 x + b_2 y + b_3 z + \lambda t) + C_2,$$

где $C_1$, $C_2$, $b_1$, $b_2$, $b_3$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

4°. Точные решения в неявном виде:

$$\left(\frac{C_1 x + C_2 y + C_3 z + C_4}{t + C_5}\right)^2 = a_1 C_1^2 w^n + a_2 C_2^2 w^m + a_3 C_3^2 w^k,$$
$$a_1 w^n \left(\frac{C_1 y + C_2 z + C_3 t + C_4}{x + C_5}\right)^2 + a_2 C_1^2 w^m + a_3 C_2^2 w^k = C_3^2,$$
$$a_2 w^m \left(\frac{C_1 x + C_2 z + C_3 t + C_4}{y + C_5}\right)^2 + a_1 C_1^2 w^n + a_3 C_2^2 w^k = C_3^2,$$
$$a_3 w^k \left(\frac{C_1 x + C_2 y + C_3 t + C_4}{z + C_5}\right)^2 + a_1 C_1^2 w^n + a_2 C_2^2 w^m = C_3^2,$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные.

5°. «Двумерное» решение ($b_1$, $b_2$, $b_3$ — произвольные постоянные):

$$w(x, y, z, t) = u(\xi, t), \quad \xi = b_1 x + b_2 y + b_3 z,$$

где функция $u = u(\xi, t)$ определяются уравнением вида 3.4.4.6:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[(a_1 b_1^2 u^n + a_2 b_2^2 u^m + a_3 b_3^2 u^k)\frac{\partial u}{\partial \xi}\right],$$

которое допускает линеаризацию.

$6^\circ$. «Двумерное» решение ($c_1$, $c_2$, $c_3$ — произвольные постоянные):

$$w(x,y,z,t)=v(x,\eta),\quad \eta=c_1t+c_2y+c_3z, \tag{1}$$

где функция $v=v(x,\eta)$ определяются уравнением вида 5.4.4.8:

$$a_1\frac{\partial}{\partial x}\left(v^n\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(a_2c_2^2v^m+a_3c_3^2v^k-c_1^2\right)\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]=0, \tag{2}$$

которое допускает линеаризацию.

Формула (1) и уравнение (2) могут использоваться для получения двух других «двумерных» решений путем циклической перестановки переменных и определяющих параметров:

$$\begin{array}{ccc} & (x,a_1,n) & \\ \nearrow & & \searrow \\ (z,a_3,k) & \longleftarrow & (y,a_2,m)\end{array}$$

$7^\circ$. «Двумерное» решение ($b_n$, $c_n$ — произвольные постоянные):

$$w(x,y,z,t)=U(\zeta,\rho),\quad \zeta=b_1t+b_2x,\quad \rho=c_1y+c_2z,$$

где функция $U=U(\zeta,\rho)$ определяются уравнением вида 5.4.4.8:

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\Phi(U)\frac{\partial U}{\partial\zeta}\right]+\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\Psi(U)\frac{\partial U}{\partial\rho}\right]=0,\quad \Phi(U)=a_1b_2^2U^n-b_1^2,\quad \Psi(U)=a_2c_1^2U^m+a_3c_2^2U^k,$$

которое допускает линеаризацию.

**Замечание.** Решение, приведенное в п. $7^\circ$, может использоваться для получения других «двумерных» решений путем циклической перестановки переменных и определяющих параметров, указанной в п. $6^\circ$.

$8^\circ$. Существует «трехмерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,z,t)=t^{2\lambda}F(\xi,\eta,\zeta),\quad \xi=xt^{-n\lambda-1},\quad \eta=yt^{-m\lambda-1},\quad \zeta=zt^{-k\lambda-1};$$

$$w(x,y,z,t)=x^{2/n}G(r,s,t),\quad r=yx^{-m/n},\quad s=zx^{-k/n},$$

где $\lambda$ — произвольная постоянная.

$9^\circ$. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,z,t)=H(p,q),\quad p=b_1x+b_2y+b_3z+b_4t,\quad q=c_1x+c_2y+c_3z+c_4t;$$

$$w(x,y,z,t)=t^{-2/n}x^{2/n}U(\rho,\chi),\quad \rho=x^{-m/n}yt^{(m-n)/n},\quad \chi=x^{-k/n}zt^{(k-n)/n},$$

где $b_n$, $c_n$ — произвольные постоянные.

⊙ *Литература для уравнения* 4.5.3.6: N. H. Ibragimov (1994, p. 236), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 325–326).

**7.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a_1\frac{\partial}{\partial x}\left(w^n\frac{\partial w}{\partial x}\right)+a_2\frac{\partial}{\partial y}\left(w^m\frac{\partial w}{\partial y}\right)+a_3\frac{\partial}{\partial z}\left(w^k\frac{\partial w}{\partial z}\right)+bw^p.$

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,z,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=C_1^2w(\pm C_1^{p-n-1}x+C_2,\pm C_1^{p-m-1}y+C_3,\pm C_1^{p-k-1}z+C_4,\pm C_1^{p-1}t+C_5),$$

где $C_1,\,\ldots,\,C_5$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

$2^\circ$. Существует «трехмерное» решение вида

$$w(x,y,z,t)=t^{\frac{2}{1-p}}U(\xi,\eta,\zeta),\quad \xi=xt^{\frac{p-n-1}{1-p}},\quad \eta=yt^{\frac{p-m-1}{1-p}},\quad \zeta=zt^{\frac{p-k-1}{1-p}}.$$

### 4.5.4. Уравнения вида $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda_1 w}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+b\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\lambda_2 w}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+c\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{\lambda_3 w}\frac{\partial w}{\partial z}\right)+se^{\beta w}$

**1.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+a_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+a_3\frac{\partial}{\partial z}\left(e^w\frac{\partial w}{\partial z}\right).$

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,z,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=w(\pm C_1x+C_3,\pm C_1y+C_4,\pm C_1C_2z+C_5,\pm C_1t+C_6)-2\ln|C_2|,$$

$$w_2=w\big(x\cos\beta+y\sqrt{a_1/a_2}\,\sin\beta,-x\sqrt{a_2/a_1}\,\sin\beta+y\cos\beta,\ z,\ t\big),$$

$$w_3=w\big(x\operatorname{ch}\lambda+ta_1^{1/2}\operatorname{sh}\lambda,\ y,\ z,\ xa_1^{-1/2}\operatorname{sh}\lambda+t\operatorname{ch}\lambda\big),$$

$$w_4=w\big(x,\ y\operatorname{ch}\mu+ta_2^{1/2}\operatorname{sh}\mu,\ z,\ ya_2^{-1/2}\operatorname{sh}\mu+t\operatorname{ch}\mu\big),$$

где $C_1,\,\ldots,\,C_6$, $\beta$, $\lambda$, $\mu$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки в выражении $w_1$ выбираются произвольно).

2°. Точные решения:

$$w(x,y,z,t) = C_1x^2 + C_2y^2 + (a_1C_1 + a_2C_2)t^2 + C_3xy + C_4xt + C_5yt + C_6x + C_7y + C_8t + C_9 + \ln|z|;$$

$$w(x,y,z,t) = C_1(a_2x^2 + a_1y^2 - a_1a_2t^2)^{-1/2} + C_2 + \ln|z|;$$

$$w(x,y,z,t) = C_1\exp\bigl(\lambda_1x + \lambda_2y \pm \gamma t\bigr) + C_2 + \ln|z|, \quad \gamma = \sqrt{a_1\lambda_1^2 + a_2\lambda_2^2};$$

$$w(x,y,z,t) = C_1\sin\bigl(\lambda_1x + C_2\bigr)\sin\bigl(\lambda_2y + C_3\bigr)\sin\bigl(\gamma t + C_4\bigr) + \ln|z|, \quad \gamma = \sqrt{a_1\lambda_1^2 + a_2\lambda_2^2};$$

$$w(x,y,z,t) = \ln\left[\frac{1}{a_3C_3^2}\left(\frac{C_1x + C_2y + C_3z + C_4}{t + C_5}\right)^2 - \frac{a_1C_1^2 + a_2C_2^2}{a_3C_3^2}\right];$$

$$w(x,y,z,t) = \ln\left[\frac{C_3^2 - a_2C_1^2}{a_3C_2^2} - \frac{a_1}{a_3C_2^2}\left(\frac{C_1y + C_2z + C_3t + C_4}{x + C_5}\right)^2\right];$$

$$w(x,y,z,t) = \ln\left[\frac{C_3^2 - a_1C_1^2}{a_3C_2^2} - \frac{a_2}{a_3C_2^2}\left(\frac{C_1x + C_2z + C_3t + C_4}{y + C_5}\right)^2\right];$$

$$w(x,y,z,t) = \ln\left[\frac{C_3^2 - a_1C_1^2 - a_2C_2^2}{a_3}\left(\frac{z + C_5}{C_1x + C_2y + C_3t + C_4}\right)^2\right];$$

где $C_1, \ldots, C_5$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ — произвольные постоянные.

3°. Точные решения:

$$w = \ln|z\varphi(\xi) + \psi(\xi)|, \quad \xi = C_1x + C_2y \pm t\sqrt{a_1C_1^2 + a_2C_2^2},$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные; $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$ — произвольные функции.

4°. «Трехмерное» решение (обобщает четыре первых решения из п. 2°):

$$w(x,y,z,t) = u(\widehat{x}, \widehat{y}, t) + \ln|z|, \quad \widehat{x} = a_1^{-1/2}x, \quad \widehat{y} = a_2^{-1/2}y,$$

где функция $u = u(\widehat{x}, \widehat{y}, t)$ определяется линейным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \widehat{x}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \widehat{y}^2}.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

5°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,z,t) = U(\xi, t) + 2\ln|z|, \quad \xi = C_1x + C_2y,$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, а функция $U = U(\xi, t)$ определяется интегрируемым уравнением вида 3.2.1.1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = (a_1C_1^2 + a_2C_2^2)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2a_3e^U.$$

6°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,z,t) = v(x, \eta) + 2\ln|z|, \quad \eta = C_1y + C_2t, \tag{1}$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, а функция $v = v(\eta, t)$ определена уравнением

$$(C_1^2 - a_2C_2^2)\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = a_1\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2a_3e^v. \tag{2}$$

При $\sigma = C_1^2 - a_2C_2^2 > 0$, деля на $\sigma$, получим интегрируемое уравнение вида 3.2.1.1. При $\sigma = C_1^2 - a_2C_2^2 < 0$ преобразование $\eta = \widetilde{\eta}\sqrt{|\sigma|}$, $x = \widetilde{x}\sqrt{a_1}$ приводит к интегрируемому уравнению вида 5.2.1.1:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \widetilde{x}^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \widetilde{\eta}^2} = -2a_3e^v.$$

**Замечание.** Выражение (1) и уравнение (2) могут быть использованы для получения других «двумерных» решений, что достигается переобозначением: $(x, a_1) \rightleftarrows (y, a_2)$.

7°. Точные решения в неявном виде:

$$2\lambda\sqrt{a_1C_1^2 + a_2C_2^2}\,(z + \lambda t) \pm \bigl(C_1x + C_2y \pm t\sqrt{a_1C_1^2 + a_2C_2^2}\,\bigr)\bigl(a_3e^w - \lambda^2\bigr) = \Phi(w),$$

где $\Phi(w)$ — произвольная функция; $C_1$, $C_2$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

8°. Существуют «трехмерные» решения следующих видов:

$w(x,y,z,t) = F(x,y,t) + 2\ln|z|;$

$w(x,y,z,t) = G(\xi_1,\xi_2,\xi_3) - 2k\ln|t|,\quad \xi_1 = xt^{-1},\quad \xi_2 = yt^{-1},\quad \xi_3 = z|t|^{k-1};$

$w(x,y,z,t) = H(\eta_1,\eta_2,\eta_3) + 2\ln|z|,\ \eta_1 = t + k_1\ln|z|,\ \eta_2 = x + k_2\ln|z|,\ \eta_3 = y + k_3\ln|z|;$

$w(x,y,z,t) = E(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) + 2z,\quad \zeta_1 = te^z,\quad \zeta_2 = xe^z,\quad \zeta_3 = ye^z;$

$w(x,y,z,t) = P(r,z,t),\quad r = a_2x^2 + a_1y^2;$

$w(x,y,z,t) = Q(\rho,y,z),\quad \rho = x^2 - a_1t^2;$

где $k$, $k_1$, $k_2$, $k_3$ — произвольные постоянные.

9°. Существуют точные решения следующих видов:

$w(x,y,z,t) = U(r,t) + 2\ln|z|,\quad r = a_2x^2 + a_1y^2$ «двумерное» решение;

$w(x,y,z,t) = V(\rho,y) + 2\ln|z|,\quad \rho = x^2 - a_1t^2$ «двумерное» решение;

$w(x,y,z,t) = W(\theta,z),\quad \theta = a_2x^2 + a_1y^2 - a_1a_2t^2$ «двумерное» решение;

$w(x,y,z,t) = R(\xi_1,\xi_2) + 2\ln|z/t|,\quad \xi_1 = xt^{-1},\ \xi_2 = yt^{-1}$ «двумерное» решение;

$w(x,y,z,t) = S(\theta) + 2\ln|z|,\quad \theta = a_2x^2 + a_1y^2 - a_1a_2t^2$ «одномерное» решение;

$w(x,y,z,t) = T(\chi),\quad \chi = (a_2x^2 + a_1y^2 - a_1a_2t^2)z^{-2}$ «одномерное» решение.

10°. О других точных решениях см. уравнение 4.6.2.6 при $f(w) = a_1$, $g(w) = a_2$, $h(w) = a_3e^w$.

⊙ *Литература для уравнения* 4.5.4.1: N. H. Ibragimov (1994, p. 235), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 327–328).

**2.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_2\frac{\partial}{\partial y}\left(e^w\frac{\partial w}{\partial y}\right) + a_3\frac{\partial}{\partial z}\left(e^w\frac{\partial w}{\partial z}\right).$

1°. Пусть $w(x,y,z,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1x + C_3, \pm C_1C_2y + C_4, \pm C_1C_2z + C_5, \pm C_1t + C_6) - 2\ln|C_2|,$$
$$w_2 = w\bigl(x, y\cos\beta + z\sqrt{a_2/a_3}\,\sin\beta, -y\sqrt{a_3/a_2}\,\sin\beta + z\cos\beta, t\bigr),$$
$$w_3 = w\bigl(x\operatorname{ch}\lambda + ta_1^{1/2}\operatorname{sh}\lambda,\ y,\ z, xa_1^{-1/2}\operatorname{sh}\lambda + t\operatorname{ch}\lambda\bigr),$$

где $C_1, \ldots, C_6$, $\beta$, $\lambda$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки в выражении для $w_1$ выбираются произвольно).

2°. Точные решения:

$$w(x,y,z,t) = \varphi(x + t\sqrt{a_1}) + \psi(x - t\sqrt{a_1}) + \ln(a_3C_1y^2 + C_2yz - a_2C_1z^2 + C_3y + C_4z + C_5),$$
$$w(x,y,z,t) = \varphi(x + t\sqrt{a_1}) + \psi(x - t\sqrt{a_1}) + \ln\bigl[C_1\exp(C_2\sqrt{a_3}\,y)\sin(C_2\sqrt{a_2}\,z + C_3) + C_4\bigr],$$
$$w(x,y,z,t) = \varphi(x + t\sqrt{a_1}) + \psi(x - t\sqrt{a_1}) + \ln\bigl[C_1\exp(C_2\sqrt{a_2}\,z)\sin(C_2\sqrt{a_3}\,y + C_3) + C_4\bigr],$$
$$w(x,y,z,t) = \ln\left[\frac{(C_1x + C_2y + C_3z + C_4)^2 - a_1C_1^2(t + C_5)^2}{(a_2C_2^2 + a_3C_3^2)(t + C_5)^2}\right],$$
$$w(x,y,z,t) = \ln\left[\frac{C_3^2(x + C_5)^2 - a_1(C_1y + C_2z + C_3t + C_4)^2}{(a_2C_1^2 + a_3C_2^2)(x + C_5)^2}\right],$$
$$w(x,y,z,t) = \ln\left[\frac{(C_3^2 - a_1C_1^2)(y + C_5)^2}{a_2(C_1x + C_2z + C_3t + C_4)^2 + a_3C_2^2(y + C_5)^2}\right],$$
$$w(x,y,z,t) = \ln\left[\frac{(C_3^2 - a_1C_1^2)(z + C_5)^2}{a_3(C_1x + C_2y + C_3t + C_4)^2 + a_2C_2^2(z + C_5)^2}\right],$$

где $\varphi(\rho_1)$, $\psi(\rho_2)$ — произвольные функции; $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные.

3°. Точное решение (обобщает три первых решения из п. 2°):

$$w(x,y,z,t) = \varphi(x + t\sqrt{a_1}\,) + \psi(x - t\sqrt{a_1}\,) + \ln u(\widehat{y},\widehat{z}),\quad \widehat{y} = a_2^{-1/2}y,\quad \widehat{z} = a_3^{-1/2}z,$$

где $\varphi(\rho_1)$, $\psi(\rho_2)$ — произвольные функции, а функция $u(\widehat{y},\widehat{z})$ определяется уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\widehat{y}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\widehat{z}^2} = 0. \qquad (1)$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

$4^\circ$. «Трехмерные» решения:

$$w = \ln\bigl|v(\widehat{y},\widehat{z},\zeta)\bigr|, \quad \widehat{y} = a_2^{-1/2}y, \quad \widehat{z} = a_3^{-1/2}z, \quad \zeta = x \pm t\sqrt{a_1},$$

где функция $v(\widehat{y},\widehat{z},\zeta)$определяется уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \widehat{y}^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \widehat{z}^2} = 0,$$

которое не зависит явно от циклической переменной $\zeta$ (входящие в решения постоянные интегрирования будут произвольным образом зависеть от $\zeta$).

$5^\circ$. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов (обобщает решение из п. $3^\circ$):

$$w(x,y,z,t) = R(\widehat{x},t) + \ln Q(\widehat{y},\widehat{z}), \quad \widehat{x} = a_1^{-1/2}x, \quad \widehat{y} = a_2^{-1/2}y, \quad \widehat{z} = a_3^{-1/2}z,$$

где функции $R = R(\widehat{x},t)$ и $Q = Q(\widehat{y},\widehat{z})$ описываются уравнениями

$$\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 R}{\partial \widehat{x}^2} + Ae^R, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \widehat{y}^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial \widehat{z}^2} = A, \qquad (3)$$

$A$ — произвольная постоянная. Общее решение уравнения (2) приведено в 3.2.1.1. Уравнение Гельмгольца (3) подстановкой $Q = \frac{1}{2}A\widehat{y}^2 + u$ сводится к уравнению Лапласа (1).

$6^\circ$. Существует «трехмерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,z,t) = F(\xi,\eta,\zeta) - 2\lambda \ln|t|, \quad \xi = xt^{-1}, \quad \eta = y|t|^{\lambda-1}, \quad \zeta = z|t|^{\lambda-1};$$
$$w(x,y,z,t) = G(x,r,t), \quad r = a_3y^2 + a_2z^2;$$
$$w(x,y,z,t) = H(\rho,y,z), \quad \rho = x^2 - a_1t^2,$$

где $\lambda$ — произвольная постоянная.

$7^\circ$. Существуют точные решения следующих видов:

$$w(x,y,z,t) = E(r,\rho), \quad r = a_3y^2 + a_2z^2, \quad \rho = x^2 - a_1t^2 \quad \text{«двумерное» решение;}$$
$$w(x,y,z,t) = U(\chi_1,\chi_2) + 2\ln|y/t|, \quad \chi_1 = x/t, \quad \chi_2 = z/y \quad \text{«двумерное» решение;}$$
$$w(x,y,z,t) = V(p,q), \quad p = (a_3y^2 + a_2z^2)t^{-2}, \quad q = xt^{-1} \quad \text{«двумерное» решение;}$$
$$w(x,y,z,t) = W(\eta), \quad \eta = (a_3y^2 + a_2z^2)(x^2 - a_1t^2)^{-1} \quad \text{«одномерное» решение.}$$

$8^\circ$. О других точных решениях см. уравнение 4.6.2.6 при $f(w) = a_1$, $g(w) = a_2e^w$, $h(w) = a_3e^w$.

⊙ *Литература для уравнения* 4.5.4.2: N. H. Ibragimov (1994, p. 235), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 329–330).

**3.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_2\frac{\partial}{\partial y}\left(e^w\frac{\partial w}{\partial y}\right) + a_3\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{kw}\frac{\partial w}{\partial z}\right).$

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,z,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1x + C_3, \pm C_1C_2y + C_4, \pm C_1C_2^kz + C_5, \pm C_1t + C_6) - \ln C_2^2,$$
$$w_2 = w(x\operatorname{ch}\lambda + ta_1^{1/2}\operatorname{sh}\lambda,\ y,\ z, xa_1^{-1/2}\operatorname{sh}\lambda + t\operatorname{ch}\lambda),$$

где $C_1,\ldots,C_6,\lambda$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

$2^\circ$. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y,z,t) = \varphi(x + t\sqrt{a_1}\,) + \psi(x - t\sqrt{a_1}\,) + \ln|y + C_1| + \frac{1}{k}\ln|z + C_2|,$$

где $\varphi(\rho_1)$, $\psi(\rho_2)$ — произвольные функции; $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные.

$3^\circ$. Существует «трехмерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,z,t) = F(\xi,\eta,\zeta) - 2\beta\ln|t|, \quad \xi = xt^{-1}, \quad \eta = y|t|^{\beta-1}, \quad \zeta = z|t|^{k\beta-1};$$
$$w(x,y,z,t) = G(r,y,z), \quad r = x^2 - a_1t^2,$$

где $\beta$ — произвольная постоянная.

4°. Существуют точные решения следующих видов:

$w(x,y,z,t) = F(\rho_1,\rho_2) + 2\ln\left|\dfrac{y}{t}\right|, \quad \rho_1 = xt^{-1}, \quad \rho_2 = |t|^{k-1}|y|^{-k}z$ «двумерное» решение,

$w(x,y,z,t) = U(p,q), \quad p = (x^2 - a_1t^2)y^{-2}, \quad q = zy^{-1}$ «двумерное» решение,

$w(x,y,z,t) = V(r,s) + 2\ln|y|, \quad r = x^2 - a_1t^2, \quad s = z|y|^{-k}$ «двумерное» решение,

$w(x,y,z,t) = W(\chi) - \dfrac{2}{k-1}\ln\left|\dfrac{y}{z}\right|, \quad \chi = |x^2 - a_1t^2|^{k-1}|y|^{-2k}z^2$ «одномерное» решение.

5°. О других точных решениях см. уравнение 4.6.2.6 при $f(w)=a_1$, $g(w)=a_2e^w$, $h(w)=a_3e^{kw}$.

**4.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a_1\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^w\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + a_2\dfrac{\partial}{\partial y}\left(e^w\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + a_3\dfrac{\partial}{\partial z}\left(e^w\dfrac{\partial w}{\partial z}\right).$

Частный случай уравнения 4.6.2.4 при $f(w) = e^w$.

1°. Пусть $w(x,y,z,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1C_2x + C_3, \pm C_1C_2y + C_4, \pm C_1C_2z + C_5, \pm C_1t + C_6) - \ln C_2^2,$$
$$w_2 = w\bigl(x\cos\beta + y\sqrt{a_1/a_2}\,\sin\beta, -x\sqrt{a_2/a_1}\,\sin\beta + y\cos\beta,\ z,\ t\bigr),$$

где $C_1, \ldots, C_6, \beta$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Точные решения:

$$w(x,y,z,t) = C_1t + C_2 + \ln\bigl[a_3C_3x^2 + a_3C_4y^2 - (a_1C_3 + a_2C_4)z^2 + C_5\bigr],$$
$$w(x,y,z,t) = C_1t + C_2 + \ln\bigl[C_3(a_2a_3x^2 + a_1a_3y^2 + a_1a_2z^2)^{-1/2} + C_4\bigr],$$
$$w(x,y,z,t) = \ln\left[\frac{1}{a_1C_1^2 + a_2C_2^2 + a_3C_3^2}\left(\frac{C_1x + C_2y + C_3z + C_4}{t + C_5}\right)^2\right],$$
$$w(x,y,z,t) = \ln\left[\frac{C_3^2(x + C_5)^2}{a_1(C_1y + C_2z + C_3t + C_4)^2 + (a_2C_1^2 + a_3C_2^2)(x + C_5)^2}\right],$$
$$w(x,y,z,t) = \ln\left[\frac{C_3^2(y + C_5)^2}{a_2(C_1x + C_2z + C_3t + C_4)^2 + (a_1C_1^2 + a_3C_2^2)(y + C_5)^2}\right],$$
$$w(x,y,z,t) = \ln\left[\frac{C_3^2(z + C_5)^2}{a_3(C_1x + C_2y + C_3t + C_4)^2 + (a_1C_1^2 + a_2C_2^2)(z + C_5)^2}\right],$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные.

3°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y,z,t) = C_1t + C_2 + \ln\Theta(\widehat{x},\widehat{y},\widehat{z}), \quad \widehat{x} = a_1^{-1/2}x, \quad \widehat{y} = a_2^{-1/2}y, \quad \widehat{z} = a_3^{-1/2}z,$$

где функция $\Theta = \Theta(\widehat{x},\widehat{y},\widehat{z})$ определяются уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial\widehat{x}^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial\widehat{y}^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial\widehat{z}^2} = 0.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

4°. Существует «трехмерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,z,t) = F(\xi,\eta,\zeta) - 2\beta\ln|t|, \quad \xi = x|t|^{\beta-1}, \quad \eta = y|t|^{\beta-1}, \quad \zeta = z|t|^{\beta-1};$$
$$w(x,y,z,t) = G(\rho,z,t), \quad \rho = a_2x^2 + a_1y^2;$$
$$w(x,y,z,t) = H(p,q,t) + 2\ln|z|, \quad p = x/z, \quad q = y/z,$$

где $\beta$ — произвольная постоянная.

5°. Существуют точные решения следующих видов:

$w(x,y,z,t) = U(r,t), \quad r = a_2a_3x^2 + a_1a_3y^2 + a_1a_2z^2$ «двумерное» решение;

$w(x,y,z,t) = V(\chi), \quad \chi = (a_2a_3x^2 + a_1a_3y^2 + a_1a_2z^2)t^{-2}$ «одномерное» решение.

6°. О других точных решениях см. уравнение 4.5.4.6 при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

⊙ *Литература для уравнения* 4.5.4.4: N. H. Ibragimov (1994, p. 232), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 331).

**5.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a_1 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + a_2 \dfrac{\partial}{\partial y}\left(e^{w}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + a_3 \dfrac{\partial}{\partial z}\left(e^{kw}\dfrac{\partial w}{\partial z}\right).$

1°. Пусть $w(x,y,z,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1C_2x + C_3, \pm C_1C_2y + C_4, \pm C_1C_2^k z + C_5, \pm C_1t + C_6) - \ln C_2^2,$$
$$w_2 = w\bigl(x\cos\beta + y\sqrt{a_1/a_2}\,\sin\beta,\ -x\sqrt{a_2/a_1}\,\sin\beta + y\cos\beta,\ z,\ t\bigr),$$

где $C_1, \ldots, C_6, \beta$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки в выражении для $w_1$ выбираются произвольно).

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y,z,t) = C_1t + C_2 + \frac{1}{k}\ln|z + C_3| + \ln\Theta(\widehat{x},\widehat{y}), \quad \widehat{x} = a_1^{-1/2}x, \quad \widehat{y} = a_2^{-1/2}y,$$

где функция $\Theta = \Theta(\widehat{x},\widehat{y})$ определяется уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial\widehat{x}^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial\widehat{y}^2} = 0.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

3°. Существуют точные решения следующих видов:

$$w = F(\xi,\eta,\zeta) - 2\beta\ln|t|, \quad \xi = x|t|^{\beta-1}, \quad \eta = y|t|^{\beta-1}, \quad \zeta = z|t|^{k\beta-1} \qquad \text{«трехмерное» решение;}$$
$$w = G(r,z,t), \quad r = a_2x^2 + a_1y^2 \qquad \text{«трехмерное» решение;}$$
$$w = H(\rho_1,\rho_2) + 2\ln|x/t|, \quad \rho_1 = y/x, \quad \rho_2 = |t|^{k-1}|x|^{-k}z, \qquad \text{«двумерное» решение;}$$
$$w = U(\chi) + \ln\bigl[(a_2x^2 + a_1y^2)t^{-2}\bigr], \ \chi = (a_2x^2 + a_1y^2)|z|^{-2/k}|t|^{2/k-2} \qquad \text{«одномерное» решение;}$$

где $\beta$ — произвольная постоянная.

4°. О других точных решениях см. уравнение 4.5.4.6 при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = k$.

⊙ *Литература*: N. H. Ibragimov (1994, p. 233), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 332).

**6.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a_1 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda_1 w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + a_2 \dfrac{\partial}{\partial y}\left(e^{\lambda_2 w}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + a_3 \dfrac{\partial}{\partial z}\left(e^{\lambda_3 w}\dfrac{\partial w}{\partial z}\right).$

1°. Пусть $w(x,y,z,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1C_2^{\lambda_1}x + C_3, \pm C_1C_2^{\lambda_2}y + C_4, \pm C_1C_2^{\lambda_3}z + C_5, \pm C_1t + C_6) - \ln C_2^2,$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y,z,t) = C_1t + C_2 + \frac{1}{\lambda_1}\ln|x + C_3| + \frac{1}{\lambda_2}\ln|y + C_4| + \frac{1}{\lambda_3}\ln|z + C_5|.$$

3°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\frac{a_1k_1^2}{\lambda_1}e^{\lambda_1 w} + \frac{a_2k_2^2}{\lambda_2}e^{\lambda_2 w} + \frac{a_3k_3^2}{\lambda_3}e^{\lambda_3 w} - \beta^2 w = C_1(k_1x + k_2y + k_3z + \beta t) + C_2,$$

где $C_1$, $C_2$, $k_1$, $k_2$, $k_3$, $\beta$ — произвольные постоянные.

4°. Точные решения в неявном виде:

$$\left(\frac{C_1x + C_2y + C_3z + C_4}{t + C_5}\right)^2 = a_1C_1^2e^{\lambda_1 w} + a_2C_2^2e^{\lambda_2 w} + a_3C_3^2e^{\lambda_3 w},$$
$$a_1e^{\lambda_1 w}\left(\frac{C_1y + C_2z + C_3t + C_4}{x + C_5}\right)^2 + a_2C_1^2e^{\lambda_2 w} + a_3C_2^2e^{\lambda_3 w} = C_3^2,$$
$$a_2e^{\lambda_2 w}\left(\frac{C_1x + C_2z + C_3t + C_4}{y + C_5}\right)^2 + a_1C_1^2e^{\lambda_1 w} + a_3C_2^2e^{\lambda_3 w} = C_3^2,$$
$$a_3e^{\lambda_3 w}\left(\frac{C_1x + C_2y + C_3t + C_4}{z + C_5}\right)^2 + a_1C_1^2e^{\lambda_1 w} + a_2C_2^2e^{\lambda_2 w} = C_3^2,$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные.

5°. «Двумерное» решение ($k_1$, $k_2$, $k_3$ — произвольные постоянные):

$$w(x,y,z,t) = u(\xi,t), \quad \xi = k_1x + k_2y + k_3z,$$

где функция $u = u(\xi,t)$ определяется дифференциальным уравнением вида 3.4.4.6:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\varphi(u)\frac{\partial u}{\partial \xi}\right], \quad \varphi(u) = a_1k_1^2e^{\lambda_1 w} + a_2k_2^2e^{\lambda_2 w} + a_3k_3^2e^{\lambda_3 w},$$

которое допускает линеаризацию.

6°. «Двумерное» решение ($b_1$, $b_2$, $b_3$ — произвольные постоянные):

$$w(x,y,z,t) = v(x,\eta), \quad \eta = b_1y + b_2z + b_3t, \tag{1}$$

где функция $v = v(x,\eta)$ определяется дифференциальным уравнением вида 5.4.4.8:

$$a_1\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda_1 v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\psi(v)\frac{\partial v}{\partial \eta}\right] = 0, \quad \psi(v) = a_2b_1^2e^{\lambda_2 v} + a_3b_2^2e^{\lambda_3 v} - b_3^2, \tag{2}$$

которое допускает линеаризацию.

Выражение (1) и уравнение (2) могут использоваться для получения двух других «двумерных» решений путем следующей циклической перестановки переменных и определяющих параметров:

$$\begin{array}{ccc} & (x,a_1,\lambda_1) & \\ \nearrow & & \searrow \\ (z,a_3,\lambda_3) & \longleftarrow & (y,a_2,\lambda_2) \end{array}$$

7°. «Двумерное» решение ($b_n$, $c_n$ — произвольные постоянные):

$$w(x,y,z,t) = U(\zeta,\rho), \quad \zeta = b_1t + b_2x, \quad \rho = c_1y + c_2z,$$

где функция $U = U(\zeta,\rho)$ определяется дифференциальным уравнением вида 5.4.4.8:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\Phi(U)\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right] + \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\Psi(U)\frac{\partial U}{\partial \rho}\right] = 0, \quad \Phi(U) = a_1b_2^2e^{\lambda_1 U} - b_1^2, \quad \Psi(U) = a_2c_1^2e^{\lambda_2 U} + a_3c_2^2e^{\lambda_3 U},$$

которое допускает линеаризацию.

**Замечание.** Решение, указанное в п. 7°, может использоваться для получения других «двумерных» решений путем циклической перестановки переменных и определяющих параметров, приведенной в п. 6°.

8°. Существуют более сложные «двумерные» решения вида

$$w(x,y,z,t) = V(z_1,z_2), \quad z_1 = b_1x + b_2y + b_3z + b_4t, \quad z_2 = c_1x + c_2y + c_3z + c_4t.$$

9°. Существует «двумерное» решение вида

$$w(x,y,z,t) = W(\rho_1,\rho_2) + \frac{2}{\lambda_1}\ln\left|\frac{x}{t}\right|, \quad \rho_1 = |t|^{\lambda_2/\lambda_1 - 1}|x|^{-\lambda_2/\lambda_1}y, \quad \rho_2 = |t|^{\lambda_3/\lambda_1 - 1}|x|^{-\lambda_3/\lambda_1}z.$$

10°. Существует «трехмерное» решение вида

$$w(x,y,z,t) = F(\xi,\eta,\zeta) - 2\beta\ln|t|, \quad \xi = x|t|^{\beta\lambda_1 - 1}, \quad \eta = y|t|^{\beta\lambda_2 - 1}, \quad \zeta = z|t|^{\beta\lambda_3 - 1},$$

где $\beta$ — произвольная постоянная.

⊙ *Литература для уравнения* 4.5.4.6: N. H. Ibragimov (1994, p. 235), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 332–333).

**7.** $$\boldsymbol{\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a_1\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda_1 w}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + a_2\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\lambda_2 w}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + a_3\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{\lambda_3 w}\frac{\partial w}{\partial z}\right) + be^{\beta w}.}$$

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1^{\beta-\lambda_1}x + C_2, \pm C_1^{\beta-\lambda_2}y + C_3, \pm C_1^{\beta-\lambda_3}z + C_4, \pm C_1^{\beta}t + C_5) + 2\ln|C_1|,$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Существуют «трехмерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,z,t) = U(\xi,\eta,\zeta) - \frac{2}{\beta}\ln|t|, \quad \xi = x|t|^{\frac{\lambda_1-\beta}{\beta}}, \quad \eta = y|t|^{\frac{\lambda_2-\beta}{\beta}}, \quad \zeta = z|t|^{\frac{\lambda_3-\beta}{\beta}},$$

$$w(x,y,z,t) = V(\eta_1,\eta_2,\eta_3), \quad \eta_n = a_nx + b_ny + c_nz + d_nt \quad (n = 1,\ 2,\ 3).$$

## 4.6. Уравнения с тремя пространственными переменными, содержащие произвольные функции

### 4.6.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[f_1(x)\frac{\partial w}{\partial x}\Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big[f_2(y)\frac{\partial w}{\partial y}\Big] + \frac{\partial}{\partial z}\Big[f_3(z)\frac{\partial w}{\partial z}\Big] + g(w)$

**1.** $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f(w).$

Уравнение инвариантно относительно сдвигов по независимым переменным $x$, $y$, $z$, $t$ и относительно поворотов в трехмерном пространстве $x$, $y$, $z$ (а также относительно линейных преобразований, сохраняющих величину $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$).

1°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\int \left[C_1 + \frac{2}{\lambda^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2}\int f(w)\,dw\right]^{-1/2} dw = k_1x + k_2y + k_3z + \lambda t + C_2,$$

где $C_1$, $C_2$, $k_1$, $k_2$, $k_3$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

2°. Точное решение:

$$w(x,y,z,t) = w(\rho), \quad \rho^2 = A\big[(x+C_1)^2 + (y+C_2)^2 + (z+C_3)^2 - (t+C_4)^2\big],$$

где знак произвольной постоянной $A$ должен совпадать со знаком выражения в квадратных скобках, а функция $w(\rho)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\rho\rho} + 3\rho^{-1}w'_\rho + A^{-1}f(w) = 0.$$

3°. Для осесимметричных решений в цилиндрической и сферической системах координат оператор Лапласа в правой части уравнения записывается так:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial w}{\partial\theta}\right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

4°. «Трехмерное» решение:

$$w = u(\xi,\eta,t), \quad \xi = y + \frac{x}{C}, \quad \eta = (C^2-1)x^2 - 2Cxy + C^2z^2,$$

где $C$ — произвольная постоянная ($C \neq 0$), а функция $u = u(\xi,\eta,t)$ определяется уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(1 + \frac{1}{C^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} - 4\xi\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + 4C^2(\xi^2+\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + 2(2C^2-1)\frac{\partial u}{\partial\eta} + f(u).$$

5°. «Трехмерное» решение:

$$w = v(z,\xi,\zeta), \quad \xi = y + \frac{x}{C}, \quad \zeta = (C^2-1)x^2 - 2Cxy - C^2t^2,$$

где $C$ — произвольная постоянная ($C \neq 0$), а функция $v = v(z,\xi,\zeta)$ определяется уравнением

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \left(1 + \frac{1}{C^2}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2} - 4\xi\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\zeta} + 4C^2(\xi^2+\zeta)\frac{\partial^2 v}{\partial\zeta^2} + 2(2C^2-1)\frac{\partial v}{\partial\zeta} + f(v) = 0.$$

**Замечание.** Решения, указанные в пп. 4° и 5°, могут использоваться для получения других «трехмерных» решений путем циклической перестановки пространственных переменных.

6°. «Трехмерное» решение:

$$w = U(\xi,\eta,t), \quad \xi = Ax + By + Cz, \quad \eta = \sqrt{(Bx-Ay)^2 + (Cy-Bz)^2 + (Az-Cx)^2},$$

где $A$, $B$, $C$ — произвольные постоянные, а функция $U = U(\xi,\eta,t)$ определяется уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = (A^2+B^2+C^2)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial U}{\partial\eta}\right) + f(U).$$

**2.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(by^m \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(cz^k \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + f(w).$

$1^\circ$. Точное решение при $n \neq 2$, $m \neq 2$, $k \neq 2$:

$$w = w(r), \qquad r^2 = \frac{4}{B}\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{z^{2-k}}{c(2-k)^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

где $B$, $C$ — произвольные постоянные (знак $B$ должен совпадать со знаком выражения в квадратных скобках), а функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{A}{r}\frac{dw}{dr} + Bf(w) = 0, \qquad A = \frac{2}{2-n} + \frac{2}{2-m} + \frac{2}{2-k}.$$

$2^\circ$. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w = U(\xi, t), \quad \xi^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{z^{2-k}}{c(2-k)^2}\right];$$

$$w = V(x, \eta), \quad \eta^2 = \pm 4\left[\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{z^{2-k}}{c(2-k)^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right];$$

$$w = W(\zeta, \rho), \quad \zeta^2 = \pm 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right], \quad \rho^2 = 4\left[\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{z^{2-k}}{c(2-k)^2}\right].$$

Второе и третье решения могут использоваться для получения других «двумерных» решений путем циклической перестановки переменных и определяющих параметров:

$$\begin{array}{ccc} & (x,a,n) & \\ \nearrow & & \searrow \\ (z,c,k) & \longleftarrow & (y,b,m) \end{array}$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. И. Журов (1998).

**3.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\lambda x} \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y} \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(ce^{\nu z} \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + f(w).$

$1^\circ$. Точное решение при $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$:

$$w = w(r), \qquad r^2 = \frac{4}{B}\left[\frac{e^{-\lambda x}}{a\lambda^2} + \frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2} - \frac{1}{4}(t+C_1)^2\right],$$

где $B$, $C_1$ — произвольные постоянные, а функция $w(r)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + Bf(w) = 0.$$

Интегрируя, получим его решение в неявной форме

$$\int \left[C_2 - 2B\int f(w)\,dw\right]^{-1/2} dw = C_3 \pm r,$$

где $C_2$, $C_3$ — произвольные постоянные.

$2^\circ$. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w = U(\xi, t), \quad \xi^2 = 4\left(\frac{e^{-\lambda x}}{a\lambda^2} + \frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right);$$

$$w = V(x, \eta), \quad \eta^2 = \pm 4\left[\frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right];$$

$$w = W(\zeta, \rho), \quad \zeta^2 = \pm 4\left[\frac{e^{-\lambda x}}{a\lambda^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right], \quad \rho^2 = 4\left(\frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right).$$

Второе и третье решения могут использоваться для получения других «двумерных» решений путем циклической перестановки переменных и определяющих параметров:

$$\begin{array}{ccc} & (x,a,\lambda) & \\ \nearrow & & \searrow \\ (z,c,\nu) & \longleftarrow & (y,b,\mu) \end{array}$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. И. Журов (1998).

**4.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(by^m \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(ce^{\nu z} \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + f(w).$

1°. Точное решение при $n \neq 2$, $m \neq 2$, $\nu \neq 0$:

$$w = w(r), \qquad r^2 = \frac{4}{B}\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2} - \frac{1}{4}(t + C_1)^2\right],$$

где $B$, $C$ — произвольные постоянные, а функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + \frac{A}{r} w'_r + Bf(w) = 0, \qquad A = \frac{2}{2-n} + \frac{2}{2-m}.$$

2°. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w = U(\xi, t), \qquad \xi^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right];$$

$$w = V_1(x, \eta_1), \quad \eta_1^2 = \pm 4\left[\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2} - \frac{1}{4}(t + C)^2\right];$$

$$w = V_2(y, \eta_2), \qquad \eta_2^2 = \pm 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2} - \frac{1}{4}(t + C)^2\right];$$

$$w = V_3(z, \eta_3), \qquad \eta_3^2 = \pm 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} - \frac{1}{4}(t + C)^2\right];$$

$$w = W_1(\zeta_1, \rho_1), \quad \zeta_1^2 = \pm 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} - \frac{1}{4}(t + C)^2\right], \quad \rho_1^2 = 4\left[\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right];$$

$$w = W_2(\zeta_2, \rho_2), \quad \zeta_2^2 = \pm 4\left[\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} - \frac{1}{4}(t + C)^2\right], \quad \rho_2^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right];$$

$$w = W_3(\zeta_3, \rho_3), \quad \zeta_3^2 = \pm 4\left[\frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2} - \frac{1}{4}(t + C)^2\right], \quad \rho_3^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2}\right].$$

**5.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y} \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(ce^{\nu z} \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + f(w).$

1°. Точное решение при $n \neq 2$, $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$:

$$w = w(r), \qquad r^2 = \frac{4}{B}\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2} - \frac{1}{4}(t + C)^2\right],$$

где $B$, $C$ — произвольные постоянные, а функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + \frac{2}{2-n}\,\frac{1}{r} w'_r + Bf(w) = 0.$$

2°. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w = U(\xi, t), \qquad \xi^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right];$$

$$w = V_1(x, \eta_1), \qquad \eta_1^2 = \pm 4\left[\frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2} - \frac{1}{4}(t + C)^2\right];$$

$$w = V_2(y, \eta_2), \qquad \eta_2^2 = \pm 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2} - \frac{1}{4}(t + C)^2\right];$$

$$w = V_3(z, \eta_3), \qquad \eta_3^2 = \pm 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} - \frac{1}{4}(t + C)^2\right];$$

$$w = W_1(\zeta_1, \rho_1), \quad \zeta_1^2 = \pm 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} - \frac{1}{4}(t + C)^2\right], \quad \rho_1^2 = 4\left[\frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right];$$

$$w = W_2(\zeta_2, \rho_2), \quad \zeta_2^2 = \pm 4\left[\frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} - \frac{1}{4}(t + C)^2\right], \quad \rho_2^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right];$$

$$w = W_3(\zeta_3, \rho_3), \quad \zeta_3^2 = \pm 4\left[\frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2} - \frac{1}{4}(t + C)^2\right], \quad \rho_3^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2}\right].$$

**6.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big[g(y)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big] + \dfrac{\partial}{\partial z}\Big[h(z)\dfrac{\partial w}{\partial z}\Big] + aw\ln w + bw.$

$1^\circ$. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,z,t) = X(x)Y(y)Z(z)\varphi(t).$$

Здесь функции $X(x)$, $Y(y)$, $Z(z)$, $\varphi(t)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned}
&[f(x)X'_x]'_x + aX\ln X + C_1X = 0,\\
&[g(y)Y'_y]'_y + aY\ln Y + C_2Y = 0,\\
&[h(z)Z'_z]'_z + aZ\ln Z + C_3Z = 0,\\
&\varphi''_{tt} - a\varphi\ln\varphi + (C_1 + C_2 + C_3 - b)\varphi = 0,
\end{aligned}$$

где $C_1$, $C_2$, $C_3$ — произвольные постоянные. Частное и общее решения последнего уравнения можно получить по формулам из п. $2^\circ$, в которых надо положить $A = b - C_1 - C_2 - C_3$.

$2^\circ$. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,z,t) = \varphi(t)\Theta(x,y,z).$$

Здесь функция $\varphi(t)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi''_{tt} - a\varphi\ln\varphi - A\varphi = 0, \qquad (1)$$

где $A$ — произвольная постоянная, а функция $\Theta(x,y,z)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(y)\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[h(z)\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right] + a\Theta\ln\Theta + (b - A)\Theta = 0.$$

Частное решение уравнения (1) дается формулой

$$\varphi(t) = \exp\left[\frac{a}{4}(t+B)^2 + \frac{a - 2A}{2a}\right],$$

а общее решение можно записать в неявном виде

$$\int\left[a\varphi^2\ln\varphi + (A - \tfrac{1}{2}a)\varphi^2 + B\right]^{-1/2} d\varphi = C \pm t,$$

где $B$, $C$ — произвольные постоянные.

### 4.6.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f_1(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big[f_2(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big] + \dfrac{\partial}{\partial z}\Big[f_3(w)\dfrac{\partial w}{\partial z}\Big] + g(w)$

**1.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a_1\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_2\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial}{\partial z}\Big[h(w)\dfrac{\partial w}{\partial z}\Big].$

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,z,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$\begin{aligned}
w_1 &= w(\pm C_1x + C_2, \pm C_1y + C_3, \pm C_1z + C_4, \pm C_1t + C_5),\\
w_2 &= w\big(x\cos\beta + y\sqrt{a_1/a_2}\,\sin\beta, -x\sqrt{a_2/a_1}\,\sin\beta + y\cos\beta, z, t\big),\\
w_3 &= w\big(x\operatorname{ch}\lambda + ta_1^{1/2}\operatorname{sh}\lambda,\ y,\ z, xa_1^{-1/2}\operatorname{sh}\lambda + t\operatorname{ch}\lambda\big),
\end{aligned}$$

где $C_1$, …, $C_5$, $\beta$, $\lambda$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки при $C_1$ выбираются произвольно).

$2^\circ$. Точные решения в неявном виде:

$$\int h(w)\,dw = z\varphi(\eta) + \psi(\eta), \qquad \eta = C_1x + C_2y \pm t\sqrt{a_1C_1^2 + a_2C_2^2},$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные; $\varphi(\eta)$, $\psi(\eta)$ — произвольные функции.

$3^\circ$. «Двумерное» решение (обобщает решения из п. $2^\circ$):

$$w(x,y,z,t) = U(\xi,\eta), \quad \xi = z + \lambda t, \quad \eta = C_1x + C_2y \pm t\sqrt{a_1C_1^2 + a_2C_2^2}.$$

Здесь $C_1$, $C_2$, $\lambda$ — произвольные постоянные, а функция $U = U(\xi,\eta)$ определяется уравнением с частными производными первого порядка

$$\big[h(U) - \lambda^2\big]\frac{\partial U}{\partial\xi} \mp 2\lambda\sqrt{a_1C_1^2 + a_2C_2^2}\,\frac{\partial U}{\partial\eta} = \varphi(\eta), \qquad (1)$$

где $\varphi(\eta)$ — произвольная функция.

В частном случае $\lambda = 0$ уравнение (1) является обыкновенным дифференциальным уравнением по переменной $\xi$ и легко интегрируется. В результате получаем решения из п. $2^\circ$.

В общем случае уравнение (1) может быть решено с помощью характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений [см. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2003)]. В частном случае $\varphi(\eta) = 0$ решение уравнения (1) можно записать в неявной форме

$$2\lambda\sqrt{a_1 C_1^2 + a_2 C_2^2}\,\xi \pm \eta[h(U) - \lambda^2] = \Phi(U),$$

где $\Phi(U)$ — произвольная функция.

$4^\circ$. «Трехмерные» решения:

$$w = u(y, z, \zeta), \qquad \zeta = x \pm t\sqrt{a_1}, \tag{2}$$

где функция $u(y, z, \zeta)$ определяется дифференциальным уравнением вида 5.4.4.8:

$$a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z}\left[h(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right] = 0, \tag{3}$$

которое может быть линеаризовано. Уравнение (3) не зависит явно от циклической переменной $\zeta$ (входящие в решения постоянные интегрирования будут произвольным образом зависеть от $\zeta$).

**Замечание 1.** Выражение (2) и уравнение (3) могут использоваться для получения других «трехмерных» решений путем следующей циклической перестановки переменных и определяющих параметров: $(x, a_1) \rightleftarrows (y, a_2)$.

$5^\circ$. «Трехмерное» решение:

$$w = v(z, \xi, \eta), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{a_1}C} + \frac{y}{\sqrt{a_2}}, \quad \eta = (C^2 - 1)\frac{x^2}{a_1} - 2C\frac{xy}{\sqrt{a_1 a_2}} - C^2 t^2, \tag{4}$$

где $C$ — произвольная постоянная ($C \neq 0$), а функция $v = v(\xi, \eta)$ определяется уравнением

$$\left(1 + \frac{1}{C^2}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 4\xi\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + 4C^2(\xi^2 + \eta)\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + 2(2C^2 - 1)\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z}\left[h(v)\frac{\partial v}{\partial z}\right] = 0. \tag{5}$$

**Замечание 2.** Выражение (4) и уравнение (5) могут использоваться для получения других «трехмерных» решений путем следующей циклической перестановки переменных и определяющих параметров: $(x, a_1) \rightleftarrows (y, a_2)$.

$6^\circ$. Существуют точные решения следующих видов:

| | | |
|---|---|---|
| $w(x, y, z, t) = F(r, z, t)$, | $r = a_2 x^2 + a_1 y^2$ | «трехмерное» решение; |
| $w(x, y, z, t) = G(\xi, y, z)$, | $\xi = x^2 - a_1 t^2$ | «трехмерное» решение; |
| $w(x, y, z, t) = H(\zeta, z)$, | $\zeta = a_2 x^2 + a_1 y^2 - a_1 a_2 t^2$ | «двумерное» решение; |
| $w(x, y, z, t) = U(\eta)$, | $\eta = (a_2 x^2 + a_1 y^2 - a_1 a_2 t^2) z^{-2}$ | «одномерное» решение. |

$7^\circ$. О других точных решениях см. уравнение 4.6.2.6 при $f(w) = a_1,\ g(w) = a_2$.

⦿ *Литература для уравнения* 4.6.2.1: N. H. Ibragimov (1994, p. 234), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 338–339).

**2.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial}{\partial y}\left[g(w)\frac{\partial w}{\partial y}\right] + a_3 \frac{\partial}{\partial z}\left[g(w)\frac{\partial w}{\partial z}\right].$

$1^\circ$. Пусть $w(x, y, z, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1 x + C_2, \pm C_1 y + C_3, \pm C_1 z + C_4, \pm C_1 t + C_5),$$
$$w_2 = w\big(x, y\cos\beta + z\sqrt{a_2/a_3}\,\sin\beta, -y\sqrt{a_3/a_2}\,\sin\beta + z\cos\beta, t\big),$$
$$w_3 = w\big(x\operatorname{ch}\lambda + t a_1^{1/2}\operatorname{sh}\lambda,\ y,\ z, x a_1^{-1/2}\operatorname{sh}\lambda + t\operatorname{ch}\lambda\big),$$

где $C_1, \ldots, C_5, \beta, \lambda$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки при $C_1$ выбираются произвольно).

$2^\circ$. «Трехмерные» решения:

$$w = u(y, z, \zeta), \qquad \zeta = x \pm t\sqrt{a_1},$$

где функция $u(y, z, \zeta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$a_2 \frac{\partial}{\partial y}\left[g(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right] + a_3 \frac{\partial}{\partial z}\left[g(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right] = 0, \tag{1}$$

которое не зависит явно от циклической переменной $\zeta$ (входящие в решения постоянные интегрирования произвольным образом зависят от $\zeta$). Преобразование

$$v=\int g(u)\,du,\qquad \overline{y}=\frac{y}{\sqrt{a_2}},\qquad \overline{z}=\frac{z}{\sqrt{a_3}}$$

приводит (1) к уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\overline{y}^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial\overline{z}^2}=0.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

3°. Существуют точные решения следующих видов:

$$
\begin{array}{lll}
w(x,y,z,t)=F(x,r,t), & r=a_3y^2+a_2z^2 & \text{«трехмерное» решение;}\\
w(x,y,z,t)=G(\xi,y,z), & \xi=x^2-a_1t^2 & \text{«трехмерное» решение;}\\
w(x,y,z,t)=H(r,\xi), & r=a_3y^2+a_2z^2,\quad \xi=x^2-a_1t^2 & \text{«двумерное» решение;}\\
w(x,y,z,t)=U(p,q), & p=(a_3y^2+a_2z^2)t^{-2},\quad q=xt^{-1} & \text{«двумерное» решение;}\\
w(x,y,z,t)=V(\eta), & \eta=(a_3y^2+a_2z^2)(x^2-a_1t^2)^{-1} & \text{«одномерное» решение.}
\end{array}
$$

4°. О других точных решениях см. уравнение 4.6.2.6 при $f(w)=a_1$, в котором надо переобозначить $g(w)\to a_2g(w)$, $h(w)\to a_3g(w)$.

⊙ *Литература для уравнения* 4.6.2.2: N. H. Ibragimov (1994, p. 235), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 339–340).

**3.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left[g(w)\frac{\partial w}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[h(w)\frac{\partial w}{\partial z}\right].$

1°. Пусть $w(x,y,z,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=w(\pm C_1x+C_2,\pm C_1y+C_3,\pm C_1z+C_4,\pm C_1t+C_5),$$
$$w_2=w(x\operatorname{ch}\lambda+ta_1^{1/2}\operatorname{sh}\lambda,\ y,\ z,xa_1^{-1/2}\operatorname{sh}\lambda+t\operatorname{ch}\lambda),$$

где $C_1,\ldots,C_5,\lambda$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки при $C_1$ выбираются произвольно).

2°. «Трехмерные» решения:

$$w=u(y,z,\zeta),\qquad \zeta=x\pm t\sqrt{a_1},$$

где функция $u(y,z,\zeta)$ определяется дифференциальным уравнением вида 5.4.4.8:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[g(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[h(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right]=0,$$

которое может быть линеаризовано. Полученное уравнение не зависит явно от циклической переменной $\zeta$ (входящие в решения постоянные интегрирования будут произвольным образом зависеть от $\zeta$).

3°. Существуют точные решения следующих видов:

$$
\begin{array}{lll}
w(x,y,z,t)=W(\xi,y,z), & \xi=x^2-a_1t^2 & \text{«трехмерное» решение;}\\
w(x,y,z,t)=U(p,q), & p=(x^2-a_1t^2)y^{-2},\quad q=zy^{-1} & \text{«двумерное» решение.}
\end{array}
$$

4°. О других точных решениях см. уравнение 4.6.2.6 при $f(w)=a_1$.

⊙ *Литература для уравнения* 4.6.2.3: N. H. Ibragimov (1994, p. 235), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 340).

**4.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a_1\frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right]+a_2\frac{\partial}{\partial y}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial y}\right]+a_3\frac{\partial}{\partial z}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial z}\right].$

1°. Пусть $w(x,y,z,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=w(\pm C_1x+C_2,\pm C_1y+C_3,\pm C_1z+C_4,\pm C_1t+C_5),$$
$$w_2=w\bigl(x\cos\beta+y\sqrt{a_1/a_2}\,\sin\beta,-x\sqrt{a_2/a_1}\,\sin\beta+y\cos\beta,z,t\bigr),$$

где $C_1,\ldots,C_5,\beta$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки при $C_1$ выбираются произвольно).

2°. Существуют «трехмерные» решения следующих видов ($C$ — произвольная постоянная):

$$w = W(\rho, z, t), \quad \rho = a_2 x^2 + a_1 y^2;$$

$$w = U(\xi, \eta, t), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{a_1} C} + \frac{y}{\sqrt{a_2}}, \quad \eta = (C^2 - 1)\frac{x^2}{a_1} - 2C\frac{xy}{\sqrt{a_1 a_2}} + C^2 \frac{z^2}{a_3}.$$

**Замечание.** Решения, указанные в п. 2°, могут быть использованы для получения других «трехмерных» решений путем следующей циклической перестановки переменных и определяющих параметров:

$$\begin{array}{ccc} & (x, a_1) & \\ \nearrow & & \searrow \\ (z, a_3) & \longleftarrow & (y, a_2) \end{array}$$

3°. Существуют «трехмерное» решение следующего вида:

$$w = V(\zeta, \theta, t), \quad \zeta = \frac{Ax}{\sqrt{a_1}} + \frac{By}{\sqrt{a_2}} + \frac{Cz}{\sqrt{a_3}},$$

$$\theta = \left(\frac{Bx}{\sqrt{a_1}} - \frac{Ay}{\sqrt{a_2}}\right)^2 + \left(\frac{Cy}{\sqrt{a_2}} - \frac{Bz}{\sqrt{a_3}}\right)^2 + \left(\frac{Az}{\sqrt{a_3}} - \frac{Cx}{\sqrt{a_1}}\right)^2,$$

где $A$, $B$, $C$ — произвольные постоянные.

4°. Существуют точные решения следующих видов:

$$w(x, y, z, t) = \Phi(r, t), \quad r = a_2 a_3 x^2 + a_1 a_3 y^2 + a_1 a_2 z^2 \qquad \text{«двумерное» решение;}$$

$$w(x, y, z, t) = \Psi(\chi), \quad \chi = (a_2 a_3 x^2 + a_1 a_3 y^2 + a_1 a_2 z^2)t^{-2} \qquad \text{«одномерное» решение.}$$

5°. О других точных решениях см. уравнение 4.6.2.6, в котором надо переобозначить $f(w) \to a_1 f(w)$, $g(w) \to a_2 f(w)$, $h(w) \to a_3 f(w)$.

⊙ *Литература*: N. H. Ibragimov (1994, p. 232).

**5.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a_1 \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + a_2 \frac{\partial}{\partial y}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[h(w)\frac{\partial w}{\partial z}\right].$

1°. Пусть $w(x, y, z, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1 x + C_2, \pm C_1 y + C_3, \pm C_1 z + C_4, \pm C_1 t + C_5),$$

$$w_2 = w\bigl(x\cos\beta + y\sqrt{a_1/a_2}\,\sin\beta, -x\sqrt{a_2/a_1}\,\sin\beta + y\cos\beta, z, t\bigr),$$

где $C_1, \ldots, C_5, \beta$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки при $C_1$ выбираются произвольно).

2°. Существуют точные решения следующих видов:

$$w(x, y, z, t) = W(\xi, z, t), \quad \xi = a_2 x^2 + a_1 y^2 \qquad \text{«трехмерное» решение;}$$

$$w(x, y, z, t) = U(p, q), \quad p = (a_2 x^2 + a_1 y^2)t^{-2}, \quad q = zt^{-1} \qquad \text{«двумерное» решение.}$$

3°. О других точных решениях см. уравнение 4.6.2.6, в котором надо переобозначить $f(w) \to a_1 f(w)$, $g(w) \to a_2 f(w)$.

⊙ *Литература*: N. H. Ibragimov (1994, p. 233).

**6.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(w)\frac{\partial w}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[h(w)\frac{\partial w}{\partial z}\right].$

1°. Пусть $w(x, y, z, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1 x + C_2, \pm C_1 y + C_3, \pm C_1 z + C_4, \pm C_1 t + C_5),$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки при $C_1$ выбираются произвольно).

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\int \bigl[k_1^2 f(w) + k_2^2 g(w) + k_3^2 h(w)\bigr]\,dw - \lambda^2 w = C_1(k_1 x + k_2 y + k_3 z + \lambda t) + C_2,$$

где $C_1$, $C_2$, $k_1$, $k_2$, $k_3$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

$3^\circ$. Точные решения в неявном виде:

$$\left(\frac{C_1x+C_2y+C_3z+C_4}{t+C_5}\right)^2 = C_1^2f(w)+C_2^2g(w)+C_3^2h(w),$$
$$\left(\frac{C_1y+C_2z+C_3t+C_4}{x+C_5}\right)^2 f(w)+C_1^2g(w)+C_2^2h(w)=C_3^2,$$
$$\left(\frac{C_1x+C_2z+C_3t+C_4}{y+C_5}\right)^2 g(w)+C_1^2f(w)+C_2^2h(w)=C_3^2,$$
$$\left(\frac{C_1x+C_2y+C_3t+C_4}{z+C_5}\right)^2 h(w)+C_1^2f(w)+C_2^2g(w)=C_3^2,$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные.

$4^\circ$. Точные решения в неявном виде:

$$x\varphi_1(w)+y\varphi_2(w)+z\varphi_3(w)=\psi(w)+t,$$
$$x\varphi_1(w)+y\varphi_2(w)+z\varphi_3(w)=\psi(w)-t,$$

где $\varphi_1(w)$, $\varphi_2(w)$, $\psi(w)$ — произвольные функции, а функция $\varphi_3(w)$ определяется из условия нормировки

$$f(w)\varphi_1^2(w)+g(w)\varphi_2^2(w)+h(w)\varphi_3^2(w)=1.$$

$5^\circ$. Точное решение:

$$w=w(\xi), \quad \xi=\frac{C_1x+C_2y+C_3z+C_4}{t+C_5},$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные, а функция $u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\xi^2w'_\xi)'_\xi=[\varphi(w)w'_\xi]'_\xi, \qquad \varphi(w)=C_1^2f(w)+C_2^2g(w)+C_3h(w),$$

которое допускает первый интеграл

$$\left[\xi^2-C_1^2f(w)-C_2^2g(w)-C_3^2h(w)\right]w'_\xi=C_6. \tag{1}$$

Частному случаю $C_6=0$ отвечает первое решение, указанное в п. $3^\circ$.

При $C_6\neq 0$, принимая $w$ в (1) за независимую переменную, для функции $\xi=\xi(w)$ получим уравнение Риккати

$$C_6\xi'_w=\xi^2-C_1^2f(w)-C_2^2g(w)-C_3^2h(w). \tag{2}$$

О точных решениях уравнения (2), которое сводится к линейному уравнению второго порядка, см. книгу В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

$6^\circ$. Точное решение:

$$w=u(\eta), \quad \eta=\frac{C_1y+C_2z+C_3t+C_4}{x+C_5}, \tag{3}$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные, а функция $u(\eta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$C_3^2u''_{\eta\eta}=[\eta^2f(u)u'_\eta]'_\eta+C_1^2[g(u)u'_\eta]'_\eta+C_2^2[h(u)u'_\eta]'_\eta,$$

которое допускает первый интеграл

$$[\eta^2f(u)+C_1^2g(u)+C_2^2h(u)-C_3^2]u'_\eta=C_6. \tag{4}$$

Частному случаю $C_6=0$ отвечает второе решение, указанное в п. $3^\circ$.

При $C_6\neq 0$, принимая $u$ в (4) за независимую переменную, для функции $\eta=\eta(u)$ получим уравнение Риккати

$$C_6\eta'_u=\eta^2f(u)+C_1^2g(u)+C_2^2h(u)-C_3^2. \tag{5}$$

О точных решениях уравнения (2), которое сводится к линейному уравнению второго порядка, см. книгу В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

Формула (3) и уравнение (5) могут использоваться для получения двух других «одномерных» решений путем следующей циклической перестановки переменных и определяющих функций:

$$\begin{tikzcd} & (x,f) \arrow[dr] & \\ (z,h) \arrow[ur] & & (y,g) \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

7°. «Двумерное» решение ($k_1$, $k_2$, $k_3$ — произвольные постоянные):

$$w(x,y,z,t) = u(\xi,t), \quad \xi = k_1x + k_2y + k_3z,$$

где функция $u = u(\xi,t)$ определяется дифференциальным уравнением вида 3.4.4.6:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\varphi(u)\frac{\partial u}{\partial \xi}\right], \quad \varphi(u) = k_1^2 f(u) + k_2^2 g(u) + k_3^2 h(u),$$

которое допускает линеаризацию.

8°. «Двумерное» решение ($a$, $b$, $c$ — произвольные постоянные):

$$w(x,y,z,t) = v(x,\eta), \quad \eta = ay + bz + ct,$$

где функция $v = v(x,\eta)$ определяется дифференциальным уравнением вида 5.4.4.8:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(v)\frac{\partial v}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\psi(v)\frac{\partial v}{\partial \eta}\right] = 0, \quad \psi(v) = a^2 g(v) + b^2 h(v) - c^2,$$

которое допускает линеаризацию.

9°. «Двумерное» решение ($a_n$, $b_n$ — произвольные постоянные):

$$w(x,y,z,t) = U(\zeta,\rho), \quad \zeta = a_1t + a_2x, \quad \rho = b_1y + b_2z,$$

где функция $U = U(\zeta,\rho)$ определяется дифференциальным уравнением вида 5.4.4.8:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\Phi(U)\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right] + \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\Psi(U)\frac{\partial U}{\partial \rho}\right] = 0, \quad \Phi(U) = a_2^2 f(U) - a_1^2, \quad \Psi(U) = b_1^2 g(U) + b_2^2 h(U),$$

которое допускает линеаризацию.

**Замечание.** Решения, приведенные в пп. 7° и 8°, могут использоваться для получения других «двумерных» решений путем циклической перестановки переменных и определеняющих функций, указанной в п. 5°.

10°. Существуют более сложные «двумерные» решения вида

$$w(x,y,z,t) = V(z_1,z_2), \quad z_1 = a_1x + a_2y + a_3z + a_4t, \quad z_2 = b_1x + b_2y + b_3z + b_4t.$$

11°. «Трехмерное» решение:

$$w(x,y,z,t) = \Theta(p,q,s), \quad p = x/t, \quad q = y/t, \quad s = z/t,$$

где функция $\Theta = \Theta(p,q,s)$ описывается уравнением

$$p^2\frac{\partial^2\Theta}{\partial p^2} + q^2\frac{\partial^2\Theta}{\partial q^2} + r^2\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2} + 2pq\frac{\partial^2\Theta}{\partial p\partial q} + 2pr\frac{\partial^2\Theta}{\partial p\partial r} + 2rq\frac{\partial^2\Theta}{\partial r\partial q} +$$
$$+ 2p\frac{\partial\Theta}{\partial p} + 2q\frac{\partial\Theta}{\partial q} + 2r\frac{\partial\Theta}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial p}\left[f(\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial p}\right] + \frac{\partial}{\partial q}\left[g(\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial q}\right] + \frac{\partial}{\partial r}\left[h(\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right].$$

12°. О результатах группового анализа исходного уравнения см. N. H. Ibragimov (1994).

⊙ *Литература для уравнения* 4.6.2.6: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 342–343).

### 7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right] + \dfrac{\partial}{\partial z}\left[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial z}\right] + g(w).$

1°. Пусть функция $f = f(w)$ задается произвольно, а функция $g = g(w)$ определяется по формуле

$$g(w) = -a^2\frac{f'(w)}{f^3(w)} + b,$$

где $a$, $b$ — некоторые числа. В этом случае существует решение с функциональным разделением переменных, которое задается неявно

$$\int f(w)\,dw = at + U(x,y,z),$$

где функция $U = U(x,y,z)$ описывается уравнением Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + b = 0.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

**Замечание.** В выражении для функции $g$ вместо постоянной $b$ может стоять произвольная функция $b = b(x,y,z)$.

$2^\circ$. Пусть определяющие функции задаются параметрически

$$f = \frac{Ae^{-b\zeta}}{\varphi'_\zeta(\zeta)},$$
$$g = a^2\varphi''_{\zeta\zeta}(\zeta) - Ace^{-b\zeta},$$
$$w = \varphi(\zeta),$$

где $\varphi(\zeta)$ — произвольная функция, $\zeta$ — параметр, $A$, $a$, $b$, $c$ — некоторые числа. Тогда рассматриваемое уравнение имеет точное решение с функциональным разделением переменных вида

$$w = \varphi(\zeta), \quad \zeta = at + \theta(x, y, z),$$

где функция $\theta$ описывается уравнением

$$\Delta\theta = b|\nabla\theta|^2 + c.$$

Подстановка

$$\theta = -\frac{1}{b}\ln|u|$$

приводит его к уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + bcu = 0.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

### 4.6.3. Другие уравнения

**1.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + by^m\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + cz^k\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f(w).$

$1^\circ$. Точное решение при $n \neq 2$, $m \neq 2$, $k \neq 2$:

$$w = w(r), \qquad r^2 = \frac{4}{B}\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{z^{2-k}}{c(2-k)^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

где $C$, $B$ — произвольные постоянные ($B \neq 0$), а функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + \frac{A}{r}w'_r + Bf(w) = 0, \qquad A = 2\left(\frac{1-n}{2-n} + \frac{1-m}{2-m} + \frac{1-k}{2-k}\right).$$

$2^\circ$. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w = U(\xi, t), \quad \xi^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{z^{2-k}}{c(2-k)^2}\right];$$
$$w = V(x, \eta), \quad \eta^2 = \pm 4\left[\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{z^{2-k}}{c(2-k)^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right];$$
$$w = W(\zeta, \rho), \quad \zeta^2 = \pm 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right], \quad \rho^2 = 4\left[\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{z^{2-k}}{c(2-k)^2}\right].$$

Второе и третье решения могут использоваться для получения других «двумерных» решений путем следующей циклической перестановки переменных и определяющих параметров:

$$\begin{array}{ccc} & (x,a,n) & \\ \nearrow & & \searrow \\ (z,c,k) & \longleftarrow & (y,b,m) \end{array}$$

**2.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\mu y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + ce^{\nu z}\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f(w).$

$1^\circ$. Точное решение при $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$:

$$w = w(r), \qquad r^2 = \frac{4}{B}\left[\frac{e^{-\lambda x}}{a\lambda^2} + \frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

где $B$, $C$ — произвольные постоянные, а функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + 6r^{-1}w'_r + Bf(w) = 0.$$

$2^\circ$. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w = U(\xi, t), \quad \xi^2 = 4\left(\frac{e^{-\lambda x}}{a\lambda^2} + \frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right);$$

$$w = V(x, \eta), \quad \eta^2 = \pm 4\left[\frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right];$$

$$w = W(\zeta, \rho), \quad \zeta^2 = \pm 4\left[\frac{e^{-\lambda x}}{a\lambda^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right], \quad \rho^2 = 4\left(\frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right).$$

Второе и третье решения могут использоваться для получения других «двумерных» решений путем следующей циклической перестановки переменных и определяющих параметров:

$$\begin{array}{ccc} & (x, a, \lambda) & \\ \nearrow & & \searrow \\ (z, c, \nu) & \longleftarrow & (y, b, \mu) \end{array}$$

**3.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + by^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + ce^{\nu z}\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f(w).$

$1^\circ$. Точное решение при $n \neq 2$, $m \neq 2$, $\nu \neq 0$:

$$w = w(r), \qquad r^2 = \frac{4}{B}\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2} - \frac{1}{4}(t+C_1)^2\right],$$

где $B$, $C$ — произвольные постоянные, а функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + \frac{A}{r}w'_r + Bf(w) = 0, \qquad A = 2\left(\frac{1-n}{2-n} + \frac{1-m}{2-m} + 1\right).$$

$2^\circ$. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w = U(\xi, t), \qquad \xi^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right];$$

$$w = V_1(x, \eta_1), \qquad \eta_1^2 = \pm 4\left[\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right];$$

$$w = V_2(y, \eta_2), \qquad \eta_2^2 = \pm 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right];$$

$$w = V_3(z, \eta_3), \qquad \eta_3^2 = \pm 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right];$$

$$w = W_1(\zeta_1, \rho_1), \quad \zeta_1^2 = \pm 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right], \quad \rho_1^2 = 4\left[\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right];$$

$$w = W_2(\zeta_2, \rho_2), \quad \zeta_2^2 = \pm 4\left[\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right], \quad \rho_2^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right];$$

$$w = W_3(\zeta_3, \rho_3), \quad \zeta_3^2 = \pm 4\left[\frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right], \quad \rho_3^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2}\right].$$

**4.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\mu y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + ce^{\nu z}\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f(w).$

$1^\circ$. Точное решение при $n \neq 2$, $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$:

$$w = w(r), \qquad r^2 = \frac{4}{B}\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right],$$

где $B$, $C$ — произвольные постоянные, а функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + \frac{2(5-3n)}{2-n}\,\frac{1}{r}w'_r + Bf(w) = 0.$$

$2^\circ$. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w = U(\xi, t), \qquad \xi^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right];$$

$$w = V_1(x, \eta_1), \qquad \eta_1^2 = \pm 4\left[\frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right];$$

$$w = V_2(y, \eta_2), \qquad \eta_2^2 = \pm 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right];$$

$$w = V_3(z, \eta_3), \qquad \eta_3^2 = \pm 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right];$$

$$w = W_1(\zeta_1, \rho_1), \quad \zeta_1^2 = \pm 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right], \quad \rho_1^2 = 4\left[\frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right];$$

$$w = W_2(\zeta_2, \rho_2), \quad \zeta_2^2 = \pm 4\left[\frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right], \quad \rho_2^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right];$$

$$w = W_3(\zeta_3, \rho_3), \quad \zeta_3^2 = \pm 4\left[\frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2} - \frac{1}{4}(t+C)^2\right], \quad \rho_3^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2}\right].$$