Из книги A. D. Polyanin and V. F. Zaitsev, «Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition», Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2011 [русский перевод].

6. Уравнения эллиптического типа с тремя и более пространственными переменными

6.1. Уравнения с тремя пространственными переменными, содержащие степенные нелинейности

6.1.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big[g(y)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big]+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big[h(z)\dfrac{\partial w}{\partial z}\Big]=aw^p$

1. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(cz^k\dfrac{\partial w}{\partial z}\Big)=sw^p.$

Частный случай уравнения 6.3.1.3 при $f(w)=sw^p$.

1°. Пусть $w(x,y,z)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=C_1w\Big(C_1^{\frac{p-1}{2-n}}x,\,C_1^{\frac{p-1}{2-m}}y,\,C_1^{\frac{p-1}{2-k}}z\Big),$$

где C_1 — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение при $n\neq 2$, $m\neq 2$, $k\neq 2$, $p\neq 1$:

$$w=\left[\frac{1}{s(1-p)}\left(\frac{p}{1-p}+\frac{1}{2-n}+\frac{1}{2-m}+\frac{1}{2-k}\right)\right]^{\frac{1}{p-1}}\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}+\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2}+\frac{z^{2-k}}{c(2-k)^2}\right]^{\frac{1}{1-p}}.$$

3°. Решение с функциональным разделением переменных при $n\neq 2$, $m\neq 2$, $k\neq 2$ (обобщает решение из п. 2°):

$$w=w(r),\qquad r^2=4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}+\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2}+\frac{z^{2-k}}{c(2-k)^2}\right],$$

где функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr}+\frac{A}{r}w'_r=sw^p,\qquad A=\frac{2}{2-n}+\frac{2}{2-m}+\frac{2}{2-k}-1.$$

4°. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,z)=U(\xi,z),\quad \xi^2=\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}+\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2},$$
$$w(x,y,z)=V(x,\eta),\quad \eta^2=\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2}+\frac{z^{2-k}}{c(2-k)^2},$$
$$w(x,y,z)=W(y,\zeta),\quad \zeta^2=\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}+\frac{z^{2-k}}{c(2-k)^2},$$
$$w(x,y,z)=x^{\frac{n-2}{p-1}}F(\rho_1,\rho_2),\quad \rho_1=yx^{\frac{n-2}{2-m}},\quad \rho_2=zx^{\frac{n-2}{2-k}}.$$

2. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(ce^{\lambda z}\dfrac{\partial w}{\partial z}\Big)=sw^p.$

Частный случай уравнения 6.3.1.5 при $f(w)=sw^p$.

1°. Пусть $w(x,y,z)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w\Bigl(C_1^{\frac{p-1}{2-n}}\,x,\; C_1^{\frac{p-1}{2-m}}\,y,\; z + \frac{1-p}{\lambda}\ln C_1\Bigr),$$

где C_1 — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение при $n \neq 2$, $m \neq 2$, $\lambda \neq 0$, $p \neq 1$:

$$w = \left[\frac{1}{s(p-1)}\left(\frac{p}{1-p} + \frac{1}{2-n} + \frac{1}{2-m}\right)\right]^{\frac{1}{p-1}} \left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2}\right]^{\frac{1}{1-p}}.$$

3°. Решение с функциональным разделением переменных при $n \neq 2$, $m \neq 2$, $\lambda \neq 0$ (обобщает решение из п. 2°):

$$w = w(r), \qquad r^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2}\right],$$

где функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + \frac{A}{r}w'_r = sw^p, \qquad A = \frac{2}{2-n} + \frac{2}{2-m} - 1.$$

4°. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,z) = U(\xi,z), \quad \xi^2 = \frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2},$$

$$w(x,y,z) = V(x,\eta), \quad \eta^2 = \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2},$$

$$w(x,y,z) = W(y,\zeta), \quad \zeta^2 = \frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2},$$

$$w(x,y,z) = x^{\frac{n-2}{p-1}} F(\rho_1,\rho_2), \quad \rho_1 = yx^{\frac{n-2}{2-m}}, \quad \rho_2 = z + \frac{2-n}{\lambda}\ln x.$$

3. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(be^{\beta y}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(ce^{\lambda z}\frac{\partial w}{\partial z}\right) = sw^p.$

Частный случай уравнения 6.3.1.6 при $f(w) = sw^p$.

1°. Пусть $w(x,y,z)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w\Bigl(C_1^{\frac{p-1}{2-n}}\,x,\; y + \frac{1-p}{\beta}\ln C_1,\; z + \frac{1-p}{\lambda}\ln C_1\Bigr),$$

где C_1 — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение при $n \neq 2$, $\beta \neq 0$, $\lambda \neq 0$, $p \neq 1$:

$$w = \left[\frac{1}{s(p-1)}\left(\frac{p}{1-p} + \frac{1}{2-n}\right)\right]^{\frac{1}{p-1}} \left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\beta y}}{b\beta^2} + \frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2}\right]^{\frac{1}{1-p}}.$$

3°. Решение с функциональным разделением переменных при $n \neq 2$, $\beta \neq 0$, $\lambda \neq 0$ (обобщает решение из п. 2°):

$$w = w(r), \qquad r^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\beta y}}{b\beta^2} + \frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2}\right],$$

где функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + \frac{A}{r}w'_r = sw^p, \qquad A = \frac{n}{2-n}.$$

4°. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,z) = U(\xi,z), \quad \xi^2 = \frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\beta y}}{b\beta^2},$$

$$w(x,y,z) = V(x,\eta), \quad \eta^2 = \frac{e^{-\beta y}}{b\beta^2} + \frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2},$$

$$w(x,y,z) = W(y,\zeta), \quad \zeta^2 = \frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2},$$

$$w(x,y,z) = x^{\frac{n-2}{p-1}} F(\rho_1,\rho_2), \quad \rho_1 = y + \frac{2-n}{\beta}\ln x, \quad \rho_2 = z + \frac{2-n}{\lambda}\ln x.$$

4. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\gamma y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(ce^{\lambda z}\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)=sw^p.$

Частный случай уравнения 6.3.1.4 при $f(w)=sw^p$.

1°. Пусть $w(x,y,z)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=C_1w\Big(x+\frac{1-p}{\beta}\ln C_1,\ y+\frac{1-p}{\gamma}\ln C_1,\ z+\frac{1-p}{\lambda}\ln C_1\Big),$$

где C_1 — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение при $p\neq 1$, $\beta\neq 0$, $\gamma\neq 0$, $\lambda\neq 0$:

$$w=\left[\frac{p}{b(1-p)^2}\right]^{\frac{1}{p-1}}\left(\frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2}+\frac{e^{-\gamma y}}{b\gamma^2}+\frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2}\right)^{\frac{1}{1-p}}.$$

3°. Решение с функциональным разделением переменных при $\beta\neq 0$, $\gamma\neq 0$, $\lambda\neq 0$ (обобщает решение из п. 2°):

$$w=w(r),\qquad r^2=4\left(\frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2}+\frac{e^{-\gamma y}}{b\gamma^2}+\frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2}\right),$$

где функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr}-\frac{1}{r}w'_r=sw^p.$$

4°. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,z)=U(\xi,z),\quad \xi^2=\frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2}+\frac{e^{-\gamma y}}{b\gamma^2},$$
$$w(x,y,z)=V(x,\eta),\quad \eta^2=\frac{e^{-\gamma y}}{b\gamma^2}+\frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2},$$
$$w(x,y,z)=W(y,\zeta),\quad \zeta^2=\frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2}+\frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2},$$
$$w(x,y,z)=\exp\Big(\frac{\beta x}{p-1}\Big)F(\rho_1,\rho_2),\quad \rho_1=y-\frac{\beta}{\gamma}x,\quad \rho_2=z-\frac{\beta}{\lambda}x.$$

6.1.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big[g(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big]+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big[g(w)\dfrac{\partial w}{\partial z}\Big]=0$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+a\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial}{\partial z}\left[(bw+c)\dfrac{\partial w}{\partial z}\right]=0.$

1°. Пусть $w(x,y,z)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=C_1^{-2}w(\pm C_2x+C_3,\pm C_2y+C_4,\pm C_1C_2z+C_5)+\frac{c(1-C_1^2)}{bC_1^2},$$
$$w_2=w(x\cos\beta+ya^{-1/2}\sin\beta,-xa^{1/2}\sin\beta+y\cos\beta,\ z),$$

где $C_1,\dots,C_5$, β — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки в выражении для w_1 выбираются произвольно).

2°. Точные решения:

$$w(x,y,z)=A\sqrt{C_1x+C_2y+C_3z+C_4}-\frac{C_1^2+aC_2^2}{bC_3^2}-\frac{c}{b},$$
$$w(x,y,z)=(C_1x+C_2)z+C_3x+C_4y+C_5-\tfrac{1}{12}bC_1^{-2}(C_1x+C_2)^4,$$
$$w(x,y,z)=(C_1x+C_2)z+C_3(ax^2-y^2)-\tfrac{1}{12}bC_1^{-2}(C_1x+C_2)^4,$$
$$w(x,y,z)=|z|^{1/2}\big[C_1(ax^2-y^2)+C_2x+C_3+C_4)\big]-\frac{c}{b},$$
$$w(x,y,z)=C_1|z|^{1/2}\exp\big(\sqrt{a}C_2x\big)\sin(C_2y+C_3)-\frac{c}{b},$$
$$w(x,y,z)=C_1|z|^{1/2}\sin(\sqrt{a}C_2x+C_3)\exp(C_2y)-\frac{c}{b},$$

где A, C_1, …, C_5 — произвольные постоянные (первое решение является решением типа бегущей волны).

3°. Точное решение:

$$w = u(\xi) - 4bC_1^2x^2, \quad \xi = z + bC_1x^2 + C_2y,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$(bu + c + aC_2^2)u'_\xi + 2bC_1u = 8bC_1^2\xi + C_3.$$

За счет подходящих сдвигов по обеим переменным можно добиться, чтобы уравнение стало однородным (т. е. уравнение интегрируется в квадратурах).

4°. Точное решение:

$$w = v(r) - 4bC_2^2x^2 - 4abC_1^2y^2, \quad r = z + bC_1x^2 + bC_2y^2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $v(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$(bv + c)v'_r + 2b(aC_2 + C_1)v = 8b(a^2C_1^2 + C_2^2)r + C_3.$$

За счет подходящих сдвигов по обеим переменным можно добиться, чтобы уравнение стало однородным.

5°. Точное решение (обобщает решения из пп. 3° и 4°):

$$w = U(\zeta) + A_1x^2 + A_2y^2 + A_3xy + A_4x + A_5y, \quad \zeta = z + b(B_1x^2 + B_2y^2 + B_3xy + B_4x + B_5y),$$

где B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 — произвольные постоянные, коэффициенты A_n выражаются через B_n по формулам

$$\begin{aligned}
A_1 &= -b(4B_1^2 + aB_3^2),\\
A_2 &= -b(B_3^2 + 4aB_2^2),\\
A_3 &= -4bB_3(B_1 + aB_2),\\
A_4 &= -2b(2B_1B_4 + aB_3B_5),\\
A_5 &= -2b(B_3B_4 + 2aB_2B_5),
\end{aligned}$$

а функция $U(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$(bU + c + ab^2B_5^2 + b^2B_4^2)U'_\zeta + 2b(aB_2 + B_1)U + 2(aA_2 + A_1)\zeta = C_1.$$

За счет подходящих сдвигов по обеим переменным можно добиться, чтобы уравнение стало однородным (т. е. уравнение интегрируется в квадратурах).

6°. «Двумерное» точное решение с обобщенным разделением переменных, линейное по z (обобщает второе и третье решения из п. 2°):

$$w = f(x,\eta)z + g(x,\eta), \quad \eta = a^{-1/2}y,$$

где функции f и g описываются системой уравнений

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} = -bf^2. \tag{2}$$

Уравнение (1) является уравнением Лапласа. Уравнение (2) при известной функции $f = f(x,\eta)$ представляет собой уравнение Гельмгольца. Об этих линейных уравнениях см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

7°. «Двумерное» точное решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по z:

$$w = f(x,y)z^2 + g(x,y)z + h(x,y),$$

где функции $f = f(x,y)$, $g = g(x,y)$, $h = h(x,y)$ описываются системой уравнений

$$\begin{aligned}
&f_{xx} + af_{yy} + 6bf^2 = 0,\\
&g_{xx} + ag_{yy} + 6bfg = 0,\\
&h_{xx} + ah_{yy} + bg^2 + 2bfh + 2cf = 0.
\end{aligned}$$

Здесь индексы обозначают соответствующие частные производные.

8°. «Двумерное» решение (обобщает три последних решения из п. 2°):

$$w(x,y,z)=|z|^{1/2}U(x,\eta)-\frac{c}{b},\quad \eta=a^{-1/2}y,$$

где функция $U=U(x,\eta)$ определяется уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}=0.$$

Об этом линейном уравнении см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

9°. Существуют точные решения следующих видов:

$$w(x,y,z)=F(z,r),\quad r=ax^2+y^2 \qquad \text{«двумерное» решение;}$$

$$w(x,y,z)=x^{2\lambda}G(\xi,\eta)-\frac{c}{b},\quad \xi=\frac{y}{x},\quad \eta=\frac{z}{x^{\lambda+1}} \qquad \text{«двумерное» решение;}$$

$$w(x,y,z)=H(\zeta),\quad \zeta=(ax^2+y^2)z^{-2} \qquad \text{«одномерное» решение;}$$

где λ — произвольная постоянная.

10°. Подстановка $u=w+(c/b)$ приводит к частному случаю уравнения 6.1.2.3 при $n=1$.

Замечание. В частном случае $a=1$, $b<0$, $c>0$, рассматриваемое уравнение описывает пространственные околозвуковые течения идеального политропного газа (С. И. Похожаев, 1989).

⦿ *Литература для уравнения* 6.1.2.1: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 408–409).

2. $$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left[(a_1w+b_1)\frac{\partial w}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[(a_2w+b_2)\frac{\partial w}{\partial z}\right]=0.$$

1°. Пусть $w(x,y,z)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=(\pm C_1x+C_2,\pm C_1y+C_3,\pm C_1z+C_4),$$

где C_1, …, C_4 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w(x,y,z)=A\sqrt{k_1x+k_2y+k_3z+B}-\frac{k_1^2+b_1k_2^2+b_2k_3^2}{a_1k_2^2+a_2k_3^2},$$

где A, B, k_1, k_2, k_3 — произвольные постоянные.

3°. Точное решение, линейное по y и z:

$$w(x,y,z)=(A_1x+B_1)y+(A_2x+B_2)z-\tfrac{1}{12}(a_1A_1^2+a_2A_2^2)x^4-$$
$$-\tfrac{1}{3}(a_1A_1B_1+a_2A_2B_2)x^3-\tfrac{1}{2}(a_1B_1^2+a_2B_2^2)x^2+Cx+D.$$

где A_1, A_2, B_1, B_2, C, D — произвольные постоянные.

4°. Существует точное решение с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,y,z)=f(x)y^2+g(x)yz+h(x)z^2+\varphi(x)y+\psi(x)z+\chi(x).$$

5°. О других решениях см. уравнение 6.3.2.3 при $f(w)=1$, $g(w)=a_1w+b_1$, $h(w)=a_2w+b_2$.

3. $$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+a\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+b\frac{\partial}{\partial z}\left(w^n\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0.$$

1°. Пусть $w(x,y,z)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=C_1^{-2}w(\pm C_2x+C_3,\pm C_2y+C_4,\pm C_1^nC_2z+C_5),$$
$$w_2=w(x\cos\beta+ya^{-1/2}\sin\beta,-xa^{1/2}\sin\beta+y\cos\beta,\ z),$$

где $C_1,\dots,C_5,\beta$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки в выражении для w_1 выбираются произвольно).

2°. Точные решения:

$$w(x,y,z)=z^{\frac{1}{n+1}}[C_1(ax^2-y^2)+C_2x+C_3y+C_4],$$
$$w(x,y,z)=z^{\frac{1}{n+1}}[C_1\ln(ax^2+y^2)+C_2],$$
$$w(x,y,z)=C_1z^{\frac{1}{n+1}}\exp(\sqrt{a}C_2x)\cos(C_2y+C_3),$$

где C_1, …, C_4 — произвольные постоянные.

3°. «Двумерное» решение (обобщает решения из п. 2°):

$$w(x,y,z)=z^{\frac{1}{n+1}}U(x,\eta),\qquad \eta=a^{-1/2}y,$$

где функция $U=U(x,\eta)$ определяется уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}=0.$$

Об этом линейном уравнении см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

4°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,z)=u(x,\eta)z^{2/n},\qquad \eta=a^{-1/2}y,$$

где функция $u=u(x,\eta)$ определяется дифференциальным уравнением вида 5.1.1.1:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{2b(n+2)}{n^2}u^{n+1}=0.$$

При $n=-1$ и $n=-2$ полученное уравнение является линейным.

Замечание. Решения из пп. 2° и 3° являются частными случаями решения в виде произведения функций разных аргументов $w=u(x,y)\theta(z)$, где $\theta=\theta(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $(\theta^n\theta'_z)'_z=C\theta$.

5°. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,z)=F(z,r),\quad r=ax^2+y^2;$$
$$w(x,y,z)=x^{2\lambda}G(\xi,\eta),\quad \xi=\frac{y}{x},\quad \eta=\frac{z}{x^{n\lambda+1}};$$
$$w(x,y,z)=|x|^{-2/n}H(z,\zeta),\quad \zeta=y/x;$$
$$w(x,y,z)=|z|^{2/n}U(t_1,t_2),\quad t_1=x+k_1\ln|z|,\quad t_2=y+k_2\ln|z|;$$
$$w(x,y,z)=\exp\Bigl(-\frac{2z}{n+1}\Bigr)V(\rho_1,\rho_2),\quad \rho_1=x\exp\Bigl(-\frac{nz}{n+1}\Bigr),\quad \rho_2=y\exp\Bigl(-\frac{nz}{n+1}\Bigr),$$

где k_1, k_2, λ — произвольные постоянные.

6°. Существуют точные решения следующих видов:

$$w(x,y,z)=W(\zeta),\quad \zeta=(ax^2+y^2)z^{-2};$$
$$w(x,y,z)=S(r)z^{2/n},\quad r=ax^2+y^2.$$

7°. О других решениях см. уравнение 6.1.2.5, в котором надо положить $n=0$, а затем переобозначить k на n.

⊙ *Литература для уравнения* 6.1.2.3: N. H. Ibragimov (1994, p. 224), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 410–411).

4. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+a\frac{\partial}{\partial y}\Bigl(w^n\frac{\partial w}{\partial y}\Bigr)+b\frac{\partial}{\partial z}\Bigl(w^n\frac{\partial w}{\partial z}\Bigr)=0.$

1°. Пусть $w(x,y,z)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=C_1^{-2}w(\pm C_2x+C_3,\pm C_1^nC_2y+C_4,\pm C_1^nC_2z+C_5),$$
$$w_2=w\bigl(x,\,y\cos\beta+z\sqrt{a/b}\,\sin\beta,-y\sqrt{b/a}\,\sin\beta+z\cos\beta\bigr),$$

где $C_1,\ldots,C_5,\beta$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Вырожденные решения:

$$w(x,y,z)=x\bigl[C_1(by^2-ax^2)+C_2x+C_3y+C_4\bigr]^{\frac{1}{n+1}},$$
$$w(x,y,z)=x\bigl[C_1\ln\bigl(by^2+az^2\bigr)+C_2\bigr]^{\frac{1}{n+1}},$$
$$w(x,y,z)=x\bigl[C_1\exp\bigl(\lambda\sqrt{b}\,y\bigr)\sin\bigl(\lambda\sqrt{a}\,z+C_2\bigr)+C_3\bigr]^{\frac{1}{n+1}},$$

где $C_1,\ldots,C_4$, λ — произвольные постоянные.

3°. «Двумерное» решение (обобщает решения из п. 2°):

$$w(x,y,z) = (C_1 x + C_2)\big[U(\xi,\eta)\big]^{\frac{1}{n+1}}, \quad \xi = \sqrt{b}\,y, \quad \eta = \sqrt{a}\,z,$$

где функция $U = U(\xi,\eta)$ определяется уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0.$$

Об этом линейном уравнении см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 b).

4°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,z) = x^{-2/n}\Theta(y,z),$$

где функция $\Theta = \Theta(y,z)$ описывается уравнением

$$a\frac{\partial}{\partial y}\left(\Theta^n \frac{\partial \Theta}{\partial y}\right) + b\frac{\partial}{\partial z}\left(\Theta^n \frac{\partial \Theta}{\partial z}\right) + \frac{2(n+2)}{n^2}\Theta = 0.$$

При $n=-2$ полученное уравнение с помощью преобразования $u = 1/\Theta$, $\xi = \sqrt{b}\,y$, $\eta = \sqrt{a}\,z$ приводится к уравнению Лапласа.

Замечание. Решения из пп. 2° и 3° являются частными случаями решения в виде произведения функций разных аргументов $w = \varphi(x)u(y,z)$, где $\varphi = \varphi(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $\varphi''_{xx} = C\varphi^{n+1}$.

5°. Существуют точные решения следующих видов:

$$w(x,y,z) = F(x,r), \quad r = by^2 + az^2 \qquad \text{«двумерное» решение;}$$
$$w(x,y,z) = x^{2\lambda}G(\xi,\eta), \quad \xi = \frac{y}{x^{n\lambda+1}}, \quad \eta = \frac{z}{x^{n\lambda+1}} \qquad \text{«двумерное» решение;}$$
$$w(x,y,z) = z^{2/n}H(x,\zeta), \quad \zeta = z/y \qquad \text{«двумерное» решение;}$$
$$w(x,y,z) = |x|^{-2/n}U(z_1,z_2), \quad z_1 = y + k_1\ln|x|, \quad z_2 = z + k_2\ln|x| \qquad \text{«двумерное» решение;}$$
$$w(x,y,z) = e^{-2x}V(\rho_1,\rho_2), \quad \rho_1 = ye^{nx}, \quad \rho_2 = ze^{nx} \qquad \text{«двумерное» решение;}$$
$$w(x,y,z) = W(\theta), \quad \theta = (by^2 + az^2)x^{-2} \qquad \text{«одномерное» решение,}$$

где k_1, k_2, λ — произвольные постоянные.

6°. О других решениях см. уравнение 6.1.2.5 при $k=n$.

⊙ *Литература для уравнения* 6.1.2.4: N. H. Ibragimov (1994, p. 223), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 411–412).

5. $$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\frac{\partial}{\partial y}\left(w^n \frac{\partial w}{\partial y}\right) + b\frac{\partial}{\partial z}\left(w^k \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0.$$

Частный случай уравнения 6.3.2.3 при $f(w)=1$, $g(w) = aw^n$, $h(w) = bw^k$.

1°. Пусть $w(x,y,z)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2}w(\pm C_2 x + C_3, \pm C_1^n C_2 y + C_4, \pm C_1^k C_2 z + C_5),$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\beta_1^2 w + \frac{a\beta_2^2}{n+1}w^{n+1} + \frac{b\beta_3^2}{k+1}w^{k+1} = C_1(\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z) + C_2,$$

где C_1, C_2, β_1, β_2, β_3 — произвольные постоянные.

3°. «Двумерное» решение (c_1, c_2 — произвольные постоянные):

$$w(x,y,z) = u(x,\xi), \quad \xi = c_1 y + c_2 z,$$

где функция $u = u(x,\xi)$ определяется дифференциальным уравнением вида 5.4.4.8:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\varphi(u)\frac{\partial u}{\partial \xi}\right] = 0, \quad \varphi(u) = ac_1^2 u^n + bc_2^2 u^k,$$

которое может быть линеаризовано.

4°. «Двумерное» решение (s_1, s_2 — произвольные постоянные):

$$w(x,y,z) = v(y,\eta), \quad \eta = s_1 x + s_2 z,$$

где функция $v = v(y,\eta)$ определяется дифференциальным уравнением вида 5.4.4.8:

$$a\frac{\partial}{\partial y}\left(v^n\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\psi(v)\frac{\partial v}{\partial \eta}\right] = 0, \qquad \psi(v) = s_1^2 + bs_2^2 v^k,$$

которое может быть линеаризовано.

5°. Существует «двумерные» решения вида (обобщение решений из пп. 3° и 4°)

$$w(x,y,z) = U(z_1,z_2), \quad z_1 = a_1 y + b_1 z + c_1 x, \quad z_2 = a_2 y + b_2 z + c_2 x.$$

6°. Существуют точные решения следующих видов:

$$w(x,y,z) = x^{2\lambda}F(\xi,\eta), \quad \xi = \frac{y}{x^{n\lambda+1}}, \quad \eta = \frac{z}{x^{k\lambda+1}} \qquad \text{«двумерное» решение;}$$
$$w(x,y,z) = y^{2/n}G(\zeta,x), \quad \zeta = y^{-k/n}z \qquad \text{«двумерное» решение;}$$
$$w(x,y,z) = e^{-2x}H(z_1,z_2), \quad z_1 = ye^{nx}, \quad z_2 = ze^{kx} \qquad \text{«двумерное» решение;}$$
$$w(x,y,z) = (y/x)^{2/n}U(\theta), \quad \theta = x^{k/n-1}y^{-k/n}z \qquad \text{«одномерное» решение;}$$

где λ — произвольная постоянная.

⊙ *Литература для уравнения* 6.1.2.5: N. H. Ibragimov (1994, p. 224), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2001 *b*), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 412–413).

6. $\displaystyle a_1\frac{\partial}{\partial y}\left(w^{n_1}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + a_2\frac{\partial}{\partial y}\left(w^{n_2}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + a_3\frac{\partial}{\partial z}\left(w^{n_3}\frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0.$

Частный случай уравнения 6.3.2.3 при $f(w) = a_1 w^{n_1}$, $g(w) = a_2 w^{n_2}$, $h(w) = a_3 w^{n_3}$.

6.2. Уравнения с тремя пространственными переменными, содержащие экспоненциальные нелинейности

6.2.1. Уравнения вида $\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(y)\frac{\partial w}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[h(z)\frac{\partial w}{\partial z}\right] = ae^{\lambda w}$

1. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(by^m\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(cz^k\frac{\partial w}{\partial z}\right) = se^{\lambda w}.$

Частный случай уравнения 6.3.1.3 при $f(w) = se^{\lambda w}$.

1°. Пусть $w(x,y,z)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w\Big(C_1^{\frac{2}{2-n}}x,\, C_1^{\frac{2}{2-m}}y,\, C_1^{\frac{2}{2-k}}y\Big) + \frac{2}{\lambda}\ln C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение при $n \neq 2$, $m \neq 2$, $k \neq 2$:

$$w = -\frac{1}{\lambda}\ln\left\{\frac{s\lambda}{A}\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{z^{2-k}}{c(2-k)^2}\right]\right\}, \qquad A = 1 - \frac{1}{2-n} - \frac{1}{2-m} - \frac{1}{2-k}.$$

3°. Решение с функциональным разделением переменных при $n \neq 2$, $m \neq 2$, $k \neq 2$ (обобщает решение из п. 2°):

$$w = w(r), \qquad r^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{z^{2-k}}{c(2-k)^2}\right],$$

где функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + \frac{B}{r}w'_r = se^{\lambda w}, \qquad B = \frac{2}{2-n} + \frac{2}{2-m} + \frac{2}{2-k} - 1.$$

4°. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,z)=U(\xi,z),\quad \xi^2=\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}+\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2},$$
$$w(x,y,z)=V(x,\eta),\quad \eta^2=\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2}+\frac{z^{2-k}}{c(2-k)^2},$$
$$w(x,y,z)=W(y,\zeta),\quad \zeta^2=\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}+\frac{z^{2-k}}{c(2-k)^2},$$
$$w(x,y,z)=F(\rho_1,\rho_2)+\frac{n-2}{\lambda}\ln x,\quad \rho_1=yx^{\frac{n-2}{2-m}},\quad \rho_2=zx^{\frac{n-2}{2-k}}.$$

2. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(by^m\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(ce^{\lambda z}\frac{\partial w}{\partial z}\right)=se^{\sigma w}.$

Частный случай уравнения 6.3.1.5 при $f(w)=se^{\sigma w}$.

1°. Пусть $w(x,y,z)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=w\Big(C_1^{\frac{2}{2-n}}x,\ C_1^{\frac{2}{2-m}}y,\ z-\frac{2}{\lambda}\ln C_1\Big)+\frac{2}{\sigma}\ln C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение при $n\neq 2$, $m\neq 2$, $\lambda\neq 0$:

$$w=-\frac{1}{\sigma}\ln\left\{\frac{s\sigma}{A}\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}+\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2}+\frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2}\right]\right\},\qquad A=1-\frac{1}{2-n}-\frac{1}{2-m}.$$

3°. Решение с функциональным разделением переменных при $n\neq 2$, $m\neq 2$, $\lambda\neq 0$ (обобщает решение из п. 2°):

$$w=w(r),\qquad r^2=4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}+\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2}+\frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2}\right],$$

где функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr}+\frac{B}{r}w'_r=se^{\sigma w},\qquad B=\frac{2}{2-n}+\frac{2}{2-m}-1.$$

4°. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,z)=U(\xi,z),\quad \xi^2=\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}+\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2},$$
$$w(x,y,z)=V(x,\eta),\quad \eta^2=\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2}+\frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2},$$
$$w(x,y,z)=W(y,\zeta),\quad \zeta^2=\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}+\frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2},$$
$$w(x,y,z)=F(\rho_1,\rho_2)+\frac{n-2}{\sigma}\ln x,\quad \rho_1=yx^{\frac{n-2}{2-m}},\quad \rho_2=z+\frac{2-n}{\lambda}\ln x.$$

3. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(be^{\beta y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(ce^{\lambda z}\frac{\partial w}{\partial z}\right)=se^{\sigma w}.$

Частный случай уравнения 6.3.1.6 при $f(w)=se^{\sigma w}$.

1°. Пусть $w(x,y,z)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=w\Big(C_1^{\frac{2}{2-n}}x,\ y-\frac{2}{\beta}\ln C_1,\ z-\frac{2}{\lambda}\ln C_1\Big)+\frac{2}{\sigma}\ln C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение при $n\neq 2$, $\beta\neq 0$, $\lambda\neq 0$:

$$w=-\frac{1}{\sigma}\ln\left\{\frac{s\sigma(2-n)}{1-n}\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}+\frac{e^{-\beta y}}{b\beta^2}+\frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2}\right]\right\}.$$

3°. Решение с функциональным разделением переменных при $n \neq 2$, $\beta \neq 0$, $\lambda \neq 0$ (обобщает решение из п. 2°):

$$w = w(r), \qquad r^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\beta y}}{b\beta^2} + \frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2}\right],$$

где функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + \frac{A}{r} w'_r = se^{\sigma w}, \qquad A = \frac{n}{2-n}.$$

4°. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,z) = U(\xi, z), \quad \xi^2 = \frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\beta y}}{b\beta^2},$$
$$w(x,y,z) = V(x, \eta), \quad \eta^2 = \frac{e^{-\beta y}}{b\beta^2} + \frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2},$$
$$w(x,y,z) = W(y, \zeta), \quad \zeta^2 = \frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2},$$
$$w(x,y,z) = F(\rho_1, \rho_2) + \frac{n-2}{\sigma} \ln x, \quad \rho_1 = y + \frac{2-n}{\beta} \ln x, \quad \rho_2 = z + \frac{2-n}{\lambda} \ln x.$$

4. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(be^{\gamma y}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(ce^{\lambda z}\frac{\partial w}{\partial z}\right) = se^{\sigma w}.$

Частный случай уравнения 6.3.1.4 при $f(w) = se^{\sigma w}$.

1°. Пусть $w(x,y,z)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w\Big(x - \frac{2}{\beta}\ln C_1,\ y - \frac{2}{\gamma}\ln C_1,\ z - \frac{2}{\lambda}\ln C_1\Big) + \frac{2}{\sigma}\ln C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение при $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $\lambda \neq 0$:

$$w = -\frac{1}{\sigma}\ln\left[s\sigma\left(\frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2} + \frac{e^{-\gamma y}}{b\gamma^2} + \frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2}\right)\right].$$

3°. Решение с функциональным разделением переменных при $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $\lambda \neq 0$ (обобщает решение из п. 2°):

$$w = w(r), \qquad r^2 = 4\left(\frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2} + \frac{e^{-\gamma y}}{b\gamma^2} + \frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2}\right),$$

где функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} - \frac{1}{r} w'_r = se^{\sigma w}.$$

4°. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,z) = U(\xi, z), \quad \xi^2 = \frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2} + \frac{e^{-\gamma y}}{b\gamma^2},$$
$$w(x,y,z) = V(x, \eta), \quad \eta^2 = \frac{e^{-\gamma y}}{b\gamma^2} + \frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2},$$
$$w(x,y,z) = W(y, \zeta), \quad \zeta^2 = \frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2} + \frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2},$$
$$w(x,y,z) = F(\rho_1, \rho_2) + \frac{\beta}{\sigma}x, \quad \rho_1 = y - \frac{\beta}{\gamma}x, \quad \rho_2 = z - \frac{\beta}{\lambda}x.$$

6.2.2. Уравнения вида $a_1\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\lambda_1 w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+a_2\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(e^{\lambda_2 w}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)+a_3\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(e^{\lambda_2 w}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)=be^{\beta w}$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+a\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+b\dfrac{\partial}{\partial z}\left(e^w\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)=0.$

1°. Пусть $w(x,y,z)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=w(C_1x+C_3,\pm C_1y+C_4,C_2z+C_5)+\ln\frac{C_1^2}{C_2^2},$$
$$w_2=w(x\cos\beta+ya^{-1/2}\sin\beta,\ -xa^{1/2}\sin\beta+y\cos\beta,\ z),$$

где $C_1,\,\dots,\,C_5,\,\beta$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x,y,z)=C_1(ax^2-y^2)+C_2xy+C_3x+C_4y+C_5+\ln(C_6z+C_7),$$
$$w(x,y,z)=C_1\exp(\sqrt{a}\,C_2x)\sin(C_2y+C_3)+\ln(C_4z+C_5),$$
$$w(x,y,z)=C_1\exp(C_2y)\sin(\sqrt{a}\,C_2x+C_3)+\ln(C_4z+C_5),$$
$$w(x,y,z)=\ln\left[\frac{(C_1^2+aC_2^2)(z+C_4)^2}{b\operatorname{ch}^2(C_1x+C_2y+C_3)}\right],$$
$$w(x,y,z)=\ln\left(\frac{4aC_3}{b}\right)-2\ln\big|(y+C_1)^2+a(x+C_2)^2+C_3\big|+2\ln|z+C_4|,$$

где $C_1,\,\dots,\,C_7$ — произвольные постоянные.

3°. «Двумерное» решение (обобщает три первых решения из п. 2°):

$$w(x,y,z)=U(x,\eta)+\ln(C_1z+C_2),\qquad \eta=a^{-1/2}y,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $U(x,\eta)$ определяется уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}=0.$$

Об этом линейном уравнении см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

4°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,z)=V(x,\eta)+2\ln|z+C|,\qquad \eta=a^{-1/2}y,$$

где функция $V=V(x,\eta)$ определяется интегрируемым уравнением вида 5.2.1.1:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}=-2be^V.$$

5°. Существуют точные решения следующих видов:

$w(x,y,z)=F(r,z),\quad r=ax^2+y^2$	«двумерное» решение;
$w(x,y,z)=G(\xi_1,\xi_2)-2k\ln\lvert x\rvert,\quad \xi_1=yx^{-1},\quad \xi_2=z\lvert x\rvert^{k-1}$	«двумерное» решение;
$w(x,y,z)=H(\eta_1,\eta_2)+2k\ln\lvert z\rvert,\quad \eta_1=x\lvert z\rvert^{k-1},\quad \eta_2=y\lvert z\rvert^{k-1}$	«двумерное» решение;
$w(x,y,z)=U(\zeta_1,\zeta_2)+2\ln\lvert z\rvert,\quad \zeta_1=x+k_1\ln\lvert z\rvert,\quad \zeta_2=y+k_2\ln\lvert z\rvert$	«двумерное» решение;
$w(x,y,z)=V(\rho_1,\rho_2)+2z,\quad \rho_1=xe^z,\quad \rho_2=ye^z$	«двумерное» решение;
$w(x,y,z)=W(\chi),\quad \chi=(ax^2+y^2)z^{-2}$	«одномерное» решение,

где k, k_1, k_2 — произвольные постоянные.

6°. О других точных решениях см. уравнение 6.3.2.3 при $f(w)=1$, $g(w)=a$, $h(w)=be^w$.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+a\dfrac{\partial}{\partial y}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)+b\dfrac{\partial}{\partial z}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)=0.$

1°. Пусть $w(x,y,z)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=w(C_1x+C_3,C_2y+C_4,\pm C_2z+C_5)+\frac{1}{\lambda}\ln\frac{C_1^2}{C_2^2},$$
$$w_2=w\big(x,\ y\cos\beta+z\sqrt{a/b}\,\sin\beta,\ -y\sqrt{b/a}\,\sin\beta+z\cos\beta\big),$$

где $C_1,\,\dots,\,C_5,\,\beta$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x,y,z) = C_1x + C_2 + \frac{1}{\lambda}\ln(C_3y + C_4z + C_5);$$
$$w(x,y,z) = C_1x + C_2 + \frac{1}{\lambda}\ln\bigl[C_3(by^2 - az^2) + C_4yz + C_5\bigr];$$
$$w(x,y,z) = C_1x + C_2 + \frac{1}{\lambda}\ln\bigl[C_3\ln(by^2 + az^2) + C_4\bigr];$$
$$w(x,y,z) = C_1x + C_2 + \sqrt{b}\,C_3y + \frac{1}{\lambda}\ln\cos\bigl(\sqrt{a}\,C_3\lambda z + C_4\bigr);$$
$$w(x,y,z) = C_1x + C_2 + \frac{1}{\lambda}\ln\bigl[C_3\exp\bigl(\sqrt{b}\,C_4y\bigr)\cos\bigl(\sqrt{a}\,C_4z + C_5\bigr) + C_6\bigr];$$
$$w(x,y,z) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{-aC_1^2y^2 + C_2\exp\bigl(\sqrt{b}\,C_3y\bigr)\cos\bigl(\sqrt{a}\,C_3z + C_4\bigr)}{\cos^2(aC_1x + C_5)}\right];$$
$$w(x,y,z) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{-bC_1^2z^2 + C_2\exp\bigl(\sqrt{b}\,C_3y\bigr)\cos\bigl(\sqrt{a}\,C_3z + C_4\bigr)}{\cos^2(bC_1x + C_5)}\right];$$
$$w(x,y,z) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{-aC_1^2y^2 + C_2\exp\bigl(\sqrt{b}\,C_3y\bigr)\cos\bigl(\sqrt{a}\,C_3z + C_4\bigr)}{\operatorname{sh}^2(aC_1x + C_5)}\right];$$
$$w(x,y,z) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{-bC_1^2z^2 + C_2\exp\bigl(\sqrt{b}\,C_3y\bigr)\cos\bigl(\sqrt{a}\,C_3z + C_4\bigr)}{\operatorname{sh}^2(bC_1x + C_5)}\right];$$
$$w(x,y,z) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{aC_1^2y^2 + C_2\exp\bigl(\sqrt{b}\,C_3y\bigr)\cos\bigl(\sqrt{a}\,C_3z + C_4\bigr)}{\operatorname{ch}^2(aC_1x + C_5)}\right];$$
$$w(x,y,z) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{bC_1^2z^2 + C_2\exp\bigl(\sqrt{b}\,C_3y\bigr)\cos\bigl(\sqrt{a}\,C_3z + C_4\bigr)}{\operatorname{ch}^2(bC_1x + C_5)}\right];$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные (первые пять решений являются вырожденными).

3°. «Двумерное» вырожденное решение (обобщает первые пять решений из п. 2°):

$$w(x,y,z) = C_1x + C_2 + \frac{1}{\lambda}\ln U(\xi,\eta), \qquad \xi = \frac{y}{\sqrt{a}}, \qquad \eta = \frac{z}{\sqrt{b}},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $U = U(\xi,\eta)$ определяется уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0.$$

Об этом линейном уравнении см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

4°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,z) = f(x) + \frac{1}{\lambda}\ln V(\xi,\eta), \qquad \xi = \frac{y}{\sqrt{a}}, \qquad \eta = \frac{z}{\sqrt{b}},$$

где функция $f = f(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением (k — произвольная постоянная)

$$f''_{xx} + ke^{\lambda f} = 0, \tag{1}$$

а функция $V = V(\xi,\eta)$ — решение уравнения Пуассона

$$\Delta V - k\lambda = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}. \tag{2}$$

Об этом линейном уравнении см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

Общее решение уравнения (1) описывается формулами

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\lambda}\ln\bigl[-\tfrac{1}{2}k\lambda(x + C_1)^2\bigr] & \text{при } k\lambda < 0, \\ -\dfrac{1}{\lambda}\ln\left[-\dfrac{k\lambda}{2C_1^2}\cos^2(C_1x + C_2)\right] & \text{при } k\lambda < 0, \\ -\dfrac{1}{\lambda}\ln\left[-\dfrac{k\lambda}{2C_1^2}\operatorname{sh}^2(C_1x + C_2)\right] & \text{при } k\lambda < 0, \\ -\dfrac{1}{\lambda}\ln\left[\dfrac{k\lambda}{2C_1^2}\operatorname{ch}^2(C_1x + C_2)\right] & \text{при } k\lambda > 0. \end{cases}$$

5°. Существуют точные решения следующих видов:

$w(x,y,z) = F(x,\tau) + \frac{2}{\lambda}\ln|y|, \quad \tau = \frac{z}{y},$ «двумерное» решение;

$w(x,y,z) = G(x,r), \quad r = by^2 + az^2$ «двумерное» решение;

$w(x,y,z) = H(z_1,z_2) - \frac{2k}{\lambda}\ln|x|, \quad z_1 = y|x|^{k-1}, \quad z_2 = z|x|^{k-1}$ «двумерное» решение;

$w(x,y,z) = U(\xi,\eta) - \frac{2}{\lambda}\ln|x|, \quad \xi = y + k_1\ln|x|, \quad \eta = z + k_2\ln|x|$ «двумерное» решение;

$w(x,y,z) = V(\rho_1,\rho_2) - \frac{2}{\lambda}x, \quad \rho_1 = ye^x, \quad \rho_2 = ze^x$ «двумерное» решение;

$w(x,y,z) = W(\zeta), \quad \zeta = \frac{by^2 + az^2}{x^2}$ «одномерное» решение.

6°. О других точных решениях см. уравнение 6.3.2.3 при $f(w) = 1$, $g(w) = ae^{\lambda w}$, $h(w) = be^{\lambda w}$.

3. $\boldsymbol{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\frac{\partial}{\partial y}\left(e^w\frac{\partial w}{\partial y}\right) + b\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{\lambda w}\frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0}.$

1°. Пусть $w(x,y,z)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1x + C_3, \pm C_1C_2y + C_4, \pm C_1C_2^\lambda z + C_5) - 2\ln|C_2|,$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$k_1^2w + ak_2^2e^w + bk_3^2\lambda^{-1}e^{\lambda w} = C_1(k_1x + k_2y + k_3z) + C_2,$$

где C_1, C_2, k_1, k_2, k_3 — произвольные постоянные.

3°. «Двумерное» решение (c_1, c_2 — произвольные постоянные):

$$w(x,y,z) = u(x,\xi), \quad \xi = c_1y + c_2z,$$

где функция $u = u(x,\xi)$ определяется дифференциальным уравнением вида 5.4.4.8:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\varphi(u)\frac{\partial u}{\partial \xi}\right] = 0, \quad \varphi(u) = ac_1^2e^u + bc_2^2e^{\lambda u},$$

которое может быть линеаризовано.

4°. «Двумерное» решение (s_1, s_2 — произвольные постоянные):

$$w(x,y,z) = v(y,\eta), \quad \eta = s_1x + s_2z,$$

где функция $v = v(y,\eta)$ определяется дифференциальным уравнением вида 5.4.4.8:

$$a\frac{\partial}{\partial y}\left(e^v\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\psi(v)\frac{\partial v}{\partial \eta}\right] = 0, \quad \psi(v) = bs_2^2e^{\lambda v} + s_1^2,$$

которое может быть линеаризовано.

5°. Существуют «двумерные» решения вида (обобщают решения из пп. 3° и 4°):

$$w(x,y,z) = U(z_1,z_2), \quad z_1 = a_1x + b_1y + c_1z, \quad z_2 = a_2x + b_2y + c_2z.$$

6°. Существуют точные решения следующих видов:

$w(x,y,z) = F(\xi_1,\xi_2) - 2k\ln|x|, \quad \xi_1 = y|x|^{k-1}, \quad \xi_2 = z|x|^{k\lambda-1}$ «двумерное» решение;

$w(x,y,z) = G(x,\eta) + 2\ln|y|, \quad \eta = |y|^{-\lambda}z$ «двумерное» решение;

$w(x,y,z) = H(\zeta_1,\zeta_2) - 2kx, \quad \zeta_1 = ye^{kx}, \quad \zeta_2 = ze^{k\lambda x}$ «двумерное» решение;

$w(x,y,z) = V(\rho) + 2\ln|y/x|, \quad \rho = |x|^{\lambda-1}|y|^{-\lambda}z$ «одномерное» решение,

где k — произвольная постоянная.

7°. О других точных решениях см. уравнение 6.3.2.2 при $f(w) = 1$, $g(w) = ae^w$, $h(w) = be^{\lambda w}$.

⊙ *Литература*: N. H. Ibragimov (1994, pp. 222–223), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 419).

4. $\displaystyle a_1\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda_1 w}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+a_2\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\lambda_2 w}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+a_3\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{\lambda_3 w}\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0.$

1°. Пусть $w(x,y,z)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=w(\pm C_1C_2^{\lambda_1}x+C_3,\pm C_1C_2^{\lambda_2}y+C_4,\pm C_1C_2^{\lambda_3}z+C_5)-2\ln|C_2|,$$

где $C_1,\ \dots,\ C_5$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Уравнение имеет точное решение вида

$$w(x,y,z)=U(\xi)-\frac{2}{\lambda_1-\lambda_2}\ln\left|\frac{y}{x}\right|,\qquad \xi=|x|^{\frac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_2}}|y|^{\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}}z.$$

3°. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,z)=U(\eta_1,\eta_2)-2k\ln|x|,\quad \eta_1=y|x|^{k(\lambda_2-\lambda_1)-1},\quad \eta_2=z|x|^{k(\lambda_3-\lambda_1)-1},$$
$$w(x,y,z)=V(\zeta_1,\zeta_2)-2kx,\quad \zeta_1=y\exp\bigl[k(\lambda_2-\lambda_1)x\bigr],\quad \zeta_2=z\exp\bigl[k(\lambda_3-\lambda_1)x\bigr],$$

где k — произвольная постоянная.

4°. О других точных решениях см. уравнение 6.3.2.3 при $f(w)=a_1e^{\lambda_1 w}$, $g(w)=a_2e^{\lambda_2 w}$, $h(w)=a_3e^{\lambda_3 w}$.

5. $\displaystyle a_1\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda_1 w}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+a_2\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\lambda_2 w}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+a_3\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{\lambda_3 w}\frac{\partial w}{\partial z}\right)=be^{\beta w}.$

1°. Пусть $w(x,y,z)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=w(\pm C_1^{\beta-\lambda_1}x+C_2,\pm C_1^{\beta-\lambda_2}y+C_3,\pm C_1^{\beta-\lambda_3}z+C_4)+2\ln|C_1|,$$

где $C_1,\ \dots,\ C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Существует «двумерное» решение вида

$$w(x,y,z)=U(\xi,\eta)+\frac{2}{\lambda_1-\beta}\ln|x|,\quad \xi=y|x|^{\frac{\beta-\lambda_2}{\lambda_1-\beta}},\quad \eta=z|x|^{\frac{\beta-\lambda_3}{\lambda_1-\beta}}.$$

6.3. Трехмерные уравнения, содержащие произвольные функции

6.3.1. Уравнения тепло- и массопереноса вида $\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl[f_1(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr]+\dfrac{\partial}{\partial y}\Bigl[f_2(y)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr]+\dfrac{\partial}{\partial z}\Bigl[f_3(z)\dfrac{\partial w}{\partial z}\Bigr]=g(w)$

► *Уравнения этого типа описывают стационарные процессы тепло- и массопереноса и горения в неоднородных анизотропных средах. Здесь $f_1(x)$, $f_2(y)$, $f_3(z)$ — зависимости главных коэффициентов температуропроводности от пространственных переменных, $g=g(w)$ — кинетическая функция, которая задает закон тепловыделения (теплопоглощения).*

1. $\displaystyle a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+c\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=f(w).$

1°. Решение типа бегущей волны:

$$w=w(\theta),\qquad \theta=Ax+By+Cz.$$

Зависимость $w(\theta)$ задается неявно с помощью формул

$$\int\left[C_1+\frac{2}{aA^2+bB^2+cC^2}F(w)\right]^{-1/2}dw=C_2\pm\theta,\qquad F(w)=\int f(w)\,dw,$$

где A, B, C, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Точное решение:

$$w=w(r),\qquad r^2=\frac{(x+C_1)^2}{a}+\frac{(y+C_2)^2}{b}+\frac{(z+C_3)^2}{c},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr}+\frac{2}{r}w'_r=f(w).$$

3°. «Двумерное» решение:

$$w = U(\xi,\eta), \quad \xi = \frac{y}{\sqrt{b}} + \frac{x}{\sqrt{a}C}, \quad \eta = (C^2-1)\frac{x^2}{a} - 2C\frac{xy}{\sqrt{ab}} + C^2\frac{z^2}{c},$$

где C — произвольная постоянная ($C \neq 0$), а функция $U = U(\xi,\eta)$ определяется уравнением

$$\left(1+\frac{1}{C^2}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2} - 4\xi\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta} + 4C^2(\xi^2+\eta)\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2} + 2(2C^2-1)\frac{\partial U}{\partial\eta} = f(U).$$

Замечание. Решение, указанное в п. 3°, может быть использовано для получения других «двумерных» решений путем циклической перестановки переменных и указанных параметров:

$$\begin{array}{ccc} & (x,a) & \\ \nearrow & & \searrow \\ (z,c) & \longleftarrow & (y,b) \end{array}$$

4°. «Двумерное» решение:

$$w = V(\zeta,\rho), \quad \zeta = \frac{Ax}{\sqrt{a}} + \frac{By}{\sqrt{b}} + \frac{Cz}{\sqrt{c}}, \quad \rho^2 = \left(\frac{Bx}{\sqrt{a}} - \frac{Ay}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{Cy}{\sqrt{b}} - \frac{Bz}{\sqrt{c}}\right)^2 + \left(\frac{Az}{\sqrt{c}} - \frac{Cx}{\sqrt{a}}\right)^2,$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $V = V(\zeta,\rho)$ определяется уравнением

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\zeta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\rho} = \frac{1}{A^2+B^2+C^2}f(V).$$

5°. Преобразование $x = \sqrt{a}\,\bar{x}$, $y = \sqrt{b}\,\bar{y}$, $z = \sqrt{c}\,\bar{z}$ приводит исходное уравнение к виду $\Delta w = f(w)$.

2. $\displaystyle a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(by^n\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(cz^m\frac{\partial w}{\partial z}\right) = f(w).$

1°. При $n = m = 0$ см. уравнение 6.3.1.1.

2°. Решение с функциональным разделением переменных при $n \neq 2$, $m \neq 2$:

$$w = w(r), \qquad r^2 = 4\left[\frac{x^2}{4a} + \frac{y^{2-n}}{b(2-n)^2} + \frac{z^{2-m}}{c(2-m)^2}\right],$$

где функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + \frac{A}{r}w'_r = f(w), \qquad A = \frac{2(4-n-m)}{(2-n)(2-m)}.$$

3°. «Двумерное» решение при $n \neq 2$, $m \neq 2$:

$$w = U(x,\xi), \qquad \xi^2 = 4\left[\frac{y^{2-n}}{b(2-n)^2} + \frac{z^{2-m}}{c(2-m)^2}\right],$$

где функция $U(x,\xi)$ описывается уравнением

$$a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2} + \frac{B}{\xi}\frac{\partial U}{\partial\xi} = f(U), \qquad B = \frac{4-nm}{(2-n)(2-m)}.$$

4°. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w = V(y,\eta), \quad \eta^2 = 4\left[\frac{x^2}{4a} + \frac{z^{2-m}}{c(2-m)^2}\right],$$
$$w = W(z,\zeta), \quad \zeta^2 = 4\left[\frac{x^2}{4a} + \frac{y^{2-n}}{b(2-n)^2}\right].$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. И. Журов (1998).

3. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(by^m\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(cz^k\frac{\partial w}{\partial z}\right) = f(w).$

1°. Решение с функциональным разделением переменных при $n \neq 2$, $m \neq 2$, $k \neq 2$:

$$w = w(r), \qquad r^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{z^{2-k}}{c(2-k)^2}\right],$$

где функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + \frac{A}{r} w'_r = f(w), \qquad A = 2\left(\frac{1}{2-n} + \frac{1}{2-m} + \frac{1}{2-k}\right) - 1.$$

2°. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$\begin{aligned} w &= U(x,\xi), \quad \xi^2 = 4\left[\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{z^{2-k}}{c(2-k)^2}\right], \\ w &= V(y,\eta), \quad \eta^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{z^{2-k}}{c(2-k)^2}\right], \\ w &= W(z,\zeta), \quad \zeta^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2}\right]. \end{aligned}$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. И. Журов (1998).

4. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(be^{\gamma y}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(ce^{\lambda z}\frac{\partial w}{\partial z}\right) = f(w).$

1°. Решение с функциональным разделением переменных при $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $\lambda \neq 0$:

$$w = w(r), \qquad r^2 = 4\left(\frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2} + \frac{e^{-\gamma y}}{b\gamma^2} + \frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2}\right),$$

где функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} - \frac{1}{r} w'_r = f(w).$$

2°. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$\begin{aligned} w &= U(x,\xi), \quad \xi^2 = 4\left(\frac{e^{-\gamma y}}{b\gamma^2} + \frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2}\right), \\ w &= V(y,\eta), \quad \eta^2 = 4\left(\frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2} + \frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2}\right), \\ w &= W(z,\zeta), \quad \zeta^2 = 4\left(\frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2} + \frac{e^{-\gamma y}}{b\gamma^2}\right). \end{aligned}$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. И. Журов (1998).

5. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(by^m\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(ce^{\lambda z}\frac{\partial w}{\partial z}\right) = f(w).$

1°. Решение с функциональным разделением переменных при $n \neq 2$, $m \neq 2$, $\lambda \neq 0$:

$$w = w(r), \qquad r^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2}\right],$$

где функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + \frac{A}{r} w'_r = f(w), \qquad A = 2\left(\frac{1}{2-n} + \frac{1}{2-m}\right) - 1.$$

2°. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$\begin{aligned} w &= U(x,\xi), \quad \xi^2 = 4\left[\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2}\right], \\ w &= V(y,\eta), \quad \eta^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2}\right], \\ w &= W(z,\zeta), \quad \zeta^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2}\right]. \end{aligned}$$

6. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left(ax^n \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(be^{\beta y} \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(ce^{\lambda z} \frac{\partial w}{\partial z}\right) = f(w).$

1°. Решение с функциональным разделением переменных при $n \neq 2$, $\beta \neq 0$, $\lambda \neq 0$:

$$w = w(r), \qquad r^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\beta y}}{b\beta^2} + \frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2}\right],$$

где функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + \frac{n}{2-n}\,\frac{1}{r}\,w'_r = f(w). \tag{1}$$

Частный случай 1. При $n = 0$ для любой функции $f = f(w)$ общее решение уравнения (1) можно представить в неявном виде

$$\int \left[C_1 + 2\int f(w)\,dw\right]^{-1/2} dw = C_2 \pm r,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Частный случай 2. При $n = 1$, $f(w) = Ae^{\beta w}$ уравнение (1) имеет однопараметрическое решение

$$w(r) = \frac{1}{\beta}\ln\left(-\frac{8C}{\beta A}\right) - \frac{2}{\beta}\ln(r^2 + C),$$

где C — произвольная постоянная.

2°. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w = U(x, \xi), \quad \xi^2 = 4\left[\frac{e^{-\beta y}}{b\beta^2} + \frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2}\right],$$

$$w = V(y, \eta), \quad \eta^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2}\right],$$

$$w = W(z, \zeta), \quad \zeta^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\beta y}}{b\beta^2}\right].$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. И. Журов (1998).

7. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left[f_1(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[f_2(y)\frac{\partial w}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[f_3(z)\frac{\partial w}{\partial z}\right] = aw\ln w + bw.$

Частный случай уравнения 6.3.3.6 при $g_1(x) = b$, $g_2(y) = g_3(z) = 0$.

6.3.2. Уравнения тепло- и массопереноса при наличии осложняющих факторов

1. $\displaystyle (a_1x + b_1y + c_1z + d_1)\frac{\partial w}{\partial x} + (a_2x + b_2y + c_2z + d_2)\frac{\partial w}{\partial y} +$

$\displaystyle \qquad + (a_3x + b_3y + c_3z + d_3)\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - f(w).$

Это уравнение описывает стационарный массоперенос с объемной химической реакцией в трехмерном поступательно-сдвиговом потоке жидкости.

Пусть k — корень кубического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_1 - k & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 - k & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 - k \end{vmatrix} = 0,$$

а постоянные A, B, C являются решением вырожденной системы линейных алгебраических уравнений

$$(a_1 - k)A + a_2B + a_3C = 0,$$
$$b_1A + (b_2 - k)B + b_3C = 0,$$
$$c_1A + c_2B + (c_3 - k)C = 0.$$

Одно из этих уравнений является следствием двух других и может быть опущено. Точное решение:

$$w = w(\zeta), \quad \zeta = Ax + By + Cz,$$

где функция $w(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(k\zeta + Ad_1 + Bd_2 + Cd_3)w'_\zeta = (A^2 + B^2 + C^2)w''_{\zeta\zeta} - f(w).$$

Замечание. В случае несжимаемой жидкости коэффициенты уравнения должны удовлетворять условию $a_1 + b_2 + c_3 = 0$.

2. $$\frac{\partial}{\partial x}\left[(a_1x + b_1y + c_1z + d_1)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(a_2x + b_2y + c_2z + d_2)\frac{\partial w}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[(a_3x + b_3y + c_3z + d_3)\frac{\partial w}{\partial z}\right] = f(w).$$

Точные решения ищем в виде

$$w = w(\zeta), \qquad \zeta = Ax + By + Cz + D,$$

где постоянные A, B, C, D определяются путем решения алгебраической системы уравнений

$$\begin{aligned} a_1A^2 + a_2B^2 + a_3C^2 &= A,\\ b_1A^2 + b_2B^2 + b_3C^2 &= B,\\ c_1A^2 + c_2B^2 + c_3C^2 &= C,\\ d_1A^2 + d_2B^2 + d_3C^2 &= D. \end{aligned}$$

Сначала решаются первые три уравнения, затем из последнего уравнения определяется D. Искомая функция $w(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\zeta w''_{\zeta\zeta} + (a_1A + b_2B + c_3C)w'_\zeta = f(w).$$

3. $$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(w)\frac{\partial w}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[h(w)\frac{\partial w}{\partial z}\right] = 0.$$

Это уравнение описывает стационарные процессы тепло- и массопереноса и горения в неоднородных анизотропных средах. Здесь $f(w)$, $g(w)$, $h(w)$ — зависимости главных коэффициентов температуропроводности от температуры.

1°. Пусть $w(x, y, z)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1x + C_2, \pm C_1y + C_3, \pm C_1z + C_4),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки при C_1 выбираются произвольно).

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\int \left[k_1^2 f(w) + k_2^2 g(w) + k_3^2 h(w)\right] dw = C_1(k_1x + k_2y + k_3z) + C_2,$$

где C_1, C_2, k_1, k_2, k_3, λ — произвольные постоянные.

3°. Точное решение:

$$w = w(\theta), \quad \theta = \frac{C_1y + C_2z + C_3}{x + C_4}, \tag{1}$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, а функция $w(\theta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[\theta^2 f(w)w'_\theta]'_\theta + C_1^2[g(w)w'_\theta]'_\theta + C_2^2[h(w)w'_\theta]'_\theta = 0,$$

которое допускает первый интеграл

$$[\theta^2 f(w) + C_1^2 g(w) + C_2^2 h(w)]w'_\theta = C_5.$$

При $C_5 \neq 0$ принимая w за независимую переменную, для функции $\theta = \theta(w)$ получим уравнение Риккати

$$C_5\theta'_w = \theta^2 f(w) + C_1^2 g(w) + C_2^2 h(w). \tag{2}$$

О точных решениях этого уравнения, которое сводится к линейному уравнению второго порядка, см. книгу В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

Выражение (1) и уравнение (2) могут использоваться для получения двух других «одномерных» решений путем циклической перестановки переменных и указанных функций:

$$\begin{array}{ccc} & (x,f) & \\ \nearrow & & \searrow \\ (z,h) & \longleftarrow & (y,g) \end{array} \qquad (3)$$

4°. «Двумерное» решение (a, b — произвольные постоянные):

$$w(x,y,z) = U(x,\zeta), \quad \zeta = ay + bz, \qquad (4)$$

где функция $U = U(x,\zeta)$ определяется дифференциальным уравнением вида 5.4.4.8:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(U)\frac{\partial U}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\psi(U)\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right] = 0, \quad \psi(U) = a^2 g(U) + b^2 h(U), \qquad (5)$$

которое допускает линеаризацию.

Выражение (4) и уравнение (5) могут использоваться для получения двух других «двумерных» решений путем цклической перестановки переменных и указанных функций; см. (3).

5°. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,z) = V(z_1,z_2), \quad z_1 = a_1x + a_2y + a_3z, \quad z_2 = b_1x + b_2y + b_3z;$$
$$w(x,y,z) = W(\xi,\eta), \quad \xi = y/x, \quad \eta = z/x,$$

где a_n, b_n — произвольные постоянные (первое решение обобщает решение из п. 3°).

6°. Пусть $g(w) = af(w)$. Тогда существует «двумерное» решение вида

$$w(x,y,z) = u(r,z), \quad r = ax^2 + y^2.$$

7°. Пусть $g(w) = af(w)$, $h(w) = bf(w)$. Тогда преобразование

$$v = \int f(w)\,dw, \quad y = \sqrt{a}\,\overline{y}, \quad z = \sqrt{b}\,\overline{z}$$

приводит к уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \overline{y}^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \overline{z}^2} = 0.$$

Об этом линейном уравнении см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 b).

4. $$\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial x}\left[f_1(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[f_2(w)\frac{\partial w}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[f_3(w)\frac{\partial w}{\partial z}\right] =}$$
$$\boldsymbol{= (a_1x+b_1y+c_1z+d_1)\frac{\partial w}{\partial x} + (a_2x+b_2y+c_2z+d_2)\frac{\partial w}{\partial y} + (a_3x+b_3y+c_3z+d_3)\frac{\partial w}{\partial z}.}$$

Это уравнение описывает стационарный анизотропный тепло- и массоперенос в трехмерном поступательно-сдвиговом потоке жидкости.

Пусть k — корень кубического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_1 - k & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 - k & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 - k \end{vmatrix} = 0,$$

а постоянные A, B, C являются решением вырожденной системы линейных алгебраических уравнений

$$(a_1 - k)A + a_2B + a_3C = 0,$$
$$b_1A + (b_2 - k)B + b_3C = 0,$$
$$c_1A + c_2B + (c_3 - k)C = 0.$$

Одно из этих уравнений является следствием двух других и может быть опущено.

Точное решение:

$$w = w(\zeta), \quad \zeta = Ax + By + Cz, \qquad (1)$$

где функция $w(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[\varphi(w)w'_\zeta]'_\zeta = (k\zeta + Ad_1 + Bd_2 + Cd_3)w'_\zeta,$$
$$\varphi(w) = A^2 f_1(w) + B^2 f_2(w) + C^2 f_3(w).$$

Замечание 1. В правую часть уравнения можно добавить произвольную функцию $g(w)$.

Замечание 2. В случае несжимаемой жидкости коэффициенты уравнения должны удовлетворять условию $a_1 + b_2 + c_3 = 0$.

6.3.3. Другие уравнения

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}=f(w)\left[\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right].$

Подстановка

$$U=\int\frac{dw}{F(w)},\qquad \text{где}\quad F(w)=\exp\left[\int f(w)\,dw\right],$$

приводит к трехмерному уравнению Лапласа для функции $U=U(x,y,z)$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0.$$

Об этом линейном уравнении см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

Замечание. О более сложном уравнении вида $(\vec{v}\cdot\nabla)w=\Delta w-f(w)|\nabla w|^2$ с дополнительным конвективным членом см. 6.4.1.1.

2. $ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+by^m\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+cz^k\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}=f(w).$

1°. Решение с функциональным разделением переменных при $n\neq 2$, $m\neq 2$, $k\neq 2$:

$$w=w(r),\qquad r^2=4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}+\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2}+\frac{z^{2-k}}{c(2-k)^2}\right],$$

где функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr}+\frac{A}{r}w'_r=f(w),\qquad A=5-2\left(\frac{1}{2-n}+\frac{1}{2-m}+\frac{1}{2-k}\right).$$

2°. Существует «двумерное» решение вида

$$w(x,y,z)=U(x,\rho),\qquad \rho^2=4\left[\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2}+\frac{z^{2-k}}{c(2-k)^2}\right].$$

Это решение может быть использовано для получения других «двумерных» решений путем циклической перестановки переменных и указанных параметров:

$$\begin{array}{ccc} & (x,a,n) & \\ \nearrow & & \searrow \\ (z,c,k) & \longleftarrow & (y,b,m)\end{array}$$

3. $ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+be^{\mu y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+ce^{\nu z}\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}=f(w).$

1°. Решение с функциональным разделением переменных при $\lambda\neq 0$, $\mu\neq 0$, $\nu\neq 0$:

$$w=w(r),\qquad r^2=4\left(\frac{e^{-\lambda x}}{a\lambda^2}+\frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2}+\frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right),$$

где функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr}+\frac{5}{r}w'_r=f(w).$$

2°. Существует «двумерное» решение вида

$$w(x,y,z)=U(x,\xi),\qquad \xi^2=4\left(\frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2}+\frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right).$$

Это решение может быть использовано для получения других «двумерных» решений путем циклической перестановки переменных и указанных параметров:

$$\begin{array}{ccc} & (x,a,\lambda) & \\ \nearrow & & \searrow \\ (z,c,\nu) & \longleftarrow & (y,b,\mu)\end{array}$$

4. $ax^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + by^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + ce^{\nu z} \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = f(w).$

1°. Решение с функциональным разделением переменных при $n \neq 2$, $m \neq 2$, $\nu \neq 0$:

$$w = w(r), \qquad r^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right],$$

где функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + \frac{A}{r} w'_r = f(w), \qquad A = 2\left(\frac{1-n}{2-n} + \frac{1-m}{2-m}\right) + 1.$$

2°. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$\begin{aligned}
w &= U(x,\xi), \quad \xi^2 = 4\left[\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right],\\
w &= V(y,\eta), \quad \eta^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right],\\
w &= W(z,\zeta), \quad \zeta^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2}\right].
\end{aligned}$$

5. $ax^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\mu y} \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + ce^{\nu z} \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = f(w).$

1°. Решение с функциональным разделением переменных при $n \neq 2$, $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$:

$$w = w(r), \qquad r^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right],$$

где функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + \frac{8-5n}{2-n}\,\frac{1}{r} w'_r = f(w).$$

2°. Существует «двумерные» решения следующих видов:

$$\begin{aligned}
w &= U(x,\xi), \quad \xi^2 = 4\left[\frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right],\\
w &= V(y,\eta), \quad \eta^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\right],\\
w &= W(z,\zeta), \quad \zeta^2 = 4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2}\right].
\end{aligned}$$

6. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left[f_1(x) \dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[f_2(y) \dfrac{\partial w}{\partial y}\right] + \dfrac{\partial}{\partial z}\left[f_3(z) \dfrac{\partial w}{\partial z}\right] =$
$= aw \ln w + [g_1(x) + g_2(y) + g_3(z)]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,z) = \varphi(x)\psi(y)\chi(z),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(y)$, $\chi = \chi(z)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (C_1, C_2 — произвольные постоянные)

$$\begin{aligned}
&[f_1(x)\varphi'_x]'_x - a\varphi \ln \varphi - [g_1(x) + C_1]\varphi = 0,\\
&[f_2(y)\psi'_y]'_y - a\psi \ln \psi - [g_2(y) + C_2]\psi = 0,\\
&[f_3(z)\chi'_z]'_z - a\chi \ln \chi - [g_3(z) - C_1 - C_2]\chi = 0.
\end{aligned}$$

6.4. Уравнения с произвольным числом независимых переменных

6.4.1. Уравнения вида $\frac{\partial}{\partial x_1}\Big[f_1(x_1)\frac{\partial w}{\partial x_1}\Big]+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}\Big[f_n(x_n)\frac{\partial w}{\partial x_n}\Big]=g(x_1,\ldots,x_n,w)$

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2}=f(w)\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\partial w}{\partial x_k}\Big)^2+\sum_{k=1}^{n}g_k(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial w}{\partial x_k}.$

Подстановка

$$U=\int\frac{dw}{F(w)},\qquad \text{где}\quad F(w)=\exp\Big[\int f(w)\,dw\Big],$$

приводит к линейному уравнению

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial x_k^2}=\sum_{k=1}^{n}g_k(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial U}{\partial x_k}.$$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(a_k x_k^{m_k}\frac{\partial w}{\partial x_k}\Big)=f(w).$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$w=w(r),\qquad r^2=A\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^{2-m_k}}{a_k(2-m_k)^2},$$

где функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{B}{r}\frac{dw}{dr}=\frac{4}{A}f(w),\qquad B=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2-m_k}-1.$$

Частный случай 1. При $f(w)=bw^p$ существует точное решение

$$w=\left[\frac{1}{b(1-p)}\Big(\frac{p}{1-p}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2-m_k}\Big)\right]^{\frac{1}{p-1}}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^{2-m_k}}{a_k(2-m_k)^2}\right]^{\frac{1}{1-p}}.$$

Частный случай 2. При $f(w)=be^{\lambda w}$ существует точное решение

$$w=-\frac{1}{\lambda}\ln\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^{2-m_k}}{a_k(2-m_k)^2}\right]+\frac{1}{\lambda}\ln\frac{1-B}{2b\lambda},\qquad B=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2-m_k}-1.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. И. Журов (1998).

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(a_k e^{\lambda_k x_k}\frac{\partial w}{\partial x_k}\Big)=f(w).$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$w=w(r),\qquad r^2=A\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\lambda_k x_k}}{a_k\lambda_k^2},$$

где функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}=\frac{4}{A}f(w).$$

Частный случай 1. При $f(w)=bw^p$ существует точное решение

$$w=\left[\frac{p}{b(1-p)^2}\right]^{\frac{1}{p-1}}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\lambda_k x_k}}{a_k\lambda_k^2}\right)^{\frac{1}{1-p}}.$$

Частный случай 2. При $f(w)=be^{\beta w}$ существует точное решение

$$w=-\frac{1}{\beta}\ln\left(b\beta\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\lambda_k x_k}}{a_k\lambda_k^2}\right).$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. И. Журов (1998).

4. $\displaystyle \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_k x_k^{m_k} \frac{\partial w}{\partial x_k}\right) + \sum_{k=s+1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(b_k e^{\lambda_k x_k} \frac{\partial w}{\partial x_k}\right) = f(w).$

1°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$w = w(r), \qquad r^2 = A\sum_{k=1}^{s} \frac{x_k^{2-m_k}}{a_k(2-m_k)^2} + A\sum_{k=s+1}^{n} \frac{e^{-\lambda_k x_k}}{b_k \lambda_k^2},$$

где функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{B}{r}\frac{dw}{dr} = \frac{4}{A}f(w), \qquad B = \sum_{k=1}^{s} \frac{2}{2-m_k} - 1.$$

Частный случай 1. При $f(w) = cw^p$ существует точное решение

$$w = \left[\frac{1}{c(1-p)}\left(\frac{p}{1-p} + \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{2-m_k}\right)\right]^{\frac{1}{p-1}} \left[\sum_{k=1}^{s} \frac{x_k^{2-m_k}}{a_k(2-m_k)^2} + \sum_{k=s+1}^{n} \frac{e^{-\lambda_k x_k}}{b_k \lambda_k^2}\right]^{\frac{1}{1-p}}.$$

Частный случай 2. При $f(w) = ce^{\beta w}$ существует точное решение

$$w = -\frac{1}{\beta}\ln\left[\sum_{k=1}^{s} \frac{x_k^{2-m_k}}{a_k(2-m_k)^2} + \sum_{k=s+1}^{n} \frac{e^{-\lambda_k x_k}}{b_k \lambda_k^2}\right] + \frac{1}{\beta}\ln\frac{1-B}{2c\beta}, \qquad B = \sum_{k=1}^{s} \frac{2}{2-m_k} - 1.$$

2°. В уравнении выделим две группы переменных (отвечающих как за степенные, так и за экспоненциальные члены) и будем искать точные решения вида

$$w = w(y, z),$$

где

$$y^2 = A_1\sum_{k=1}^{q} \frac{x_k^{2-m_k}}{a_k(2-m_k)^2} + A_1\sum_{k=s+1}^{p} \frac{e^{-\lambda_k x_k}}{b_k \lambda_k^2}, \qquad 0 \leqslant q \leqslant s \leqslant p \leqslant n;$$

$$z^2 = A_2\sum_{k=q+1}^{s} \frac{x_k^{2-m_k}}{a_k(2-m_k)^2} + A_2\sum_{k=p+1}^{n} \frac{e^{-\lambda_k x_k}}{b_k \lambda_k^2}.$$

Для функции w получим уравнение

$$A_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{B_1}{y}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + A_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{B_1}{z}\frac{\partial w}{\partial z}\right) = 4f(w),$$

$$B_1 = \sum_{k=1}^{q} \frac{2}{2-m_k} - 1, \quad B_2 = \sum_{k=q+1}^{s} \frac{2}{2-m_k} - 1.$$

При $B_1 = B_2 = 0$, $A_1 = A_2 = 1$ это уравнение встречается в плоских задачах теории тепло- и массопереноса (см. уравнения 5.1.1.1, 5.2.1.1, 5.3.1.1, 5.3.2.1, 5.3.3.1, 5.4.1.1).

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин, А. И. Журов (1998).

5. $\displaystyle \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left[f_k(x_k)\frac{\partial w}{\partial x_k}\right] = aw\ln w + w\sum_{k=1}^{n} g_k(x_k).$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\ldots\varphi_n(x_n),$$

где функции $\varphi_1 = \varphi_1(x_1)$, $\varphi_2 = \varphi_2(x_2)$, …, $\varphi_n = \varphi_n(x_n)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\frac{d}{dx_k}\left[f_k(x_k)\frac{d\varphi_k}{dx_k}\right] - a\varphi_k\ln\varphi_k - \left[g_k(x_k) + C_k\right]\varphi_k = 0; \qquad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

Произвольные постоянные $C_1, \ldots, C_n$ связаны одним соотношением $C_1 + \cdots + C_n = 0$.

6.4.2. Другие уравнения

1. $\displaystyle \sum_{k=1}^{n} f_k(x_k)\frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^{n} g_k(x_k)\frac{\partial w}{\partial x_k} = aw\ln w + w\sum_{k=1}^{n} h_k(x_k).$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\ldots\varphi_n(x_n),$$

где функции $\varphi_1 = \varphi_1(x_1)$, $\varphi_2 = \varphi_2(x_2)$, $\ldots$, $\varphi_n = \varphi_n(x_n)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$f_k(x_k)\frac{d^2\varphi_k}{dx_k^2} + g_k(x_k)\frac{d\varphi_k}{dx_k} - a\varphi_k\ln\varphi_k - \bigl[h_k(x_k) + C_k\bigr]\varphi_k = 0; \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Произвольные постоянные $C_1, \ldots, C_n$ связаны одним соотношением $C_1 + \cdots + C_n = 0$.

2. $\displaystyle \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^{m_k}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k x_k^{m_k-1}\frac{\partial w}{\partial x_k} = f(w).$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$w = w(r), \qquad r^2 = A\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^{2-m_k}}{a_k(2-m_k)^2},$$

где функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{B}{r}\frac{dw}{dr} = \frac{4}{A}f(w), \qquad B = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k(1-m_k)+b_k}{a_k(2-m_k)} - 1.$$

Частный случай 1. При $f(w) = cw^p$ существует точное решение

$$w = \left[\frac{1}{2c(1-p)}\left(\frac{1+p}{1-p} + B\right)\right]^{\frac{1}{p-1}}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^{2-m_k}}{a_k(2-m_k)^2}\right]^{\frac{1}{1-p}}.$$

Частный случай 2. При $f(w) = ce^{\beta w}$ существует точное решение

$$w = -\frac{1}{\beta}\ln\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^{2-m_k}}{a_k(2-m_k)^2}\right] + \frac{1}{\beta}\ln\frac{1-B}{2c\beta}.$$

3. $\displaystyle \sum_{k=1}^{n} a_k e^{\lambda_k x_k}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k e^{\lambda_k x_k}\frac{\partial w}{\partial x_k} = f(w).$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$w = w(r), \qquad r^2 = A\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\lambda_k x_k}}{a_k\lambda_k^2},$$

где функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{B}{r}\frac{dw}{dr} = \frac{4}{A}f(w), \qquad B = 2n - 1 - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{a_k\lambda_k}.$$

Частный случай 1. При $f(w) = cw^p$ существует точное решение

$$w = \left[\frac{1}{2c(1-p)}\left(\frac{1+p}{1-p} + B\right)\right]^{\frac{1}{p-1}}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\lambda_k x_k}}{a_k\lambda_k^2}\right)^{\frac{1}{1-p}}.$$

Частный случай 2. При $f(w) = ce^{\beta w}$ существует точное решение

$$w = -\frac{1}{\beta}\ln\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\lambda_k x_k}}{a_k\lambda_k^2}\right) + \frac{1}{\beta}\ln\frac{1-B}{2c\beta}.$$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{m_1}\Bigl(a_k x_k^{n_k}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2}+a_k p_k x_k^{n_k-1}\frac{\partial w}{\partial x_k}\Bigr)+\sum_{k=1}^{m_2}\Bigl(b_k e^{\lambda_k x_k}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2}+b_k q_k e^{\lambda_k x_k}\frac{\partial w}{\partial x_k}\Bigr)=f(w).$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$w=w(r),\qquad r^2=A\sum_{k=1}^{m_1}\frac{x_k^{2-n_k}}{a_k(2-n_k)^2}+A\sum_{k=1}^{m_2}\frac{e^{-\lambda_k x_k}}{b_k\lambda_k^2},$$

где функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{B}{r}\frac{dw}{dr}=\frac{4}{A}f(w),\qquad B=2\sum_{k=1}^{m_1}\frac{1-n_k+p_k}{2-n_k}-2\sum_{k=1}^{m_2}\frac{q_k}{\lambda_k}+2m_2-1.$$