Из книги A. D. Polyanin and V. F. Zaitsev, «Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition», Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2011 [русский перевод].

7. Уравнения, содержащие смешанные производные, и некоторые другие уравнения

Предварительные замечания. В данной главе не рассматриваются полулинейные уравнения вида

$$a(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+b(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=F\Big(x,y,w,\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y}\Big),$$

которые стандартными преобразованиями можно привести к канонической форме*. Об уравнениях гиперболического типа, содержащих смешанные производные см. разд. 3.5.

7.1. Уравнения линейные относительно смешанной производной

7.1.1. Уравнение Калоджеро

1. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}=w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+a}$.

Частный случай уравнения 7.1.1.3 при $f(u)=a$.

2. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}=w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+a\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2}$.

Частный случай уравнения 7.1.1.3 при $f(u)=au^2$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=C_1w(C_2x+C_2\varphi(t),C_1C_2t+C_3)+\varphi'_t(t),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, $\varphi(t)$ — произвольная функция, также будет решением этого уравнения.

2°. Общее решение в параметрической форме:

$$w=f'_t(t)+\int\big[g(z)-at\big]^{\frac{1-a}{a}}\,dz,$$
$$x=-f(t)+\int\big[g(z)-at\big]^{\frac{1}{a}}\,dz,$$

где $f(t)$, $g(z)$ — произвольные функции, z — параметр.

3°. Законы сохранения:

$$D_t\big[(w_x)^{1/a}\big]+D_x\big[-w(w_x)^{1/a}\big]=0,$$
$$D_t\big[(w_{xx})^{\frac{1}{2a+1}}\big]+D_x\big[-w(w_{xx})^{\frac{1}{2a+1}}\big]=0.$$

⊙ *Литература*: F. Calogero (1984), J. K. Hunter, R. Saxton (1991), М. В. Павлов (2001).

* Классификация и процедура приведения таких уравнений к канонической форме определяются только левой частью уравнения. При этом используются те же самые рассуждения, что и для линейных уравнений [см. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972), А. Д. Полянин (2001 *b*)].

© А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, 2010

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Уравнение Калоджеро (Calogero).

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-1} w(C_1 x + C_1\varphi(t), t + C_2) + \varphi'_t(t),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, $\varphi(t)$ — произвольная функция, также будет решением этого уравнения.

2°. Вырожденное решение, линейное по x:

$$w(x,t) = \varphi(t)x + \psi(t),$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, а функция $\varphi(t)$ задается неявно (C — произвольная постоянная)

$$\int \frac{d\varphi}{f(\varphi)} = t + C.$$

3°. Введем обозначения:

$$u = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = \Phi(u) = \exp\left[\int \frac{u\,du}{f(u)}\right]. \tag{1}$$

Преобразование по решению

$$dz = v\,dx + vw\,dt, \quad dy = dt \qquad \left(dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial t}\,dt\right) \tag{2}$$

определяет переход от x, t к новым независимым переменным z, y по правилу

$$\frac{\partial}{\partial x} = v\frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} + vw\frac{\partial}{\partial z}. \tag{3}$$

В результате получим уравнение первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f(u),$$

которое не зависит от z и может рассматриваться как обыкновенное дифференциальное уравнение. Интегрируя, находим его решение в неявном виде

$$\int \frac{du}{f(u)} = y + \varphi(z), \tag{4}$$

где $\varphi(z)$ — произвольная функция. Используя первые соотношения в (1) и (3), имеем уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{u}{v} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{u}{\Phi(u)},$$

общее решение которого дается формулой

$$w = \int \frac{u\,dz}{\Phi(u)} + \psi(y), \tag{5}$$

где $\psi(y)$ — произвольная функция, а зависимость $u = u(z,y)$ задается неявно формулой (4). Обратное к (2) преобразование по решению имеет вид

$$dx = \frac{1}{\Phi(u)}\,dz - w\,dy, \quad dt = dy. \tag{6}$$

Интегрируя первое равенство (6), получим

$$x = \int_{z_0}^{z} \frac{d\xi}{\Phi(u(\xi,y))} - \int_{y_0}^{y} w(z_0,\tau)\,d\tau, \tag{7}$$

где зависимость $w = w(z,y)$ задана выражением (5), x_0 и y_0 — любые.

Формулы (4), (5), (7) при $y = t$ определяют общее решение рассматриваемого уравнения в параметрической форме (z — параметр).

4°. Закон сохранения:

$$D_t[\Phi(w_x)] + D_x[-w\Phi(w_x)] = 0,$$

где $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$, а функция $\Phi(u)$ определена в (1).

⊙ *Литература для уравнения* 7.1.1.3: F. Calogero (1984), М. В. Павлов (2001).

7.1.2. Уравнение Хохлова — Заболоцкой и родственные уравнения

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$

Двумерное уравнение Хохлова — Заболоцкой. Описывает процесс распространения ограниченного звукового пучка в нелинейной среде (t и y играют роль пространственных переменных, а x является линейной комбинацией времени и пространственной координаты).

К уравнению Хохлова — Заболоцкой сводится уравнение нестационарного трансзвукового газового потока (см. 7.1.3.1 при $a = b = 1/2$)

$$2u_{x\tau} + u_x u_{xx} - u_{yy} = 0$$

см. C. C. Lin, E. Reissner, H. S. Tsien (1948). Для этого надо перейти к новой переменной $\tau = 2t$, продифференцировать уравнение по x, а затем сделать подстановку $w = -\partial u/\partial x$.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2}C_2^2 w(C_1x + C_3, C_2y + C_4, C_1^{-1}C_2^2t + C_5),$$
$$w_2 = w(x + \lambda y + \varphi(t), y + 2\lambda t, t) + \varphi_t'(t) - \lambda^2,$$

где $C_1, \ldots, C_5, \lambda$ — произвольные постоянные, а $\varphi = \varphi(t)$ — произвольная функция, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x,y,t) = -\frac{x}{t + C_1} + \varphi y + \psi,$$
$$w(x,y,t) = 2\varphi x + (\varphi_t' - 2\varphi^2)y^2 + \psi y + \chi,$$
$$w(x,y,t) = (\varphi y + \psi)x - \frac{1}{12\varphi^2}(\varphi y + \psi)^4 + \frac{1}{6}\varphi_t' y^3 + \frac{1}{2}\psi_t' y^2 + \chi y + \theta,$$
$$w(x,y,t) = C_1\sqrt{x + C_2y + \varphi} + \varphi_t' - C_2^2,$$
$$w(x,y,t) = \frac{C_1}{t}\sqrt{4t(x+\varphi) - (y + C_2)^2} + \varphi_t',$$

где $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$, $\theta = \theta(t)$ — произвольные функции; C_1, C_2 — произвольные постоянные; штрихом обозначены производные.

3°. Решение в неявном виде:

$$tz + x + \lambda y + \lambda^2 t + \varphi(t) = F(z), \quad z = w - \varphi_t'(t),$$

где $\varphi(t)$, $F(z)$ — произвольные функции. Значение $\lambda = 0$ определяет общий вид решения, которое не зависит от переменной y.

4°. «Двумерное» решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное относительно x:

$$w = f(y,t)x^2 + g(y,t)x + h(y,t),$$

где функции $f = f(y,t)$, $g = g(y,t)$, $h = h(y,t)$ описываются системой уравнений

$$f_{yy} = -6f^2,$$
$$g_{yy} = -6fg + 2f_t,$$
$$h_{yy} = -2fh + g_t - g^2.$$

Индексы y и t обозначают соответствующие частные производные. Частное решение этих уравнений имеет вид

$$f = -\frac{1}{R^2}, \quad g = \frac{C_1(t)}{R^2} + C_2(t)R^3 - \frac{\varphi_t'(t)}{2R},$$
$$h = \frac{C_3(t)}{R} + C_4(t)R^2 + \frac{R^2}{3}\int \frac{1}{R}(g_t - g^2)\,dy - \frac{1}{3R}\int R^2(g_t - g^2)\,dy, \quad R = y + \varphi(t),$$

где $\varphi(t), C_1(t), \ldots, C_4(t)$ — произвольные функции.

5°. «Двумерное» решение:

$$w = xu(\xi, t), \quad \xi = yx^{-1/2},$$

где функция $u = u(\xi, t)$ описывается уравнением

$$2\xi \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial t} + (\xi^2 u + 4) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \xi^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 - 5\xi u \frac{\partial u}{\partial \xi} - 4 \frac{\partial u}{\partial t} + 4u^2 = 0.$$

6°. «Двумерное» решение:

$$w = v(\zeta, t) + \frac{\alpha'_t + 4}{\alpha} x, \quad \zeta = y^2 + \alpha x,$$

где $\alpha = \alpha(t)$ — произвольная функция, а функция $v = v(\zeta, t)$ описывается уравнением

$$\alpha \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta \partial t} - (\alpha^2 v + 4\zeta) \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} - \alpha^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \zeta} \right)^2 - (\alpha'_t + 10) \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \beta'_t - \beta^2 = 0, \quad \beta = \frac{\alpha'_t + 4}{\alpha}.$$

Последнее уравнение имеет частное решение вида $v = \zeta \varphi(t)$, где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается уравнением Риккати $\alpha \varphi'_t - \alpha^2 \varphi^2 - (\alpha'_t + 10)\varphi + \beta'_t - \beta^2 = 0$.

7°. «Двумерное» решение:

$$w = U(r, z), \quad z = x + \beta y + \lambda t, \quad r = y + \mu t,$$

где β, λ, μ — произвольные постоянные, а функция $U = U(r, z)$ описывается уравнением

$$(\lambda - \beta^2) \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + (\mu - 2\beta) \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - U \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 = 0.$$

Полагая здесь $\lambda = \beta^2$ и $\mu = 2\beta$, получим уравнение вида 5.1.5.1.

8°. «Двумерное» решение:

$$w = x^{-2} V(p, q), \quad p = tx^{-3}, \quad q = yx^{-2},$$

где функция $V = V(p, q)$ описывается уравнением

$$3p(3Vp + 1) \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} + (4q^2 V + 1) \frac{\partial^2 V}{\partial q^2} + 2q(6pV + 1) \frac{\partial^2 V}{\partial p \partial q} + \\ + \left(3p \frac{\partial V}{\partial p} + 2q \frac{\partial V}{\partial q} \right)^2 + (36pV + 5) \frac{\partial V}{\partial p} + 22qV \frac{\partial V}{\partial q} + 10V^2 = 0.$$

9°. Точное решение:

$$w = u(r) x^2 y^{-2}, \quad r = (At + B)^{-1} x^{-1} y^2,$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $u = u(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$r^2(u - Ar + 4) u''_{rr} + r^2 (u'_r)^2 - r(6u - Ar + 6) u'_r + 6(u + 1)u = 0.$$

⦿ *Литература для уравнения* 7.1.2.1: Y. Kodama (1988), Y. Kodama, J. Gibbons (1989), N. H. Ibragimov (1994, pp. 299–300; 1995, pp. 447–450), А. М. Виноградов, И. С. Красильщик (1997), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 238–239).

2. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + a \dfrac{\partial}{\partial x} \left(w \dfrac{\partial w}{\partial x} \right) + b \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0}$.

Преобразование

$$w(x, y, t) = \frac{b}{a} u(x, y, \tau), \quad \tau = -bt$$

приводит к уравнению вида 7.1.2.1:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \tau} - \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

3. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - f(t) \dfrac{\partial}{\partial x} \left(w \dfrac{\partial w}{\partial x} \right) - g(t) \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0}$.

Обобщенное уравнение Хохлова — Заболоцкой.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2} w(C_1^2 x + C_2, C_1 y + C_3, t),$$
$$w_2 = w(\xi,\eta,t) + \varphi(t), \quad \xi = x + \lambda y + \int [f(t)\varphi(t) + \lambda^2 g(t)]\,dt, \quad \eta = y + 2\lambda \int g(t)\,dt,$$

где C_1, C_2, C_3, λ — произвольные постоянные, а $\varphi = \varphi(t)$ — произвольная функция, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x,y,t) = -x\biggl(\int f\,dt + C\biggr)^{-1} + \varphi y + \psi,$$
$$w(x,y,t) = 2\varphi x + \frac{\varphi'_t - 2f\varphi^2}{g} y^2 + \psi y + \chi,$$
$$w(x,y,t) = (\varphi y + \psi)x - \frac{f}{12g\varphi^2}(\varphi y + \psi)^4 + \frac{\varphi'_t}{6g} y^3 + \frac{\psi'_t}{2g} y^2 + \chi y + \theta,$$

где $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$, $\theta = \theta(t)$ — произвольные функции; C — произвольная постоянная; $f = f(t)$ и $g = g(t)$; штрихом обозначены производные по t.

3°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = U(z,t) + \varphi(t), \quad z = x + \lambda y,$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция, λ — произвольная постоянная, а функция $U = U(z,t)$ описывается уравнением с частными производными первого порядка [$\psi(t)$ — произвольная функция]

$$\frac{\partial U}{\partial t} - f(t)U\frac{\partial U}{\partial z} - [f(t)\varphi(t) + \lambda^2 g(t)]\frac{\partial U}{\partial z} = \psi(t).$$

Полный интеграл этого уравнения ищется в виде $U = A(t)z + B(t)$, что позволяет построить его общее решение (см. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2003).

4°. «Двумерное» решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное относительно x:

$$w = \varphi(y,t)x^2 + \psi(y,t)x + \chi(y,t),$$

где функция $\varphi = \varphi(y,t)$, $\psi = \psi(y,t)$, $\chi = \chi(y,t)$ описываются системой уравнений

$$g\varphi_{yy} = -6f\varphi^2,$$
$$g\psi_{yy} = -6f\varphi\psi + 2\varphi_t,$$
$$g\chi_{yy} = -f(2\varphi\chi + \psi^2) + \psi_t.$$

Индексы y и t обозначают соответствующие частные производные, $f = f(t)$ и $g = g(t)$.

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 240).

4. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0.$

Трехмерное уравнение Хохлова — Заболоцкой.

1°. Пусть $w(x,y,z,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2}C_2^2 w(C_1 x + C_3, C_2 y + C_4, C_2 z + C_5, C_1^{-1}C_2^2 t + C_6),$$
$$w_2 = w(x + \lambda y + \mu z + \varphi(t), y + 2\lambda t, z + 2\mu t, t) + \varphi'_t(t) - \lambda^2 - \mu^2,$$
$$w_3 = w(x, y\cos\beta + z\sin\beta, -y\sin\beta + z\cos\beta, t),$$

где $C_1, \ldots, C_6$, λ, μ, β — произвольные постоянные, $\varphi = \varphi(t)$ — произвольная функция, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x,y,z,t) = 2\alpha_1 x + (\alpha'_1 - 2\alpha_1^2 - \alpha_2)y^2 + \alpha_3 y + \alpha_2 z^2 + \beta z + \gamma,$$
$$w(x,y,z,t) = \frac{C\sqrt{4tx - y^2 - z^2}}{t^{3/2}},$$

где α_1, α_2, α_3, β, γ — произвольные функции переменной t; C — произвольная постоянная.

3°. «Трехмерное» решение:

$$w = u(x,\xi,t), \quad \xi = y\sin\beta + z\cos\beta,$$

где β — произвольная постоянная, а функция $u = u(x,\xi,t)$ описывается уравнением Хохлова — Заболоцкой вида 7.1.2.1:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0.$$

4°. «Трехмерное» решение с обобщенным разделением переменных, линейное по x:

$$w = f(y,z,t)x + g(y,z,t),$$

где функции $f = f(y,z,t)$ и $g = g(y,z,t)$ описываются уравнениями

$$f_{yy} + f_{zz} = 0,$$
$$g_{yy} + g_{zz} = f_t - f^2.$$

Индексы y, z, t обозначают соответствующие частные производные. Первое уравнение — уравнение Лапласа, а второе — уравнение Пуассона (относительно функции g). О решениях этих линейных уравнений см., например, книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 b).

5°. «Трехмерное» решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по x:

$$w = f(y,z,t)x^2 + g(y,z,t)x + h(y,z,t),$$

где функции $f = f(y,z,t)$, $g = g(y,z,t)$, $h = h(y,z,t)$ описываются системой уравнений

$$f_{yy} + f_{zz} = -6f^2,$$
$$g_{yy} + g_{zz} = -6fg + 2f_t,$$
$$h_{yy} + h_{zz} = -2fh + g_t - g^2.$$

6°. Точное решение:

$$w(x,y,z,t) = u(\xi)t^{-\lambda}, \quad \xi = t^{\lambda-2}(4xt - y^2 - z^2),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $u = u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[4u + (1-\lambda)\xi]u''_{\xi\xi} + 4(u'_\xi)^2 = 0.$$

При $\lambda \neq 1$ переход к обратной функции $\xi = \xi(u)$, замена $\xi(u) = p(u) - \frac{4}{1-\lambda}u$ и понижение порядка $p'_u = \frac{4}{1-\lambda}\eta(p)$ приводят к уравнению первого порядка $p\eta\eta'_p - \eta + 1 = 0$. Интегрируя, получим $(\eta - 1)e^\eta = C_1 p$.

При $\lambda = 1$ имеем $u(\xi) = \pm\sqrt{C_1\xi + C_2}$.

7°. Точное решение:

$$w(x,y,z,t) = \frac{y^2+z^2}{t^2}U(\zeta), \quad \zeta = \frac{y^2+z^2}{xt},$$

где функция $U = U(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\zeta^2(\zeta^2 U - \zeta + 4)U''_{\zeta\zeta} + \zeta^4(U'_\zeta)^2 + \zeta(2\zeta^2 U - 3\zeta + 12)U'_\zeta + 4U = 0.$$

8°. Точное решение:

$$w(x,y,z,t) = \frac{z^2}{t^2}V(q), \quad q = \frac{4tx - y^2}{z^2},$$

где функция $V = V(q)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2(4V + q^2 - q)V''_{qq} + 8(V'_q)^2 + (1-q)V'_q + V = 0.$$

⊙ *Литература для уравнения* 7.1.2.4: А. М. Виноградов, И. С. Красильщик, В. В. Лычагин (1986), N. H. Ibragimov (1994, pp. 300–301, 1995, pp. 448–450), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 240–241).

5. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + a\frac{\partial}{\partial x}\left(w\frac{\partial w}{\partial x}\right) + b\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + c\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0.$

1°. При $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$ переход к новым независимым переменным по формулам

$$x = \bar{x}\sqrt{-a}, \quad y = \bar{y}\sqrt{-b}, \quad z = \bar{z}\sqrt{-a}, \quad t = \bar{t}/\sqrt{-a}$$

приводит к трехмерному уравнению Хохлова — Заболоцкой 7.1.2.4.

2°. Пусть $w(x,y,z,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2}C_2^2 w(C_1x + C_3, C_2y + C_4, C_2z + C_5, C_1^{-1}C_2^2t + C_6),$$
$$w_2 = w(x + \lambda y + \mu z + \varphi(t), y - 2b\lambda t, z - 2c\mu t, t) - \frac{1}{a}\varphi_t'(t) - \frac{b\lambda^2 + c\mu^2}{a},$$

где $C_1, \ldots, C_6$, λ, μ, β — произвольные постоянные, а $\varphi = \varphi(t)$ — произвольная функция, также будут решениями этого уравнения.

3°. Точные решения:

$$w(x,y,z,t) = \alpha y + \beta z + \frac{1}{at + C}x + \gamma,$$
$$w(x,y,z,t) = \alpha\ln(cy^2 + bz^2) - (\beta_t' + 4abc\beta^2)(cy^2 + bz^2) + 4bc\beta x + \gamma,$$

где $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, $\gamma = \gamma(t)$ — произвольные функции, C — произвольная постоянная.

4°. «Трехмерное» решение с обобщенным разделением переменных, линейное по x:

$$w = f(y,z,t)x + g(y,z,t),$$

где функции $f = f(y,z,t)$ и $g = g(y,z,t)$ описываются уравнениями

$$bf_{yy} + cf_{zz} = 0, \qquad (1)$$
$$bg_{yy} + cg_{zz} = -f_t - af^2. \qquad (2)$$

Индексы y, z, t обозначают соответствующие частные производные. Уравнение (1) при $bc > 0$ растяжением переменных $y = \bar{y}\sqrt{|b|}$, $z = \bar{z}\sqrt{|c|}$ сводится к уравнению Лапласа, а при $bc < 0$ — к волновому уравнению. Уравнение (2) аналогичным образом сводится соответственно к уравнению Пуассона и неоднородному волновому уравнению. О решениях этих линейных уравнений см., например, книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

Замечание. Величины a, b, c могут быть функциями переменных y, z, t.

5°. «Трехмерное» решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по x:

$$w = f(y,z,t)x^2 + g(y,z,t)x + h(y,z,t),$$

где функции $f = f(y,z,t)$, $g = g(y,z,t)$, $h = h(y,z,t)$ описываются системой уравнений

$$bf_{yy} + cf_{zz} = -6af^2,$$
$$bg_{yy} + cg_{zz} = -6afg - 2f_t,$$
$$bh_{yy} + ch_{zz} = -2afh - g_t - ag^2.$$

Замечание. Величины a, b, c могут быть функциями переменных y, z, t.

6°. Существуют «трехмерные» решения следующих видов:

$$w(x,y,z,t) = u(x,t,\xi), \quad \xi = cy^2 + bz^2;$$
$$w(x,y,z,t) = v(p,q,r)x^{k+2}, \quad p = tx^{k+1}, \quad q = yx^{k/2}, \quad r = zx^{k/2},$$

где k — произвольная постоянная.

7°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,z,t) = xU(\eta,t), \quad \eta = (cy^2 + bz^2)x^{-1},$$

где функция $U = U(\eta,t)$ описывается уравнением

$$\eta(a\eta U + 4bc)\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2} - \eta\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial\eta} + a\eta^2\left(\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)^2 - 2(a\eta U - 2bc)\frac{\partial U}{\partial\eta} + \frac{\partial U}{\partial t} + aU^2 = 0.$$

8°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,z,t) = V(\zeta,t) - \frac{\varphi_t' - 4bc}{a\varphi}x, \quad \zeta = cy^2 + bz^2 + \varphi x,$$

где $\varphi = \varphi(t)$ — произвольная функция, а функция $V = V(\zeta,t)$ описывается уравнением

$$a\varphi^2(a\varphi^2 V + 4bc\zeta)\frac{\partial^2 V}{\partial\zeta^2} + a\varphi^3\frac{\partial^2 V}{\partial t\partial\zeta} + a\varphi^2\left(a\varphi^2\frac{\partial V}{\partial\zeta} - \varphi_t' + 12bc\right)\frac{\partial V}{\partial\zeta} -$$
$$- \varphi_{tt}''\varphi + 2(\varphi_t')^2 - 12bc\varphi_t' + 16b^2c^2 = 0.$$

⊙ *Литература*: P. Kucharczyk (1967), S. V. Sukhinin (1978), N. H. Ibragimov (1994, pp. 300–301).

7.1.3. Уравнение нестационарного трансзвукового газового потока

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + a\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - b\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$

Уравнение нестационарного трансзвукового газового потока. Частный случай уравнения 7.1.3.2 при $f(t) = a$ и $g(t) = -b$.

1°. Пусть $w(x, y, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-3} C_2^2 w(C_1 x + C_3, C_2 y + C_4, C_1^{-1} C_2^2 t + C_5) + C_6 yt + C_7 y + C_8 t + C_9,$$
$$w_2 = w(\xi, \eta, t) + \varphi''_{tt}(t) y^2 + 2b\varphi'_t(t) x + \psi(t) y + \chi(t),$$
$$\xi = x + \lambda y + b\lambda^2 t - 2ab\varphi(t), \quad \eta = y + 2b\lambda t,$$

где C_n, λ — произвольные постоянные, а $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$ — произвольные функции, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точное решение:

$$w(x, y, t) = \frac{1}{12b^2}(\gamma''_{tt} + 6a\gamma\gamma'_t + 4a^2\gamma^3) y^4 + \frac{1}{6b}(\alpha'_t + 2a\alpha\gamma) y^3 +$$
$$+ \frac{1}{2b}[2(\gamma'_t + 2a\gamma^2) x + \beta'_t + 2a\beta\gamma] y^2 + (\alpha x + \delta) y + \gamma x^2 + \beta x + \mu,$$

где $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, $\gamma = \gamma(t)$, $\mu = \mu(t)$, $\delta = \delta(t)$ — произвольные функции.

3°. «Двумерное» решение:

$$w(x, y, t) = U(z, t) + \varphi(t) y + \psi(t), \quad z = x + \lambda y,$$

где $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ — произвольные функции, λ — произвольная постоянная, а функция $U = U(z, t)$ определяется уравнением с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{a}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 - b\lambda^2 \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \qquad (1)$$

Полный интеграл этого уравнения имеет вид

$$U = C_1 z + \bigl(b\lambda^2 C_1 - \tfrac{1}{2} a C_1^2\bigr) t + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Общее решение уравнения (1) можно записать в параметрическом виде (В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2003):

$$U = sz + \bigl(b\lambda^2 s - \tfrac{1}{2} a s^2\bigr) t + f(s),$$
$$z + \bigl(b\lambda^2 - as\bigr) t + f'_s(s) = 0,$$

где $f = f(s)$ — произвольная функция, s — параметр.

4°. «Двумерное» решение более общего вида:

$$w(x, y, t) = U(z, t) + \varphi(t) y^2 + \psi(t) y + \chi(t) x + \theta(t), \quad z = x + \lambda y,$$

где $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$, $\theta = \theta(t)$ — произвольные функции, λ — произвольная постоянная, а функция $U = U(z, t)$ определяется уравнением с частными производными первого порядка [$\sigma(t)$ — произвольная функция]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{a}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + \bigl[a\chi(t) - b\lambda^2\bigr] \frac{\partial U}{\partial z} = \bigl[2b\varphi(t) - \chi'_t(t)\bigr] z + \sigma(t).$$

Это уравнение можно проинтегрировать [полный интеграл ищется в виде $U = f(t) z + g(t)$].

5°. «Двумерное» решение с обобщенным разделением переменных, кубическое по x:

$$w(x, y, t) = f(y, t) x^3 + g(y, t) x^2 + h(y, t) x + r(y, t),$$

где функции $f = f(y, t)$, $g = g(y, t)$, $h = h(y, t)$, $r = r(y, t)$ описываются уравнениями

$$bf_{yy} = 18af^2,$$
$$bg_{yy} = 18afg + 3f_t,$$
$$bh_{yy} = 6afh + 4ag^2 + 2g_t,$$
$$br_{yy} = 2agh + h_t.$$

Индексы y и t обозначают соответствующие частные производные. Полагая $f = 0$, $g = \varphi(t) y + \psi(t)$, где $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ — произвольные функции, интегрированием по y можно получить решение, зависящее от шести произвольных функций.

6°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = v(x,r)t^{-1}, \quad r = yt^{-1/2},$$

где функция $v = v(x,r)$ описывается уравнением

$$r\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial r} - 2a\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + 2\frac{\partial v}{\partial r} = 0.$$

7°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = v(p,t) + \frac{\gamma\gamma''_{tt} - 2(\gamma'_t)^2 - 18b\gamma'_t - 40b^2}{12ab\gamma^3}y^4 + \left(\frac{4b+\gamma'_t}{a\gamma^3}p - \delta\right)y^2 + \mu y + \lambda, \quad p = y^2 + \gamma x,$$

где $\gamma = \gamma(t)$, $\mu = \mu(t)$, $\lambda = \lambda(t)$, $\delta = \delta(t)$ — произвольные функции, а функция $v = v(p,t)$ описывается уравнением

$$\left(\gamma'_t p + a\gamma^3\frac{\partial v}{\partial p}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} + \gamma\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial p} + (\gamma'_t - 2b)\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{2b[p(\gamma'_t + 4b) - a\gamma^3\delta]}{a\gamma^3} = 0.$$

⦿ *Литература для уравнения* 7.1.3.1: C. C. Lin, E. Reissner, H. S. Tsien (1948). Е. В. Мамонтов (1969), Е. М. Воробьев, Н. В. Игнатович, Е. О. Семенова (1989), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 242–243).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + f(t)\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-4}w(C_1^2 x + C_2, C_1 y + C_3, t) + C_4 yt + C_5 y + C_6 t + C_7,$$
$$w_2 = w(\xi,\eta,t) - \frac{\varphi'_t(t)}{2g(t)}y^2 + \psi(t)y + \varphi(t)x + \chi(t),$$
$$\xi = x + \lambda y - \int\left[\lambda^2 g(t) + f(t)\varphi(t)\right]dt, \quad \eta = y - 2\lambda\int g(t)\,dt,$$

где $C_1, \ldots, C_7$, λ — произвольные постоянные, а $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$ — произвольные функции, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных в виде полинома четвертой степени по y:

$$w(x,y,t) = a(t)y^4 + b(t)y^3 + [c(t)x + d(t)]y^2 + [\alpha(t)x + \beta(t)]y + \gamma(t)x^2 + \mu(t)x + \delta(t),$$

где $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, $\gamma = \gamma(t)$, $\mu = \mu(t)$, $\delta = \delta(t)$ — произвольные функции, а функции $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$, $d = d(t)$ задаются формулами

$$a = -\frac{c'_t + 2f\gamma c}{12g}, \quad b = -\frac{\alpha'_t + 2f\alpha\gamma}{6g}, \quad c = -\frac{\gamma'_t + 2f\gamma^2}{g}, \quad d = -\frac{\mu'_t + 2f\gamma\mu}{2g}.$$

3°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = U(z,t) + \varphi(t)y^2 + \psi(t)y + \chi(t)x + \theta(t), \quad z = x + \lambda y,$$

где $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$, $\theta = \theta(t)$ — произвольные функции, λ — произвольная постоянная, а функция $U = U(z,t)$ определяется уравнением с частными производными первого порядка [$\sigma(t)$ — произвольная функция]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}f(t)\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + [f(t)\chi(t) + \lambda^2 g(t)]\frac{\partial U}{\partial z} = -[2g(t)\varphi(t) + \chi'_t(t)]z + \sigma(t).$$

Это уравнение можно проинтегрировать [полный интеграл ищется в виде $U = f(t)z + g(t)$].

4°. «Двумерное» решение с обобщенным разделением переменных, кубическое по x:

$$w(x,y,t) = \varphi(y,t)x^3 + \psi(y,t)x^2 + \chi(y,t)x + \theta(y,t),$$

где функции $\varphi = \varphi(y,t)$, $\psi = \psi(y,t)$, $\chi = \chi(y,t)$, $\theta = \theta(y,t)$ описываются уравнениями

$$g\varphi_{yy} + 18f\varphi^2 = 0,$$
$$g\psi_{yy} + 18f\varphi\psi + 3\varphi_t = 0,$$
$$g\chi_{yy} + 6f\varphi\chi + 4f\psi^2 + 2\psi_t = 0,$$
$$g\theta_{yy} + 2f\psi\chi + \chi_t = 0.$$

Индексы y и t обозначают соответствующие частные производные; $f = f(t)$, $g = g(t)$. Эти уравнения можно рассматривать как обыкновенные дифференциальные уравнения относительно y с параметром t; постоянные интегрирования будут произвольными функциями t. Первое уравнение имеет частные решения $\varphi = 0$ и $\varphi = -\dfrac{g}{3f(y+h)^2}$, где $h = h(t)$ — произвольная функция.

5°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = u(p,t) + a(t)y^4 + [b(t)p + c(t)]y^2 + \mu(t)y + \lambda(t), \quad p = y^2 + \gamma(t)x.$$

Здесь $c = c(t)$, $\gamma = \gamma(t)$, $\mu = \mu(t)$, $\lambda = \lambda(t)$ — произвольные функции, а функция $u = u(p,t)$ описывается уравнением

$$\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial p \partial t} + \left(\gamma'_t p + f\gamma^3 \frac{\partial u}{\partial p}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + (\gamma'_t + 2g) \frac{\partial u}{\partial p} + 2g(bp + c) = 0,$$

где функции $a = a(t)$ и $b = b(t)$ определяются формулами

$$a = -\frac{(b\gamma)'_t + 10gb}{12g}, \quad b = \frac{\gamma'_t - 4g}{f\gamma^3}.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 243–244).

7.1.4. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F\Big(x, y, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$

Общее решение:

$$w(x,y) = F\big(y + G(x)\big),$$

где $F(z)$, $G(x)$ — произвольные функции.

⊙ *Литература*: D. Zwillinger (1989, p. 397).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x).$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = \pm C_1^{-1} w(x, C_1 y + \varphi(x)) + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а $\varphi(x)$ — произвольная функция, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения с обобщенным разделением переменных, линейные и квадратичные по y:

$$w(x,y) = \pm y\left[2\int f(x)\,dx + C_1\right]^{1/2} + \varphi(x),$$

$$w(x,y) = C_1 y^2 + \varphi(x)y + \frac{1}{4C_1}\left[\varphi^2(x) - 2\int f(x)\,dx\right] + C_2,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция; C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Преобразование Мизеса

$$\xi = x, \quad \eta = w, \quad U(\xi,\eta) = \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \text{где} \quad w = w(x,y), \tag{1}$$

приводит исходное уравнение к нелинейному уравнению первого порядка

$$U\frac{\partial U}{\partial \xi} = f(\xi), \tag{2}$$

которое не зависит от η. Интегрируя (2) и учитывая равенства (1), получим уравнение первого порядка

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = 2\int f(x)\,dx + \psi(w), \tag{3}$$

где $\psi(w)$ — произвольная функция.

Интегрируя (3), находим общее решение в неявном виде:

$$\int \frac{dw}{\sqrt{2F(x) + \psi(w)}} = \pm y + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$, $\psi(w)$ — произвольные функции; $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)\dfrac{\partial w}{\partial y}$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-1} w(x, C_1 y + C_2) + C_3,$$
$$w_2 = w\bigl(x, y + \varphi(x)\bigr),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а $\varphi(x)$ — произвольная функция, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y) = y\left[\int f(x)\,dx + C\right] + \varphi(x),$$
$$w(x,y) = \varphi(x)e^{\lambda y} - \frac{1}{\lambda}\int f(x)\,dx + C,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция; C, λ — произвольные постоянные.

3°. Рассматриваемое уравнение можно представить как равенство нулю якобиана двух функций w и $v = w_y - \int f(x)\,dx$. Отсюда следует, что величины w и v функционально зависимы, т. е. v должна выражаться через w:

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \int f(x)\,dx = \varphi(w), \qquad (1)$$

где $\varphi(w)$ — произвольная функция. Любое решение уравнения первого порядка (1) для любой функции $\varphi(w)$ будет решением исходного уравнения.

Уравнение (1) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение с независимой переменной y и параметром x. Интегрируя, получим его общее решение в неявном виде:

$$\int \left[\varphi(w) + \int f(x)\,dx\right]^{-1} dw = y + \psi(x),$$

где $\psi(x)$, $\varphi(w)$ — произвольные функции.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)\dfrac{\partial w}{\partial y} + g(y)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Первый интеграл:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \varphi(w) - \int g(y)\,dy + \int f(x)\,dx,$$

где $\varphi(w)$ — произвольная функция. Полученное уравнение можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с независимой переменной y и параметром x.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x) g\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-1} w(x, C_1 y + C_2) + C_3,$$
$$w_2 = w\bigl(x, y + \varphi(x)\bigr),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а $\varphi(x)$ — произвольная функция, также будут решениями этого уравнения.

2°. Первый интеграл:

$$\int \frac{U\,dU}{g(U)} = \varphi(w) + \int f(x)\,dx, \qquad U = \frac{\partial w}{\partial y},$$

где $\varphi(w)$ — произвольная функция. Полученное уравнение можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с независимой переменной y и параметром x.

7.1.5. Другие уравнения с двумя независимыми переменными

1. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+f(y)\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=g(y)w+h(y)x+s(y).$

Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по переменной x:

$$w=\varphi(y)x+\psi(y),$$

где функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f\varphi\varphi''_{yy}+(\varphi'_y)^2=g\varphi+h,$$
$$f\varphi\psi''_{yy}+\varphi'_y\psi'_y=g\psi+s.$$

2. $\left[1-\left(\dfrac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial t}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}-\left[1+\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0.$

Уравнение Борна — Инфельда (Born — Infeld). Используется в нелинейной электродинамике (в теории поля).

1°. Точные решения:

$$w(x,t)=\varphi(x+t),$$
$$w(x,t)=\psi(x-t),$$

где $\varphi(z_1)$, $\psi(z_2)$ — произвольные функции.

2°. Задача Коши с начальными условиями:

$$w=f(x)\quad\text{при}\quad t=0,\qquad \partial_t w=g(x)\quad\text{при}\quad t=0.$$

Считается, что выполнено условие гиперболичности: $1+[f'_x(x)]^2-g^2(x)>0$.

Решение в параметрическом виде:

$$t=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\frac{1+[f'_\zeta(\zeta)]^2}{\sqrt{1+[f'_\zeta(\zeta)]^2-g^2(\zeta)}}\,d\zeta,$$
$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\frac{f'_\zeta(\zeta)g(\zeta)\,d\zeta}{\sqrt{1+[f'_\zeta(\zeta)]^2-g^2(\zeta)}},$$
$$w=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}+\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\frac{g(\zeta)\,d\zeta}{\sqrt{1+[f'_\zeta(\zeta)]^2-g^2(\zeta)}}.$$

3°. Уравнение Борна — Инфельда путем введения новых переменных

$$\xi=x-t,\quad \eta=x+t,\quad u=\frac{\partial w}{\partial\xi},\quad v=\frac{\partial w}{\partial\eta},$$

можно записать в виде эквивалентной системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{\partial v}{\partial\xi}=0,$$
$$v^2\frac{\partial u}{\partial\xi}-(1+2uv)\frac{\partial u}{\partial\eta}+u^2\frac{\partial v}{\partial\eta}=0.$$

Преобразование годографа (u, v принимаются за независимые переменные, а ξ, η — за зависимые переменные) приводит к линейной системе

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\xi}{\partial v}-\frac{\partial\eta}{\partial u}=0,\\ v^2&\frac{\partial\eta}{\partial v}+(1+2uv)\frac{\partial\xi}{\partial v}+u^2\frac{\partial\xi}{\partial u}=0,\end{aligned}\tag{1}$$

а после исключения η — к линейному уравнению второго порядка

$$u^2\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}+(1+2uv)\frac{\partial^2\xi}{\partial u\partial v}+v^2\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2}+2u\frac{\partial\xi}{\partial u}+2v\frac{\partial\xi}{\partial v}=0.$$

Считая, что искомые решения находятся в гиперболической области, запишем уравнение характеристик

$$u^2\,dv^2-(1+2uv)\,du\,dv+v^2\,du^2=0.$$

Интегралы этого уравнения имеют вид $r = C_1$, $s = C_2$, где

$$r = \frac{\sqrt{1+4uv}-1}{2v}, \qquad s = \frac{\sqrt{1+4uv}-1}{2u}. \tag{2}$$

Переходя в (1) к новым переменным (2), получим

$$\begin{aligned} r^2\frac{\partial\xi}{\partial r} + \frac{\partial\eta}{\partial r} &= 0,\\ \frac{\partial\xi}{\partial s} + s^2\frac{\partial\eta}{\partial s} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Исключив переменную η, приходим простейшему уравнению

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial r\partial s} = 0,$$

общим решением которого является сумма двух произвольных функций разных аргументов. Функция η определяется из системы (3).

4°. Преобразование Лежандра

$$w(x,t) + u(\zeta,\tau) = x\zeta + t\tau, \quad \zeta = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tau = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad x = \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \quad t = \frac{\partial u}{\partial \tau}$$

приводит к линейному уравнению

$$\left(1-\tau^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2} - 2\zeta\tau\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial\tau} - \left(1+\zeta^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2} = 0.$$

⦿ *Литература для уравнения* 7.1.5.2: M. Born, L. Infeld (1934), Б. М. Барбашов, Н. А. Черников (1966), Дж. Уизем (1977, стр. 588–590).

3. $\displaystyle \left[a + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2b\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \left[c + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$

Уравнение минимальных поверхностей (при $a = b = c = 1$). Описывает, например, форму мыльной пленки, ограниченной заданным контуром.

1°. Преобразование Лежандра

$$w(x,y) + u(\xi,\eta) = x\xi + y\eta, \quad \xi = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad x = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad y = \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

приводит к линейному уравнению

$$\left(a+\eta^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + 2b\xi\eta\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \left(c+\xi^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} = 0.$$

2°. Общее решение в параметрическом виде при $a = b = c = 1$:

$$x = \operatorname{Re} f_1(z), \quad y = \operatorname{Re} f_2(z), \quad w = \operatorname{Re} f_3(z),$$

где $f_k(z)$ — произвольные аналитические функции комплексного аргумента $z = \alpha + i\beta$, производные которых удовлетворяют одному условию

$$[f_1'(z)]^2 + [f_2'(z)]^2 + [f_3'(z)]^2 = 0.$$

В качестве одной из функций $f_k(z)$ можно взять z.

⦿ *Литература*: Р. Курант (1964, стр. 49, 66–67, 171–173).

4. $\displaystyle f(w)\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left[g(w)\frac{\partial w}{\partial y} - f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - g(w)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$

1°. Первый интеграл:

$$f(w)\frac{\partial w}{\partial x} + g(w)\frac{\partial w}{\partial y} = \varphi(w),$$

где $\varphi(w)$ — произвольная функция.

2°. Общее решение в неявной форме:

$$\Psi\left(x - \int\frac{f(w)}{\varphi(w)}\,dw,\; y - \int\frac{g(w)}{\varphi(w)}\,dw\right) = 0,$$

где $\Psi(z_1,z_2)$, $\varphi(w)$ — произвольные функции.

5. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = F\left(y, \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \dfrac{\partial w}{\partial y} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}}$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-1} w(C_1 x + C_2, y) + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Преобразование Эйлера

$$w(x,y) + u(\xi,\eta) = x\xi, \quad x = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad y = \eta$$

приводит к линейному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F(\eta, \xi) \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

6. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f(\theta) \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - [\theta f(\theta) + \theta^2] \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \qquad \theta = \dfrac{\partial w}{\partial y} \Big/ \dfrac{\partial w}{\partial x}}$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1 w(C_2 x + C_3,\, C_2 y + C_4) + C_5,$$
$$w_2 = \Phi\bigl(w(x,y)\bigr),$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные, $\Phi(u)$ — произвольная функция, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w = \Phi(k_1 x + k_2 y),$$

где $\Phi(z)$ — произвольная функция; k_1, k_2 — произвольные постоянные.

3°. Существуют решения следующих видов:

$w(x,y) = e^{kx} U_1(y)$ (решение с мультипликативным разделением переменных),

$w(x,y) = e^{ky} U_2(x)$ (решение с мультипликативным разделением переменных),

$w(x,y) = x^k U_1(y/x)$ (автомодельное решение),

где k — произвольная постоянная.

4°. Преобразование Лежандра

$$x = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad y = \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad w = x\xi + y\eta - u$$

приводит к линейному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + f(\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - [\theta f(\theta) + \theta^2] \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0, \qquad \theta = \frac{\eta}{\xi}.$$

⊙ *Литература*: В. И. Арнольд (2000, стр. 139), О. Ф. Меньших (2004).

7. $\boldsymbol{\left[f^2 - \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \dfrac{\partial w}{\partial x} \dfrac{\partial w}{\partial y} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left[f^2 - \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad f = f(w_x^2 + w_y^2)}$.

Это уравнение описывает двумерное стационарное изэнтропическое течение сжимаемого газа, w — потенциал скоростей, f — скорость звука, w_x и w_y — краткие обозначения частных производных.

Преобразование Лежандра

$$w(x,y) + U(\xi,\eta) = x\xi + y\eta, \quad \xi = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad x = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad y = \frac{\partial U}{\partial \eta}$$

приводит к линейному уравнению

$$\left(f^2 - \xi^2\right) \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + 2\xi\eta \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \left(f^2 - \eta^2\right) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0, \qquad f = f(\xi^2 + \eta^2).$$

⊙ *Литература*: Р. Курант (1964, стр. 49).

7.1.6. Другие уравнения с тремя независимыми переменными

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + f\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-1} w(C_1 x + C_2, C_1 y + C_3, C_1 t + C_4) + C_5 yt + C_6 y + C_7 t + C_8,$$
$$w_2 = w(x + \lambda y - b\lambda^2 t, y - 2b\lambda t, t) + \varphi(t)y + \psi(t),$$

где $C_1, \ldots, C_8, \lambda$ — произвольные постоянные, а $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ — произвольные функции, также будут решениями этого уравнения.

2°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = U(z,t) + \varphi(t)y^2 + \psi(t)y + \chi(t), \quad z = x + \lambda y,$$

где $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$ — произвольные функции, λ — произвольная постоянная, а функция $U = U(z,t)$ описывается уравнением в частных производных первого порядка [$\sigma(t)$ — произвольная функция]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + F\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) + b\lambda^2 \frac{\partial U}{\partial z} + 2b\varphi(t)z = \sigma(t), \quad F(u) = \int f(u)\,du.$$

Полный интеграл этого уравнения имеет вид

$$U = A(t)z + B(t),$$

где функции $A(t)$ и $B(t)$ определяются формулами

$$A(t) = -2b\int \varphi(t)\,dt + C_1, \quad B(t) = \int \Big[\sigma(t) - F(A(t)) - b\lambda^2 A(t)\Big]\,dt + C_2,$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 245).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + f(t)\Phi\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(\xi,\eta,t) + \varphi(t)y + \psi(t), \quad \xi = x + \lambda y - \lambda^2\int g(t)\,dt + C_1, \quad \eta = y - 2\lambda\int g(t)\,dt + C_2,$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные, а $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ — произвольные функции, также будет решением этого уравнения.

2°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = U(z,t) + \varphi(t)y^2 + \psi(t)y + \chi(t), \quad z = x + \lambda y,$$

где $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$ — произвольные функции, λ — произвольная постоянная, а функция $U = U(z,t)$ описывается уравнением в частных производных первого порядка [$\sigma(t)$ — произвольная функция]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + f(t)\Psi\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) + \lambda^2 g(t)\frac{\partial U}{\partial z} + 2g(t)\varphi(t)z = \sigma(t), \quad \Psi(u) = \int \Phi(u)\,du,$$

Это уравнение можно проинтегрировать [полный интеграл ищется в виде $U = A(t)z + B(t)$].

7.2. Уравнения, квадратичные относительно старших производных

7.2.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F(x,y)$

► *Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция*

$$w_1 = w(x,y) + C_1 xy + C_2 x + C_3 y + C_4,$$

где C_1, …, C_4 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)y^k.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-k-2}w(x, C_1^2 y) + C_2xy + C_3x + C_4y + C_5,$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y) = (C_1x + C_2)y^{k+1} + \frac{y}{k(k+1)}\int_0^x \frac{(x-t)f(t)}{(C_1t + C_2)}\,dt + C_3xy + C_4x + C_5y + C_6,$$

$$w(x,y) = (C_1x + C_2)y^{k+2} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}\int_0^x \frac{(x-t)f(t)}{(C_1t + C_2)}\,dt + C_3xy + C_4x + C_5y + C_6,$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные.

3°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^{\frac{k+2}{2}} + C_1xy + C_2x + C_3y + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k(k+2)\varphi\varphi''_{xx} = 4f(x).$$

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)g(y).$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y) = C_1\int_0^x (x-t)f(t)\,dt + C_2x + \frac{1}{C_1}\int_0^y (y-\tau)g(\tau)\,d\tau + C_3y + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \varphi(x)\psi(y),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (C_1 — произвольная постоянная)

$$\varphi\varphi''_{xx} = C_1f(x),$$
$$\psi\psi''_{yy} = C_1^{-1}g(y).$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(ax + by).$

Точные решения:

$$w(x,y) = \pm\frac{1}{ab}\int_0^z (z-t)\sqrt{f(t)}\,dt + C_1xy + C_2x + C_3y + C_4, \qquad z = ax + by,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)y^{2k} + g(x)y^k + h(x)y^{k-1}.$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^{k+1} + \psi(x)y + \chi(x),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(x)$, $\chi = \chi(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$k(k+1)\varphi\varphi''_{xx} = f(x),$$
$$k(k+1)\varphi\psi''_{xx} = g(x),$$
$$k(k+1)\varphi\chi''_{xx} = h(x).$$

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)e^{\lambda y}$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w\Bigl(x, y - \frac{2}{\lambda}\ln|C_1|\Bigr) + C_2 xy + C_3 x + C_4 y + C_5,$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y) = (C_1 x + C_2)e^{\lambda y} + \frac{1}{\lambda^2}\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)f(t)}{C_1 t + C_2}\,dt + C_3 xy + C_4 x + C_5 y + C_6,$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные; x_0 — любое число, при котором подынтегральное выражение не имеет особенности.

3°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y) = \varphi(x)e^{\lambda y/2} + C_1 xy + C_2 x + C_3 y + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\lambda^2\varphi\varphi''_{xx} = 4f(x)$.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)e^{2\lambda y} + g(x)e^{\lambda y}$.

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y) = \varphi(x)e^{\lambda y} + \frac{1}{\lambda^2}\int_{x_0}^{x}(x-t)\frac{g(t)}{\varphi(t)}\,dt + C_1 xy + C_2 x + C_3 y + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\lambda^2\varphi\varphi''_{xx} = f(x)$.

7.2.2. Уравнение Монжа — Ампера $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F(x,y)$

Предварительные замечания.

Уравнение Монжа — Ампера (Monge–Ampère) встречается в задачах дифференциальной геометрии, газовой динамики и метеорологии.

1°. Пусть $w(x,y)$ является решением уравнения Монжа — Ампера. Тогда функции

$$w_1 = \pm w(x,y) + C_1 x + C_2 y + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Преобразование

$$\bar x = a_1 x + b_1 y + c_1,\quad \bar y = a_2 x + b_2 y + c_2,\quad \bar w = kw + a_3 x + b_3 y + c_3,\quad \bar F = k^2(a_1 b_2 - a_2 b_1)^{-2}F,$$

где a_n, b_n, c_n, k — произвольные постоянные, переводит уравнение Монжа — Ампера в уравнение того же вида.

3°. Преобразование

$$\bar x = x(1+\alpha x+\beta y)^{-1},\quad \bar y = y(1+\alpha x+\beta y)^{-1},\quad \bar w = w(1+\alpha x+\beta y)^{-1},\quad \bar F = F(1+\alpha x+\beta y)^4,$$

где α, β — произвольные постоянные, переводит уравнение Монжа — Ампера в уравнение того же вида.

4°. В лагранжевых координатах система уравнений одномерной газовой динамики с плоскими волнами имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0,\qquad \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0,$$

где t — время, u — скорость, p — давление, ξ — лагранжева координата, V — удельный объем. Считается, что уравнение состояния описывается зависимостью $V = V\bigl(p, S(\xi)\bigr)$, где $S = S(\xi)$ — заданное распределение энтропии.

Преобразование Мартина

$$u(\xi,t) = \frac{\partial w}{\partial x}(x,y),\quad t = \frac{\partial w}{\partial y}(x,y),\quad x = \xi,\quad y = p(\xi,t)$$

сводит уравнения одномерной газовой динамики к неоднородному уравнению Монжа — Ампера

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F(x,y),$$

где $F(x,y) = -\frac{\partial V}{\partial p}\bigl(p, S(\xi)\bigr)$.

⦿ *Литература*: M. N. Martin (1953), Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко (1978, стр. 318, 319), С. В. Хабиров (1990 *b*), N. H. Ibragimov (1994, pp. 94–101).

1. $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$

Однородное уравнение Монжа — Ампера.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение однородного уравнения Монжа — Ампера. Тогда функции

$$w_1 = C_1 w(C_2 x + C_3 y + C_4, C_5 x + C_6 y + C_7) + C_8 x + C_9 y + C_{10},$$
$$w_2 = (1 + C_1 x + C_2 y) w\left(\frac{x}{1 + C_1 x + C_2 y}, \frac{y}{1 + C_1 x + C_2 y}\right),$$

где $C_1, \ldots, C_{10}$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Первые интегралы:

$$\Phi_1\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0,$$
$$\Phi_2\left(\frac{\partial w}{\partial x}, w - x\frac{\partial w}{\partial x} - y\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0,$$

где $\Phi_1(u,v)$, $\Phi_2(u,z)$ — произвольные функции двух аргументов.

3°. Общее решение в параметрическом виде:

$$w = tx + \varphi(t) y + \psi(t),$$
$$x + \varphi'(t) y + \psi'(t) = 0,$$

где t — параметр; $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ — произвольные функции.

4°. Точные решения, содержащие одну произвольную функцию:

$$w(x,y) = \varphi(C_1 x + C_2 y) + C_3 x + C_4 y + C_5,$$
$$w(x,y) = (C_1 x + C_2 y)\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + C_3 x + C_4 y + C_5,$$
$$w(x,y) = (C_1 x + C_2 y + C_3)\varphi\left(\frac{C_4 x + C_5 y + C_6}{C_1 x + C_2 y + C_3}\right) + C_7 x + C_8 y + C_9,$$

где $C_1, \ldots, C_9$ — произвольные постоянные, $\varphi = \varphi(z)$ — произвольная функция.

5°. Точные решения, содержащие произвольные постоянные:

$$w(x,y) = C_1 y^2 + C_2 xy + \frac{C_2^2}{4C_1} x^2 + C_3 y + C_4 x + C_5,$$
$$w(x,y) = \frac{1}{x + C_1}\left(C_2 y^2 + C_3 y + \frac{C_3^2}{4C_2}\right) + C_4 y + C_5 x + C_6,$$
$$w(x,y) = \pm (C_1 x + C_2 y + C_3)^k + C_4 x + C_5 y + C_6,$$
$$w(x,y) = \pm \frac{(C_1 x + C_2 y + C_3)^{k+1}}{(C_4 x + C_5 y + C_6)^k} + C_7 x + C_8 y + C_9,$$
$$w(x,y) = \pm\sqrt{C_1 (x+a)^2 + C_2 (x+a)(y+b) + C_3 (y+b)^2} + C_5 x + C_6 y + C_7,$$

где a, b, C_n — произвольные постоянные.

⦿ *Литература для уравнения* 7.2.2.1: Э. Гурса (1933, стр. 62), С. В. Хабиров (1990 *b*), N. H. Ibragimov (1994, pp. 94–101).

2. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = A.$

1°. Первые интегралы при $A = a^2 > 0$:

$$\Phi_1\left(\frac{\partial w}{\partial x} + ay, \frac{\partial w}{\partial y} - ax\right) = 0,$$
$$\Phi_2\left(\frac{\partial w}{\partial x} - ay, \frac{\partial w}{\partial y} + ax\right) = 0,$$

где $\Phi_n(u, v)$ — произвольные функции двух аргументов ($n = 1, 2$).

2°. Общее решение в параметрическом виде при $A = a^2 > 0$:

$$x = \frac{\beta - \lambda}{2a}, \quad y = \frac{\psi'(\lambda) - \varphi'(\beta)}{2a}, \quad w = \frac{(\beta + \lambda)[\psi'(\lambda) - \varphi'(\beta)] + 2\varphi(\beta) - 2\psi(\lambda)}{4a},$$

где β, λ — параметры; $\varphi = \varphi(\beta)$, $\psi = \psi(\lambda)$ — произвольные функции.

3°. Точные решения:

$$w(x, y) = \pm\frac{\sqrt{A}}{C_2}x(C_1x + C_2y) + \varphi(C_1x + C_2y) + C_3x + C_4y,$$
$$w(x, y) = C_1y^2 + C_2xy + \frac{1}{4C_1}(C_2^2 - A)x^2 + C_3y + C_4x + C_5,$$
$$w(x, y) = \frac{1}{x + C_1}\left(C_2y^2 + C_3y + \frac{C_3^2}{4C_2}\right) - \frac{A}{12C_2}(x^3 + 3C_1x^2) + C_4y + C_5x + C_6,$$
$$w(x, y) = \pm\frac{2\sqrt{A}}{3C_1C_2}(C_1x - C_2^2y^2 + C_3)^{3/2} + C_4x + C_5y + C_6,$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные, $\varphi = \varphi(z)$ — произвольная функция.

Пять других решений можно получить:

(a) из решения уравнения 7.2.2.18 при $\alpha = 0$, $f(u) = A$, где β — произвольная постоянная;
(b) из решения уравнения 7.2.2.20 при $f(u) = A$, где a, b, c — произвольные постоянные;
(c) из решения уравнения 7.2.2.21 при $f(u) = A$, где a, b, c, k, s — произвольные постоянные;
(d) из решения уравнения 7.2.2.22 при $\alpha = 0$, $f(u) = A$, где β — произвольная постоянная;
(e) из решения уравнения 7.2.2.24 при $\alpha = 0$, $f(u) = A$, где β — произвольная постоянная.

4°. Преобразование Лежандра

$$u = x\xi + y\eta - w(x, y), \quad \xi = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial w}{\partial y},$$

где $u = u(\xi, \eta)$ — новая зависимая переменная, а ξ и η — новые независимые переменные, приводит к уравнению того же вида

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{1}{A}.$$

⊙ *Литература*: Э. Гурса (1933, стр. 63–64).

3. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x).$

1°. Пусть $w(x, y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-1}w(x, C_2x \pm C_1y + C_3) + C_4x + C_5y + C_6,$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точное решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по y:

$$w(x, y) = C_1y^2 + C_2xy + \frac{C_2^2}{4C_1}x^2 - \frac{1}{2C_1}\int_0^x (x - t)f(t)\,dt + C_3y + C_4x + C_5,$$
$$w(x, y) = \frac{1}{x + C_1}\left(C_2y^2 + C_3y + \frac{C_3^2}{4C_2}\right) - \frac{1}{2C_2}\int_0^x (x - t)(t + C_1)f(t)\,dt + C_4y + C_5x + C_6,$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные.

3°. Точные решения с обобщенным разделением переменных при $f(x)>0$:

$$w(x,y)=\pm y\int\sqrt{f(x)}\,dx+\varphi(x)+C_1y,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция.

4°. Закон сохранения:

$$D_x\bigl[y(w_xw_{yy}-w_yw_{xy}+g_y)-g-w_xw_y\bigr]+D_y\bigl[y(w_yw_{xx}-w_xw_{xy}+g_x)+(w_x)^2\bigr]=0,$$

где $D_x=\dfrac{\partial}{\partial x}$, $D_y=\dfrac{\partial}{\partial y}$, $g=y\displaystyle\int f(x)\,dx+\varphi(x)+\psi(y)$; $\varphi(x)$, $\psi(y)$ — произвольные функции.

5°. Рассмотрим некоторые конкретные зависимости $f=f(x)$. Решения, которые могут быть получены по формулам из пп. 1° и 2°, опускаются.

5.1. Точные решения при $f(x)=Ax^k$ можно получить:

(a) из решения уравнения 7.2.2.18 при $f(u)=A$, $\alpha=k/2$, где β — произвольная постоянная;
(b) из решения уравнения 7.2.2.24 при $f(u)=A$, $\alpha=k/2$, где β — произвольная постоянная.

5.2. Точные решения при $f(x)=Ae^{\lambda x}$:

$$w(x,y)=\pm\frac{2\sqrt{A}}{C_2\lambda}e^{\lambda x/2}\sin(C_1x+C_2y+C_3)+C_4x+C_5y+C_6,$$

$$w(x,y)=\pm\frac{2\sqrt{A}}{C_2\lambda}e^{\lambda x/2}\operatorname{sh}(C_1x+C_2y+C_3)+C_4x+C_5y+C_6,$$

$$w(x,y)=\pm\frac{2\sqrt{-A}}{C_2\lambda}e^{\lambda x/2}\operatorname{ch}(C_1x+C_2y+C_3)+C_4x+C_5y+C_6.$$

Еще одно решение можно получить из решения уравнения 7.2.2.22 при $\alpha=\lambda$, $f(u)=A$, где β — произвольная постоянная.

⊙ *Литература для уравнения* 7.2.2.3: M. N. Martin (1953), C. S. Ludford (1955), Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко (1978, стр. 319), С. В. Хабиров (1990*b*), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 250).

4. $\displaystyle\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=f(x)y.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=\pm C_1^{-3}w(x,C_1^2y)+C_2x+C_3y+C_4,$$

где $C_1,\,\dots,\,C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной y:

$$w(x,y)=C_1y^2-y\int F(x)\,dx+\frac{1}{2C_1}\int_a^x(x-t)F^2(t)\,dt+C_2x+C_3y+C_4,$$

$$F(x)=\frac{1}{2C_1}\int f(x)\,dx+C_5,$$

где $C_1,\,\dots,\,C_5$ — произвольные постоянные.

3°. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной y:

$$w(x,y)=\varphi(x)y^2+\psi(x)y+\chi(x),$$

где

$$\varphi(x)=\frac{1}{C_1x+C_2},\quad \psi(x)=C_3\varphi(x)+C_4+\frac{\varphi(x)}{2C_1}\int\frac{f(x)\,dx}{[\varphi(x)]^3}-\frac{1}{2C_1}\int\frac{f(x)\,dx}{[\varphi(x)]^2},$$

$$\chi(x)=\frac{1}{2}\int_a^x(x-t)\frac{[\psi'_t(t)]^2}{\varphi(t)}\,dt+C_5x+C_6.$$

4°. Точные решения с обобщенным разделением переменных, кубические по y:

$$w(x,y)=C_1y^3-\frac{1}{6C_1}\int_a^x(x-t)f(t)\,dt+C_2x+C_3y+C_4,$$

$$w(x,y)=\frac{y^3}{(C_1x+C_2)^2}-\frac{1}{6}\int_a^x(x-t)(C_1t+C_2)^2f(t)\,dt+C_3x+C_4y+C_5,$$

где $C_1,\,\dots,\,C_5$ — произвольные постоянные.

5°. См. решение уравнения 7.2.2.7 в п. 3° при $k=1$.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 250).

5. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)y^2.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = \pm C_1^{-2} w(x, C_1 y) + C_2 x + C_3 y + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной y:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^2 + \left[C_1 \int \varphi^2(x)\,dx + C_2\right] y + \frac{1}{2} C_1^2 \int_a^x (x-t)\varphi^3(t)\,dt + C_3 x + C_4,$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi\varphi''_{xx} = 2(\varphi'_x)^2 - \tfrac{1}{2} f(x).$$

3°. Точные решения с обобщенным разделением переменных, в виде полиномов четвертой степени по y:

$$w(x,y) = C_1 y^4 - \frac{1}{12C_1}\int_a^x (x-t)f(t)\,dt + C_2 x + C_3 y + C_4,$$

$$w(x,y) = \frac{y^4}{(C_1 x + C_2)^3} - \frac{1}{12}\int_a^x (x-t)(C_1 t + C_2)^3 f(t)\,dt + C_3 x + C_4 y + C_5,$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные.

4°. См. решение уравнения 7.2.2.7 в п. 3° при $k = 2$.

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 251).

6. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)y^2 + g(x)y + h(x).$

Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной y:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^2 + \psi(x)y + \chi(x),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(x)$, $\chi = \chi(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\varphi\varphi''_{xx} &= 2(\varphi'_x)^2 - \tfrac{1}{2} f(x),\\ \varphi\psi''_{xx} &= 2\varphi'_x\psi'_x - \tfrac{1}{2} g(x),\\ \varphi\chi''_{xx} &= \tfrac{1}{2}(\psi'_x)^2 - \tfrac{1}{2} h(x).\end{aligned}$$

7. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)y^k.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = \pm C_1^{-k-2} w(x, C_1^2 y) + C_2 x + C_3 y + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y) = \frac{C_1 y^{k+2}}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{C_1}\int_a^x (x-t)f(t)\,dt + C_2 x + C_3 y + C_4,$$

$$w(x,y) = \frac{y^{k+2}}{(C_1 x + C_2)^{k+1}} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\int_a^x (x-t)(C_1 t + C_2)^{k+1} f(t)\,dt + C_3 x + C_4 y + C_5,$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные.

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \varphi(x) y^{\frac{k+2}{2}},$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k(k+2)\varphi\varphi''_{xx} - (k+2)^2(\varphi'_x)^2 + 4f(x) = 0.$$

4°. Рассмотрим подробнее случай степенной зависимости $f(x) = Ax^n$.

Точные решения:

$$w(x,y)=\frac{C_1x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}-\frac{Ay^{k+2}}{C_1(k+1)(k+2)}+C_2y+C_3x+C_4,$$

$$w(x,y)=\frac{C_1x^{n+2}}{(n+1)(n+2)y^{n+1}}-\frac{Ay^{k+n+3}}{C_1(k+n+2)(k+n+3)}+C_2y+C_3x+C_4,$$

$$w(x,y)=\frac{C_1y^{k+2}}{(k+1)(k+2)x^{k+1}}-\frac{Ax^{k+n+3}}{C_1(k+n+2)(k+n+3)}+C_2y+C_3x+C_4,$$

$$w(x,y)=(C_1x+C_2)^{-k-1}y^{k+2}-\frac{A}{(k+1)(k+2)}\int_a^x(x-t)t^n(C_1t+C_2)^{k+1}\,dt+C_3y+C_4x,$$

$$w(x,y)=(C_1y+C_2)^{-n-1}x^{n+2}-\frac{A}{(n+1)(n+2)}\int_a^y(y-t)t^k(C_1t+C_2)^{n+1}\,dt+C_3y+C_4x,$$

где $C_1,\,\ldots,\,C_4$ — произвольные постоянные.

Имеется также решение в виде произведения функций разных аргументов, указанное в п. 3° при $f(x)=Ax^n$, и решение такого же типа

$$w(x,y)=\psi(y)x^{\frac{n+2}{2}},$$

где функция $\psi=\psi(y)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$n(n+2)\psi\psi''_{yy}-(n+2)^2(\psi'_y)^2+4Ay^k=0.$$

Подстановка $\psi=U^{-n/2}$ приводит его к уравнению Эмдена–Фаулера

$$U''_{yy}=\frac{8A}{n^2(n+2)}y^kU^{n+1},$$

точные решения которого для различных значений параметров k, n указаны в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

Другое точное решения при $f(x)=Ax^n$ можно получить из решения уравнения 7.2.2.18 при $f(u)=Au^k$, $n=2\alpha+k\beta$, где α, β — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 251–252).

8. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=f(x)y^{2k+2}+g(x)y^k.$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y)=\varphi(x)y^{k+2}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\int_a^x(x-t)\frac{g(t)}{\varphi(t)}\,dt+C_1x+C_2y+C_3,$$

где функция $\varphi=\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(k+1)(k+2)\varphi\varphi''_{xx}-(k+2)^2(\varphi'_x)^2+f(x)=0.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 252).

9. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=f(x)e^{\lambda y}.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=\pm C_1w\Big(x,\,y-\frac{2}{\lambda}\ln|C_1|\Big)+C_2x+C_3y+C_4,$$

где $C_1,\,\ldots,\,C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y)=C_1\int_a^x(x-t)f(t)\,dt+C_2x-\frac{1}{C_1\lambda^2}e^{\lambda y}+C_3y+C_4,$$

$$w(x,y)=C_1e^{\beta x+\lambda y}-\frac{1}{C_1\lambda^2}\int_a^x(x-t)e^{-\beta t}f(t)\,dt+C_2x+C_3y+C_4,$$

где $C_1,\,\ldots,\,C_4$, β — произвольные постоянные.

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y)=\varphi(x)\exp\big(\tfrac{1}{2}\lambda y\big),$$

где функция $\varphi=\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi\varphi''_{xx}-(\varphi'_x)^2+4\lambda^{-2}f(x)=0.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 252).

10. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)e^{2\lambda y} + g(x)e^{\lambda y}.$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y) = \varphi(x)e^{\lambda y} - \frac{1}{\lambda^2}\int_a^x (x-t)\,\frac{g(t)}{\varphi(t)}\,dt + C_1 x + C_2 y + C_3,$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi\varphi''_{xx} - (\varphi'_x)^2 + \lambda^{-2} f(x) = 0.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 252).

11. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)g(y) + A^2.$

Точные решения с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y) = C_1\int_a^x (x-t)f(t)\,dt - \frac{1}{C_1}\int_b^y (y-\xi)g(\xi)\,d\xi \pm Axy + C_2 x + C_3 y + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные; a, b — любые числа, для которых имеют смысл данные интегралы.

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 457).

12. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(ax + by).$

1°. Точные решения:

$$w(x,y) = \pm\frac{x}{b}\int \sqrt{f(z)}\,dz + \varphi(z) + C_1 x + C_2 y, \qquad z = ax + by,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, $\varphi(z)$ — произвольная функция.

2°. Преобразование

$$w = U(x,z), \quad z = ax + by$$

приводит к уравнению вида 7.2.2.3:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + b^{-2} f(z).$$

Здесь переменные x и z играют соответственно роль y и x в 7.2.2.3.

⊙ *Литература*: M. N. Martin (1953), C. S. Ludford (1955), Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко (1978, стр. 319).

13. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = x^k f(ax + by).$

Преобразование

$$w = U(x,z), \quad z = ax + by$$

приводит к уравнению вида 7.2.2.7:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + b^{-2} x^k f(z).$$

Здесь переменные x и z играют соответственно роль y и x в 7.2.2.7.

14. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = x^{2k+2} f(ax + by) + x^k g(ax + by).$

Преобразование

$$w = U(x,z), \quad z = ax + by$$

приводит к уравнению вида 7.2.2.8:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + b^{-2} x^{k+2} f(z) + b^{-2} x^k g(z).$$

Здесь переменные x и z играют соответственно роль y и x в 7.2.2.7.

15. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = e^{\lambda x} f(ax + by)$.

Преобразование

$$w = U(x, z), \quad z = ax + by$$

приводит к уравнению вида 7.2.2.9:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + b^{-2} e^{\lambda x} f(z).$$

Здесь переменные x и z играют соответственно роль y и x в 7.2.2.9.

16. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = e^{2\lambda x} f(ax + by) + e^{\lambda x} g(ax + by)$.

Преобразование

$$w = U(x, z), \quad z = ax + by$$

приводит к уравнению вида 7.2.2.10:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + b^{-2} e^{2\lambda x} f(z) + b^{-2} e^{\lambda x} g(z).$$

Здесь переменные x и z играют соответственно роль y и x в 7.2.2.10.

17. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \dfrac{1}{x^4} f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Частный случай уравнения 7.2.2.18 при $\alpha = -2$, $\beta = -1$.

1°. Пусть $w(x, y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = \pm w(C_1 x,\, C_1 y) + C_2 x + C_3 y + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Интеграл:

$$w - x\frac{\partial w}{\partial x} - y\frac{\partial w}{\partial y} \pm \int \sqrt{f(z)}\, dz = C, \qquad z = \frac{y}{x},$$

где C — произвольная постоянная.

3°. Точные решения:

$$w = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \pm \int \sqrt{f(z)}\, dz + C, \qquad z = \frac{y}{x},$$

где $\varphi(z)$ — произвольная функция.

4°. Закон сохранения:

$$D_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + D_y\left[-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + x^{-3} F\left(\frac{y}{x}\right)\right] = 0,$$

где $D_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $D_y = \dfrac{\partial}{\partial y}$, $F(z) = \displaystyle\int f(z)\, dz$.

⦿ *Литература*: M. N. Martin (1953), C. S. Ludford (1955), Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко (1978, стр. 319), С. В. Хабиров (1990 *b*).

18. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = x^{2\alpha} f(x^\beta y)$.

1°. Пусть $w(x, y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = \pm C_1^{\beta - \alpha - 1} w(C_1 x,\, C_1^{-\beta} y) + C_2 x + C_3 y + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Автомодельное решение:

$$w(x, y) = x^{\alpha - \beta + 1} u(z) \quad z = x^\beta y,$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[\beta(\beta + 1) z u'_z + (\alpha - \beta)(\beta - \alpha - 1) u] u''_{zz} + (\alpha + 1)^2 (u'_z)^2 - f(z) = 0.$$

⦿ *Литература*: С. В. Хабиров (1990 *b*).

19. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(ax - by^2).$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(x + 2bC_1 y + abC_1, y + aC_1) + C_2 x + C_3 y + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x,y) = \pm\int\sqrt{F(z) + C_1}\,dz + C_2 x + C_3 y + C_4, \quad F(z) = \frac{1}{a^2 b}\int f(z)\,dz, \quad z = ax - by^2,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 254).

20. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(ax^2 + bxy + cy^2).$

Точное решение при $b^2 \neq 4ac$:

$$w(x,y) = u(z) \quad z = ax^2 + bxy + cy^2,$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2(4ac - b^2) z u'_z u''_{zz} + (4ac - b^2)(u'_z)^2 + f(z) = 0.$$

Интегрируя, получим

$$u(z) = \pm\int\sqrt{\frac{F(z)}{z}}\,dz + C_1, \quad F(z) = \frac{1}{b^2 - 4ac}\int f(z)\,dz + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 254).

21. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(ax^2 + bxy + cy^2 + kx + sy).$

Точное решение:

$$w(x,y) = u(z), \quad z = ax^2 + bxy + cy^2 + kx + sy,$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2\big[(4ac - b^2)z + as^2 + ck^2 - bks\big] u'_z u''_{zz} + (4ac - b^2)(u'_z)^2 + f(z) = 0.$$

Подстановка $V(z) = (u'_z)^2$ приводит к линейному уравнению первого порядка.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 254).

22. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = e^{\alpha x} f(e^{\beta x} y).$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = \pm C_1^{\alpha - 2\beta} w(x - 2\ln C_1,\, C_1^{2\beta} y) + C_2 x + C_3 y + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Обобщенно-автомодельное решение:

$$w(x,y) = e^{\mu x} U(z), \quad z = e^{\beta x} y, \quad \mu = \tfrac{1}{2}\alpha - \beta,$$

где функция $U = U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\beta^2 z U'_z U''_{zz} - \mu^2 U U''_{zz} + (\beta + \mu)^2 (U'_z)^2 - f(z) = 0.$$

⊙ *Литература*: С. В. Хабиров (1990 *b*).

23. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = e^{ky/x} f(x).$

Точное решение:

$$w(x,y) = \exp\left(\frac{ky}{2x}\right)\varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$x^2 \varphi \varphi''_{xx} - x^2 (\varphi'_x)^2 + 2x\varphi\varphi'_x - \varphi^2 + 4k^{-2} x^4 f(x) = 0.$$

⊙ *Литература*: С. В. Хабиров (1990 *b*).

24. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = x^{2\alpha} f(x^\beta e^{y/x})$.

Точное решение:

$$w(x,y) = x^{\alpha+2} u(z), \quad z = x^\beta e^{y/x},$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$z^2\big[\beta z u'_z + (\alpha+2)(\alpha+1)u\big]u''_{zz} + z\big\{\big[\beta - (\alpha+1)^2\big]z u'_z + (\alpha+2)(\alpha+1)u\big\}u'_z + f(z) = 0.$$

⦿ *Литература*: С. В. Хабиров (1990 *b*).

25. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = y^{-4} \exp(2\alpha y^{-1}) f(x y^{-1} + \beta y^{-2})$.

Точное решение:

$$w = y \exp(\alpha y^{-1})\varphi(z) + C_1 y + C_2 x + C_3, \quad z = x y^{-1} + \beta y^{-2},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(2\beta\varphi'_z + \alpha^2\varphi)\varphi''_{zz} - \alpha^2 {\varphi'_z}^2 + f(z) = 0.$$

⦿ *Литература*: С. В. Хабиров (1990 *b*).

► *О точных решениях неоднородного уравнения Монжа — Ампера для некоторых частных зависимостей* $F = F(x,y)$ (*не содержащих функционального произвола*) *см. С. В. Хабиров* (1990 *b, c*), *N. H. Ibragimov* (1994, pp. 95–101). *О задаче Коши для уравнения Монжа — Ампера см. Р. Курант* (1962, стр. 491–495).

7.2.3. Уравнения вида $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F\left(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}\right)$

1. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x) w + g(x)$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(x, \pm y + C_1 x + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной y:

$$w = \varphi(x) y^2 + \psi(x) y + \chi(x),$$

где функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &2\varphi\varphi''_{xx} + f(x)\varphi - 4(\varphi'_x)^2 = 0,\\ &2\varphi\psi''_{xx} + f(x)\psi - 4\varphi'_x\psi'_x = 0,\\ &2\varphi\chi''_{xx} + f(x)\chi + g(x) - (\psi'_x)^2 = 0. \end{aligned}$$

Отметим, что второе уравнение линейное относительно ψ имеет частное решение $\psi = \varphi$ (поэтому его общее решение можно выразить через частное решение первого уравнения).

2. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x) w^2$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x, y + C_2 x + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = e^{\lambda y} u(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $u = u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$u u''_{xx} - (u'_x)^2 + \lambda^{-2} f(x) u^2 = 0.$$

3. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x) y^n w^k.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C^{n+2} w(x, C^{k-2} y),$$

где C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов при $n \neq -2$, $k \neq 2$:

$$w(x,y) = y^{\frac{n+2}{2-k}} U(x),$$

где функция $U(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(n+2)(n+k) U U''_{xx} - (n+2)^2 (U'_x)^2 + (k-2)^2 f(x) U^k = 0.$$

4. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x) e^{\lambda y} w^k.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C w\Big(x, y + \frac{k-2}{\lambda} \ln C\Big),$$

где C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов при $k \neq 2$, $\lambda \neq 0$:

$$w(x,y) = \exp\left(\frac{\lambda y}{2-k}\right) U(x),$$

где функция $U(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$U U''_{xx} - (U'_x)^2 + (k-2)^2 \lambda^{-2} f(x) U^k = 0.$$

5. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(w).$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(A_1 x + B_1 y + C_1, A_2 x + B_2 y + C_2), \qquad |A_2 B_1 - A_1 B_2| = 1,$$

где C_1, C_2 и любые три из четырех постоянных A_1, A_2, B_1, B_2 произвольны, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(x,y) = u(z), \quad z = ax^2 + bxy + cy^2 + kx + sy,$$

где a, b, c, k, s — произвольные постоянные, а функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2\big[(4ac - b^2) z + as^2 + ck^2 - bks\big] u'_z u''_{zz} + (4ac - b^2)(u'_z)^2 + f(u) = 0.$$

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 462).

6. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f(x) \exp\left(\dfrac{ay}{x}\right) w^k.$

Точное решение:

$$w(x,y) = \exp\left(\frac{\lambda y}{x}\right) u(x), \qquad \lambda = \frac{a}{2-k},$$

где функция $u = u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$x^2 u u''_{xx} - (x u'_x - u)^2 + \lambda^{-2} x^4 f(x) u^k = 0.$$

7. $\displaystyle\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a\frac{\partial w}{\partial y}.$

Это уравнение используется в метеорологии для описания полей ветра в приэкваториальных районах.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-2}C_2^{-1}w(C_1x + C_3, C_2y + C_4x + C_5) + C_6x + C_7,$$

где $C_1, \ldots, C_7$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w = \varphi(x),$$
$$w = \tfrac{1}{4}(\sqrt{a}\,x + C)^2 y + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, C — произвольная постоянная.

3°. Точные решения:

$$w = C_1 e^{\lambda y} - \tfrac{1}{2}a\lambda^{-1}x^2 + C_2x + C_3,$$
$$w = \tfrac{1}{4}a(x + C_1)^2(y + C_2),$$
$$w = \tfrac{1}{4}aC_2^{-1}(x + C_1)^2\,\mathrm{th}(C_2y + C_3),$$
$$w = \tfrac{1}{4}aC_2^{-1}(x + C_1)^2\,\mathrm{cth}(C_2y + C_3),$$
$$w = \tfrac{1}{4}aC_2^{-1}(x + C_1)^2\,\mathrm{tg}(C_2y + C_3),$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция; C_1, C_2, C_3, λ — произвольные постоянные. Первое решение является суммой функций разных аргументов, остальные четыре — произведением функций разных аргументов.

4°. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной y:

$$w = F(x)y^2 + G(x)y + H(x),$$

где

$$F(x) = \frac{1}{C_1x + C_2}, \quad G(x) = -\frac{a}{6C_1^2}(C_1x + C_2)^2 + \frac{C_3}{C_1x + C_2} + C_4,$$
$$H(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (x - t)\frac{[G_t'(t)]^2 - aG(t)}{F(t)}\,dt + C_5x + C_6,$$

$C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные.

5°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w = C_1\exp(C_2x + C_3y) - \frac{a}{2C_3}x^2 + C_4x + C_5.$$

6°. Существуют точные решения следующих видов:

$$w(x,y) = |x|^{k+2}U(z), \quad z = y|x|^{-k};$$
$$w(x,y) = e^{kx}V(\xi), \qquad \xi = ye^{-kx};$$
$$w(x,y) = x^2W(\eta), \qquad \eta = y + k\ln|x|;$$

где k — произвольная постоянная.

⊙ *Литература для уравнения* 7.2.3.7: Э. Р. Розендорн (1984), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 463).

8. $\displaystyle\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f(x)\frac{\partial w}{\partial y}.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-1}w(x, C_1y + C_2x + C_3) + C_4x + C_5,$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w = \varphi(x),$$
$$w = \frac{1}{4}\left[\int f(x)\,dx + C\right]^2 y + \varphi(x),$$
$$w = C_1\exp(C_2x + C_3y) - \frac{1}{C_3}\int_0^x (x - t)f(t)\,dt + C_4x + C_5,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, C — произвольная постоянная. При $C_2 = 0$ последнее решение является суммой функций разных аргументов.

3°. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной y:

$$w = \varphi(x)y^2 + \psi(x)y + \chi(x).$$

Здесь

$$\varphi(x) = \frac{1}{C_1x + C_2}, \quad \psi(x) = -\int\left[\varphi^2(x)\int\frac{f(x)}{\varphi^2(x)}\,dx\right]dx + \frac{C_3}{C_1x + C_2} + C_4,$$

$$\chi(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)\,\frac{[\psi'_t(t)]^2 - f(t)\psi(t)}{\varphi(t)}\,dt + C_5x + C_6,$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 464).

9. $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(w)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1x + C_2, C_1y + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$x - y\int\sqrt{f(w)}\,dw = \varphi(w),$$

$$x + y\int\sqrt{f(w)}\,dw = \psi(w),$$

где $\varphi(w)$, $\psi(w)$ — произвольные функции.

10. $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(w)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1x + C_2, C_3y + C_4),$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$C_1x + C_2y\exp\left(\int\sqrt{f(w)}\,dw\right) = \varphi(w),$$

$$C_3x + C_4y\exp\left(-\int\sqrt{f(w)}\,dw\right) = \psi(w),$$

где $\varphi(w)$, $\psi(w)$ — произвольные функции.

11. $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -f(w)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3\frac{\partial w}{\partial y}.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(C_1x + C_2, C_1y + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение:

$$x - y\left(\frac{1}{2}\int\sqrt{f(w)}\,dw + C\right)^2 = \varphi(w),$$

где $\varphi(w)$ — произвольная функция, C — произвольная постоянная.

12. $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f_1(w)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4 + f_2(w)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3\frac{\partial w}{\partial y} +$

$\displaystyle + f_3(w)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + f_4(w)\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^3 + f_5(w)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^4.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(C_1x + C_2, C_1y + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение:

$$x - \varphi(w)y = \psi(w),$$

где $\psi(w)$ — произвольная функция, а функция $\varphi = \varphi(w)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$(\varphi'_w)^2 = f_1(w) - f_2(w)\varphi + f_3(w)\varphi^2 - f_4(w)\varphi^3 + f_5(w)\varphi^4.$$

13. $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right).$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-1} w(C_1 x + C_2 y + C_3, \pm y + C_4) + C_5 y + C_6,$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по переменной x:

$$w(x,y) = \varphi(y)x + \psi(y),$$

где $\psi(y)$ — произвольная функция, а функция $\varphi(y)$ задана неявно:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}} = \pm y + C,$$

где C — произвольная постоянная.

3°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y) = C_1 y^2 + C_2 y + C_3 + z(x),$$

где функция $z(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $2C_1 z''_{xx} + f(z'_x) = 0$. Его общее решение можно записать в параметрической форме

$$x = -2C_1 \int \frac{dt}{f(t)} + C_3, \quad z = -2C_1 \int \frac{t\,dt}{f(t)} + C_4.$$

4°. Преобразование Лежандра

$$u = x\xi + y\eta - w(x,y), \quad \xi = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial w}{\partial y},$$

где $u = u(\xi,\eta)$ — новая зависимая переменная, а ξ и η — новые независимые переменные, приводит к уравнению вида 7.2.2.3:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{1}{f(\xi)}.$$

⦿ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 464–465).

14. $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(w)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4 g\left(\frac{\partial w}{\partial y}\Big/\frac{\partial w}{\partial x}\right).$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(C_1 x + C_2, C_1 y + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$x + y\varphi_{1,2}(w) = \psi(w),$$

где $\psi(w)$ — произвольная функция, а функции $\varphi_{1,2}(w)$ определяются параметрически

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{|g(\varphi)|}} = \pm \int \sqrt{|f(w)|}\,dw + C,$$

C — произвольная постоянная ($fg > 0$).

15. $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + F\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}\right).$

Преобразование Лежандра

$$u = x\xi + y\eta - w(x,y), \quad \xi = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial w}{\partial y},$$

где $u = u(\xi,\eta)$ — новая зависимая переменная, а ξ, η — новые независимые переменные, приводит к уравнению более простого вида

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{1}{F(\xi,\eta)}.$$

О точных решениях этого уравнения см. разд. 7.2.2.

7.2.4. Уравнения вида $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = f(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g(x,y)$

1. $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = f(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x, C_2 y + C_3) + C_4 x + C_5 y + C_6,$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Вырожденные решения, содержащие произвольные функции:

$$w(x,y) = \varphi(x) + C_1 y + C_2,$$
$$w(x,y) = \varphi(y) + C_1 x + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, $\varphi = \varphi(z)$ — произвольная функция.

3°. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной y:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^2 + [C_1\varphi(x) + C_2]y + \frac{C_1^2}{2}\int_0^x (x-t)\frac{[\varphi_t'(t)]^2}{f(t)\varphi(t)}\,dt + C_3 x + C_4,$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(x)\varphi\varphi_{xx}'' - 2(\varphi_x')^2 = 0.$$

4°. Решение с обобщенным разделением переменных, содержащее произвольную степень y:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^k + C_1 x + C_2 y + C_3$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(k-1)f(x)\varphi\varphi_{xx}'' - k(\varphi_x')^2 = 0.$$

5°. Решение с обобщенным разделением переменных, содержащее экспоненциальную функцию y:

$$w(x,y) = \varphi(x)e^{\lambda y} + C_1 x + C_2 y + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(x)\varphi\varphi_{xx}'' - (\varphi_x')^2 = 0.$$

2. $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = f(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g(x)$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = \pm C_1^{-1} w(x, C_1 y + C_2) + C_3 x + C_4 y + C_5,$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по переменной y:

$$w(x,y) = \pm y \int \sqrt{g(x)}\,dx + \varphi(x) + C_1 y,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция.

3°. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной y:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^2 + [C_1\varphi(x) + C_2]y + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)\frac{C_1^2[\varphi_t'(t)]^2 - g(t)}{f(t)\varphi(t)}\,dt + C_3 x + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(x)\varphi\varphi_{xx}'' - 2(\varphi_x')^2 = 0.$$

Последнее имеет частное решение $\varphi = C_6$.

3. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g(x)y.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-3} w(x, C_1^2 y) + C_2 x + C_3 y + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных, кубическое по y:

$$w(x,y) = C_1 y^3 + C_2 y - \frac{1}{6C_1}\int_a^x (x-t)\frac{g(t)}{f(t)}\,dt + C_3 x + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

Более общее решение имеет вид

$$w(x,y) = \varphi(x) y^3 + C_1 y - \frac{1}{6}\int_a^x (x-t)\frac{g(t)\,dt}{f(t)\varphi(t)} + C_2 x + C_3,$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2f(x)\varphi\varphi''_{xx} - 3(\varphi'_x)^2 = 0.$$

3°. О точном решении, квадратичном по y, см. уравнение 7.2.4.5 при $g_2 = g_0 = 0$.

4°. См. решение уравнения 7.2.4.6 в п. 3° при $k = 1$.

4. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g(x)y^2.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = \pm C_1^{-2} w(x, C_1 y) + C_2 x + C_3 y + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных четвертой степени по y:

$$w(x,y) = C_1 y^4 + C_2 y - \frac{1}{12C_1}\int_a^x (x-t)\frac{g(t)}{f(t)}\,dt + C_3 x + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

Более общее решение имеет вид

$$w(x,y) = \varphi(x) y^4 + C_1 y - \frac{1}{12}\int_a^x (x-t)\frac{g(t)\,dt}{f(t)\varphi(t)} + C_2 x + C_3,$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$3f(x)\varphi\varphi''_{xx} - 4(\varphi'_x)^2 = 0.$$

3°. О точном решении, квадратичном по y см. уравнение 7.2.4.5 при $g_1 = g_0 = 0$.

4°. См. решение уравнения 7.2.4.6 в п. 3° при $k = 2$.

5. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g_2(x)y^2 + g_1(x)y + g_0(x).$

Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной y:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^2 + \psi(x)y + \chi(x),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(x)$, $\chi = \chi(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} f(x)\varphi\varphi''_{xx} &= 2(\varphi'_x)^2 - \tfrac{1}{2}g_2(x), \\ f(x)\varphi\psi''_{xx} &= 2\varphi'_x\psi'_x - \tfrac{1}{2}g_1(x), \\ f(x)\varphi\chi''_{xx} &= \tfrac{1}{2}(\psi'_x)^2 - \tfrac{1}{2}g_0(x). \end{aligned}$$

6. $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = f(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g(x)y^k.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = \pm C_1^{-k-2} w(x, C_1^2 y) + C_2 x + C_3 y + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \frac{C_1 y^{k+2}}{(k+1)(k+2)} + C_2 y - \frac{1}{C_1}\int_a^x (x-t)\frac{g(t)}{f(t)}\,dt + C_3 x + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \varphi(x) y^{\frac{k+2}{2}},$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k(k+2)f(x)\varphi\varphi''_{xx} - (k+2)^2(\varphi'_x)^2 + 4g(x) = 0.$$

4°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y) = \psi(x) y^{k+2} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\int_a^x (x-t)\frac{g(t)}{f(t)\psi(t)}\,dt + C_1 x + C_2 y + C_3,$$

где функция $\psi = \psi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(k+1)f(x)\psi\psi''_{xx} - (k+2)(\psi'_x)^2 = 0.$$

7. $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = f(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g(x)y^{2k+2} + h(x)y^k.$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y) = \varphi(x) y^{k+2} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\int_a^x (x-t)\frac{h(t)}{f(t)\varphi(t)}\,dt + C_1 x + C_2 y + C_3,$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(k+1)(k+2)f(x)\varphi\varphi''_{xx} - (k+2)^2(\varphi'_x)^2 + g(x) = 0.$$

8. $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = f(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g(x)e^{\lambda y}.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1 w\Big(x, y - \frac{2}{\lambda}\ln|C_1|\Big) + C_2 x + C_3 y + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y) = C_1 e^{\lambda y} + C_2 y - \frac{1}{C_1\lambda^2}\int_a^x (x-t)\frac{g(t)}{f(t)}\,dt + C_3 x + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \varphi(x)\exp\big(\tfrac{1}{2}\lambda y\big),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(x)\varphi\varphi''_{xx} - (\varphi'_x)^2 + 4\lambda^{-2}g(x) = 0.$$

4°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y) = \psi(x)e^{\lambda y} - \frac{1}{\lambda^2}\int_a^x (x-t)\frac{g(t)}{f(t)\psi(t)}\,dt + C_1 x + C_2 y + C_3,$$

где функция $\psi = \psi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(x)\psi\psi''_{xx} - (\psi'_x)^2 = 0.$$

9. $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = f(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g(x)e^{2\lambda y} + h(x)e^{\lambda y}.$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y) = \varphi(x)e^{\lambda y} - \frac{1}{\lambda^2}\int_a^x (x-t)\frac{h(t)}{f(t)\varphi(t)}\,dt + C_1 x + C_2 y + C_3,$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(x)\varphi\varphi''_{xx} - (\varphi'_x)^2 + \lambda^{-2}g(x) = 0.$$

10. $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = f_1(x)g_1(y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f_2(x)g_2(y).$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = \pm w(x,y) + C_1 x + C_2 y + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов при $f_1 g_1 \neq 0$:

$$w(x,y) = C_1\int_a^x (x-t)\frac{f_2(t)}{f_1(t)}\,dt - \frac{1}{C_1}\int_b^y (y-\xi)\frac{g_2(\xi)}{g_1(\xi)}\,d\xi + C_2 x + C_3 y + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

3°. Вырожденные решения при $f_2 g_2 = 0$:

$$w(x,y) = \varphi(x) + C_1 y + C_2,$$
$$w(x,y) = \varphi(y) + C_1 x + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, $\varphi = \varphi(z)$ — произвольная функция.

4°. Решение с обобщенным разделением переменных при $f_2 g_2 = 0$:

$$w(x,y) = \varphi(x)\psi(y) + C_1 x + C_2 y + C_3,$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$f_1(x)\varphi\varphi''_{xx} - C_4(\varphi'_x)^2 = 0,$$
$$C_4 g_1(y)\psi\psi''_{yy} - (\psi'_y)^2 = 0.$$

11. $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = f(ax+by)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g(ax+by).$

Точное решение:

$$w(x,y) = \varphi(z) + C_1 x^2 + C_2 xy + C_3 y^2 + C_4 x + C_5 y, \quad z = ax + by,$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(ab\varphi''_{zz} + C_2)^2 = f(z)(a^2\varphi''_{zz} + 2C_1)(b^2\varphi''_{zz} + 2C_3) + g(z),$$

которое легко интегрируется (предварительно надо разрешить его относительно φ''_{zz}).

7.2.5. Другие уравнения

1. $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f(x)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$

Замена

$$w = U(x,y) - \int_a^x (x-t)f(t)\,dt$$

приводит к уравнению вида 7.2.2.1:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}.$$

2. $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$

Первый интеграл:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \Phi\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \int f(x)\,dx,$$

где $\Phi(u)$ — произвольная функция.

3. $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + b.$

Замена

$$w = U(x,y) - \tfrac{1}{2}a_2 x^2 - \tfrac{1}{2}a_1 y^2$$

приводит к уравнению вида 7.2.2.2:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + b - a_1 a_2.$$

4. $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial w}{\partial x} + b_2\frac{\partial w}{\partial y}.$

Это уравнение используется в метеорологии для описания горизонтального движения воздуха (w — функция тока для скорости ветра, x и y — координаты на поверхности Земли).

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + C_1, y + C_2) + C_3(b_2 x - b_1 y) + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w = C_3 \exp\left[-\frac{b_1 C_1 + b_2 C_2}{a_1 C_1^2 + a_2 C_2^2}(C_1 x + C_2 y)\right] + C_4.$$

3°. Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по переменной y:

$$w = y(C_1 e^{-\lambda x} + C_2) + \frac{C_1^2}{2a_1}e^{-2\lambda x} + \left(\frac{b_2 C_1}{b_1}x + C_3\right)e^{-\lambda x} - \frac{b_2 C_2}{b_1}x + C_4, \qquad \lambda = \frac{b_1}{a_1}$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

4°. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной y:

$$w = f(x)y^2 + g(x)y + h(x),$$

где функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$2ff''_{xx} + a_1 f''_{xx} + b_1 f'_x - 4(f'_x)^2 = 0, \tag{1}$$
$$2fg''_{xx} + a_1 g''_{xx} + b_1 g'_x - 4f'_x g'_x + 2b_2 f = 0, \tag{2}$$
$$2fh''_{xx} + a_1 h''_{xx} + b_1 h'_x + 2a_2 f + b_2 g - (g'_x)^2 = 0. \tag{3}$$

Эта система может быть проинтегрирована. Уравнение подстановкой $U(f) = f'_x$ сводится к линейному уравнению первого порядка. Уравнение (2) линейно относительно g, фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения имеет вид: $g_1 = 1$ и $g_2 = f(x)$. Уравнение (3) постановкой $V(x) = h'_x$ приводится к линейному уравнению первого порядка.

Замечание. Решения из пп. 3° и 4° могут быть использованы для получения двух других решений путем переобозначения: $(x, a_1, b_1) \rightleftarrows (y, a_2, b_2)$.

⊙ *Литература*: Э. Р. Розендорн (1984), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 470).

5. $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f_1(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_2(x)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g_1(x)\frac{\partial w}{\partial x} + g_2(x)\frac{\partial w}{\partial y}.$

Существуют точные решения с обобщенным разделением переменных, линейные и квадратичные по y:

$$w(x,y) = \varphi_1(x)y + \varphi_0(x),$$
$$w(x,y) = \psi_2(x)y^2 + \psi_1(x)y + \psi_0(x).$$

6. $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = f(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g(x)w + h_2(x)y^2 + h_1(x)y + h_0(x).$

Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной y:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^2 + \psi(x)y + \chi(x),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(x)$, $\chi = \chi(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &2f(x)\varphi\varphi''_{xx} - 4(\varphi'_x)^2 + g(x)\varphi + h_2(x) = 0, \\ &2f(x)\varphi\psi''_{xx} - 4\varphi'_x\psi'_x + g(x)\psi + h_1(x) = 0, \\ &2f(x)\varphi\chi''_{xx} - (\psi'_x)^2 + g(x)\chi + h_0(x) = 0. \end{aligned}$$

7. $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = f_1(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left[f_2(x)w + f_3(x)y^2 + f_4(x)y + f_5(x)\right]\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 +$
$\displaystyle + g_1(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left[g_2(x)y + g_3(x)\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left[g_4(x)w + g_5(x)y^2 + g_6(x)y + g_7(x)\right]\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} +$
$\displaystyle + h_1(x)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + h_2(x)\frac{\partial w}{\partial x} + \left[h_3(x)y + h_4(x)\right]\frac{\partial w}{\partial y} + s_1(x)w + s_2(x)y^2 + s_3(x)y + s_4(x).$

Существует точное решение с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,y) = \varphi(x)y^2 + \psi(x)y + \chi(x).$$

8. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$

Это уравнение встречается в плоских задачах теории пластичности (w — производящая функция).

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = \pm C_1^{-2} w(C_1 x + C_2, C_3 y + C_4) + C_5 x + C_6 y + C_7,$$

где $C_1, \ldots, C_7$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Введем новую переменную

$$U(x,y) = \frac{\partial w}{\partial x}$$

а затем сделаем преобразование Лежандра:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} - U$$

В результате приходим к линейному уравнению второго порядка

$$(1 + X^2)^2\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} + 2XY(1 + X^2)\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} + Y^2(X^2 - 1)\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = 0. \qquad (1)$$

Это уравнение гиперболического типа. Преобразование

$$t = \operatorname{arctg} X, \quad \xi = \tfrac{1}{2}\ln(1 + X^2) - \ln Y, \quad F = \frac{Z}{\sqrt{1 + X^2}}$$

приводит (1) к линейному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - F. \qquad (2)$$

О решениях уравнения (2) см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

Замечание. Исходное уравнение инвариантно относительно преобразования Лежандра

$$\overline{x} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \overline{y} = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \overline{w} = x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} - w.$$

⊙ *Литература*: Ю. Н. Радаев (1988), В. И. Астафьев, Ю. Н. Радаев, Л. В. Степанова (2001).

7.3. Уравнение Беллмана и родственные уравнения

7.3.1. Уравнения с квадратичной нелинейностью

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t}\dfrac{\partial w}{\partial x} - f(t)\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} - g(t)\biggl(\dfrac{\partial w}{\partial y}\biggr)^2 = 0.$

Это уравнение встречается в задачах оптимальной коррекции случайных возмущений и является следствием уравнения Беллмана [см. Ф. Л. Черноусько (1971), Ф. Л. Черноусько, В. Б. Колмановский (1978)]. Переменная $t = T - \tau$ играет роль «обратного» времени.

1°. Пусть $w(x, y, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1 w(x + C_2, \pm y + C_3, t) + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. «Двумерные» решения:

$$w = U(z, \tau), \quad z = y \pm 2\biggl[x \int g(t)\,dt + C_1 x\biggr]^{1/2} + C_2, \quad \tau = \int f(t)\,dt + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функция $U = U(z, \tau)$ описывается линейным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

3°. «Двумерное» решение:

$$w = u(\xi, \tau), \quad \xi = y + C_1 x + \frac{1}{C_1}\int g(t)\,dt + C_2, \quad \tau = \int f(t)\,dt + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функция $u = u(\xi, \eta)$ описывается линейным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0.$$

4°. Решения из пп. 2° и 3° являются частными случаями более общего решения вида

$$w = U(z, \tau), \quad z = y + \varphi(x, t), \quad \tau = \int f(t)\,dt,$$

где функция $\varphi = \varphi(x, t)$ удовлетворяет нелинейному уравнению с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = g(t), \tag{1}$$

а функция $U = U(z, \tau)$ описывается линейным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Полный интеграл уравнения (1) имеет вид

$$\varphi = C_1 x + \frac{1}{C_1}\int g(t)\,dt + C_2, \tag{2}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Общий интеграл уравнения (1) можно представить в параметрической форме с помощью полного интеграла (2) и двух выражений [см. Э. Камке (1966), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2003)]

$$\begin{aligned} &C_2 = \psi(C_1), \\ &x - \frac{1}{C_1^2}\int g(t)\,dt + \psi'(C_1) = 0, \end{aligned}$$

где $\psi = \psi(C_1)$ — произвольная функция, штрих обозначает производную (C_1 и C_2 играют роль параметров).

Замечание. Решению из п. 2° соответствует $\psi(C_1) = \mathrm{const}$.

5°. «Двумерные» решения:

$$w = \pm\exp\bigl[\lambda y + \zeta(x,t)\bigr],$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\zeta = \zeta(x,t)$ определяется уравнением в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \lambda^2 f(t)\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \lambda^2 g(t) = 0. \qquad (3)$$

Полный интеграл этого уравнения имеет вид

$$\zeta = C_1 x + \lambda^2\int\left[f(t) + \frac{1}{C_1}g(t)\right]dt + C_2, \qquad (4)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Общий интеграл уравнения (3) можно представить в параметрическом виде с помощью полного интеграла (4) и двух выражений

$$C_2 = \varphi(C_1),$$
$$x - \frac{\lambda^2}{C_1^2}\int g(t)\,dt + \varphi'(C_1) = 0,$$

где $\varphi = \varphi(C_1)$ — произвольная функция (C_1 и C_2 играют роль параметров).

6°. «Двумерное» решение:

$$w = e^{\lambda x}\theta(y,t),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\theta = \theta(y,t)$ определяется уравнением

$$\lambda\theta\frac{\partial\theta}{\partial t} - \lambda f(t)\theta\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} - g(t)\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

7°. О задаче Коши и автомодельных решениях уравнения для степенных функций $f(t)$ и $g(t)$ см. работы Ф. Л. Черноусько (1971), Ф. Л. Черноусько, В. Б. Колмановский (1978).

⊙ *Литература для уравнения* 7.3.1.1: А. С. Братусь, К. А. Волосов (2002), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 259–260).

2. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x} - f(t)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - g(t)h(x)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = 0.$

Замена $z = \displaystyle\int h(x)\,dx$ приводит к уравнению вида 7.3.1.1 for $w = w(z,y,t)$.

3. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x} - f(t)\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{n}{y}\frac{\partial w}{\partial y}\right) - g(t)h(x)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = 0.$

Это уравнение встречается в задачах оптимальной коррекции случайных возмущений и является следствием уравнения Беллмана [см. Ф. Л. Черноусько, В. Б. Колмановский (1978)]. Переменная $t = T - \tau$ играет роль «обратного» времени, $(n+1)$ — размерность уравнений движения управляемой системы (n — целое неотрицательное число).

«Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = \exp\left[\lambda\int h(x)\,dx\right]U(y,t),$$

где функция $U(y,t)$ описывается уравнением (λ — произвольная постоянная)

$$\lambda U\frac{\partial U}{\partial t} - \lambda f(t)U\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{n}{y}\frac{\partial U}{\partial y}\right) - g(t)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

4. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x} - f(t)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - g(x,t)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = 0.$

1°. «Двумерное» решение:

$$w = U(z,\tau), \quad z = y + \varphi(x,t), \quad \tau = \int f(t)\,dt.$$

Здесь функция $\varphi = \varphi(x,t)$ удовлетворяет нелинейному уравнению с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = g(x,t), \qquad (1)$$

а функция $U = U(z,\tau)$ описывается линейным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \qquad (2)$$

Полные интегралы и общие решения (интегралы) уравнения (1) для различных функций $g(x,t)$ можно найти в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2003). О решениях уравнения (2) см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

2°. «Двумерные» решения:

$$w = \pm \exp\bigl[\lambda y + \zeta(x,t)\bigr],$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\zeta = \zeta(x,t)$ удовлетворяет нелинейному уравнению с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \lambda^2 f(t)\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \lambda^2 g(x,t) = 0.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 261).

5. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x} - f(x,t)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - g(x,t)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = 0.$

«Двумерные» решения:

$$w = \pm \exp\bigl[\lambda y + \zeta(x,t)\bigr],$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\zeta = \zeta(x,t)$ удовлетворяет нелинейному уравнению с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \lambda^2 f(x,t)\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \lambda^2 g(x,t) = 0.$$

7.3.2. Уравнения со степенной нелинейностью

1. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^k - f(t)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^k\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - g(t)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^{k+1} = 0.$

Это уравнение встречается в задачах оптимальной коррекции случайных возмущений и является следствием уравнения Беллмана [см. Ф. Л. Черноусько (1971), Ф. Л. Черноусько, В. Б. Колмановский (1978)]. Переменная $t = T - \tau$ играет роль «обратного» времени.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x + C_2, y + C_3, t) + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. «Двумерное» решение:

$$w = U(z,\tau), \quad \tau = \int f(t)\,dt + C_1,$$

$$z = y + (x + C_2)^{\frac{k}{k+1}}\left[\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}\int g(t)\,dt + C_3\right]^{\frac{1}{k+1}} + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, а функция $U = U(z,\tau)$ описывается линейным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

3°. «Двумерное» решение:

$$w = u(\xi,\tau), \quad \xi = y + C_1 x + \frac{1}{C_1^k}\int g(t)\,dt + C_2, \quad \tau = \int f(t)\,dt + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функция $u = u(\xi,\eta)$ описывается линейным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0.$$

4°. Решения из пп. 2° и 3° являются частными случаями более общего решения вида

$$w = U(z, \tau), \quad z = y + \varphi(x, t), \quad \tau = \int f(t)\,dt,$$

где функция $\varphi = \varphi(x, t)$ удовлетворяет нелинейному уравнению с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^k = g(t), \tag{1}$$

а функция $U = U(z, \tau)$ описывается линейным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Полный интеграл уравнения (1) имеет вид

$$\varphi = C_1 x + \frac{1}{C_1^k}\int g(t)\,dt + C_2, \tag{2}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Общий интеграл уравнения (1) можно представить в параметрической форме с помощью полного интеграла (2) и двух выражений [см. Э. Камке (1966); В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2003)]

$$C_2 = \psi(C_1),$$
$$x - \frac{k}{C_1^{k+1}}\int g(t)\,dt + \psi'(C_1) = 0,$$

где $\psi = \psi(C_1)$ — произвольная функция, штрих обозначает производную (C_1 и C_2 играют роль параметров).

5°. «Двумерное» решение:

$$w = \exp\bigl[\lambda y + \zeta(x, t)\bigr],$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\zeta = \zeta(x, t)$ определяется уравнением в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^k - \lambda^2 f(t)\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^k - \lambda^{k+1} g(t) = 0. \tag{3}$$

Полный интеграл этого уравнения имеет вид [см. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2003)]

$$\zeta = C_1 x + \int\left[\lambda^2 f(t) + \frac{\lambda^{k+1}}{C_1^k} g(t)\right] dt + C_2, \tag{4}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Общий интеграл уравнения (3) можно представить в параметрическом виде с помощью полного интеграла (4) и двух выражений

$$C_2 = \varphi(C_1),$$
$$x - k\frac{\lambda^{k+1}}{C_1^{k+1}}\int g(t)\,dt + \varphi'(C_1) = 0,$$

где $\varphi = \varphi(C_1)$ — произвольная функция (C_1 и C_2 играют роль параметров).

6°. «Двумерное» решение:

$$w = e^{\lambda x}\theta(y, t),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\theta = \theta(y, t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - f(t)\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{g(t)}{(\lambda\theta)^k}\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^{k+1} = 0.$$

7°. О задаче Коши и автомодельных решениях уравнения для степенных функций $f(t)$ и $g(t)$ см. работы Ф. Л. Черноусько (1971), Ф. Л. Черноусько, В. Б. Колмановский (1978).

⊙ *Литература для уравнения* 7.3.2.1: А. С. Братусь, К. А. Волосов (2002), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 261–263).

2. $\displaystyle \boldsymbol{\frac{\partial w}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^k - f(t)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^k \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - g(t)h(x)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^{k+1} = 0}.$

Замена $z = \displaystyle\int [h(x)]^{1/k}\,dx$ приводит к уравнению вида 7.3.2.1 при $w = w(z, y, t)$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^k - f(t)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^k \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} - g(x,t)\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^{k+1} = 0.$

1°. «Двумерное» решение:

$$w = U(z,\tau), \quad z = y + \varphi(x,t), \quad \tau = \int f(t)\,dt.$$

Здесь функция $\varphi = \varphi(x,t)$ удовлетворяет нелинейному уравнению с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^k = g(x,t), \qquad (1)$$

а функция $U = U(z,\tau)$ описывается линейным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \qquad (2)$$

Полные интегралы и общие решения (интегралы) уравнения (1) для различных функций $g(x,t)$ можно найти в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2003). О решениях уравнения (2) см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

2°. «Двумерное» решение:

$$w = \exp\bigl[\lambda y + \zeta(x,t)\bigr],$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\zeta = \zeta(x,t)$ удовлетворяет нелинейному уравнению с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^k - \lambda^2 f(t)\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^k - \lambda^{k+1} g(x,t) = 0.$$

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 263).

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^k - f(x,t)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^k \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} - g(x,t)\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^{k+1} = 0.$

«Двумерное» решение:

$$w = \exp\bigl[\lambda y + \zeta(x,t)\bigr],$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\zeta = \zeta(x,t)$ удовлетворяет нелинейному уравнению с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^k - \lambda^2 f(x,t)\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^k - \lambda^{k+1} g(x,t) = 0.$$