Из книги A. D. Polyanin and V. F. Zaitsev, «Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition», Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2011 [русский перевод].

8. Уравнения второго порядка общего вида

8.1. Уравнения, содержащие производную первого порядка по t

8.1.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\Big(w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)$

Предварительные замечания. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = F\left(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right). \qquad (1)$$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение уравнения (1). Тогда функция $w(x + C_1,\, t + C_2)$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. В общем случае уравнение (1) допускает точное решение типа бегущей волны

$$w = w(\xi), \qquad \xi = kx + \lambda t, \qquad (2)$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\big(w,\, kw'_\xi,\, k^2 w''_{\xi\xi}\big) - \lambda w'_\xi = 0.$$

В данном разделе рассмотрены частные случаи уравнения (1), которые помимо решения типа бегущей волны (2) допускают также другие точные решения.

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-2} w(C_1 x + C_2, C_1^2 t + C_3) + C_4 x + C_5,$$

где $C_1, \dots, C_5$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = F(A)t + \tfrac{1}{2}Ax^2 + Bx + C,$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

3°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = (Ax + B)t + C + \varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\big(\varphi''_{xx}\big) = Ax + B.$$

4°. Точное решение:

$$w(x,t) = At + B + \psi(\xi), \qquad \xi = kx + \lambda t,$$

где A, B, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\psi(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\big(k^2 \psi''_{\xi\xi}\big) = \lambda \psi'_\xi + A.$$

5°. Точное решение:

$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}Ax^2 + Bx + C + U(\xi), \qquad \xi = kx + \lambda t,$$

где A, B, k, λ — произвольные постоянные, а функция $U(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(k^2U''_{\xi\xi}+A\bigr)=\lambda U'_\xi.$$

6°. Автомодельное решение:

$$w(x,t)=t\,\Theta(\zeta),\quad \zeta=\frac{x}{\sqrt{t}},$$

где функция $\Theta(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(\Theta''_{\zeta\zeta}\bigr)+\tfrac{1}{2}\zeta\Theta'_\zeta-\Theta=0.$$

7°. Подстановка $u(x,t)=\dfrac{\partial w}{\partial x}$ приводит данное уравнение к уравнению вида 1.6.18.3:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=f\biggl(\frac{\partial u}{\partial x}\biggr)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad f(z)=F'_z(z).$$

8°. Преобразование

$$\begin{aligned}\bar t&=\alpha t+\gamma_1,\quad \bar x=\beta_1x+\beta_2w+\gamma_2,\\ \bar w&=\beta_1\bigl(\beta_4w+\tfrac12\beta_3x^2+\gamma_3x\bigr)+\gamma_4t+\gamma_5+\beta_2\bigl[\beta_3(xw_x-w)+\gamma_3w_x+\tfrac12\beta_4w_x^2\bigr],\\ \bar w_{\bar x}&=\beta_3x+\beta_4w_x+\gamma_3,\end{aligned}$$

где α, β_i, γ_i — произвольные постоянные ($\alpha\neq0$, $\beta_1\beta_4-\beta_2\beta_3\neq0$), а индексы x, $\bar x$ обозначают соответствующие частные производные, «переводит» рассматриваемое уравнение в уравнение такого же вида. При этом правая часть уравнения преобразуется следующим образом:

$$\bar F(\bar w_{\bar x\bar x})=\frac{\beta_1\beta_4-\beta_2\beta_3}{\alpha}F(w_{xx})+\frac{\gamma_4}{\alpha}.$$

Специальный случай 1. Уравнение с квадратичной нелинейностью относительно старшей производной:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=a\biggl(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\biggr)^2+b.$$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t)=Ax^2+Bx+C+(4aA^2+b)t,$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w=\varphi_4(t)x^4+\varphi_3(t)x^3+\varphi_2(t)x^2+\varphi_1(t)x+\varphi_0(t),$$

где функции $\varphi_n(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\varphi_4'&=144a\varphi_4^2,\\ \varphi_3'&=144a\varphi_3\varphi_4,\\ \varphi_2'&=36a\varphi_3^2+48a\varphi_2\varphi_4,\\ \varphi_1'&=24a\varphi_2\varphi_3,\\ \varphi_0'&=4a\varphi_2^2+b.\end{aligned}$$

Эта система последовательно легко интегрируется.

Специальный случай 2. Уравнение со степенной нелинейностью относительно старшей производной:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=a\biggl(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\biggr)^k,\quad k>0,\quad k\neq1.$$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t)=\tfrac12C_1x^2+C_2x+aC_1^kt+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = \bigl[a(1-k)t + C_1\bigr]^{\frac{1}{1-k}} u(x) + C_2,$$

где функция $u(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $(u''_{xx})^k - u = 0$, общее решение которого можно представить в неявном виде

$$\int \left(\frac{2k}{1+k} u^{\frac{1+k}{k}} + C_3\right)^{-1/2} du = \pm x + C_4.$$

Специальный случай 3. Уравнение с экспоненциальной нелинейностью относительно старшей производной:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a \exp\left(\lambda \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = U(x) - \frac{1}{2\lambda}(x^2 + A_1 x + A_2)\ln(B_1 t + B_2) + C_1 x + C_2,$$

где A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $U(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2a\lambda \exp(\lambda U''_{xx}) + B_1(x^2 + A_1 x + A_2) = 0,$$

которое легко интегрируется (сначала надо разрешить его относительно U''_{xx}).

Специальный случай 4. Уравнение с логарифмической нелинейностью относительно старшей производной:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a \ln\left|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|.$$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = (at + C)\left[\ln \frac{2A^2(at + C)}{\cos^2(Ax + B)} - 1\right] + D,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

⊙ *Литература для уравнения* 8.1.1.1: И. Ш. Ахатов, Р. К. Газизов, Н. Х. Ибрагимов (1989), N. H. Ibragimov (1994, pp. 115–118, 131–132), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 264–265), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 479–481).

2. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = F\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$

Помимо точного решения типа бегущей волны это уравнение имеет также более сложное точное решение в вида

$$w(x,t) = At + B + \varphi(\xi), \qquad \xi = kx + \lambda t,$$

где A, B, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(k\varphi'_\xi,\, k^2\varphi''_{\xi\xi}\bigr) - \lambda\varphi'_\xi - A = 0.$$

Специальный случай. Уравнение:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

1°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t) x^{3/2} + \varphi_3(t) x^3,$$

где функции $\varphi_k = \varphi_k(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi'_1 &= \tfrac{9}{8} a\varphi_2^2, \\ \varphi'_2 &= \tfrac{45}{4} a\varphi_2\varphi_3, \\ \varphi'_3 &= 18a\varphi_3^2. \end{aligned}$$

Штрихи обозначают производные по t.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных, кубическое по x:

$$w(x,t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)x + \psi_3(t)x^2 + \psi_4(t)x^3,$$

где функции $\psi_k = \psi_k(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\psi_1' &= 2a\psi_2\psi_3,\\
\psi_2' &= 2a(2\psi_3^2 + 3\psi_2\psi_4),\\
\psi_3' &= 18a\psi_3\psi_4,\\
\psi_4' &= 18a\psi_4^2.
\end{aligned}$$

3°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \frac{\theta(x) + C_3}{C_1 t + C_2} + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, а функция $\theta = \theta(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\theta_x'\theta_{xx}'' + C_1\theta + C_1C_3 = 0,$$

решение которого можно представить в неявном виде.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + aw.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + C_1, t + C_2) + C_3 e^{at},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Вырожденное решение:

$$w(x,t) = (C_1 x + C_2)e^{at} + e^{at}\int e^{-at}F(C_1 e^{at}, 0)\,dt.$$

3°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(w_z', w_{zz}''\bigr) - \lambda w_z' + aw = 0.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial w}{\partial x} + F\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + aC_1 t + C_2, t + C_3) + C_1,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Вырожденное решение:

$$w(x,t) = -\frac{x + C_1}{a\tau} + \frac{1}{\tau}\int \tau F\Bigl(-\frac{1}{a\tau}, 0\Bigr)\,d\tau, \quad \tau = t + C_2.$$

3°. Точное решение:

$$w(x,t) = U(\zeta) + 2C_1 t, \quad \zeta = x + aC_1 t^2 + C_2 t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $U(\zeta)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(U_\zeta', U_{\zeta\zeta}''\bigr) + aUU_\zeta' = C_2 U_\zeta' + 2C_1.$$

Данное решение в частном случае $C_1 = 0$ переходит в решение типа бегущей волны.

⦿ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 482).

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial w}{\partial x} + F\left(\dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + bw.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + aC_1e^{bt} + C_2, t + C_3) + C_1be^{bt},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Вырожденное решение:

$$w(x,t) = \varphi(t)x + \psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t = a\varphi^2 + b\varphi,$$
$$\psi'_t = a\varphi\psi + b\psi + F(\varphi, 0),$$

которая легко интегрируется (первое уравнение является уравнением Бернулли, а второе — линейно относительно ψ).

3°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(w'_z, w''_{zz}\bigr) + aww'_z - \lambda w'_z + bw = 0.$$

⦿ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 482).

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = e^{\beta w}F\left(\dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + C_1, C_2t + C_3) + \frac{1}{\beta}\ln C_2,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = -\frac{1}{\beta}\ln(A\beta t + B) + \varphi(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$e^{\beta\varphi}F\bigl(\varphi'_x,\, \varphi''_{xx}\bigr) + A = 0.$$

3°. Точное решение:

$$w(x,t) = -\frac{1}{\beta}\ln(t + C) + \Theta(\xi), \quad \xi = kx + \lambda\ln(t + C),$$

где C, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$e^{\beta\Theta}F\bigl(k\Theta'_\xi,\, k^2\Theta''_{\xi\xi}\bigr) = \lambda\Theta'_\xi - \frac{1}{\beta}.$$

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\left(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-1}w(x + C_2, C_1t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = t\varphi(z), \quad z = kx + \lambda\ln|t|,$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\left(k\frac{\varphi'_z}{\varphi},\, k^2\frac{\varphi''_{zz}}{\varphi}\right) = \lambda\varphi'_z + \varphi.$$

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = wF\left(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x + C_2, t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = Ce^{\lambda t}\varphi(x),$$

где C, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\left(\frac{\varphi'_x}{\varphi},\ \frac{\varphi''_{xx}}{\varphi}\right) = \lambda.$$

Это уравнение имеет частные решения вида $\varphi(x) = e^{\alpha x}$, где α — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения $F(\alpha,\alpha^2) - \lambda = 0$.

3°. Точное решение:

$$w(x,t) = Ce^{\lambda t}\psi(\xi), \quad \xi = kx + \beta t,$$

где C, k, λ, β — произвольные постоянные, а функция $\psi(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\psi F\left(k\frac{\psi'_\xi}{\psi},\ k^2\frac{\psi''_{\xi\xi}}{\psi}\right) = \beta\psi'_\xi + \lambda\psi.$$

Это уравнение имеет частные решения вида $\psi(\xi) = e^{\mu\xi}$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w^n F\left(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$

При $n = 0$ и $n = 1$ см. соответственно уравнения 8.1.1.7 и 8.1.1.8.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x + C_2, C_1^{n-1}t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \bigl[(1-n)At + B\bigr]^{\frac{1}{1-n}}\varphi(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi^{n-1}F\left(\frac{\varphi'_x}{\varphi},\ \frac{\varphi''_{xx}}{\varphi}\right) = A.$$

3°. Точное решение:

$$w(z,t) = (t + C)^{\frac{1}{1-n}}\Theta(z), \quad z = kx + \lambda\ln(t + C),$$

где C, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\Theta^n F\left(k\frac{\Theta'_z}{\Theta},\ k^2\frac{\Theta''_{zz}}{\Theta}\right) = \lambda\Theta'_z + \frac{1}{1-n}\Theta.$$

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w^n F\left(w^k\dfrac{\partial w}{\partial x},\ w^{2k+1}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(C_1^{-k-1}x + C_2, C_1^{n-1}t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Автомодельное решение при $n \neq 1$, $k \neq -1$:

$$w(x,t) = t^{\frac{1}{1-n}} U(z), \quad z = xt^{\frac{k+1}{n-1}},$$

где функция $U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{1}{1-n}U + \frac{k+1}{n-1}zU'_z = U^n F\bigl(U^k U'_z,\, U^{2k+1}U''_{zz}\bigr).$$

3°. Обобщенное автомодельное решение при $n = 1$, $k \neq -1$:

$$w(x,t) = \exp\left(-\frac{1}{k+1}t\right)u(\xi), \quad \xi = xe^t,$$

где функция $u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$-\frac{1}{k+1}u + \xi u'_\xi = uF\bigl(u^k u'_\xi,\, u^{2k+1}u''_{\xi\xi}\bigr).$$

4°. При $k = -1$ см. уравнения 8.1.1.8–8.1.1.9.

11. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = F\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big/ \frac{\partial w}{\partial x}\right).$

Частный случай уравнения 8.1.1.2.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-1} w(x + C_2, C_1 t + C_3) + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = At + B + \varphi(\xi), \quad \xi = kx + \lambda t,$$

где A, B, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(k\varphi''_{\xi\xi}/\varphi'_\xi\bigr) = \lambda\varphi'_\xi + A.$$

При $A = 0$ имеем решение типа бегущей волны.

3°. Точное решение:

$$w(x,t) = t\Theta(z) + C, \quad z = kx + \lambda \ln|t|$$

где C, k, β, λ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(k\Theta''_{zz}/\Theta'_z\bigr) = \lambda\Theta'_z + \Theta.$$

12. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} F\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big/ \frac{\partial w}{\partial x}\right).$

Частный случай уравнения 8.1.1.2.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x + C_2, t + C_3) + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = At + B + \varphi(z), \quad z = kx + \lambda t,$$

где A, B, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k\varphi'_z F\bigl(k\varphi''_{zz}/\varphi'_z\bigr) = \lambda\varphi'_z + A.$$

3°. Точное решение:

$$w(x,t) = Ae^{\beta t}\Theta(\xi) + B, \quad \xi = kx + \lambda t,$$

где A, B, k, β, λ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k\Theta'_\xi F\bigl(k\Theta''_{\xi\xi}/\Theta'_\xi\bigr) = \lambda\Theta'_\xi + \beta\Theta.$$

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^{\beta} F\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big/ \dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Частный случай уравнения 8.1.1.2. При $\beta = 0$ и $\beta = 1$ см. соответственно уравнения 8.1.1.11 и 8.1.1.12.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x + C_2, C_1^{\beta-1} t + C_3) + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \bigl[A(1-\beta)t + B\bigr]^{\frac{1}{1-\beta}} \varphi(x) + C,$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\varphi'_x)^{\beta} F(\varphi''_{xx}/\varphi'_x) = A\varphi.$$

3°. Точное решение:

$$w(x,t) = (t + A)^{\frac{1}{1-\beta}} \Theta(z) + B, \quad z = kx + \lambda \ln(t + A),$$

где A, B, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k^{\beta} (\Theta'_z)^{\beta} F(k\Theta''_{zz}/\Theta'_z) = \lambda \Theta'_z + \frac{1}{1-\beta}\Theta.$$

14. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = wF\left(\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + aw^2,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$

Частный случай уравнения 8.1.2.11.

15. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = wF\left(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right).$

Частный случай уравнения 8.1.2.12.

16. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = wF\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ 2w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) + G\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ 2w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right).$

Частный случай уравнения 8.1.2.13.

17. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\bigl[F(w, w_x)\bigr], \qquad w_x = \dfrac{\partial w}{\partial x}.$

1°. Преобразование

$$\bar{t} = t - t_0, \quad \bar{x} = -\int_{x_0}^{x} w(y,t)\,dy - \int_{t_0}^{t} F\bigl(w(x_0,\tau), w_x(x_0,\tau)\bigr)\,d\tau, \quad \bar{w}(\bar{x},\bar{t}) = \frac{1}{w(x,t)}$$

«переводит» ненулевое решение $w(x,t)$ исходного уравнения в решение $\bar{w}(\bar{x},\bar{t})$ уравнения аналогичного вида

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left[\bar{F}(\bar{w},\, \bar{w}_{\bar{x}})\right],$$

где

$$\bar{F}(w, w_x) = wF(w^{-1},\, w^{-3} w_x). \qquad (1)$$

2°. В частном случае

$$F(w, w_x) = g(w)(w_x)^k$$

из формулы (1) получим

$$\bar{F}(w, w_x) = \bar{g}(w)(w_x)^k, \qquad \bar{g}(w) = w^{1-3k} g(w^{-1}).$$

⊙ *Литература*: W. Strampp (1982), J. R. Burgan, A. Munier, M. R. Feix, E. Fijalkow (1984), N. H. Ibragimov (1994, pp. 115–118, 129–130).

8.1.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\Big(t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\left(t, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + aw.$

Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x,t) + Ce^{at},$$

где C — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + f(t)w\dfrac{\partial w}{\partial x} = F\left(t, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + g(t)w.$

Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w\big(x + \psi(t),\, t\big) + \varphi(t), \quad \varphi(t) = C\exp\left[\int g(t)\,dt\right], \quad \psi(t) = -\int f(t)\varphi(t)\,dt,$$

где C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = wF\left(t,\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$

Точные решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = A\exp\left[\lambda x + \int F(t,\lambda^2)\,dt\right],$$

$$w(x,t) = \big[A\operatorname{ch}(\lambda x) + B\operatorname{sh}(\lambda x)\big]\exp\left[\int F(t,\lambda^2)\,dt\right],$$

$$w(x,t) = \big[A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)\big]\exp\left[\int F(t,-\lambda^2)\,dt\right],$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = wF\left(t, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = A\exp\left[\lambda x + \int F(t,\lambda,\lambda^2)\,dt\right],$$

где A, λ — произвольные постоянные.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = wF\left(t,\, w^k\dfrac{\partial w}{\partial x},\, w^{2k+1}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов при $k \neq -1$:

$$w(x,t) = \big[C_1(k+1)x + C_2\big]^{\frac{1}{k+1}}\varphi(t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$\varphi'_t = \varphi F\big(t, C_1\varphi^{k+1}, -kC_1^2\varphi^{2k+2}\big).$$

2°. При $k = -1$ см. уравнение 8.1.2.4.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)w^\beta\Phi\left(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + g(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = G(t)u(x,\tau), \quad \tau = \int f(t)G^{\beta-1}(t)\,dt, \qquad G(t) = \exp\left[\int g(t)\,dt\right],$$

приводит к более простому уравнению вида 8.1.1.9:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = u^\beta\Phi\left(\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x},\, \frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),$$

которое имеет точное решение типа бегущей волны $u = u(Ax + B\tau)$ и решение в виде произведения функций разных аргументов $u = \varphi(x)\psi(\tau)$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=f(t)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^{k}\Phi\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big/\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+g(t)w+h(t).$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t)=\varphi(t)\Theta(x)+\psi(t).$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_t=Af(t)\varphi^k+g(t)\varphi, \tag{1}$$

$$\psi'_t=g(t)\psi+Bf(t)\varphi^k+h(t), \tag{2}$$

C — произвольная постоянная, а функция $\Theta(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\left(\Theta'_x\right)^k\Phi\left(\Theta''_{xx}/\Theta'_x\right)=A\Theta+B. \tag{3}$$

Общее решение системы (1), (2) дается формулами

$$\varphi(t)=G(t)\left[C-kA\int f(t)G^{k-1}(t)\,dt\right]^{\frac{1}{1-k}},\quad G(t)=\exp\left[\int g(t)\,dt\right],$$

$$\psi(t)=DG(t)+G(t)\int\left[Bf(t)\varphi^k(t)+h(t)\right]\frac{dt}{G(t)},$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

При $k=1$, $\Phi(x,y)=\Phi(y)$ решение уравнения (3) имеет вид

$$\Theta(x)=\alpha e^{\lambda x}-B/A,$$

где α — произвольная постоянная, а λ находится из алгебраического (или трансцендентного) уравнения: $\lambda\Phi(\lambda)=A$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=f(t)e^{\beta w}\Phi\left(\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+g(t).$

Преобразование

$$w(x,t)=u(x,\tau)+G(t),\quad \tau=\int f(t)\exp\left[\beta G(t)\right]dt,\qquad G(t)=\int g(t)\,dt,$$

приводит к более простому уравнению вида 8.1.1.6:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=e^{\beta u}\Phi\left(\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),$$

которое имеет точное решение типа бегущей волны $u=u(Ax+B\tau)$ и решение в виде суммы функций разных аргументов $u=\varphi(x)+\psi(\tau)$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=f(t)\Phi\left(w,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+g(t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Преобразование

$$w=U(z,\tau),\quad z=x+\int g(t)\,dt,\quad \tau=\int f(t)\,dt$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}=\Phi\left(U,\ \frac{\partial U}{\partial z},\ \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right),$$

которое имеет точное решение типа бегущей волны $U=U(kz+\lambda\tau)$.

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=wF\left(t,\ w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+aw^2\right).$

Точные решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t)=\left[C_1\sin\left(x\sqrt{a}\right)+C_2\cos\left(x\sqrt{a}\right)\right]\exp\left[\int F(t,0)\,dt\right]\quad \text{при}\ \ a>0,$$

$$w(x,t)=\left[C_1\,\mathrm{sh}\left(x\sqrt{|a|}\right)+C_2\,\mathrm{ch}\left(x\sqrt{|a|}\right)\right]\exp\left[\int F(t,0)\,dt\right]\quad \text{при}\ \ a<0,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, стр. 488).

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = wF\Big(t,\ \Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + aw^2,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big).$

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов при $a>0$:

$$w(x,t) = \big[C_1\sin\big(x\sqrt{a}\,\big) + C_2\cos\big(x\sqrt{a}\,\big)\big]\varphi(t),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\varphi=\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\varphi'_t = \varphi F\big(t,\ a(C_1^2+C_2^2)\varphi^2,\ -a\big)$.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов при $a<0$:

$$w(x,t) = \big(C_1e^{\sqrt{|a|}\,x} + C_2e^{-\sqrt{|a|}\,x}\big)\varphi(t),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\varphi=\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\varphi'_t = \varphi F\big(t,\ 4C_1C_2a\varphi^2,\ -a\big)$.

Пример. При $C_1C_2=0$ имеем решения

$$w(x,t) = C\exp\Big[\pm\sqrt{|a|}\,x + \int F(t,0,-a)\,dt\Big],$$

где C — произвольная постоянная.

⦿ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, стр. 489).

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = wF\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2\Big).$

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = C\exp\Big[\lambda x + \int F(t,\lambda^2,0)\,dt\Big],$$

где C, λ — произвольные постоянные.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = (Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x})\varphi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi=\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\varphi'_t = \varphi F\big(t,\lambda^2,4AB\lambda^2\varphi^2\big)$.

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = [A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)]\varphi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi=\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\varphi'_t = \varphi F\big(t,-\lambda^2,-\lambda^2(A^2+B^2)\varphi^2\big)$.

⦿ *Литература*: Ph. W. Doyle (1996), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, стр. 489).

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = wF\Big(t,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ 2w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2\Big) + G\Big(t,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ 2w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2\Big).$

Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной x:

$$w = \varphi_1(t)x^2 + \varphi_2(t)x + \varphi_3(t),$$

где функции φ_1, φ_2, φ_3 описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}
\varphi_1' &= \varphi_1F\big(t,\ 2\varphi_1,\ 4\varphi_1\varphi_3-\varphi_2^2\big),\\
\varphi_2' &= \varphi_2F\big(t,\ 2\varphi_1,\ 4\varphi_1\varphi_3-\varphi_2^2\big),\\
\varphi_3' &= \varphi_3F\big(t,\ 2\varphi_1,\ 4\varphi_1\varphi_3-\varphi_2^2\big) + G\big(t,\ 2\varphi_1,\ 4\varphi_1\varphi_3-\varphi_2^2\big).
\end{aligned}$$

Из первых двух уравнений следует, что $\varphi_2 = C\varphi_1$, где C — произвольная постоянная.

⦿ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, стр. 489).

8.1.3. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\Big(x, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)$

Предварительные замечания. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = F\biggl(x,\, w,\, \frac{\partial w}{\partial x},\, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\biggr). \tag{1}$$

Пусть вспомогательное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$w = F(x,\, w,\, w'_x,\, w''_{xx})$$

после линейного преобразования

$$x = \varphi(z), \quad w = \psi(z)u + \chi(z)$$

и последующего деления обеих частей на функцию $\psi(z)$ приводится к автономному виду

$$u = \mathcal{F}(u,\, u'_z,\, u''_{zz}),$$

где $\mathcal{F} = F/\psi$. Тогда рассматриваемое уравнение в частных производных (1) таким же преобразованием

$$x = \varphi(z), \quad w(x,t) = \psi(z)u(z,t) + \chi(z),$$

проводится к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{F}\biggl(u,\, \frac{\partial u}{\partial z},\, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\biggr),$$

которое имеет точное решение типа бегущей волны $u = u(kz + \lambda t)$.

Сказанное позволяет использовать различные известные преобразования обыкновенных дифференциальных уравнений (см. Э. Камке, 1976; В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001 *a*) для построения точных решений уравнений в частных производных. Если исходное уравнение было линейным, то такие преобразования будут приводить к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами.

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\biggl(x,\, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\biggr)$.

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = Axt + Bt + C + \varphi(x),$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(x,\, \varphi''_{xx}\bigr) = Ax + B.$$

Специальный случай. Уравнение:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = f(x)\exp\biggl(a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\biggr).$$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w = \varphi(x) + \psi(x)\theta(t),$$

где

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{1}{2a}A_1x^2 + C_3x + C_4 + \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}(x-\xi)\ln\frac{\psi(\xi)}{f(\xi)}\,d\xi,\\
\psi(x) &= \frac{1}{2}A_2x^2 + C_1x + C_2,\\
\theta(t) &= -\frac{1}{A_2a}\ln\bigl(C_5 - A_2ae^{A_1}t\bigr).
\end{aligned}$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\biggl(x,\, \dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\biggr)$.

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = At + B + \varphi(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(x,\, \varphi'_x,\, \varphi''_{xx}\bigr) = A.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax\dfrac{\partial w}{\partial x} + F\left(w,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + C_1 e^{-at}, t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + Ce^{-at},$$

где C — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(w, w'_z, w''_{zz}\bigr) + azw'_z = 0.$$

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 350).

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\left(\dfrac{\partial w}{\partial x},\ x\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-1} w(C_1 x, C_1 t + C_2) + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = At + B + \varphi(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(\varphi'_x,\ x\varphi''_{xx}\bigr) = A.$$

3°. Точное решение:

$$w(x,t) = t\Theta(\xi) + C, \quad \xi = x/t,$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\Theta(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(\Theta'_\xi,\ \xi\Theta''_{\xi\xi}\bigr) + \xi\Theta'_\xi - \Theta = 0.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\left(w,\ x\dfrac{\partial w}{\partial x},\ x^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$

Замена $x = \pm e^z$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} = F\left(w,\ \frac{\partial w}{\partial z},\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

которое имеет точное решение типа бегущей волны $w = w(kz + \lambda t)$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = x^k F\left(w,\ x\dfrac{\partial w}{\partial x},\ x^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(C_1 x, C_1^{-k} t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = w(z), \quad z = xt^{1/k},$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$kz^{k-1}F\bigl(w,\ zw'_z,\ z^2 w''_{zz}\bigr) - w'_z = 0.$$

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = x^k F\Big(w,\, x\dfrac{\partial w}{\partial x},\, x^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) + ax\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Переходя к новым независимым переменным

$$z = xe^{at}, \quad \tau = \frac{1}{ak}\big(1 - e^{-akt}\big),$$

получим более простое уравнение вида 8.1.3.6:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = z^k F\Big(w,\, z\frac{\partial w}{\partial z},\, z^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big).$$

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = e^{\lambda x} F\Big(w,\, \dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + C_1,\, e^{-\lambda C_1}t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = w(z), \quad z = \lambda x + \ln t,$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$e^z F\big(w,\, \lambda w'_z,\, \lambda^2 w''_{zz}\big) - w'_z = 0.$$

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = wF\Big(x,\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x,\, t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = e^{\lambda t}\varphi(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\big(x,\, \varphi'_x/\varphi,\, \varphi''_{xx}/\varphi\big) = \lambda.$$

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w^\beta F\Big(x,\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big).$

При $\beta = 1$ см. уравнение 8.1.3.9.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x,\, C_1^{\beta-1}t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \big[(1-\beta)At + B\big]^{\frac{1}{1-\beta}}\varphi(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi^{\beta-1}F\big(x,\, \varphi'_x/\varphi,\, \varphi''_{xx}/\varphi\big) = A.$$

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = e^{\beta w} F\Big(x,\, \dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x,\, C_1 t + C_2) + \frac{1}{\beta}\ln C_1,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = -\frac{1}{\beta}\ln(A\beta t + B) + \varphi(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$e^{\beta\varphi}F\big(x,\, \varphi'_x,\, \varphi''_{xx}\big) + A = 0.$$

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=\dfrac{\partial w}{\partial x}F\Big(x,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big/\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=C_1w(x,\ t+C_2)+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t)=At+B+\varphi(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi'_xF\big(x,\ \varphi''_{xx}/\varphi'_x\big)=A.$$

3°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t)=Ae^{\mu t}\Theta(x)+B$$

где A, B, μ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\Theta'_xF\big(x,\ \Theta''_{xx}/\Theta'_x\big)=\mu\Theta.$$

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^{\beta}F\Big(x,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big/\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big).$

При $\beta=1$ см. уравнение 8.1.3.12.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=C_1w(x,\ C_1^{\beta-1}t+C_2)+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t)=At+B+\varphi(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\varphi'_x)^{\beta}F\big(x,\ \varphi''_{xx}/\varphi'_x\big)=A.$$

3°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t)=\big[A(1-\beta)t+C_1\big]^{\frac{1}{1-\beta}}\big[\Theta(x)+B\big]+C_2,$$

где A, B, C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\Theta(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\Theta'_x)^{\beta}F\big(x,\ \Theta''_{xx}/\Theta'_x\big)=A\Theta+AB.$$

8.1.4. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t}=F\Big(x,t,w,\dfrac{\partial w}{\partial x},\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^{m}\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)^{n}+\big[f(t)x+g(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x}+h(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t)=u(z,\tau)H(t),\quad z=xF(t)+\int g(t)F(t)\,dt,\quad \tau=\int F^{m+2n}(t)H^{m+n-1}(t)\,dt,$$

где функции $F(t)$ и $H(t)$ определяются по формулам

$$F(t)=\exp\Big[\int f(t)\,dt\Big],\quad H(t)=\exp\Big[\int h(t)\,dt\Big],$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}=a\Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big)^{m}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big)^{n}.$$

Последнее допускает точное решение типа бегущей волны, автомодельное решение и решение в виде произведения функций разных аргументов.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(w)\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)^k + \big[xg(t)+h(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Преобразование

$$z = xG(t) + \int h(t)G(t)\,dt, \quad \tau = \int G^{2k}(t)\,dt, \qquad G(t) = \exp\biggl[\int g(t)\,dt\biggr],$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = f(w)\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big)^k.$$

Последнее допускает точное решение типа бегущей волны и автомодельное решение.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\biggl(x, t, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\biggr) + aw$.

Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x,t) + Ce^{at},$$

где C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\biggl(ax+bt,\ w,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\biggr)$.

Точное решение:

$$w = w(\xi), \quad \xi = ax + bt,$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(\xi,\ w,\ aw'_\xi,\ a^2 w''_{\xi\xi}\bigr) - bw'_\xi = 0.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)x^k\Phi\biggl(w,\ x\dfrac{\partial w}{\partial x},\ x^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\biggr) + xg(t)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Переходя к новым независимым переменным

$$z = xG(t), \quad \tau = \int f(t)G^{-k}(t)\,dt, \qquad G(t) = \exp\biggl[\int g(t)\,dt\biggr],$$

получим более простое уравнение вида 8.1.3.6:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = z^k\Phi\biggl(w,\ z\frac{\partial w}{\partial z},\ z^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\biggr).$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = wF\biggl(t,\ \dfrac{f(x)}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\biggr)$.

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x)\exp\biggl[\int F(t,\lambda)\,dt\biggr],$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет линейному обыкновенному дифференциальному уравнению $f(x)\varphi''_{xx} = \lambda\varphi$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w\Phi\biggl(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\biggr) + f(t)e^{\lambda x}$.

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = e^{\lambda x}E(t)\biggl[A + \int\frac{f(t)}{E(t)}\,dt\biggr] + Be^{-\lambda x}E(t), \quad E(t) = \exp\biggl[\int \Phi(t,\lambda^2)\,dt\biggr],$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w\Phi\left(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + f(t)e^{\lambda x} + g(t)e^{-\lambda x}$.

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = e^{\lambda x}E(t)\left[A + \int \frac{f(t)}{E(t)}\,dt\right] + e^{-\lambda x}E(t)\left[B + \int \frac{g(t)}{E(t)}\,dt\right],$$

$$E(t) = \exp\left[\int \Phi(t,\lambda^2)\,dt\right],$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = wF_1\left(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + e^{\lambda x}F_2\left(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + e^{-\lambda x}F_3\left(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$.

Существует точное решение с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t) = e^{\lambda x}\varphi(t) + e^{-\lambda x}\psi(t).$$

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w\Phi\left(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + f(t)\operatorname{ch}(\lambda x) + g(t)\operatorname{sh}(\lambda x)$.

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \operatorname{ch}(\lambda x)E(t)\left[A + \int \frac{f(t)}{E(t)}\,dt\right] + \operatorname{sh}(\lambda x)E(t)\left[B + \int \frac{g(t)}{E(t)}\,dt\right],$$

$$E(t) = \exp\left[\int \Phi(t,\lambda^2)\,dt\right],$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w\Phi\left(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + f(t)\cos(\lambda x)$.

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \cos(\lambda x)E(t)\left[A + \int \frac{f(t)}{E(t)}\,dt\right] + B\sin(\lambda x)E(t),$$

$$E(t) = \exp\left[\int \Phi(t,-\lambda^2)\,dt\right],$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w\Phi\left(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + f(t)\cos(\lambda x) + g(t)\sin(\lambda x)$.

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \cos(\lambda x)E(t)\left[A + \int \frac{f(t)}{E(t)}\,dt\right] + \sin(\lambda x)E(t)\left[B + \int \frac{g(t)}{E(t)}\,dt\right],$$

$$E(t) = \exp\left[\int \Phi(t,-\lambda^2)\,dt\right],$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = wF_1\left(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \cos(\lambda x)F_2\left(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \sin(\lambda x)F_3\left(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$.

Существует точное решение с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t) = \cos(\lambda x)\varphi(t) + \sin(\lambda x)\psi(t).$$

14. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w\Phi\left(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + f(t)e^{\lambda x}$.

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = e^{\lambda x}E(t)\left[A + \int \frac{f(t)}{E(t)}\,dt\right], \quad E(t) = \exp\left[\int \Phi(t,\lambda,\lambda^2)\,dt\right],$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

15. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t) w^\beta \Phi\left(x,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + g(t) w.$

Преобразование

$$w(x,t) = G(t) u(x,\tau), \quad \tau = \int f(t) G^{\beta-1}(t)\,dt, \qquad G(t) = \exp\left[\int g(t)\,dt\right],$$

приводит к более простому уравнению вида 8.1.3.10:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = u^\beta \Phi\left(x,\ \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),$$

которое имеет точное решение в виде произведения функций разных аргументов $u = \varphi(x)\psi(\tau)$.

16. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^k \Phi\left(x,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big/\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + g(t) w + h(t).$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \varphi(t)\Theta(x) + \psi(t).$$

Здесь функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_t = A f(t) \varphi^k + g(t)\varphi, \tag{1}$$

$$\psi'_t = g(t)\psi + B f(t)\varphi^k + h(t), \tag{2}$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\Theta(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\left(\Theta'_x\right)^k \Phi\left(x,\ \Theta''_{xx}/\Theta'_x\right) = A\Theta + B. \tag{3}$$

Общее решение системы (1), (2) дается формулами

$$\varphi(t) = G(t)\left[C - kA\int f(t) G^{k-1}(t)\,dt\right]^{\frac{1}{1-k}}, \quad G(t) = \exp\left[\int g(t)\,dt\right],$$

$$\psi(t) = DG(t) + G(t)\int \left[B f(t)\varphi^k(t) + h(t)\right]\frac{dt}{G(t)},$$

где C, D — произвольные постоянные.

При $k=1$, $\Phi(x,y) = \Phi(y)$ частное решение уравнения (3) имеет вид

$$\Theta(x) = \alpha e^{\lambda x} - B/A,$$

где α — произвольная постоянная, а показатель λ находится из алгебраического (или трансцендентного) уравнения: $\lambda\Phi(\lambda) = A$.

17. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \left[f_1(t) w + f_0(t)\right]\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^k \Phi\left(x,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big/\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + g_1(t) w + g_0(t).$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \varphi(t)\Theta(x) + \psi(t).$$

Здесь функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_t = C f_1(t)\varphi^{k+1} + g_1(t)\varphi, \tag{1}$$

$$\psi'_t = \left[C f_1(t)\varphi^k + g_1(t)\right]\psi + C f_0(t)\varphi^k + g_0(t), \tag{2}$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\Theta(x)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\left(\Theta'_x\right)^k \Phi\left(x,\ \Theta''_{xx}/\Theta'_x\right) = C. \tag{3}$$

Общее решение системы (1), (2) дается формулами

$$\varphi(t) = G(t)\left[A - kC\int f_1(t) G^k(t)\,dt\right]^{-1/k}, \quad G(t) = \exp\left[\int g_1(t)\,dt\right],$$

$$\psi(t) = B\varphi(t) + \varphi(t)\int \left[C f_0(t)\varphi^k(t) + g_0(t)\right]\frac{dt}{\varphi(t)},$$

где A, B — произвольные постоянные.

Далее считаем, что функция Φ не зависит явно от x, т. е. $\Phi(x,y)=\Phi(y)$. При $\Phi(0)\neq 0$ и $\Phi(0)\neq\infty$ частное решение уравнения (3) имеет вид $\Theta(x)=\alpha x+\beta$, где $\alpha^k\Phi(0)=C$, а β — произвольная постоянная.

При $k=0$ общее решение уравнения (3) имеет вид

$$\Theta(x)=\alpha e^{\lambda x}+\beta,$$

где α, β — произвольные постоянные; показатель λ находится из алгебраического (или трансцендентного) уравнения: $\Phi(\lambda)=C$.

18. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t}=f(t)e^{\beta w}\Phi\biggl(x,\ \frac{\partial w}{\partial x},\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\biggr)+g(t).$

Преобразование

$$w(x,t)=u(x,\tau)+G(t),\quad \tau=\int f(t)\exp\bigl[\beta G(t)\bigr]\,dt,\qquad G(t)=\int g(t)\,dt$$

приводит к более простому уравнению вида 8.1.3.11:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=e^{\beta u}\Phi\biggl(x,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\biggr),$$

которое имеет точное решение в виде суммы функций разных аргументов $u=\varphi(x)+\psi(\tau)$.

19. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t}=wF\biggl(t,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \frac{\partial w}{\partial x}-x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ 2w-2x\frac{\partial w}{\partial x}+x^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\biggr).$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t)=(C_2x^2+C_1x+C_0)\varphi(t),$$

где C_0, C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\varphi=\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\varphi'_t=\varphi F\bigl(t,2C_2\varphi,C_1\varphi,2C_0\varphi\bigr)$.

⊙ *Литература*: Ph. W. Doyle (1996), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 498).

20. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t}=F\biggl(x,\ t,\ w,\ \frac{\partial w}{\partial x}\biggr)G\biggl(x,\ \frac{\partial w}{\partial x},\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\biggr)+h(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t)=\varphi(x)+\int h(t)\,dt,$$

где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$G\bigl(x,\varphi'_x,\varphi''_{xx}\bigr)=0.$$

21. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t}=F\biggl(x,\ t,\ w,\ \frac{\partial w}{\partial x}\biggr)G\biggl(x,\ \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x},\ \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\biggr)+h(t)w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t)=C\exp\biggl[\int h(t)\,dt\biggr]\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$G\bigl(x,\ \varphi'_x/\varphi,\ \varphi''_{xx}/\varphi\bigr)=0.$$

22. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t}=g_0(t)F_0\biggl(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\biggr)+xg_1(t)F_1\biggl(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\biggr)+x^2g_2(t)F_2\biggl(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\biggr)+$
$\displaystyle \qquad +h(t)\biggl(\frac{\partial w}{\partial x}\biggr)^2+\bigl[p_0(t)+xp_1(t)\bigr]\frac{\partial w}{\partial x}+q(t)w+s_0(t)+xs_1(t)+x^2s_2(t).$

Существует точное решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по x:

$$w(x,t)=x^2\varphi(t)+x\psi(t)+\chi(t).$$

23. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = x^2 f_2\Bigl(t, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr) + x f_1\Bigl(t, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr) + f_0\Bigl(t, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr).$

Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по x:

$$w(x,t) = x^2\varphi(t) + x\int f_1(t, 2\varphi)\,dt + \int f_0(t, 2\varphi)\,dt + C_1 x + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$\varphi'_t = f_2(t, 2\varphi).$$

24. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = x^2 f_2\Bigl(t, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr) + x f_1\Bigl(t, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr) + f_0\Bigl(t, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr) + g(t)w.$

Существует точное решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по x:

$$w(x,t) = x^2\varphi(t) + x\psi(t) + \chi(t).$$

8.1.5. Уравнения вида $F\Bigl(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr) = 0$

1. $F\Bigl(at + bx,\ w,\ \dfrac{\partial w}{\partial t},\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr) = 0.$

Точное решение:

$$w = w(\xi), \quad \xi = at + bx,$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(\xi,\ w,\ aw'_\xi,\ bw'_\xi,\ b^2 w''_{\xi\xi}\bigr) = 0.$$

2. $F\Bigl(t, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr) = 0.$

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \bigl[A\,\mathrm{ch}(\lambda x) + B\,\mathrm{sh}(\lambda x)\bigr]\varphi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$F\bigl(t, \varphi'_t/\varphi, \lambda^2\bigr) = 0.$$

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \bigl[A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)\bigr]\varphi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$F\bigl(t, \varphi'_t/\varphi, -\lambda^2\bigr) = 0.$$

3. $F\Bigl(t, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr) = 0.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = Ae^{\lambda x}\varphi(t),$$

где A, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$F\bigl(t, \varphi'_t/\varphi, \lambda, \lambda^2\bigr) = 0.$$

4. $F\Bigl(x, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr) = 0.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = Ae^{\lambda t}\varphi(x),$$

где A, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$F\bigl(x, \lambda, \varphi'_x/\varphi, \varphi''_{xx}/\varphi\bigr) = 0.$$

5. $\boldsymbol{F_1\Big(t, \frac{\partial w}{\partial t}\Big) + F_2\Big(x, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) = kw}$.

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(x),$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого и второго порядков

$$F_1\big(t, \varphi'_t\big) - k\varphi = C,$$
$$F_2\big(x, \psi'_x, \psi''_{xx}\big) - k\psi = -C,$$

C — произвольная постоянная.

6. $\boldsymbol{F_1\Big(t, \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial t}\Big) + w^k F_2\Big(x, \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) = 0}$.

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t)\psi(x),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого и второго порядков

$$\varphi^{-k} F_1\big(t, \varphi'_t/\varphi\big) = C,$$
$$\psi^k F_2\big(x, \psi'_x/\psi, \psi''_{xx}/\psi\big) = -C,$$

C — произвольная постоянная.

7. $\boldsymbol{F_1\Big(t, \frac{\partial w}{\partial t}\Big) + e^{\lambda w} F_2\Big(x, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) = 0}$.

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(x),$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого и второго порядков

$$e^{-\lambda\varphi} F_1\big(t, \varphi'_t\big) = C,$$
$$e^{\lambda\psi} F_2\big(x, \psi'_x, \psi''_{xx}\big) = -C,$$

C — произвольная постоянная.

8. $\boldsymbol{F_1\Big(t, \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial t}\Big) + F_2\Big(x, \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) = k\ln w}$.

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t)\psi(x),$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого и второго порядков

$$F_1\big(t, \varphi'_t/\varphi\big) - k\ln\varphi = C,$$
$$F_2\big(x, \psi'_x/\psi, \psi''_{xx}/\psi\big) - k\ln\psi = -C,$$

C — произвольная постоянная.

8.1.6. Уравнения с тремя независимыми переменными

1. $\boldsymbol{\frac{\partial w}{\partial t} = aw\frac{\partial w}{\partial x} + F\Big(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)}$.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + aC_1 t + C_2, y + C_3, t + C_4) + C_1,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = C_1x + C_2y + \lambda t,$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные, а функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(C_1w'_z, C_2w'_z, C_1^2w''_{zz}, C_2^2w''_{zz}\bigr) + aC_1ww'_z = \lambda w'_z.$$

3°. Точное решение:

$$w = u(\xi) + 2C_1t, \quad \xi = x + C_2y + aC_1t^2 + C_3t,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функция $u(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(u'_\xi, C_2u'_\xi, u''_{\xi\xi}, C_2^2u''_{\xi\xi}\bigr) + auu'_\xi = C_3u'_\xi + 2C_1.$$

4°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = U(y,\eta) + 2C_1t, \qquad \eta = x + aC_1t^2 + C_2t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $U(y,\eta)$ описывается уравнением

$$2C_1 + C_2\frac{\partial U}{\partial\eta} = aU\frac{\partial U}{\partial\eta} + F\left(\frac{\partial U}{\partial\eta}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial^2U}{\partial\eta^2}, \frac{\partial^2U}{\partial y^2}\right).$$

5°. Существует «двумерное» решение вида

$$w(x,y,t) = V(\zeta_1,\zeta_2), \qquad \zeta_1 = a_1x + b_1y + c_1t, \qquad \zeta_2 = a_2x + b_2y + c_2t.$$

2. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} + (a_1x + b_1y)\frac{\partial w}{\partial x} + (a_2x + b_2y)\frac{\partial w}{\partial y} = F\left(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2w}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right).$

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w\bigl(x + Cb_1e^{\lambda t}, y + C(\lambda - a_1)e^{\lambda t}, t\bigr),$$

где C — произвольная постоянная, а $\lambda = \lambda_{1,2}$ — корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + a_1b_2 - a_2b_1 = 0, \tag{1}$$

также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w = w(z), \qquad z = a_2x + (\lambda - a_1)y + Ce^{\lambda t},$$

где $\lambda = \lambda_{1,2}$ — корни квадратного уравнения (1), а функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\bigl[\lambda z + a_2c_1 + (\lambda - a_1)c_2\bigr]w'_z = F\bigl(w,\, a_2w'_z,\, (\lambda - a_1)w'_z,\, a_2^2w''_{zz},\, a_2(\lambda - a_1)w''_{zz},\, (\lambda - a_1)^2w''_{zz}\bigr).$$

3°. «Двумерные» решения:

$$w = u(\zeta,t), \qquad \zeta = a_2x + (\lambda - a_1)y,$$

где $\lambda = \lambda_{1,2}$ — корни квадратного уравнения (1), а функция $u(\zeta,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \bigl[\lambda\zeta + a_2c_1 + (\lambda - a_1)c_2\bigr]\frac{\partial u}{\partial\zeta} =$$
$$= F\left(u,\, a_2\frac{\partial u}{\partial\zeta},\, (\lambda - a_1)\frac{\partial u}{\partial\zeta},\, a_2^2\frac{\partial^2u}{\partial\zeta^2},\, a_2(\lambda - a_1)\frac{\partial^2u}{\partial\zeta^2},\, (\lambda - a_1)^2\frac{\partial^2u}{\partial\zeta^2}\right).$$

8.2. Уравнения, содержащие несколько вторых производных

8.2.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2w}{\partial t^2} = F\Bigl(w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2w}{\partial x^2}\Bigr)$

1. $\displaystyle \frac{\partial^2w}{\partial t^2} = F\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\right).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2}w(C_1x + C_2, \pm C_1t + C_3) + C_4xt + C_5x + C_6t + C_7,$$

где $C_1, \ldots, C_7$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точное решение, квадратичное по переменным x и t:

$$w(x,t)=\tfrac{1}{2}Ax^2+Bxt+\tfrac{1}{2}F(A)t^2+C_1x+C_2t+C_3,$$

где A, B, C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

3°. Точное решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по x:

$$w(x,t)=\frac{1}{2}(C_1t+C_2)x^2+(C_3t+C_4)x+\int_0^t(t-\xi)F(C_1\xi+C_2)\,d\xi+C_5t+C_6,$$

где $C_1,\,\ldots,\,C_6$ — произвольные постоянные.

4°. Точное решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по t:

$$w(x,t)=\frac{1}{2}(C_1x+C_2)t^2+(C_3x+C_4)t+\int_0^x(x-\xi)\Phi(C_1\xi+C_2)\,d\xi+C_5x+C_6,$$

где $C_1,\,\ldots,\,C_6$ — произвольные постоянные, а $\Phi(u)$ — функция обратная к $F(u)$.

5°. Автомодельное решение:

$$w=t^2U(z),\qquad z=x/t,$$

где функция $U=U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2U-2zU'_z+z^2U''_{zz}=F(U''_{zz}).$$

6°. Замена $u(x,t)=\dfrac{\partial w}{\partial x}$ приводит к уравнению вида 3.4.7.7:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad f(\xi)=F'_\xi(\xi).$$

Специальный случай 1. Пусть $F(\xi)=a\xi^n$.

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t)=\varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi=\varphi(x)$ и $\psi=\psi(t)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным второго порядка (C — произвольная постоянная)

$$\varphi''_{xx}=C\varphi^{1/n},$$
$$\psi''_{tt}=aC^n\psi^n,$$

общие решения которых можно представить в неявном виде.

2°. Автомодельное решение:

$$w(x,t)=t^\sigma U(z),\qquad z=t^\beta x,\qquad \sigma=\frac{2(1+n\beta)}{1-n},$$

где β — произвольная постоянная, а функция $U=U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\sigma(\sigma-1)U+\beta(2\sigma+\beta-1)zU'_z+\beta^2z^2U''_{zz}=a(U''_{zz})^n.$$

3°. Точное решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по x:

$$w(x,t)=\frac{1}{2}(C_1t+C_2)x^2+(C_3t+C_4)x+\frac{a}{C_1^2(n+1)(n+2)}(C_1t+C_2)^{n+2}+C_5t+C_6,$$

где $C_1,\,\ldots,\,C_6$ — произвольные постоянные.

4°. Точное решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по t:

$$w(x,t)=\frac{1}{2}(C_1x+C_2)t^2+(C_3x+C_4)t+\frac{4a^{1/n}}{C_1^2(4n^2-1)}(C_1x+C_2)^{(2n+1)/2}+C_5x+C_6,$$

где $C_1,\,\ldots,\,C_6$ — произвольные постоянные.

Специальный случай 2. Пусть $F(\xi)=a\exp(\lambda\xi)$. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w=(A_2x^2+A_1x+A_0)\varphi(t)+\psi(x),$$

где A_2, A_1, A_0 — произвольные постоянные, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (B_2 — произвольная постоянная)

$$\varphi''_{tt}=aB_2\exp(2A_2\lambda\varphi),\qquad (1)$$
$$\exp(\lambda\psi''_{xx})=B_2(A_2x^2+A_1x+A_0).\qquad (2)$$

Общее решение уравнения (1) дается формулами

$$\varphi(t) = -\frac{1}{2A_2\lambda}\ln\left[\frac{A_2B_2a\lambda}{C_1^2}\cos^2(C_1t+C_2)\right] \quad \text{при} \quad A_2B_2a\lambda > 0,$$

$$\varphi(t) = -\frac{1}{2A_2\lambda}\ln\left[\frac{A_2B_2a\lambda}{C_1^2}\operatorname{sh}^2(C_1t+C_2)\right] \quad \text{при} \quad A_2B_2a\lambda > 0,$$

$$\varphi(t) = -\frac{1}{2A_2\lambda}\ln\left[-\frac{A_2B_2a\lambda}{C_1^2}\operatorname{ch}^2(C_1t+C_2)\right] \quad \text{при} \quad A_2B_2a\lambda < 0,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Общее решение уравнения (2) имеет вид

$$\psi(x) = \frac{1}{\lambda}\int_{t_0}^{t}(t-\xi)\ln(A_2B_2\xi^2 + A_1B_2\xi + A_0B_2)\,d\xi + B_1t + B_0,$$

где B_1, B_0 — произвольные постоянные.

Специальный случай 3. Пусть $F(\xi) = a\ln\xi + b$. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w = (A_2t^2 + A_1t + A_0)\varphi(x) + \psi(t),$$

где A_2, A_1, A_0 — произвольные постоянные, а функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (B_2 — произвольная постоянная)

$$a\ln\varphi''_{xx} - 2A_2\varphi = B_2, \tag{3}$$

$$\psi''_{tt} - a\ln(A_2t^2 + A_1t + A_0) - b = B_2. \tag{4}$$

Общее решение уравнения (3) дается формулами

$$\varphi(x) = -\frac{a}{2A_2}\ln\left[\frac{A_2}{aC_1^2}\cos^2(C_1x+C_2)\right] - \frac{B_2}{2A_2} \quad \text{при} \quad A_2a > 0,$$

$$\varphi(x) = -\frac{a}{2A_2}\ln\left[\frac{A_2}{aC_1^2}\operatorname{sh}^2(C_1x+C_2)\right] - \frac{B_2}{2A_2} \quad \text{при} \quad A_2a > 0,$$

$$\varphi(x) = -\frac{a}{2A_2}\ln\left[-\frac{A_2}{aC_1^2}\operatorname{ch}^2(C_1x+C_2)\right] - \frac{B_2}{2A_2} \quad \text{при} \quad A_2a < 0,$$

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}e^{B_2/a}x^2 + C_1x + C_2 \quad \text{при} \quad A_2 = 0,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Общее решение уравнения (4) имеет вид

$$\psi(t) = a\int_{t_0}^{t}(t-\xi)\ln(A_2\xi^2 + A_1\xi + A_0)\,d\xi + \frac{1}{2}(B_2+b)t^2 + B_1t + B_0,$$

где B_1, B_0 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература для уравнения* 8.2.1.1: N. H. Ibragimov (1994, pp. 214–218), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 501–503).

2. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(x + C_1, \pm t + C_2) + C_3t + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = kx + \lambda t,$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F(kw'_z, k^2w''_{zz}) - \lambda^2w''_{zz} = 0.$$

3°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = At^2 + Bt + C + \varphi(x),$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F(\varphi'_x, \varphi''_{xx}) - 2A = 0.$$

4°. Точное решение (обобщает решения из пп. 2° и 3°):

$$w(x,t) = At^2 + Bt + C + \varphi(z), \quad z = kx + \lambda t,$$

где A, B, C, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F(k\varphi'_z, k^2\varphi''_{zz}) - \lambda^2\varphi''_{zz} - 2A = 0.$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big).$

1°. Вырожденное решение, линейное по x:

$$w = (C_1 t + C_2)x + C_3 t + C_4 + \int_0^t (t-\tau)F(C_1\tau + C_2, 0)\,d\tau.$$

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w(x,t) = w(\xi), \quad \xi = \beta x + \lambda t,$$

где β, λ — произвольные постоянные, а функция $w = w(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(a\beta^2 w - \lambda^2)w''_{\xi\xi} + F(\beta w'_\xi, \beta^2 w''_{\xi\xi}) = 0.$$

3°. Точное решение:

$$w = U(z) + 4aC_1^2 t^2 + 4aC_1C_2 t, \quad z = x + aC_1 t^2 + aC_2 t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(aU - a^2C_2^2)U''_{zz} - 2aC_1U'_z + F(U'_z, U''_{zz}) = 8aC_1^2.$$

Специальный случай 1. Пусть $F(w_x, w_{xx}) = F(w_x)$. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = t^2 u(\zeta), \quad \zeta = xt^{-2},$$

где функция $u = u(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2u - 2\zeta u'_\zeta + 4\zeta^2 u''_{\zeta\zeta} = auu''_{\zeta\zeta} + F(u'_\zeta).$$

Специальный случай 2. Пусть $F(w_x, w_{xx}) = F(w_{xx})$. Точное решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по x:

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi''_{tt} &= 6a\varphi^2, \\ \psi''_{tt} &= 6a\varphi\psi, \\ \chi''_{tt} &= 2a\varphi\chi + F(2\varphi). \end{aligned}$$

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = wF\Big(\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + aw^2,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big).$

Частный случай уравнения 8.2.2.7.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = wF\Big(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw^2\Big).$

Частный случай уравнения 8.2.2.8.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = wF\Big(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2\Big).$

Частный случай уравнения 8.2.2.9.

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = wF\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ 2w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2\Big) + G\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ 2w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2\Big).$

Частный случай уравнения 8.2.2.11.

8.2.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F\Big(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)$

1. $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F\left(t, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm x + C_1, t) + C_2 xt + C_3 x + C_4 t + C_5,$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точное решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по x:

$$w(x,t) = \frac{1}{2}(C_1 t + C_2)x^2 + (C_3 t + C_4)x + \int_0^t (t-\xi)F(\xi, C_1\xi + C_2)\,d\xi + C_5 t + C_6,$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные.

3°. Подстановка $u(x,t) = \frac{\partial w}{\partial x}$ приводит уравнению, к линейному относительно старших производных:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f\left(t, \frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad f(t,\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi}F(t,\xi).$$

2. $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F\left(x, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(x, \pm t + C_1) + C_2 xt + C_3 x + C_4 t + C_5,$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точное решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по t:

$$w(x,t) = \frac{1}{2}(C_1 x + C_2)t^2 + (C_3 x + C_4)t + \varphi(x) + C_5 x + C_6,$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$C_1 x + C_2 = F(x, \varphi''_{xx}).$$

3. $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F\left(x, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$.

Пусть вспомогательное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$w = F(x, w, w'_x, w''_{xx})$$

после линейного преобразования

$$x = \varphi(z), \quad w = \psi(z)u + \chi(z)$$

и последующего деления обеих частей на функцию $\psi(z)$ приводится к автономному виду

$$u = \mathcal{F}(u, u'_z, u''_{zz}),$$

где $\mathcal{F} = F/\psi$. Тогда рассматриваемое уравнение в частных производных таким же преобразованием

$$x = \varphi(z), \quad w(x,t) = \psi(z)u(z,t) + \chi(z),$$

приводится к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathcal{F}\left(u, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

которое имеет точное решение типа бегущей волны $u = u(z + \lambda t)$.

Сказанное позволяет различные известные преобразования обыкновенных дифференциальных уравнений (см. Э. Камке, 1976; В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001 *a*) использовать для построения точных решений уравнений в частных производных. Если исходное уравнение было линейным, то такие преобразования будут приводить к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами.

4. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (aw + bx)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$

Замена $w = u - (b/a)x$ приводит к уравнению вида 8.2.1.3:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{b}{a}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right).$$

5. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F\left(x, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + G\left(t, \frac{\partial w}{\partial t}\right) + bw.$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (C — произвольная постоянная)

$$F\bigl(x, \varphi'_x, \varphi''_{xx}\bigr) + b\varphi = C,$$
$$\psi''_{tt} - G\bigl(t, \psi'_t\bigr) - b\psi = C.$$

6. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F\left(x, t, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + aw.$

Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(x,t) + C_1 \operatorname{ch}(kt) + C_2 \operatorname{sh}(kt) \quad \text{при } a = k^2 > 0,$$
$$w_2 = w(x,t) + C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt) \quad \text{при } a = -k^2 < 0,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

7. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = wF\left(t, \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial t}, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + aw^2, \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов при $a > 0$:

$$w(x,t) = \bigl[C_1 \sin\bigl(x\sqrt{a}\,\bigr) + C_2 \cos\bigl(x\sqrt{a}\,\bigr)\bigr]\varphi(t),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi''_{tt} = \varphi F\bigl(t,\, \varphi'_t/\varphi,\, a(C_1^2 + C_2^2)\varphi^2,\, -a\bigr).$$

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов при $a < 0$:

$$w(x,t) = \bigl(C_1 e^{\sqrt{|a|}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{|a|}\,x}\bigr)\varphi(t),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi''_{tt} = \varphi F\bigl(t,\, \varphi'_t/\varphi,\, 4aC_1C_2\varphi^2,\, -a\bigr).$$

⦿ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 507).

8. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = wF\left(t, \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial t}, \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw^2\right).$

Точные решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \bigl[C_1 \sin\bigl(x\sqrt{a}\,\bigr) + C_2 \cos\bigl(x\sqrt{a}\,\bigr)\bigr]\varphi(t) \quad \text{при } a > 0,$$
$$w(x,t) = \bigl(C_1 e^{\sqrt{|a|}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{|a|}\,x}\bigr)\varphi(t) \quad \text{при } a < 0,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi''_{tt} = \varphi F\bigl(t, \varphi'_t/\varphi, -a, 0\bigr).$$

⦿ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 507).

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = wF\Bigl(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial t},\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2\Bigr).$

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = (Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x})\varphi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\varphi''_{tt} = \varphi F\bigl(t,\ \varphi'_t/\varphi,\ \lambda^2, 4AB\lambda^2\varphi^2\bigr)$.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = [A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)]\varphi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\varphi''_{tt} = \varphi F\bigl(t,\ \varphi'_t/\varphi, -\lambda^2, -\lambda^2(A^2+B^2)\varphi^2\bigr)$.

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 507).

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = wF\Bigl(t,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial w}{\partial x} - x\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ 2w - 2x\dfrac{\partial w}{\partial x} + x^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr).$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = (C_2x^2 + C_1x + C_0)\varphi(t),$$

где C_0, C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\varphi''_{tt} = \varphi F\bigl(t, 2C_2\varphi, C_1\varphi, 2C_0\varphi\bigr)$.

11. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = wF\Bigl(t,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ 2w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2\Bigr) + G\Bigl(t,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ 2w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2\Bigr).$

Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной x:

$$w = \varphi_1(t)x^2 + \varphi_2(t)x + \varphi_3(t),$$

где функции φ_1, φ_2, φ_3 описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\varphi_1'' &= \varphi_1 F\bigl(t,\ 2\varphi_1,\ 4\varphi_1\varphi_3 - \varphi_2^2\bigr),\\
\varphi_2'' &= \varphi_2 F\bigl(t,\ 2\varphi_1,\ 4\varphi_1\varphi_3 - \varphi_2^2\bigr),\\
\varphi_3'' &= \varphi_3 F\bigl(t,\ 2\varphi_1,\ 4\varphi_1\varphi_3 - \varphi_2^2\bigr) + G\bigl(t,\ 2\varphi_1,\ 4\varphi_1\varphi_3 - \varphi_2^2\bigr).
\end{aligned}$$

Из первых двух уравнений следует, что

$$\varphi_2 = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_1\int\frac{dt}{\varphi_1^2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 508).

12. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = wF_1\Bigl(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr) + e^{\lambda x}F_2\Bigl(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr) + e^{-\lambda x}F_3\Bigl(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr).$

Существует точное решение с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t) = e^{\lambda x}\varphi(t) + e^{-\lambda x}\psi(t).$$

13. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = wF_1\Bigl(t, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr) + \cos(\lambda x)F_2\Bigl(t, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr) + \sin(\lambda x)F_3\Bigl(t, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr).$

Существует точное решение с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t) = \cos(\lambda x)\varphi(t) + \sin(\lambda x)\psi(t).$$

14. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = x^2 f_2\Bigl(t, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr) + xf_1\Bigl(t, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr) + f_0\Bigl(t, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr).$

Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной x:

$$w(x,t) = x^2\varphi(t) + x\int_0^t (t-\xi)f_1\bigl(\xi, 2\varphi(\xi)\bigr)\,d\xi + \int_0^t (t-\xi)f_0\bigl(\xi, 2\varphi(\xi)\bigr)\,d\xi + C_1xt + C_2x + C_3t + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi''_{tt} = f_2(t, 2\varphi).$$

15. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = x^2 f_2\Bigl(t, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr) + x f_1\Bigl(t, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr) + f_0\Bigl(t, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr) + g(t)w.$

Существует точное решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по x:

$$w(x,t) = x^2\varphi(t) + x\psi(t) + \chi(t).$$

8.2.3. Уравнения линейные относительно смешанной производной

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = F\Bigl(t, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr) + g(t)w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x+\varphi(t), t) + \frac{\varphi'_t(t)}{g(t)},$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция, также будет решением этого уравнения.

2°. Вырожденное решение, линейное по x:

$$w(x,t) = \varphi(t)x + \psi(t),$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, а функция $\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка $\varphi'_t = F(t, \varphi, 0)$.

3°. При $g(t) = a$, $F = F(w_x, w_{xx})$ уравнение имеет решение типа бегущей волны

$$w = U(z), \quad z = kx + \lambda t,$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k\lambda U''_{zz} = ak^2 U U''_{zz} + F(kU'_z, k^2 U''_{zz}).$$

2. $f\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + h\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$

Преобразование Лежандра

$$w(x,y) + u(\xi,\eta) = x\xi + y\eta, \quad \xi = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial w}{\partial y}$$

приводит к линейному уравнению

$$f(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - g(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + h(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0.$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = F\Bigl(t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr) + g(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$

1°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = u(z,t), \qquad z = x + C_1 y + C_1^2\int g(t)\,dt + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $u(z,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} = F\Bigl(t, u, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Bigr).$$

2°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = U(\xi,t), \qquad \xi = x + \varphi(t)(y+C_1)^2, \qquad \varphi(t) = -\Bigl[4\int g(t)\,dt + C_2\Bigr]^{-1},$$

где функция $U(\xi,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial t} = F\Bigl(t, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\Bigr) + 2g(t)\varphi(t)\frac{\partial U}{\partial \xi}.$$

8.2.4. Уравнения нелинейные относительно нескольких старших производных

1. $\boldsymbol{f_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) f_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = g_1(x) g_2(y)}$.

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) + C_1 xy + C_2 x + C_3 y + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, а функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (a — любое)

$$f_1(\varphi''_{xx}) = a g_1(x),$$
$$a f_2(\psi''_{yy}) = g_2(y).$$

2. $\boldsymbol{F\left(x, y, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) = 0}$.

Подстановка $u = \frac{\partial w}{\partial x}$ приводит к уравнению в частных производных первого порядка

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

О методах интегрирования и точных решениях таких уравнений (для различных F) см. книги Э. Камке (1966), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2003).

3. $\boldsymbol{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)}$.

1°. Точное решение, квадратичное по обеим переменным:

$$w(x,y) = \tfrac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 xy + \tfrac{1}{2} F(C_1, C_2) y^2 + C_3 x + C_4 y + C_5,$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные.

2°. Продифференцируем уравнение по x, введем новую переменную

$$U(x,y) = \frac{\partial w}{\partial x},$$

а затем сделаем преобразование Лежандра:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} - U$$

В результате приходим к линейному уравнению второго порядка

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = F_X(X,Y)\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} - F_Y(X,Y)\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y},$$

где индексы X и Y обозначают соответствующие частные производные.

Специальный случай. Пусть $F(X,Y) = aX + f(Y)$, т. е.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right).$$

Точное решение:

$$w = \varphi(z) + \tfrac{1}{6}(A_2 A_3 - A_1 A_4)x^3 + \tfrac{1}{2} a A_1 A_3 x^2 y + \tfrac{1}{2} a A_2 A_3 x y^2 + \tfrac{1}{6}(a^2 A_1 A_3 + a A_2 A_4) y^3 +$$
$$+ \tfrac{1}{2} B_1 x^2 + B_2 xy + \tfrac{1}{2} B_3 y^2 + B_4 x + B_5 y + B_6, \qquad z = A_1 x + A_2 y,$$

где A_n, B_m — произвольные постоянные, а функция $\varphi(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(A_2^2 - a A_1^2)\varphi''_{zz} + a A_4 z + B_3 - a B_1 = f(A_1 A_2 \varphi''_{zz} + a A_3 z + B_2).$$

4. $\boldsymbol{F\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0}$.

1°. Точное решение, квадратичное по обеим переменным:

$$w(x,y) = A_{11} x^2 + A_{12} xy + A_{22} y^2 + B_1 x + B_2 y + C,$$

где A_{11}, A_{12}, A_{22}, B_1, B_2, C — произвольные постоянные, связанные одним соотношением $F(2A_{11}, A_{12}, 2A_{22}) = 0$.

2°. Разрешив уравнение относительно w_{yy} (или w_{xx}) приходим к уравнению вида 8.2.4.3.

5. $F_1\left(x, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) + F_2\left(y, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = kw.$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \varphi(x) + \psi(y).$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$F_1\big(x, \varphi'_x, \varphi''_{xx}, 0\big) - k\varphi = C,$$
$$F_2\big(y, \psi'_y, 0, \psi''_{yy}\big) - k\psi = -C,$$

где C — произвольная постоянная.

6. $F_1\left(x, \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + F_2\left(y, \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial y}, \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \ln w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \varphi(x)\psi(y).$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$F_1\big(x, \varphi'_x/\varphi, \varphi''_{xx}/\varphi\big) - \ln\varphi = C,$$
$$F_2\big(y, \psi'_y/\psi, \psi''_{yy}/\psi\big) - \ln\psi = -C,$$

где C — произвольная постоянная.

7. $F_1\left(x, \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + w^k F_2\left(y, \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial y}, \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \varphi(x)\psi(y).$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi^{-k} F_1\big(x, \varphi'_x/\varphi, \varphi''_{xx}/\varphi\big) = C,$$
$$\psi^k F_2\big(y, \psi'_y/\psi, \psi''_{yy}/\psi\big) = -C,$$

где C — произвольная постоянная.

8. $F\left(ax+by,\ w,\ \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) = 0.$

Точное решение:

$$w = w(\xi), \quad \xi = ax + by,$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\big(\xi,\ w,\ aw'_\xi,\ bw'_\xi,\ a^2 w''_{\xi\xi},\ b^2 w''_{\xi\xi},\ abw''_{\xi\xi}\big) = 0.$$

9. $F\left(ax+by,\ w+kx+sy,\ \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) = 0.$

Замена $u(x,y) = w(x,y) + kx + sy$ приводит к уравнению вида 8.2.4.8:

$$F\left(ax+by,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x} - k,\ \frac{\partial u}{\partial y} - s,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0.$$

10. $(a_1x+b_1y)\frac{\partial w}{\partial x} + (a_2x+b_2y)\frac{\partial w}{\partial y} = F\left(w,\ \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right).$

Решения типа бегущей волны:

$$w = w(z), \qquad z = a_2x + (k - a_1)y,$$

где k — корень квадратного уравнения

$$k^2 - (a_1 + b_2)k + a_1b_2 - a_2b_1 = 0,$$

а функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$kzw'_z = F\big(w,\ a_2w'_z,\ (k-a_1)w'_z,\ a_2^2w''_{zz},\ a_2(k-a_1)w''_{zz},\ (k-a_1)^2w''_{zz}\big).$$

11. $\boldsymbol{(a_1x+b_1y+c_1)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^k+(a_2x+b_2y+c_2)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^k=}$

$$\boldsymbol{=F\left(w,\ \frac{\partial w}{\partial x},\ \frac{\partial w}{\partial y},\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right).}$$

Точные решения ищем в виде бегущей волны

$$w=w(z),\qquad z=Ax+By+C,$$

где постоянные A, B, C определяются путем решения алгебраической системы уравнений

$$a_1A^k+a_2B^k=A, \tag{1}$$
$$b_1A^k+b_2B^k=B, \tag{2}$$
$$c_1A^k+c_2B^k=C. \tag{3}$$

Сначала решаются первые два уравнения (1), (2), затем из (3) определяется C.

Искомая функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$z(w'_z)^k=F\bigl(w,\ Aw'_z,\ Bw'_z,\ A^2w''_{zz},\ ABw''_{zz},\ B^2w''_{zz}\bigr).$$

12. $\boldsymbol{(a_1x+b_1y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(a_2x+b_2y)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+(a_3x+b_3y)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=}$

$$\boldsymbol{=F\left(w,\ \frac{\partial w}{\partial x},\ \frac{\partial w}{\partial y},\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right).}$$

Решения типа бегущей волны:

$$w=w(z),\qquad z=Ax+By,$$

где постоянные A и B определяются путем решения алгебраической системы уравнений

$$a_1A^2+a_2AB+a_3B^2=A,$$
$$b_1A^2+b_2AB+b_3B^2=B,$$

а искомая функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$zw''_{zz}=F\bigl(w,\ Aw'_z,\ Bw'_z,\ A^2w''_{zz},\ ABw''_{zz},\ B^2w''_{zz}\bigr).$$

13. $\boldsymbol{F\left(w,\ \frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},x\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y},\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=0.}$

Решение типа бегущей волны:

$$w=w(z),\quad z=C_1x+C_2y,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F(w,C_1w'_z,C_2w'_z,zw'_z,C_1^2w''_{zz},C_1C_2w''_{zz},C_2^2w''_{zz})=0.$$

Замечание. Указанное решение является неклассическим (неинвариантным) решением типа бегущей волны, поскольку рассматриваемое уравнение неинвариантно относительно преобразований сдвига.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*a*).

14. $\boldsymbol{F\left(w,\ \frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},x\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y},\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\right.}$

$$\boldsymbol{\left.x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},x\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=0.}$$

Решение типа бегущей волны:

$$w=w(z),\quad z=C_1x+C_2y,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F(w,C_1w'_z,C_2w'_z,zw'_z,C_1^2w''_{zz},C_1C_2w''_{zz},C_2^2w''_{zz},C_1zw''_{zz},C_2zw''_{zz})=0.$$

15. $\boldsymbol{F\left(w,\ \frac{\partial w}{\partial x},\ \frac{\partial w}{\partial y},\ x\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y},\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ x^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=0}$.

Решение типа бегущей волны:

$$w=w(z),\quad z=C_1x+C_2y,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F(w,C_1w'_z,C_2w'_z,zw'_z,C_1^2w''_{zz},C_1C_2w''_{zz},C_2^2w''_{zz},z^2w''_{zz})=0.$$

8.2.5. Уравнения с n независимыми переменными

1. $\boldsymbol{\sum\limits_{k=1}^{n} f_k\left(x_k,\ \frac{\partial w}{\partial x_k},\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2}\right)=aw}$.

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x_1,\dots,x_n)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x_k),$$

где функции $\varphi_k=\varphi_k(x_k)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка

$$\sum_{k=1}^{n} f_k\left(x_k,\frac{d\varphi_k}{dx_k},\frac{d^2\varphi_k}{dx_k^2}\right)-a\varphi_k=C_k,\qquad k=1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

Произвольные константы C_1, …, C_n связаны одним соотношением $C_1+\dots+C_n=0$.

Замечание. Функции f_k могут зависеть также от любого количества смешанных производных $\partial_{x_ix_j}w$. На их местах в соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнениях будут стоять нули.

2. $\boldsymbol{\sum\limits_{k=1}^{n} f_k\left(x_k,\ \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x_k},\ \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2}\right)=a\ln w}$.

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x_1,\dots,x_n)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_k(x_k),$$

где функции $\varphi_k=\varphi_k(x_k)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка

$$f_k\left(x_k,\frac{1}{\varphi_k}\frac{d\varphi_k}{dx_k},\frac{1}{\varphi_k}\frac{d^2\varphi_k}{dx_k^2}\right)-a\ln\varphi_k=C_k;\qquad k=1,\dots,n.$$

Произвольные константы C_1, …, C_n связаны одним соотношением $C_1+\dots+C_n=0$.

3. $\boldsymbol{F\left(x_1,\dots,x_k;\ \frac{\partial w}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial w}{\partial x_k};\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2},\dots,\frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2}\right)+G\left(x_{k+1},\dots,x_n;\ \frac{\partial w}{\partial x_{k+1}},\dots,\frac{\partial w}{\partial x_n};\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_{k+1}^2},\dots,\frac{\partial^2 w}{\partial x_n^2}\right)=aw}$.

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n)=\varphi(x_1,\dots,x_k)+\psi(x_{k+1},\dots,x_n).$$

Здесь функции $\varphi=\varphi(x_1,\dots,x_k)$ и $\psi=\psi(x_{k+1},\dots,x_n)$ определяются путем решения двух более простых уравнений с частными производными

$$F\left(x_1,\dots,x_k;\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial\varphi}{\partial x_k};\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2},\dots,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k^2}\right)=a\varphi+C,$$

$$G\left(x_{k+1},\dots,x_n;\frac{\partial\psi}{\partial x_{k+1}},\dots,\frac{\partial\psi}{\partial x_n};\frac{\partial^2\psi}{\partial x_{k+1}^2},\dots,\frac{\partial^2\psi}{\partial x_n^2}\right)=a\psi-C,$$

где C — произвольная постоянная.

4. $$\boldsymbol{F\left(x_1,\ldots,x_k;\,\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x_1},\ldots,\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x_k};\,\frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2},\ldots,\frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2}\right)+}$$
$$\boldsymbol{+\,G\left(x_{k+1},\ldots,x_n;\,\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x_{k+1}},\ldots,\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x_n};\,\frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x_{k+1}^2},\ldots,\frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x_n^2}\right)=a\ln w.}$$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1},\ldots,x_n)=\varphi(x_1,\ldots,x_k)\psi(x_{k+1},\ldots,x_n).$$

Здесь функции $\varphi=\varphi(x_1,\ldots,x_k)$ и $\psi=\psi(x_{k+1},\ldots,x_n)$ определяются путем решения двух более простых уравнений с частными производными

$$F\left(x_1,\ldots,x_k;\,\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\ldots,\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k};\,\frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2},\ldots,\frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k^2}\right)=a\ln\varphi+C,$$
$$G\left(x_{k+1},\ldots,x_n;\,\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x_{k+1}},\ldots,\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x_n};\,\frac{1}{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_{k+1}^2},\ldots,\frac{1}{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_n^2}\right)=a\ln\psi-C,$$

где C — произвольная постоянная.

5. $$\boldsymbol{F\left(x_1,\ldots,x_k;\,\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x_1},\ldots,\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x_k};\,\frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2},\ldots,\frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2}\right)+}$$
$$\boldsymbol{+\,w^\beta G\left(x_{k+1},\ldots,x_n;\,\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x_{k+1}},\ldots,\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x_n};\,\frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x_{k+1}^2},\ldots,\frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x_n^2}\right)=0.}$$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1},\ldots,x_n)=\varphi(x_1,\ldots,x_k)\psi(x_{k+1},\ldots,x_n).$$

Здесь функции $\varphi=\varphi(x_1,\ldots,x_k)$ и $\psi=\psi(x_{k+1},\ldots,x_n)$ определяются путем решения двух более простых уравнений с частными производными

$$\varphi^{-\beta}F\left(x_1,\ldots,x_k;\,\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\ldots,\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k};\,\frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2},\ldots,\frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k^2}\right)=C,$$
$$\psi^\beta G\left(x_{k+1},\ldots,x_n;\,\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x_{k+1}},\ldots,\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x_n};\,\frac{1}{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_{k+1}^2},\ldots,\frac{1}{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_n^2}\right)=-C,$$

где C — произвольная постоянная.