Из книги A. D. Polyanin and V. F. Zaitsev, «Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition», Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2011 [русский перевод].

9. Уравнения третьего порядка

9.1. Уравнения, содержащие производную первого порядка по t

9.1.1. Уравнение Кортевега — де Фриза $\frac{\partial w}{\partial t} + a\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + bw\frac{\partial w}{\partial x} = 0$

1. $\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 6w\frac{\partial w}{\partial x} = 0.$

Уравнение Кортевега — де Фриза (Korteweg — Vries) *в канонической форме*. Это уравнение используется во многих разделах нелинейной механики и теоретической физики для описания одномерных нелинейных волн с дисперсией без диссипации (в которых закон дисперсии для линейных волн имеет вид $\omega = a_1 k + a_3 k^3$, где k — волновое число). В частности, на уравнении Кортевега — де Фриза основано математическое моделирование волн умеренной амплитуды на поверхности неглубокой жидкости.

Уравнение Кортевега — де Фриза интегрируется методом обратной задачи рассеяния, см. пп. 9–10 и литературу после уравнения.

1. Формула подобия.

Пусть $w(x,t)$ — решение уравнения Кортевега — де Фриза. Тогда функция

$$w_1 = C_1^2 w(C_1 x + 6C_1C_2 t + C_3, C_1^3 t + C_4) + C_2,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2. Решения типа бегущей волны. Солитон. Периодические решения.

2.1. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x - vt,$$

где функция $w(z)$ задается в неявном виде

$$\int \frac{dw}{\sqrt{2w^3 + vw^2 + C_1 w + C_2}} = \pm z + C_3. \qquad (1)$$

Здесь v, C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные; значению $v = 0$ соответствует стационарное решение.

Ниже описано три важных частных случая, когда решение (1) удается записать в явной форме.

2.2. *Солитон*. Единственное решение, регулярное при всех действительных значениях z и обращающееся в нуль при $z \to \pm\infty$, имеет вид

$$w(z) = -\frac{v}{2\,\mathrm{ch}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{v}\,(z - z_0)\right]}, \qquad (2)$$

где z_0 — произвольная постоянная.

2.3. *Кноидальные волны*. Существуют периодические решения действительные и регулярные при всех действительных значениях z:

$$w(z) = A\,\mathrm{cn}^2\big[p(z - z_0), k\big], \quad A = -2p^2k^2, \quad v = 4p^2(2k^2 - 1), \qquad (3)$$

которые зависят от произвольной положительной постоянной $k^2 < 1$. Здесь $\mathrm{cn}(y,k)$ — эллиптический косинус Якоби. Решение (2) можно получить из формулы (3) с помощью предельного перехода при $k^2 \to 1$. Периоды решения (3) равны $\omega_1 = 4K$, $\omega_2 = 2K + 2iK_*$, где K, K_* — полные эллиптические интегралы первого рода:

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad K_* = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k_*^2t^2)}}, \quad k^2 + k_*^2 = 1.$$

2.4. *Рациональное решение.* Это решение имеет вид

$$w(z) = \frac{2}{(z-z_0)^2} - \frac{v}{6},$$

где z_0 — произвольная постоянная.

3. Двух- и N-солитонные решения.

3.1. Двухсолитонное решение:

$$w(x,t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln\bigl(1 + B_1 e^{\theta_1} + B_2 e^{\theta_2} + AB_1B_2 e^{\theta_1+\theta_2}\bigr),$$
$$\theta_1 = a_1 x - a_1^3 t, \quad \theta_2 = a_2 x - a_2^3 t, \quad A = \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right)^2,$$

где B_1, B_2, a_1, a_2 — произвольные постоянные.

3.2. N-солитонные решения:

$$w(x,t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Bigl\{\ln\det\bigl[\mathbf{I} + \mathbf{C}(\mathbf{x},\mathbf{t})\bigr]\Bigr\}.$$

Здесь $\mathbf{I}$ — единичная матрица порядка N, а $\mathbf{C}(x,t)$ — симметричная матрица порядка N с элементами

$$C_{mn}(x,t) = \frac{\sqrt{\rho_m(t)\rho_n(t)}}{p_m + p_n} \exp\bigl[-(p_m + p_n)x\bigr],$$

где нормировочные множители определяются формулами

$$\rho_n(t) = \rho_n(0)\exp\bigl(8p_n^3 t\bigr), \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

В решение входит $2N$ произвольных постоянных p_n и $\rho_n(0)$.

Справедлива асимптотическая формула

$$w(x,t) \approx -2\sum_{n=1}^{N} \frac{p_n^2}{\operatorname{ch}^2\bigl[p_n(x - \xi_n^{\pm} - v_n t)\bigr]} \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty,$$

где $v_n = 4p_n^2$ — скорость n-й компоненты, а действительные постоянные $\xi_n^{\pm}$ связаны между собой соотношениями

$$\xi_n^{+} - \xi_n^{-} = \sum_{m=1}^{n-1} p_n^{-1} \ln\frac{p_n + p_m}{p_n - p_m} - \sum_{m=n+1}^{N} p_n^{-1} \ln\frac{p_n + p_m}{p_n - p_m}.$$

4. Решения типа «солитоны + полюс».

4.1. Решение типа «один солитон + один полюс»:

$$w(x,t) = -2p^2\bigl[\operatorname{ch}^{-2}(pz) - (1+px)^{-2}\operatorname{th}^2(pz)\bigr]\bigl[1 - (1+px)^{-1}\operatorname{th}(pz)\bigr]^{-2}, \quad z = x - 4p^2t - c,$$

где p, c — произвольные постоянные.

4.2. Решение типа «N солитонов + один полюс»:

$$w(x,t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Bigl\{x\ln\det\bigl[\mathbf{I} + \mathbf{D}(\mathbf{x},\mathbf{t})\bigr]\Bigr\}.$$

Здесь $\mathbf{I}$ — единичная матрица порядка N, а $\mathbf{D}(x,t)$ — симметричная матрица порядка N с элементами

$$D_{mn}(x,t) = c_m(t)c_n(t)\bigl[(p_m + p_n)^{-1} + (p_m p_n x)^{-1}\bigr]\exp\bigl[-(p_m + p_n)x\bigr],$$

где нормировочные множители определяются формулами

$$c_n(t) = c_n(0)\exp\bigl(4p_n^3 t\bigr), \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

В решение входит $2N$ произвольных постоянных p_n и $c_n(0)$.

5. Рациональные решения.

Наиболее простые рациональные решения уравнения Кортевега — де Фриза имеют вид

$$
\begin{aligned}
w(x) &= 2x^{-2},\\
w(x,t) &= -\frac{1}{6}\,\frac{x}{t},\\
w(x,t) &= \frac{6x(x^3-24t)}{(x^3+12t)^2},\\
w(x,t) &= -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\bigl(x^6+60x^3t-720t^2\bigr).
\end{aligned}
$$

Их можно несколько обобщить, сделав произвольные сдвиги по x и t.

6. Автомодельное решение:

$$
w(x,t) = \bigl[3(t-t_0)\bigr]^{-2/3}f(y), \quad y = \bigl[3(t-t_0)\bigr]^{-1/3}(x-x_0),
$$

где функция $f(y)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением третьего порядка

$$
f'''_{yyy} - yf'_y - 2f - 6ff'_y = 0. \tag{4}
$$

Уравнение (4) имеет первый интеграл

$$
(y+2f)[f''_{yy} - (y+2f)f] - (1+f'_y)f'_y = C,
$$

где C — постоянная интегрирования. Решение уравнения (4) можно представить в виде

$$
f(y) = g'_y(y) + g^2(y),
$$

где функция $g(y)$ — любое решение второго уравнения Пенлеве

$$
g''_{yy} - 2g^3 - yg = A, \qquad A \text{ — произвольная постоянная.} \tag{5}
$$

При $A = 2^{-2/3}$ уравнение (5) имеет решение

$$
g(y) = \frac{d}{dy}\Bigl[\ln F\bigl(-2^{-1/3}y\bigr)\Bigr],
$$

где функция $F = F(z)$ удовлетворяет уравнению Эйри $F''_{zz} = zF$.

7. Другие решения.

7.1. Точное решение:

$$
w(x,t) = 2\varphi(z) + 2C_1t, \quad z = x + 6C_1t^2 + C_2t,
$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\varphi(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$
\varphi''_{zz} = 6\varphi^2 - C_2\varphi - C_1z + C_3,
$$

где C_3 — произвольная постоянная. Случаю $C_1 = -1$, $C_2 = C_3 = 0$ соответствует первое уравнение Пенлеве (при $C_n \neq 0$ уравнение для φ также можно свести к первому уравнению Пенлеве).

7.2. Точное решение:

$$
w = \varphi^2F(z) + \frac{1}{6\varphi}(\varphi'_tx + \psi'_t), \qquad z = \varphi(t)x + \psi(t).
$$

Здесь функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ определяются формулами

$$
\varphi(t) = (3At+C_1)^{-1/3}, \quad \psi(t) = C_2(3At+C_1)^{2/3} + C_3(3At+C_1)^{-1/3},
$$

где A, C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функция $F(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$
F'''_{zzz} - 6FF'_z - AF + \tfrac{2}{3}A^2z = 0.
$$

8. Преобразование Миуры и преобразования Беклунда.

8.1. Уравнение Кортевега — де Фриза с помощью дифференциальной подстановки (преобразование Миуры)

$$w = \frac{\partial u}{\partial x} + u^2, \tag{6}$$

приводится к виду

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 6w\frac{\partial w}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + 2u\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 6u^2\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что любое решение $u = u(x,t)$ модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 6u^2\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

порождает соответствующее решение (6) уравнения Кортевега — де Фриза.

8.2. Преобразования Беклунда

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon(u^2 - w), \qquad \varepsilon = \pm 1,\\ &\frac{\partial u}{\partial t} = -\varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\frac{\partial}{\partial x}(uw) \end{aligned} \tag{8}$$

связывают решения уравнения Кортевега — де Фриза и модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза (7). Первое выражение (8) при $\varepsilon = 1$ переходит в преобразование Миуры (6).

8.3. Автопреобразование Беклунда, выраженное через потенциальные функции $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{1}{2}w$ и $\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x} = -\frac{1}{2}\widetilde{w}$, имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}(\widetilde{\varphi} - \varphi) = k^2 - (\widetilde{\varphi} - \varphi)^2,\\ &\frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{\varphi} - \varphi) = 6(\widetilde{\varphi} - \varphi)^2\frac{\partial}{\partial x}(\widetilde{\varphi} - \varphi) - 6k^2\frac{\partial}{\partial x}(\widetilde{\varphi} - \varphi) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}(\widetilde{\varphi} - \varphi), \end{aligned}$$

где k — произвольная постоянная.

9. Интегральное уравнение Гельфанда — Левитана — Марченко.

Всякая быстро убывающая при $x \to +\infty$ функция $F = F(x,y;t)$, удовлетворяющая одновременно двум линейным уравнениям

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0,\\ &\frac{\partial F}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 F = 0, \end{aligned}$$

порождает решение уравнения Кортевега — де Фриза в виде

$$w = -2\frac{d}{dx}K(x,x;t), \tag{9}$$

где $K(x,y;t)$ — решение линейного интегрального уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко

$$K(x,y;t) + F(x,y;t) + \int_x^\infty K(x,z;t)F(z,y;t)\,dz = 0. \tag{10}$$

Время t входит в это уравнение как параметр.

10. Задача Коши.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Кортевега — де Фриза с начальным условием

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{11}$$

где функция $f(x)$ достаточно быстро стремится к нулю при $|x| \to \infty$. Решение задачи Коши распадается на нескольких этапов.

Первый этап. Сначала решается линейная задача на собственные значения для вспомогательного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\psi''_{xx} - \bigl[f(x) - \lambda\bigr]\psi = 0. \tag{12}$$

Собственные значения могут быть двух типов:

$$\begin{aligned} &\lambda_n = -\varkappa_n^2, \quad n = 1,\,2,\,\ldots,\,N \quad &&(\text{дискретный спектр}),\\ &\lambda = k^2, \qquad -\infty < k < \infty &&(\text{непрерывный спектр}). \end{aligned} \tag{13}$$

Пусть $\lambda_n = -\varkappa_n^2$ — дискретные собственные значения, а $\psi_n = \psi_n(x)$ — соответствующие собственные функции, которые обращаются в нуль на бесконечности, квадратично суммируемы и нормированы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2(x)\,dx = 1.$$

Главный член асимптотического разложения ψ_n при больших x имеет вид

$$\psi_n \to c_n \exp(-\varkappa_n x) \quad \text{при} \quad x \to \infty. \tag{14}$$

Для непрерывного спектра $\lambda = k^2$ волновая функция ψ на бесконечности определяется линейной комбинацией экспонент $\exp(\pm ikx)$ (поскольку $f \to 0$ при $|x| \to \infty$). Условия на бесконечности

$$\begin{aligned} &\psi \to e^{-ikx} &&\text{при} \quad x \to -\infty,\\ &\psi \to a(k)e^{-ikx} + b(k)e^{ikx} &&\text{при} \quad x \to \infty \end{aligned} \tag{15}$$

и уравнение (12) позволяют однозначно определить коэффициенты прохождения и отражения $a(k)$ и $b(k)$ (отметим, что они связаны простым соотношением $|a|^2 - |b|^2 = 1$).

Второй этап. Рассматривается линейное интегральное уравнение Гельфанда — Левитана — Марченко (10), где

$$F(x,y;t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} b(k)e^{i[8k^3t + k(x+y)]}\,dk + \sum_{n=1}^{N} c_n^2 e^{8\varkappa_n^3 t - \varkappa_n(x+y)}. \tag{16}$$

Сюда входят постоянные $\varkappa_n, c_n$ и функция $b(k)$, которые определялись на первом этапе решения задачи [см. формулы (13)–(15)]. Из выражения (16) видно, что $F(x,y;t) = F(x+y;t)$.

Третий этап. Решение интегрального уравнения (10), (16) подставляется в формулу (9) и дает решение задачи Коши для уравнения Кортевега — де Фриза с начальным условием (11).

Замечание. Решение задачи Коши для данного нелинейного уравнения сводится к последовательному решению двух линейных задач.

11. Законы сохранения и интегралы движения.

11.1. Уравнение Кортевега — де Фриза имеет бесконечное число законов сохранения. Простейшие из них имеют вид

$$\begin{aligned} &D_t(w) + D_x\bigl(w_{xx} - 3w^2\bigr) = 0,\\ &D_t\bigl(\tfrac{1}{2}w^2\bigr) + D_x\bigl(ww_{xx} - \tfrac{1}{2}w_x^2 - 2w^3\bigr) = 0,\\ &D_t\bigl(w_x^2 + 2w^3\bigr) + D_x\bigl(2w_x w_{xxx} - w_{xx}^2 + 6w^2 w_{xx} - 12ww_x^2 - 9w^4\bigr) = 0,\\ &D_t\bigl(3tw^2 + xw\bigr) + D_x\bigl[t\bigl(6ww_{xx} - 3w_x^2 - 12w^3\bigr) - w_x + xw_{xx} - 3xw^2\bigr] = 0, \end{aligned}$$

где $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$.

11.2. Уравнение Кортевега — де Фриза имеет бесконечный набор интегралов движения:

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} P_n(w, w_x, \ldots)\,dx = \text{const}, \qquad n = 0,\,1,\,2,\,\ldots,$$

где P_n — многочлен от функции w и ее производных (считается, что решение w достаточно быстро убывает при $|x| \to \infty$). В частности, первые четыре многочлена имеют вид:

$$P_0 = w, \quad P_1 = w^2, \quad P_2 = w_x^2 + 2w^3, \quad P_3 = \tfrac{1}{2}\bigl(w_{xx}^2 - 5w^2 w_{xx} + 5w^4\bigr).$$

⊙ *Литература для уравнения* 9.1.1.1: D. J. Korteweg, G. Vries (1895), G. B. Whitham (1965), C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura (1967, 1974), R. M. Miura (1968), R. M. Miura, C. S. Gardner, M. D. Kruskal (1968), M. D. Kruskal, R. M. Miura, C. S. Gardner, N. J. Zabusky (1970), P. D. Lax (1968), R. Hirota (1971, 1972, 1973), В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев (1971), С. П. Новиков (1974), G. L. Lamb (1974), Р. М. Миура (1977), В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский (1980), Р. Буллаф, Ф. Кодри (1983), Н. Х. Ибрагимов (1983, стр. 154), Дж. Лэмб (1984), М. Абловиц, Х. Сигур (1987, стр. 223), Ф. Калоджеро, А. Дегасперис (1985, стр. 38–40, 162–168, 262–263, 339), Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис (1988, стр. 185), П. Олвер (1989), P. A. Clarkson, M. D. Kruskal (1989), G. W. Bluman, S. Kumei (1989), M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson (1991), N. H. Ibragimov (1994, стр. 188), R. S. Palais (1997), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов (2005, стр. 186–191).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t}+a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}+bw\dfrac{\partial w}{\partial x}=0.$

Ненормированное уравнение Кортевега — де Фриза.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение уравнения Кортевега — де Фриза. Тогда функция
$$w_1=C_1^2w(C_1x-bC_1C_2t+C_3,C_1^3t+C_4)+C_2,$$
где $C_1,\,\ldots,\,C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Рассмотрим задачу Коши с начальным условием
$$w=f(x)\quad\text{при}\quad t=0\qquad(-\infty<x<\infty),$$
где функция $f(x)$ достаточно быстро стремится к нулю при $|x|\to\infty$.

Асимптотическое решение при $t\to\infty$ (при достаточно больших x) представляет собой сумму солитонов:
$$w(x,t)=2\sum_{n=1}^{N}|\lambda_n|\operatorname{ch}^{-2}\left[\sqrt{\frac{b|\lambda_n|}{6a}}\bigl(x-\tfrac{2}{3}b|\lambda_n|t+c_n\bigr)\right],$$
где λ_n — дискретные собственные значения уравнения Шредингера
$$\Psi''_{xx}+\frac{b}{6a}\bigl[\lambda+f(x)\bigr]\Psi=0,\qquad\Psi(\pm\infty)=0.$$

3°. Преобразование $w(x,t)=-\dfrac{6a}{b}u(x,\tau)$, $\tau=at$ приводит к уравнению Кортевега — де Фриза в канонической форме 9.1.1.1:
$$\frac{\partial u}{\partial\tau}+\frac{\partial^3u}{\partial x^3}-6u\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

⦿ *Литература*: C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura (1974), Г. И. Баренблатт (1978).

9.1.2. Цилиндрическое, сферическое и модифицированное уравнения Кортевега — де Фриза

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}-6w\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{1}{2t}w=0.$

Цилиндрическое уравнение Кортевега — де Фриза. Частный случай уравнения 9.1.2.3 при $a=1$, $b=-6$, $k=\frac{1}{2}$.

Преобразование
$$w(x,t)=-\frac{x}{12t}-\frac{1}{2t}u(z,\tau),\quad x=\frac{z}{\tau},\quad t=-\frac{1}{2\tau^2}$$
приводит к уравнению Кортевега — де Фриза в канонической форме 9.1.1.1:
$$\frac{\partial u}{\partial\tau}+\frac{\partial^3u}{\partial z^3}-6u\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

⦿ *Литература*: R. S. Johnson (1979), Ф. Калоджеро, А. Дегасперис (1985, стр. 237–238), G. W. Bluman, S. Kumei (1989, p. 313).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}-6w\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{1}{t}w=0.$

Сферическое уравнение Кортевега — де Фриза. Частный случай уравнения 9.1.2.3 при $a=1$, $b=-6$, $k=1$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция
$$w_1=C_1^2w\bigl(C_1x+6C_1C_2\ln|t|+C_3,\;C_1^3t\bigr)+C_2t^{-1},$$
где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Вырожденное решение, линейное по x:
$$w(x,t)=\frac{C_1-x}{t(C_2+6\ln|t|)}.$$

3°. Автомодельное решение:
$$w(x,t)=t^{-2/3}u(z),\qquad z=xt^{-1/3},$$
где функция $u=u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением
$$au'''_{zzz}+buu'_z-\tfrac{1}{3}zu'_z+\tfrac{1}{3}u=0.$$

3. $\boldsymbol{\dfrac{\partial w}{\partial t} + a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + bw\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{k}{t}w = 0}$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^2 w\biggl(C_1 x - \frac{bC_1C_2}{1-k}t^{1-k} + C_3,\; C_1^3 t\biggr) + C_2 t^{-k},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Вырожденное решение, линейное по x:

$$w(x,t) = \frac{(1-k)x + C_1}{C_2 t^k + bt}.$$

3°. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = t^{-2/3}u(z), \quad z = xt^{-1/3},$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$au'''_{zzz} + buu'_z - \tfrac{1}{3}zu'_z + \bigl(k - \tfrac{2}{3}\bigr)u = 0.$$

⦿ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 522).

4. $\boldsymbol{\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 6w^2\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0}$.

Модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(C_1 x + C_2, C_1^3 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Автомодельное решение (x_0, t_0 — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = \bigl[3(t-t_0)\bigr]^{-1/3} f(y), \quad y = \bigl[3(t-t_0)\bigr]^{-1/3}(x - x_0),$$

где функция $f(y)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением третьего порядкатретьего порядка

$$f'''_{yyy} - yf'_y - f - 6f^2 f'_y = 0.$$

Интегрируя, получим второе уравнение Пенлеве (a — произвольная постоянная):

$$f''_{yy} - 2f^3 - yf = a.$$

3°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция $u(x,t)$, полученная преобразованием Миуры

$$u(x,t) = \frac{\partial w}{\partial x} + w^2, \tag{1}$$

удовлетворяет уравнению Кортевега — де Фриза 9.1.1.1:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: если $u(x,t)$ — решение уравнения Кортевега — де Фриза (2), то функция $w(x,t)$, связанная с ним преобразованием Миуры (1), удовлетворяет нелинейному интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 6w^2\frac{\partial w}{\partial x} = c(t)\exp\biggl[-2\int w(x,t)\,dx\biggr].$$

4°. Решения модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 6\sigma w^2\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \sigma = \pm 1 \tag{3}$$

могут быть получены из решений линейного интегрального уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко. Всякая быстро убывающая при $x \to +\infty$ функция $F = F(x,y;t)$, удовлетворяющая одновременно двум линейным уравнениям

$$\begin{gathered} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t} + \biggl(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\biggr)^3 F = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

порождает решение уравнения (3) в виде

$$w = K(x, x; t),$$

где $K(x, y; t)$ — решение линейного интегрального уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко

$$K(x, y; t) = F(x, y; t) + \frac{\sigma}{4}\int_x^\infty \int_x^\infty K(x, z; t)F(z, u; t)F(u, y; t)\,dz\,du. \qquad (5)$$

Время t входит в (5) как параметр. Из первого уравнения (4) следует, что $F(x, y; t) = F(x+y; t)$.

5°. Законы сохранения:

$$D_t(w) + D_x\bigl(w_{xx} - 2w^3\bigr) = 0,$$
$$D_t\bigl(\tfrac{1}{2}w^2\bigr) + D_x\bigl(ww_{xx} - \tfrac{1}{2}w_x^2 - \tfrac{3}{2}w^4\bigr) = 0,$$

где $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$ и $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$.

⦿ *Литература для уравнения* 9.1.2.4: G. B. Whitham (1965), R. M. Miura, C. S. Gardner, M. D. Kruskal (1968), М. Абловиц, Х. Сигур (1987, стр. 256–260), Ф. Калоджеро, А. Дегасперис (1985).

5. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 6w^2\frac{\partial w}{\partial x} = 0.$

Модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза.

1°. Пусть $w(x, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(C_1 x + C_2, C_1^3 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Односолитонное решение:

$$w(x, t) = a + \frac{k^2}{\sqrt{4a^2 + k^2}\,\operatorname{ch} z + 2a}, \qquad z = kx - (6a^2 k + k^3)t + b,$$

где a, b, k — произвольные постоянные.

3°. Двухсолитонное решение:

$$w(x, t) = 2\frac{a_1 e^{\theta_1} + a_2 e^{\theta_2} + Aa_2 e^{2\theta_1 + \theta_2} + Aa_1 e^{\theta_1 + 2\theta_2}}{1 + e^{2\theta_1} + e^{2\theta_2} + 2(1 - A)e^{\theta_1 + \theta_2} + A^2 e^{2(\theta_1 + \theta_2)}},$$
$$\theta_1 = a_1 x - a_1^3 t + b_1, \quad \theta_2 = a_2 x - a_2^3 t + b_2, \quad A = \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right)^2,$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 — произвольные постоянные.

4°. Рациональные решения (алгебраические солитоны):

$$w(x, t) = a - \frac{4a}{4a^2 z^2 + 1}, \qquad z = x - 6a^2 t,$$
$$w(x, t) = a - \frac{12a\bigl(z^4 + \frac{3}{2}a^{-2}z^2 - \frac{3}{16}a^{-4} - 24tz\bigr)}{4a^2\bigl(z^3 + 12t - \frac{3}{4}a^{-2}z\bigr)^2 + 3\bigl(z^2 + \frac{1}{4}a^{-2}\bigr)^2},$$

где a — произвольная постоянная.

5°. См. п. 4° (при $\sigma = -1$) уравнения 9.1.2.4.

⦿ *Литература для уравнения* 9.1.2.5: H. Ono (1976), М. Абловиц, Х. Сигур (1987, стр. 232–233), Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис (1988, стр. 57).

9.1.3. Обобщенное уравнение Кортевега — де Фриза $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} + a\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + f(w)\frac{\partial w}{\partial x} = 0$

Предварительные замечания. При $f(w) = bw$ см. уравнения 9.1.1.1 и 9.1.1.2; при $f(w) = bw^2$ см. уравнения 9.1.2.4 и 9.1.2.5.

1°. Уравнения этого вида допускают точные решения типа бегущей волны

$$w = w(z), \quad z = kx + \lambda t,$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $w(z)$ определяется обыкновенным автономным дифференциальным уравнением второго порядка (C — произвольная постоянная)

$$\alpha k^3 w''_{zz} + k \int f(w)\,dw - \lambda w = C.$$

2°. Законы сохранения:

$$D_t(w) + D_x\bigl[\alpha w_{xx} + F_0(w)\bigr] = 0,$$

$$D_t\bigl(\tfrac{1}{2}w^2\bigr) + D_x\bigl[\alpha w w_{xx} - \tfrac{1}{2}\alpha w_x^2 + F_1(w)\bigr] = 0,$$

где

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad D_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad F_0(w) = \int f(w)\,dw, \quad F_1(w) = \int w f(w)\,dw.$$

1. $\boldsymbol{\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + a w^k \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0}$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{2/k} w(C_1 x + C_2, C_1^3 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны (солитон):

$$w(x,t) = \frac{A}{\operatorname{ch}^{2/k}\bigl[Bk(x - 4B^2 t - C)\bigr]},$$

где B, C — произвольные постоянные; $A = \bigl[2(k+1)(k+2)B^2/a\bigr]^{1/k}$.

3°. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = t^{-\frac{2}{3k}} U(z), \quad z = x t^{-\frac{1}{3}},$$

где функция $U = U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$-\frac{2}{3k}U - \frac{1}{3} z U'_z + U'''_{zzz} + a U^k U'_z = 0.$$

4°. Законы сохранения:

$$D_t w + D_x\left(w_{xx} + \frac{a}{k+1} w^{k+1}\right) = 0,$$

$$D_t(w^2) + D_x\left(2 w w_{xx} - w_x^2 + \frac{2a}{k+2} w^{k+2}\right) = 0,$$

где $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$ и $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$.

⊙ *Литература*: М. Абловиц, Х. Сигур (1987).

2. $\boldsymbol{\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + a e^w \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0}$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(C_1 x + C_2, C_1^3 t + C_3) + 2\ln|C_1|,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где функция $w(z)$ определяется обыкновенным автономным дифференциальным уравнением второго порядка

$$w''_{zz} + \lambda w + a e^w = C,$$

λ, C — произвольные постоянные.

3°. Точное решение:

$$w(x,t) = U(\xi) - \tfrac{2}{3}\ln t, \quad \xi = x t^{-\frac{1}{3}},$$

где функция $U = U(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$U'''_{\xi\xi\xi} + \bigl(a e^U - \tfrac{1}{3}\xi\bigr) U'_\xi - \tfrac{2}{3} = 0.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (b\ln w + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

1°. Пусть функция $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = e^{C_1} w(x + bC_1 t + C_2, t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \exp\left[\frac{C_2 - x}{bt + C_1} + \frac{a}{b}\frac{1}{(bt + C_1)^2} - \frac{c}{b}\right],$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Точное решение:

$$w(x,t) = e^{\lambda t}u(z), \quad z = x + \tfrac{1}{2}b\lambda t^2 + kt,$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $u(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$au'''_{zzz} + (b\ln u + c - k)u'_z - \lambda u = 0.$$

Значению $\lambda = 0$ соответствует решение типа бегущей волны.

⊙ *Литература*: В. И. Фущич, Н. И. Серов, Т. К. Амеров (1991), В. А. Галактионов (1999), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 525).

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (b\,\mathrm{Arsh}\,w + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \mathrm{sh}\left[\frac{C_2 - x}{bt + C_1} + \frac{a}{b}\frac{1}{(bt + C_1)^2} - \frac{c}{b}\right],$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: В. И. Фущич, Н. И. Серов, Т. К. Амеров (1991).

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (b\,\mathrm{Arch}\,w + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \mathrm{ch}\left[\frac{C_2 - x}{bt + C_1} + \frac{a}{b}\frac{1}{(bt + C_1)^2} - \frac{c}{b}\right],$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (b\arcsin w + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \sin\left[\frac{C_2 - x}{bt + C_1} - \frac{a}{b}\frac{1}{(bt + C_1)^2} - \frac{c}{b}\right],$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: В. И. Фущич, Н. И. Серов, Т. К. Амеров (1991).

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (b\arccos w + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \cos\left[\frac{C_2 - x}{bt + C_1} - \frac{a}{b}\frac{1}{(bt + C_1)^2} - \frac{c}{b}\right],$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

9.1.4. Уравнения, приводимые к уравнению Кортевега — де Фриза

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + bw\dfrac{\partial w}{\partial x} = f(t)$.

Преобразование

$$w = u(z,t) + \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau, \quad z = x - b\int_{t_0}^{t}(t-\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

где t_0 — любое число (при котором имеют смысл данные интегралы), приводит к уравнению вида 9.1.1.2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + bu\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \bigl[bw^2 + f(t)\bigr]\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0$.

Преобразование

$$w = ku(z,t), \quad z = a^{-1/3}x - a^{-1/3}\int f(t)\,dt, \quad k = \sqrt{|6a^{1/3}b^{-1}|},$$

приводит к уравнению вида 9.1.2.4 или 9.1.2.5:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + 6\,\mathrm{sign}(ab)\,u^2\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} - a\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = 0$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(C_1 x + 2aC_1C_2 t + C_3, C_1^3 t + C_4) + C_2 x + aC_2^2 t + C_5,$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Преобразование Беклунда

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{3}{a}u, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{3}{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{9}{a}u^2 \tag{1}$$

связывает рассматриваемое уравнение с уравнением Кортевега — де Фриза 9.1.1.1:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

Пусть $u = u(x,t)$ — некоторое решение уравнения (2). Тогда линейная система уравнений первого порядка (1) позволяет найти соответствующее решение $w = w(x,t)$ исходного уравнения.

⊙ *Литература*: Н. Х. Ибрагимов (1983, стр. 216).

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} - a\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = f(t)$.

Замена $w = u(x,t) + \displaystyle\int f(t)\,dt$ приводит к уравнению вида 9.1.4.3:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} - a\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^3 = 0$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = \pm w(C_1 x + C_2, C_1^3 t + C_3) + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Преобразования Беклунда

$$\frac{\partial w}{\partial x} = bu, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2bu^3, \qquad \text{где} \quad b = \pm\sqrt{2/a}\,, \tag{1}$$

связывают рассматриваемое уравнение с модифицированным уравнением Кортевега — де Фриза вида 9.1.2.4:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 6u^2\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

Пусть $u = u(x,t)$ — некоторое решение уравнения (2). Тогда линейная система уравнений первого порядка (1) позволяет найти соответствующее решение $w = w(x,t)$ исходного уравнения.

⊙ *Литература*: Н. Х. Ибрагимов (1983, стр. 216).

6. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - a\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3 = f(t).$

Замена $w = u(x,t) + \int f(t)\,dt$ приводит к уравнению вида 9.1.4.5:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3 = 0.$$

7. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{1}{8}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3 - \left(ae^w + be^{-w}\right)\frac{\partial w}{\partial x}.$

Решения находятся из уравнения первого порядка

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{4}{\sqrt{6}}\left(\sqrt{a}\,e^{w/2} + \sqrt{b}\,e^{-w/2}\right) = 4u, \tag{1}$$

где функция $u = u(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \left(\lambda - 6u^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \lambda = -2\sqrt{ab}. \tag{2}$$

Уравнение (1) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно x с параметром t. В частных случаях $a = 0$ или $b = 0$ уравнение (2) совпадает с модифицированным уравнением Кортевега — де Фриза 9.1.2.4.

Замечание. Переходя в (2) от t, x к новым независимым переменным t, $z = x + \lambda t$, получим модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза 9.1.2.4:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - 6u^2\frac{\partial u}{\partial z}.$$

⊙ *Литература*: Н. Х. Ибрагимов (1983, стр. 216–217).

8. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = w^3\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}.$

Уравнение Гарри Дима (Harry Dym).

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(C_2 x + C_3, C_1^3 C_2^3 t + C_4),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Существуют точные решения следующих видов:

$$\begin{array}{lll}
w = U(z), & z = x + \lambda t & \Longrightarrow\ U''_{zz} + \tfrac{1}{2}\lambda U^{-2} = C; \\
w = t^{-\lambda-1/3}U(z), & z = xt^{\lambda} & \Longrightarrow\ U^3 U'''_{zzz} - \lambda z U'_z + \left(\lambda + \tfrac{1}{3}\right)U = 0; \\
w = e^{-\lambda t}U(z) & z = xe^{\lambda t} & \Longrightarrow\ U^3 U'''_{zzz} - \lambda z U'_z + \lambda U = 0; \\
w = t^{-1/3}U(z), & z = x + \lambda \ln|t| & \Longrightarrow\ U^3 U'''_{zzz} - \lambda U'_z + \tfrac{1}{3}U = 0;
\end{array}$$

где λ, C — произвольные постоянные. Первое решение является решением типа бегущей волны, второе — автомодельным решением.

3°. Покажем, что рассматриваемое уравнение связано с уравнением Кортевега — де Фриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + u\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (1)$$

Подстановка

$$u = 3\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^{-1}\frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^{-2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)^2$$

приводит (1) к виду

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)^2. \qquad (2)$$

Дифференцирование (2) по y дает

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} = \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} - 3\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^{-1}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{3}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^{-2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)^3.$$

Преобразование $x = v$, $w = \frac{\partial v}{\partial y}$ приводит к исходному уравнению.

⊙ *Литература*: Н. Х. Ибрагимов (1983, стр. 217–218).

9.1.5. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} + a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + f\Big(w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) = 0$

► *При $f(w,u) = bu^2$ и $f(w,u) = bu^3$, см. соответственно уравнения 9.1.4.3 и 9.1.4.5. Уравнения данного вида допускают точные решения типа бегущей волны $w = w(kx + \lambda t)$.*

1. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} + a\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + bw\frac{\partial w}{\partial x} + cw = 0.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w\big(x + bC_1e^{-ct} + C_2,\ t + C_3\big) + cC_1e^{-ct},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = U(z) + C_1e^{-ct}, \qquad z = x + bC_1e^{-ct} + C_2t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aU'''_{zzz} + (bU + C_2)U'_z + cU = 0.$$

Частному случаю $C_1 = 0$ соответствует решение типа бегущей волны.

2. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + a\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + bw^2.$

1°. Решение с обобщенным разделением переменных при $ab < 0$:

$$w(x,t) = \frac{C_2}{(t + C_1)^2}\exp(\lambda x + \lambda^3 t) - \frac{1}{b(t + C_1)}, \qquad \lambda = \pm\sqrt{-\frac{b}{a}},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных при $ab < 0$:

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{bt + C_1} - \frac{1}{bt + C_2}\right)\operatorname{ch}(\lambda x + \lambda^3 t + C_3) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{bt + C_1} + \frac{1}{bt + C_2}\right), \qquad \lambda = \sqrt{-\frac{b}{a}},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

3°. Решение с обобщенным разделением переменных при $ab > 0$:

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{bt + C_1} - \frac{1}{bt + C_2}\right)\sin(\lambda x - \lambda^3 t + C_3) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{bt + C_1} + \frac{1}{bt + C_2}\right), \qquad \lambda = \sqrt{\frac{b}{a}},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 289–290).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t}+a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}+bw\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^k=0.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=C_1^{3-k}w(C_1^k x+C_2,C_1^{3k}t+C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Вырожденное решение, линейное по x:

$$w=x(kbt)^{-1/k}+Ct^{-1/k}.$$

3°. Автомодельное решение:

$$w=t^{\frac{k-3}{3k}}U(z),\qquad z=xt^{-\frac{1}{3}},$$

где функция $U=U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{k-3}{3k}U-\frac{1}{3}zU'_z+bU(U'_z)^k+aU'''_{zzz}=0.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t}+a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\left(b_1w^{\frac{2-k}{2}}+b_2w^{\frac{1-k}{2}}\right)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^k=0.$

Вырожденное решение, квадратичное по x:

$$w(x,t)=\left[\frac{x}{2}\left(\frac{kb_1t}{2}\right)^{-1/k}+Ct^{-1/k}-\frac{b_2}{b_1}\right]^2.$$

⦿ *Литература*: В. И. Фущич, Н. И. Серов, Т. К. Амеров (1991).

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t}+a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(b_1\ln w+b_2)w^{1-k}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^k=0.$

Решения типа обобщенной бегущей волны:

$$w=\begin{cases}\exp\left[-a\dfrac{k(kb_1)^{-3/k}}{k-2}t^{(k-3)/k}-\dfrac{b_2}{b_1}+Ct^{-1/k}+(kb_1t)^{-1/k}x\right] & \text{при } k\neq 2,\\ \exp\left[-a(2b_1)^{-3/2}t^{-1/2}\ln t-\dfrac{b_2}{b_1}+Ct^{-1/2}+(2b_1t)^{-1/2}x\right] & \text{при } k=2,\end{cases}$$

где C — произвольная постоянная.

⦿ *Литература*: В. И. Фущич, Н. И. Серов, Т. К. Амеров (1991).

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t}-\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(b_1\arcsin w+b_2)(1-w^2)^{\frac{1-k}{2}}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^k=0.$

Решения типа обобщенной бегущей волны:

$$w=\begin{cases}\sin\left[-\dfrac{k(kb_1)^{-3/k}}{k-2}t^{(k-3)/k}-\dfrac{b_2}{b_1}+Ct^{-1/k}+(kb_1t)^{-1/k}x\right] & \text{при } k\neq 2,\\ \sin\left[-(2b_1)^{-3/2}t^{-1/2}\ln t-\dfrac{b_2}{b_1}+Ct^{-1/2}+(2b_1t)^{-1/2}x\right] & \text{при } k=2,\end{cases}$$

где C — произвольная постоянная.

⦿ *Литература*: В. И. Фущич, Н. И. Серов, Т. К. Амеров (1991).

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t}-\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(b_1\operatorname{Arsh} w+b_2)(1+w^2)^{\frac{1-k}{2}}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^k=0.$

Решения типа обобщенной бегущей волны:

$$w=\begin{cases}\operatorname{sh}\left[\dfrac{k(kb_1)^{-3/k}}{k-2}t^{(k-3)/k}-\dfrac{b_2}{b_1}+Ct^{-1/k}+(kb_1t)^{-1/k}x\right] & \text{при } k\neq 2,\\ \operatorname{sh}\left[(2b_1)^{-3/2}t^{-1/2}\ln t-\dfrac{b_2}{b_1}+Ct^{-1/2}+(2b_1t)^{-1/2}x\right] & \text{при } k=2,\end{cases}$$

где C — произвольная постоянная.

⦿ *Литература*: В. И. Фущич, Н. И. Серов, Т. К. Амеров (1991).

9.1.6. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} + a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + F\Big(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) = 0$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (bx+c)\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(w).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + C_1 e^{-bt}, t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + Ce^{-bt},$$

где C — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aw'''_{zzz} + (bz+c)w'_z + f(w) = 0.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + f(t)w\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t)w = 0.$

Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w\big(x + C_1\psi(t) + C_2,\, t\big) - C_1\varphi(t),$$

где

$$\varphi(t) = \exp\Big[-\int g(t)\,dt\Big], \quad \psi(t) = \int f(t)\varphi(t)\,dt,$$

также будет решением этого уравнения; C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + [f(t)\ln w + g(t)]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \exp[\varphi(t)x + \psi(t)],$$

где

$$\varphi(t) = -\Big[\int f(t)\,dt + C_1\Big]^{-1}, \quad \psi(t) = \varphi(t)\int [g(t) + a\varphi^2(t)]\,dt + C_2\varphi(t),$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные.*

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + [f(t)\,\mathrm{Arsh}(kw) + g(t)]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \frac{1}{k}\,\mathrm{sh}\big[\varphi(t)x + \psi(t)\big],$$

где

$$\varphi(t) = -\Big[\int f(t)\,dt + C_1\Big]^{-1}, \quad \psi(t) = \varphi(t)\int [g(t) + a\varphi^2(t)]\,dt + C_2\varphi(t),$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + [f(t)\,\mathrm{Arch}(kw) + g(t)]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \frac{1}{k}\,\mathrm{ch}\big[\varphi(t)x + \psi(t)\big],$$

где

$$\varphi(t) = -\Big[\int f(t)\,dt + C_1\Big]^{-1}, \quad \psi(t) = \varphi(t)\int [g(t) + a\varphi^2(t)]\,dt + C_2\varphi(t),$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные.

---

* В уравнениях 9.1.6.3–9.1.6.7 и их решениях вместо постоянной a может стоять произвольная функция времени, $a = a(t)$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + [f(t)\arcsin(kw) + g(t)]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \frac{1}{k}\sin\bigl[\varphi(t)x + \psi(t)\bigr],$$

где

$$\varphi(t) = -\left[\int f(t)\,dt + C_1\right]^{-1}, \quad \psi(t) = \varphi(t)\int [g(t) - a\varphi^2(t)]\,dt + C_2\varphi(t),$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + [f(t)\arccos(kw) + g(t)]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \frac{1}{k}\cos\bigl[\varphi(t)x + \psi(t)\bigr],$$

где

$$\varphi(t) = -\left[\int f(t)\,dt + C_1\right]^{-1}, \quad \psi(t) = \varphi(t)\int [g(t) - a\varphi^2(t)]\,dt + C_2\varphi(t),$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + cw + f(t).$

1°. Вырожденное решение, квадратичное по x:

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$

где функции $\varphi_k = \varphi_k(t)$ удовлетворяют соответствующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = Ae^{ct} + e^{ct}\int e^{-ct}f(t)\,dt + \theta(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где A, λ — произвольные постоянные, а функция $\theta(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\theta'''_{zzz} + b\bigl(\theta'_z\bigr)^2 - \lambda\theta'_z + c\theta = 0.$$

3°. Замена

$$w = U(x,t) + e^{ct}\int e^{-ct}f(t)\,dt$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + b\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + cU.$$

9.1.7. Уравнение Бюргерса — Кортевега — де Фриза и другие уравнения

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + w\dfrac{\partial w}{\partial x} + a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} = b\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Уравнение Бюргерса — Кортевега — де Фриза. Это уравнение описывает нелинейные волны в диссипативно — дисперсионных средах с неустойчивостью, волны при стекании тонких пленок жидкости по наклонной плоскости, концентрацию вещества при химических реакциях и др.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x - C_1 t + C_2, t + C_3) + C_1,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Вырожденное решение:

$$w(x,t) = \frac{x + C_1}{t + C_2}.$$

3°. Решения типа бегущей волны:

$$w(x,t) = C_1 - \frac{12b^2}{25a(1+C_2e^y)^2}, \qquad y = -\frac{b}{5a}x + \left(\frac{b}{5a}C_1 - \frac{6b^3}{125a^2}\right)t;$$

$$w(x,t) = C_1 - \frac{12b^2}{25a(1-C_2e^y)^2}, \qquad y = -\frac{b}{5a}x + \left(\frac{b}{5a}C_1 - \frac{6b^3}{125a^2}\right)t;$$

$$w(x,t) = C_1 + \frac{12b^2}{25a}\,\frac{1+2C_2e^z}{(1+C_2e^z)^2}, \quad z = \frac{b}{5a}x - \left(\frac{b}{5a}C_1 + \frac{6b^3}{125a^2}\right)t;$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4°. Решения типа бегущей волны:

$$w(x,t) = C_1 \mp \frac{12b^2}{25a}\xi^2\varphi(\xi), \quad \xi = C_2\exp\left[\frac{b}{5a}x + \left(\frac{6b^3}{125a^2} - \frac{b}{5a}C_1\right)t\right].$$

где функция $\varphi(\xi)$ задается неявно

$$\xi = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\pm(4\varphi^3-1)}} - C_3,$$

C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Для верхнего знака обращение последней зависимости соответствует классической эллиптической функции Вейерштрасса $\varphi(\xi) = \wp(\xi + C_3,\, 0,\, 1)$.

5°. Точное решение:

$$w(x,t) = U(\zeta) + 2C_1t, \quad \zeta = x - C_1t^2 + C_2t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $U(\zeta)$ определяется обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка (C_3 — произвольная постоянная)

$$aU''_{\zeta\zeta} - bU'_\zeta + \tfrac{1}{2}U^2 + C_2U = -2C_1\zeta + C_3.$$

Частный случай $C_1 = 0$ соответствует решению типа бегущей волны.

⦿ *Литература для уравнения* 9.1.7.1: Y. Kuramoto, T. Tsuzuki (1976), B. J. Cohen, J. A. Krommes, W. M. Tang, M. N. Rosenbluth (1976), В. Я. Шкадов (1977), J. Topper, T. Kawahara (1978), G. I. Sivashinsky (1983), Н. А. Кудряшов (1990*a*), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 532–533).

2. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + b\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + c.$

Существует решение с обобщенным разделением переменных в виде полинома четвертой степени по x:

$$w = \varphi_4(t)x^4 + \varphi_3(t)x^3 + \varphi_2(t)x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t).$$

3. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(w^{-3/2}\frac{\partial w}{\partial x}\right).$

Модифицированное уравнение Гарри Дима.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^2C_2^{-2}w(C_1x + C_3, C_2^3t + C_4),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Преобразование $u = w^{-1/2}$, $\tau = at$ приводит к уравнению вида 9.1.4.8:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = u^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}.$$

3°. Уравнение инвариантно относительно преобразования по решению

$$d\bar{x} = w\,dx + [a(w^{-3/2}w_x)_x]\,dt, \quad d\bar{t} = dt, \quad \bar{w} = 1/w.$$

4. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{a}{f(w)} + b.$

Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$\int f(w)\,dw = at - \frac{1}{6}bx^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

⦿ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 534).

ТАБЛИЦА 3
Некоторые интегрируемые нелинейные уравнения третьего порядка вида 9.1.7.5.

Тип порождающего уравнения	Вид порождающего уравнения	Разрешимое уравнение вида (3)
Линейное уравнение	$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$	$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{a}{u^3}\frac{\partial u}{\partial z}\right)$
Уравнение Кортевега — де Фриза 9.1.1.2	$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - bw\frac{\partial w}{\partial x}$	$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{a}{u^3}\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{b}{2u^2}\frac{\partial u}{\partial z}$
Модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза 9.1.2.4	$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - bw^2\frac{\partial w}{\partial x}$	$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{a}{u^3}\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{2b}{3u^3}\frac{\partial u}{\partial z}$

5. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + g(w)\frac{\partial w}{\partial x}.$

1°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = kx + \lambda t,$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением (C — произвольная постоянная)

$$k^3[f(w)w'_z]'_z + kG(w) - \lambda w + C = 0, \qquad G(w) = \int g(w)\,dw.$$

Подстановка $U(w) = f(w)w'_z$ приводит к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными.

2°. Преобразование по решению

$$dz = w\,dx + \bigl\{[f(w)w_x]_x + G(w)\bigr\}\,dt, \quad d\tau = dt, \quad u = 1/w \qquad \left(dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial t}\,dt\right) \tag{1}$$

приводит к уравнению того же вида

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\Phi(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right] + \Psi(u)\frac{\partial u}{\partial z}, \tag{2}$$

где

$$\Phi(u) = \frac{1}{u^3}f\left(\frac{1}{u}\right), \quad \Psi(u) = \frac{1}{u}g\left(\frac{1}{u}\right) - G\left(\frac{1}{u}\right), \quad G(w) = \int g(w)\,dw.$$

Обратное к (1) преобразование записывается так:

$$dx = \frac{1}{w}\,dz - \frac{1}{w}\bigl\{w[wf(w)w_z]_z + G(w)\bigr\}\,d\tau, \quad dt = d\tau, \quad w = 1/u.$$

В таблице 3 указаны некоторые разрешимые уравнения вида (2), порожденные известными разрешимыми уравнениями третьего порядка.

Уравнение (2) может быть преобразовано к виду (см. уравнение 9.1.7.6)

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \varphi(v)\frac{\partial^3 v}{\partial z^3} + \psi(v)\frac{\partial v}{\partial z}, \tag{3}$$

где

$$v = \int wf(w)\,dw, \quad \varphi(v) = w^3 f(w), \quad \psi(v) = wg(w) - G(w).$$

3°. Законы сохранения:

$$D_t(w) + D_x\bigl\{-[f(w)w_x]_x - G(w)\bigr\} = 0,$$
$$D_t\bigl[\Phi(w)\bigr] + D_x\bigl\{-F(w)[f(w)w_x]_x + \tfrac{1}{2}[f(w)w_x]^2 - \Psi(w)\bigr\} = 0,$$

где

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad D_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad G(w) = \int g(w)\,dw, \quad F(w) = \int f(w)\,dw,$$
$$\Phi(w) = \int F(w)\,dw, \quad \Psi(w) = \int F(w)g(w)\,dw.$$

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 534–535).

ТАБЛИЦА 4

Некоторые интегрируемые нелинейные уравнения третьего порядка вида 9.1.7.6; $k = (8/a)^{1/2}$.

Тип порождающего уравнения	Вид порождающего уравнения	Разрешимое уравнение вида (3)
Линейное уравнение	$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$	$\frac{\partial U}{\partial t} = kU^{3/2}\frac{\partial^3 U}{\partial z^3}$
Уравнение Кортевега — де Фриза 9.1.1.2	$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - bw\frac{\partial w}{\partial x}$	$\frac{\partial U}{\partial t} = kU^{3/2}\frac{\partial^3 U}{\partial z^3} - bU\frac{\partial U}{\partial z}$
Модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза 9.1.2.4	$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - bw^2\frac{\partial w}{\partial x}$	$\frac{\partial U}{\partial t} = kU^{3/2}\frac{\partial^3 U}{\partial z^3} - \frac{2bk}{3a}U^{3/2}\frac{\partial U}{\partial z}$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(w)\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + g(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

1°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением (C — произвольная постоянная)

$$w''_{zz} = \int \frac{\lambda - g(w)}{f(w)}\,dw + C,$$

которое легко интегрируется.

2°. Закон сохранения:

$$D_t\bigl[\varphi(w)\bigr] + D_x\bigl[-w_{xx} - \psi(w)\bigr] = 0,$$

где

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad D_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \varphi(w) = \int \frac{dw}{f(w)}, \quad \psi(w) = \int \frac{g(w)}{f(w)}\,dw. \tag{1}$$

3°. Преобразование по решению

$$dz = \varphi(w)\,dx + \bigl[w_{xx} + \psi(w)\bigr]\,dt, \quad d\tau = dt, \quad U = \int \varphi(w)\,dw \qquad \left(dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial t}\,dt\right) \tag{2}$$

приводит к уравнению того же вида

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = F(U)\frac{\partial^3 U}{\partial z^3} + G(U)\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{3}$$

Функции $F(U)$ и $G(U)$ в (3) задаются параметрически

$$F(U) = f(w)\varphi^3(w), \quad G(U) = g(w)\varphi(w) - \psi(w), \quad U = \int \varphi(w)\,dw,$$

где $\varphi(w)$ и $\psi(w)$ определены в (1).

В таблице 4 указаны некоторые разрешимые уравнения вида (3), порожденные известными разрешимыми уравнениями третьего порядка.

4°. Замена $\varphi = \displaystyle\int \frac{dw}{f(w)}$ приводит к уравнению вида 9.1.7.5:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\mathcal{F}(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right] + \mathcal{G}(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

где функции $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ определяются формулами

$$\mathcal{F}(\varphi) = f(w), \quad \mathcal{G}(\varphi) = g(w), \quad \varphi = \int \frac{dw}{f(w)}.$$

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 535–536).

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(w)\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \big[g(w) + ax\big]\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(w).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + C_1 e^{-at}, t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + Ce^{-at},$$

где C — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(w)w'''_{zzz} + [g(w) + az]w'_z + h(w) = 0.$$

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 536).

8. $w\dfrac{\partial w}{\partial t} + a\dfrac{\partial w}{\partial x} + bw\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-2} w(C_1 x + C_2, C_1^3 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w = U(\xi), \quad \xi = x + \lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $U = U(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным второго порядка

$$bU''_{\xi\xi} + a\ln|U| + \lambda U = C_1.$$

3°. Автомодельное решение:

$$w = t^{2/3}u(z), \quad z = xt^{-1/3},$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$buu'''_{zzz} - \tfrac{1}{3}zuu'_z + au'_z + \tfrac{2}{3}u^2 = 0.$$

9.2. Уравнения, содержащие вторые производные по t

9.2.1. Уравнения с квадратичной нелинейностью

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + bw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c.$

Частный случай уравнения 11.3.5.3 при $n = 3$.

1°. Решение типа бегущей волны:

$$w(x,t) = u(\xi), \quad \xi = \beta x + \lambda t,$$

где β, λ — произвольные постоянные, а функция $u = u(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\beta^3 u'''_{\xi\xi\xi} + (b\beta^2 u - \lambda^2)u''_{\xi\xi} + c = 0.$$

2°. Точное решение:

$$w = U(z) + 4bC_1^2 t^2 + 4bC_1C_2 t, \quad z = x + bC_1 t^2 + bC_2 t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aU'''_{zzz} + bUU''_{zz} - b^2C_2^2 U''_{zz} - 2bC_1 U'_z + c - 8bC_1^2 = 0.$$

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + b\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + c.$

Частный случай уравнения 11.3.5.3 при $n = 3$.

1°. Решение типа бегущей волны:

$$w(x,t) = u(\xi), \quad \xi = \beta x + \lambda t,$$

где β, λ — произвольные постоянные, а функция $u = u(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\beta^3 u'''_{\xi\xi\xi} + b\beta^2 (uu'_\xi)'_\xi - \lambda^2 u''_{\xi\xi} + c = 0. \qquad (1)$$

2°. Точное решение:

$$w = U(z) + 4bC_1^2 t^2 + 4bC_1C_2 t, \quad z = x + bC_1 t^2 + bC_2 t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aU'''_{zzz} + b(UU'_z)'_z - b^2C_2^2 U''_{zz} - 2bC_1 U'_z + c - 8bC_1^2 = 0. \qquad (2)$$

Замечание. Уравнения (1) и (2) могут быть один раз проинтегрированы по независимой переменной.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + f(t).$

Частный случай уравнения 11.3.3.4 при $n = 3$.

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}At^2 + Bt + C + \int_0^t (t-\tau) f(\tau)\,d\tau + \varphi(x).$$

Здесь A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi'''_{xxx} + b(\varphi'_x)^2 - A = 0,$$

порядок которого можно понизить с помощью подстановки $U(x) = \varphi'_x$ (полученное автономное уравнение второго порядка интегрируется в квадратурах).

2°. Замена

$$w = u(x,t) + \int_0^t (t-\tau) f(\tau)\,d\tau$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + b\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$$

Это уравнение допускает решение типа бегущей волны $u = u(kx + \lambda t)$ и автомодельное решение $u = t^{-2/3}\phi(z)$, где $z = xt^{-2/3}$.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + a\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + bw + f(t).$

1°. Точное решение:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(z)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} - b\varphi - f(t) = 0,$$
$$\psi'''_{zzz} - \lambda^2\psi''_{zz} + a(\psi'_z)^2 + b\psi = 0.$$

Решение первого уравнения для $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) = C_1\operatorname{ch}(kt) + C_2\operatorname{sh}(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t f(\tau)\operatorname{sh}\bigl[k(t-\tau)\bigr]\,d\tau \quad \text{при} \quad b = k^2 > 0,$$

$$\varphi(t) = C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t f(\tau)\sin\bigl[k(t-\tau)\bigr]\,d\tau \quad \text{при} \quad b = -k^2 < 0,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Замена $w = u(x,t) + \varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ приведена в п. 1°, приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + bu.$$

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + b\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + c.$

1°. Решение с обобщенным разделением переменных в виде полинома четвертой степени по x:

$$w(x,t) = \varphi_4(t)x^4 + \varphi_3(t)x^3 + \varphi_2(t)x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t),$$

где функции $\varphi_n(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\varphi_4'' &= 144b\varphi_4^2,\\
\varphi_3'' &= 144b\varphi_3\varphi_4,\\
\varphi_2'' &= 12b(3\varphi_3^2 + 4\varphi_2\varphi_4),\\
\varphi_1'' &= 24(a\varphi_4 + b\varphi_2\varphi_3),\\
\varphi_0'' &= 6a\varphi_3 + 4b\varphi_2^2 + c.
\end{aligned}$$

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = C_1x^2 + C_2xt + C_3t^2 + C_4x + C_5t + u(z), \quad z = kx + \lambda t,$$

где $C_1, \ldots, C_5, k, \lambda$ — произвольные постоянные, а функция $u(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\lambda^2 u_{zz}'' + 2C_3 = ak^3 u_{zzz}''' + b(k^2 u_{zz}'' + 2C_1)^2 + c,$$

которое можно проинтегрировать с помощью подстановки $U(z) = u_{zz}''$. Частному случаю $C_1 = \ldots = C_5 = 0$ соответствует решение типа бегущей волны.

3°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = C_1xt^2 + C_2t^2 + C_3t + f(x),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функция $f(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2C_1x + 2C_2 = af_{xxx}''' + b(f_{xx}'')^2 + c.$$

4°. Замена

$$w(x,t) = V(x,t) + \tfrac{1}{2}ct^2$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a\frac{\partial^3 V}{\partial x^3} + b\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)^2,$$

которое допускает автомодельное решение вида $V = t^{2/3}\theta(\xi)$, где $\xi = xt^{-2/3}$.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k(t)\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)w\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + g(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + h(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + p(t)w + q(t).$

Решение с обобщенным разделением переменных, кубическое по x:

$$w(x,t) = \varphi_3(t)x^3 + \varphi_2(t)x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t),$$

где функции $\varphi_n = \varphi_n(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\varphi_3'' + k(t)\varphi_3' &= [6f(t)\varphi_3 + p(t)]\varphi_3,\\
\varphi_2'' + k(t)\varphi_2' &= [6f(t)\varphi_3 + p(t)]\varphi_2 + 3h(t)\varphi_3,\\
\varphi_1'' + k(t)\varphi_1' &= [6f(t)\varphi_3 + p(t)]\varphi_1 + 6g(t)\varphi_3 + 2h(t)\varphi_2,\\
\varphi_0'' + k(t)\varphi_0' &= [6f(t)\varphi_3 + p(t)]\varphi_0 + 2g(t)\varphi_2 + h(t)\varphi_1 + q(t).
\end{aligned}$$

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + f(t)w + g(t).$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \varphi(t)(A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x) + \psi(t),$$

где A_1, A_2, A_3 — произвольные постоянные, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\varphi_{tt}'' &= 6A_3a\varphi^2 + f(t)\varphi,\\
\psi_{tt}'' &= 6A_3a\varphi\psi + f(t)\psi + g(t).
\end{aligned}$$

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + bw^2 + f(t)w + g(t).$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \varphi(t)\Theta(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (C — произвольная постоянная)

$$\varphi''_{tt} = C\varphi^2 + b\varphi\psi + f(t)\varphi,$$
$$\psi''_{tt} = C\varphi\psi + b\psi^2 + f(t)\psi + g(t),$$

а функция $\Theta(x)$ удовлетворяет линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка с постоянными коэффициентами

$$a\Theta'''_{xxx} + b\Theta = C.$$

9.2.2. Другие уравнения

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + bw\ln w + \bigl[f(x) + g(t)\bigr]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t)\psi(x),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} - \bigl[b\ln\varphi + g(t) + C\bigr]\varphi = 0,$$
$$a\psi'''_{xxx} + \bigl[b\ln\psi + f(x) - C\bigr]\psi = 0,$$

C — произвольная постоянная.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + f(x)w\ln w + \bigl[bf(x)t + g(x)\bigr]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = e^{-bt}\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi'''_{xxx} + f(x)\varphi\ln\varphi + \bigl[g(x) - b^2\bigr]\varphi = 0.$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + F\left(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + g(t).$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = C_1 t^2 + C_2 t + \int_{t_0}^{t} (t-\tau)g(\tau)\,d\tau + \varphi(x),$$

где C_1, C_2, t_0 — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi'''_{xxx} + F\bigl(x, \varphi'_x\bigr) - 2C_1 = 0,$$

порядок которого можно понизить с помощью подстановки $u(x) = \varphi'_x$.

2°. Замена

$$w = U(x,t) + \int_0^t (t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + F\left(x,\ \frac{\partial U}{\partial x}\right).$$

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + F\left(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bw + g(t).$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(x),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} - b\varphi - g(t) = 0,$$

$$a\psi'''_{xxx} + F\bigl(x, \psi'_x\bigr) + b\psi = 0.$$

Решение первого уравнения для $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) = C_1\operatorname{ch}(kt) + C_2\operatorname{sh}(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t g(\tau)\operatorname{sh}\bigl[k(t-\tau)\bigr]\,d\tau \qquad \text{при} \quad b = k^2 > 0,$$

$$\varphi(t) = C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t g(\tau)\sin\bigl[k(t-\tau)\bigr]\,d\tau \quad \text{при} \quad b = -k^2 < 0,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Подстановка $w = U(x,t) + \varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ описана в п. 1°, приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + F\left(x,\ \frac{\partial U}{\partial x}\right) + bU.$$

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] - a^2\dfrac{f'(w)}{f^3(w)} + b.$

Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$\int f(w)\,dw = at - \frac{1}{6}bx^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + C_1, y + C_2) + C_3xt + C_4x + C_5t + C_6,$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение:

$$w = u(z) + C_3x^2 + C_4xt + C_5t^2, \quad z = C_1x + C_2t,$$

где функция $u(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$C_2^2u''_{zz} + 2C_5 = F(C_1^2u''_{zz} + 2C_3,\ C_1^3u'''_{zzz}),$$

порядок которого можно понизить на две единицы с помощью подстановки $\theta(z) = u''_{zz}$.

9.3. Уравнения гидродинамического пограничного слоя

9.3.1. Уравнения стационарного пограничного слоя ньютоновской жидкости

1. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nu\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3}.$

Уравнение стационарного ламинарного гидродинамического пограничного слоя на плоской пластине, где w — функция тока, x и y — соответственно продольная и поперечная координаты, ν — кинематическая вязкость жидкости. Аналогичное уравнение описывает стационарное истечение плоской ламинарной струи из тонкой щели.

Предварительные замечания. К данному уравнению сводится система уравнений гидродинамического пограничного слоя

$$u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0,$$

где u_1 и u_2 — продольная и поперечная компоненты скорости жидкости, путем введения функции тока w по формулам $u_1 = \frac{\partial w}{\partial y}$ и $u_2 = -\frac{\partial w}{\partial x}$.

ТАБЛИЦА 5
Инвариантные решения уравнения стационарного гидродинамического пограничного слоя (аддитивная постоянная в решениях опускается).

No.	Структура решения	Функция F или уравнение для F	Замечания
1	$w = F(y) + \nu\lambda x$	$F(y) = \begin{cases} C_1 \exp(-\lambda y) + C_2 y & \text{при } \lambda \neq 0, \\ C_1 y^2 + C_2 y & \text{при } \lambda = 0 \end{cases}$	λ — любое
2	$w = F(x) y^{-1}$	$F(x) = 6\nu x + C_1$	—
3	$w = x^{\lambda+1} F(z),\ z = x^\lambda y$	$(2\lambda+1)(F'_z)^2 - (\lambda+1) F F''_{zz} = \nu F'''_{zzz}$	λ — любое
4	$w = e^{\lambda x} F(z),\ z = e^{\lambda x} y$	$2\lambda (F'_z)^2 - \lambda F F''_{zz} = \nu F'''_{zzz}$	λ — любое
5	$w = F(z) + a \ln\lvert x\rvert,\ z = y/x$	$-(F'_z)^2 - a F''_{zz} = \nu F'''_{zzz}$	a — любое

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(x, y + \varphi(x)),$$
$$w_2 = C_1 w(C_2 x + C_3, C_1 C_2 y + C_4) + C_5,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, а $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Вырожденные решения (линейные и квадратичные по y):

$$w(x,y) = C_1 y + \varphi(x),$$
$$w(x,y) = C_1 y^2 + \varphi(x) y + \frac{1}{4C_1}\varphi^2(x) + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, $\varphi(x)$ — произвольная функция. Эти решения не зависят от ν и отвечают невязкому течению жидкости.

3°. Точные решения, содержащие произвольные функции:

$$w(x,y) = \frac{6\nu x + C_1}{y + \varphi(x)} + \frac{C_2}{[y + \varphi(x)]^2} + C_3,$$
$$w(x,y) = \varphi(x) \exp(-C_1 y) + \nu C_1 x + C_2,$$
$$w(x,y) = C_1 \exp\bigl[-C_2 y - C_2 \varphi(x)\bigr] + C_3 y + C_3 \varphi(x) + \nu C_2 x + C_4,$$
$$w(x,y) = 6\nu C_1 x^{1/3} \operatorname{th}\xi + C_2, \qquad \xi = C_1 \frac{y}{x^{2/3}} + \varphi(x),$$
$$w(x,y) = -6\nu C_1 x^{1/3} \operatorname{tg}\xi + C_2, \qquad \xi = C_1 \frac{y}{x^{2/3}} + \varphi(x),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, $\varphi(x)$ — произвольная функция.

Специальный случай 1. При $C_1 = \sqrt{k/\nu}$ и $\varphi(x) = -\sqrt{k\nu}\, x$ второе решение принимает вид

$$w = \sqrt{k\nu}\, x \bigl[1 - \exp\bigl(-\sqrt{k/\nu}\, y\bigr)\bigr] + \text{const}.$$

Оно описывает течение жидкости, вызванное движением точек поверхности $y = 0$ со скоростью $u_1|_{y=0} = kx$. Компоненты скоростей жидкости в данном случае удовлетворяют граничным условиям

$$u_1 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad u_1 = kx \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad u_2 = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad u_1 \to 0 \quad \text{при} \quad y \to \infty.$$

4°. В табл. 5 указаны инвариантные решения уравнения гидродинамического пограничного слоя, которые можно получить методами классического группового анализа. Решение 1 в табл. 5 дается суммой функций разных аргументов. Решение 2 представляет собой произведение функций разных аргументов. Решение 3 является автомодельным, а решение 4 — обобщенно-автомодельным. Решение 5 вырождается в автомодельное при $a = 0$ (см. решение 3 при $\lambda = -1$). Уравнения 3–5 для функции F являются автономными и обобщенно-однородными, поэтому их порядок можно понизить на две единицы.

Специальный случай 2. Задача Блазиуса об обтекании плоской пластины поступательным потоком со скоростью U_i характеризуется граничными условиями:

$$\partial_x w = \partial_y w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w \to U_\mathrm{i} \quad \text{при} \quad y \to \infty, \qquad \partial_y w = U_\mathrm{i} \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Вид решения этой задачи (в области $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$) указан в третьей строке табл. 5 при $\lambda = -1/2$. Граничные условия для функции $F(z)$ имеют вид

$$F = F'_z = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad F'_z \to U_i \quad \text{при} \quad z \to \infty.$$

Подробности см. в книгах Л. Г. Лойцянского (1973), Г. Шлихтинга (1974).

Специальный случай 3. Задача Шлихтинга о симметричном истечении плоской ламинарной струи из тонкой щели характеризуется граничными условиями

$$\partial_x w = \partial_{yy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w \to 0 \quad \text{при} \quad y \to \infty,$$

которые дополняются интегральным условием сохранения количества движения

$$\int_0^\infty (\partial_y w)^2 \, dy = A \qquad (A = \text{const}).$$

Вид решения этой задачи (в области $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$) указан в третьей строке табл. 5 при $\lambda = -2/3$. Проинтегрировав обыкновенное дифференциальное уравнение для функции F с соответствующими граничными условиями

$$F = F''_{zz} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad F'_z \to 0 \quad \text{при} \quad z \to \infty,$$

и интегральным условием

$$\int_0^\infty (F'_z)^2 = A,$$

в итоге получим

$$w(x,y) = k(A\nu x)^{1/3} \operatorname{th} \xi, \quad \xi = \tfrac{1}{6} k (A/\nu^2)^{1/3} y x^{-2/3}, \quad k = 3^{2/3}.$$

Подробности см. в книгах Л. Г. Лойцянского (1973), Г. Шлихтинга (1974).

Специальный случай 4. Отметим два случая интегрируемости уравнения, приведенного в третьей строке табл. 5.

При $\lambda = -1$ решение можно представить в параметрической форме:

$$F = -\frac{\nu}{2C_1} \int \frac{\tau \, d\tau}{\sqrt{1+\tau^3}} + C_2, \qquad z = 3C_1 \int \frac{d\tau}{\sqrt{1+\tau^3}} + C_3.$$

Имеется решение $F = 6\nu z^{-1}$.

При $\lambda = -\frac{2}{3}$ после двукратного интегрирования получим уравнение Риккати:

$$\nu F'_z + \tfrac{1}{6} F^2 + C_1 z + C_2 = 0.$$

При $C_1 = 0$ оно легко интегрируется (поскольку переменные разделяются); при $C_1 \neq 0$ решение можно выразить через функции Бесселя порядка $1/3$.

5°. Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по x:

$$w(x,y) = x f(y) + g(y), \tag{1}$$

где функции $f = f(y)$ и $g = g(y)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(f'_y)^2 - f f''_{yy} = \nu f'''_{yyy}, \tag{2}$$

$$f'_y g'_y - f g''_{yy} = \nu g'''_{yyy}. \tag{3}$$

Порядок уравнения (2) может быть понижен на две единицы. Пусть известно некоторое решение уравнения (2). Уравнение (3) является линейным уравнением относительно функции g, которое имеет два линейно независимых частных решения:

$$g_1 = 1, \quad g_2 = f(y).$$

Второе частное решение следует из сопоставления уравнений (2) и (3). Общее решение уравнения (2) можно представить в виде (см. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001 *a*):

$$\begin{gathered} g(y) = C_1 + C_2 f + C_3 \left(f \int \psi \, dy - \int f \psi \, dy \right), \\ f = f(y), \quad \psi = \frac{1}{(f'_y)^2} \exp\left(-\frac{1}{\nu} \int f \, dy \right). \end{gathered} \tag{4}$$

Нетрудно проверить, что уравнение (2) имеет частные решения:

$$\begin{gathered} f(y) = 6\nu (y + C)^{-1}, \\ f(y) = C e^{\lambda y} - \lambda \nu, \end{gathered} \tag{5}$$

где C, λ — произвольные постоянные. Первое решение (5) с учетом формул (1), (4) приводит ко первому решению из п. 3° при $\varphi(x) = \text{const}$. Подставив вторую зависимость (5) в формулы (1), (4) можно получить другое решение.

6°. Решение с обобщенным разделением переменных (частный случай решения 3 из п. 3°):

$$w(x,y) = (a + be^{-\lambda y})z(x) + cy,$$

где a, b, c, λ — произвольные постоянные, а функция $z = z(x)$ задается неявно с помощью равенства

$$c \ln|z| + a\lambda z = \nu\lambda^2 x.$$

7°. Ниже указаны два преобразования, понижающих порядок уравнения пограничного слоя.

7.1. Преобразование Мизеса

$$\xi = x, \quad \eta = w, \quad U(\xi,\eta) = \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \text{где} \quad w = w(x,y),$$

приводит к нелинейному уравнению теплопроводности вида 1.10.1.1:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \nu \frac{\partial}{\partial \eta}\left(U \frac{\partial U}{\partial \eta}\right).$$

7.2. Преобразование Крокко

$$\xi = x, \quad \zeta = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \Psi(\xi,\zeta) = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \qquad \text{где} \quad w = w(x,y),$$

приводит к нелинейному уравнению второго порядка

$$\zeta \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\Psi}\right) + \nu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} = 0.$$

8°. Закон сохранения:

$$D_x\big(w_y^2\big) + D_y\big(-w_x w_y - \nu w_{yy}\big) = 0,$$

где $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $D_y = \frac{\partial}{\partial y}$.

⊙ *Литература для уравнения* 9.3.1.1: H. Blasius (1908), Ю. Н. Павловский (1961), Л. Г. Лойцянский (1973, стр. 522–523), Г. Шлихтинг (1974). Л. В. Овсянников (1982), D. Zwillinger (1989, pp. 396–397), Н. В. Игнатович (1993), G. I. Burde (1994, 1996). А. Д. Полянин (2001 *a, c*).

2. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + f(x).$

Уравнение гидродинамического пограничного слоя с градиентом давления. Справедлива формула $f(x) = UU'_x$, где $U = U(x)$ — скорость жидкости в ядре потока* на границе с пограничным слоем.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(x, y + \varphi(x)) + C,$$
$$w_2 = -w(x, -y + \varphi(x)) + C,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, а C — произвольная постоянная, также будут решениями этого уравнения.

2°. Вырожденные решения (линейные и квадратичные по y) для произвольной $f(x)$:

$$w(x,y) = \pm y\left[2\int f(x)\,dx + C_1\right]^{1/2} + \varphi(x),$$
$$w(x,y) = C_1 y^2 + \varphi(x)y + \frac{1}{4C_1}\left[\varphi^2(x) - 2\int f(x)\,dx\right] + C_2,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция; C_1, C_2 — произвольные постоянные. Эти решения не зависят от ν и отвечают невязкому движению жидкости.

* В ядре потока решается гидродинамическая задача об обтекании тела идеальной (невязкой) жидкостью.

ТАБЛИЦА 6
Инвариантные решения уравнения стационарного гидродинамического пограничного слоя с градиентом давления (a, k, m, β — произвольные постоянные).

№	Функция $f(x)$	Вид решения $w = w(x,y)$	Функция u или уравнение для u
1	$f(x) = 0$	См. уравнение 9.3.1.1	См. уравнение 9.3.1.1
2	$f(x) = ax^m$	$w = x^{\frac{m+3}{4}} u(z),\ z = x^{\frac{m-1}{4}} y$	$\frac{m+1}{2}(u'_z)^2 - \frac{m+3}{4} uu''_{zz} = \nu u'''_{zzz} + a$
3	$f(x) = ae^{\beta x}$	$w = e^{\frac{1}{4}\beta x} u(z),\ z = e^{\frac{1}{4}\beta x} y$	$\frac{1}{2}\beta(u'_z)^2 - \frac{1}{4}\beta uu''_{zz} = \nu u'''_{zzz} + a$
4	$f(x) = a$	$w = kx + u(y)$	$u(y) = \begin{cases} C_1 \exp\bigl(-\frac{k}{\nu} y\bigr) - \frac{a}{2k} y^2 + C_2 y & \text{при } k \neq 0, \\ -\frac{a}{6\nu} y^3 + C_2 y^2 + C_1 y & \text{при } k = 0 \end{cases}$
5	$f(x) = ax^{-3}$	$w = k \ln\lvert x\rvert + u(z),\ z = y/x$	$-(u'_z)^2 - ku''_{zz} = \nu u'''_{zzz} + a$

3°. В табл. 6 указаны инвариантные решения уравнения гидродинамического пограничного слоя с градиентом давления, которые можно получить методами классического группового анализа.

Отметим, что задача Фолкнера — Скен о симметричном обтекании клина описывается уравнением, приведенным во второй строке табл. 6. Случай $m = 1$ соответствует натеканию жидкости на плоскость (течение в окрестности точки разветвления потока), а $m = 0$ — симметричному обтеканию клина с углом раствора $\alpha = \frac{2}{3}\pi$.

4°. Решение с обобщенным разделением переменных (линейное по x) при $f(x) = ax + b$:

$$w(x,y) = xF(y) + G(y),$$

где функции $F = F(y)$ и $G = G(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(F'_y)^2 - FF''_{yy} = \nu F'''_{yyy} + a, \qquad (1)$$

$$F'_y G'_y - FG''_{yy} = \nu G'''_{yyy} + b. \qquad (2)$$

Порядок автономного уравнения (1) может быть понижен на единицу. Если известно частное решение уравнения (1), то соответствующее ему уравнение (2) подстановкой $H(y) = G'_y$ сводится к линейному уравнению второго порядка. При $F(y) = \pm\sqrt{a}\,y + C$ уравнение (2) интегрируется в квадратурах (поскольку при $b = 0$ известны два его частных решения: $G_1 = 1$, $G_2 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{a}\,y^2 + Cy$).

5°. Точные решения при $f(x) = -ax^{-5/3}$:

$$w(x,y) = \frac{6\nu x}{y + \varphi(x)} \pm \frac{\sqrt{3a}}{x^{1/3}}[y + \varphi(x)],$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция.

6°. Точные решения при $f(x) = ax^{-1/3} - bx^{-5/3}$:

$$w(x,y) = \pm\sqrt{3b}\,z + x^{2/3}\theta(z), \qquad z = yx^{-1/3},$$

где функция $\theta = \theta(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\tfrac{1}{3}(\theta'_z)^2 - \tfrac{2}{3}\theta\theta''_{zz} = \nu\theta'''_{zzz} + a.$$

7°. Решение с обобщенным разделением переменных при $f(x) = ae^{\beta x}$:

$$w(x,y) = \varphi(x)e^{\lambda y} - \frac{a}{2\beta\lambda^2\varphi(x)} e^{\beta x - \lambda y} - \nu\lambda x + \frac{2\nu\lambda^2}{\beta} y + \frac{2\nu\lambda}{\beta} \ln\lvert\varphi(x)\rvert,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, λ — произвольная постоянная.

8°. При

$$f(x) = a^2\nu^2 x^{-3}(xgg'_x - g^2), \quad g = -\tfrac{1}{4}a \pm \left(\tfrac{1}{16}a^2 + bx^{2/3}\right)^{1/2},$$

существует точное решение вида

$$w(x,y) = a\nu z + 6\nu g \operatorname{th} z, \quad z = \frac{yg}{x}.$$

9°. Ниже указаны два преобразования, понижающих порядок уравнения пограничного слоя.

9.1. Преобразование Мизеса

$$\xi = x, \quad \eta = w, \quad U(\xi,\eta) = \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \text{где} \quad w = w(x,y),$$

приводит к нелинейному уравнению теплопроводности

$$U\frac{\partial U}{\partial \xi} = \nu U \frac{\partial}{\partial \eta}\left(U\frac{\partial U}{\partial \eta}\right) + f(\xi).$$

9.2. Преобразование Крокко

$$\xi = x, \quad \zeta = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \Psi(\xi,\zeta) = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \qquad \text{где} \quad w = w(x,y),$$

приводит к нелинейному уравнению второго порядка

$$\zeta\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\Psi}\right) + \nu\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} - f(\xi)\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{\Psi}\right) = 0.$$

10°. Закон сохранения:

$$D_x\left[w_y^2 - F(x)\right] + D_y\left(-w_x w_y - \nu w_{yy}\right) = 0,$$

где $D_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $D_y = \dfrac{\partial}{\partial y}$, $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx$.

⦿ *Литература для уравнения* 9.3.1.2: V. M. Falkner, S. W. Skan (1931), Ю. Н. Павловский (1961), Л. Г. Лойцянский (1973), Г. Шлихтинг (1974). Л. В. Овсянников (1982), G. I. Burde (1996). А. Д. Полянин (2001 *a, c*).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \nu\dfrac{\partial}{\partial z}\left(z\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + f(x).$

Предварительные замечания. К данному уравнению сводится система уравнений осесимметричного стационарного ламинарного гидродинамического пограничного слоя

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial r} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + f(x), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0, \tag{2}$$

где u и v — осевая и радиальная компоненты скорости жидкости, x и r — цилиндрические координаты, путем введения функции тока w и новой переменной z по формулам

$$u = \frac{2}{r}\frac{\partial w}{\partial r}, \quad v = -\frac{2}{r}\frac{\partial w}{\partial x}, \quad z = \frac{1}{4}r^2.$$

Система (1), (2) используется для описания осесимметричной струи и пограничного слоя на протяженном теле вращения. Функция $f(x)$ выражается через продольную скорость жидкости $U = U(x)$ в невязком ядре потока по формуле $f = UU'_x$.

1°. Автомодельное решение при $f(x) = Ax^k$:

$$w(x,z) = xU(\zeta), \quad \zeta = zx^{\frac{k-1}{2}},$$

где функция $U = U(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$-\tfrac{1}{2}(k+1)(U'_\zeta)^2 + UU''_{\zeta\zeta} + A + \nu(\zeta U''_{\zeta\zeta})'_\zeta = 0.$$

Специальный случай. Осесимметричная струя характеризуется значениями $A = 0$, $k = -3$. В этом случае последнее уравнение при соответствующих граничных условиях имеет решение

$$U(\zeta) = \frac{2\nu\zeta}{\zeta + C},$$

где постоянную интегрирования C можно выразить через импульс струи.

2°. Точные решения с обобщенным разделением переменных (линейные и квадратичные по z) при произвольной функции $f(x)$:

$$w(x,z) = \pm z\biggl[2\int f(x)\,dx + C_1\biggr]^{1/2} + \varphi(x),$$
$$w(x,z) = C_1 z^2 + \varphi(x)z + \frac{1}{4C_1}\varphi^2(x) - \frac{1}{2C_1}\int f(x)\,dx - \nu x + C_2,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция; C_1, C_2 — произвольные постоянные. Первое решение является «невязким» (оно не зависит от ν).

3°. Решение с функциональным разделением переменных при произвольной функции $f(x)$:

$$w(x,z) = 2\nu x + \nu F(x)\biggl(\frac{2C_1}{\xi} + C_2\xi\biggr), \quad \xi = \frac{z}{F^2(x)} - C_1 F'_x(x),$$
$$F(x) = \pm\nu C_2\biggl[2\int f(x)\,dx + C_3\biggr]^{-1/2},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

4°. Решение с функциональным разделением переменных при $f(x) = ax + b$:

$$w(x,z) = \nu\lambda\varphi(x) + \frac{\nu}{a}(ax+b)\bigl(Ce^{-\lambda\xi} + \lambda\xi - 3\bigr), \qquad \xi = z - \varphi'_x(x), \quad \lambda = \pm\frac{\sqrt{a}}{\nu},$$

где C, λ — произвольные постоянные, $\varphi(x)$ — произвольная функция.

5°. Решение с обобщенным разделением переменных (линейное по x) при $f(x) = ax + b$:

$$w(x,z) = x\varphi(z) + \psi(z),$$

где функции $\varphi = \varphi(z)$ и $\psi = \psi(z)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(\varphi'_z)^2 - \varphi\varphi''_{zz} = \nu(z\varphi''_{zz})'_z + a,$$
$$\varphi'_z\psi'_z - \varphi\psi''_{zz} = \nu(z\psi''_{zz})'_z + b.$$

Первое уравнение имеет частные решения $\varphi = \pm\sqrt{a}\,z + C$.

6°. Точные решения в виде суммы функций разных аргументов при $f(x) = a$:

$$w(x,z) = \nu(1-k)x + C_1 z^k + \frac{a}{2\nu(k-2)}z^2 + C_2 z + C_3,$$
$$w(x,z) = -\nu x - \frac{a}{2\nu}z^2\ln z + C_1 z^2 + C_2 z + C_3,$$

где $C_1, \ldots, k$ — произвольные постоянные.

7°. Закон сохранения:

$$D_x\bigl[w_z^2 - F(x)\bigr] + D_z\bigl(-w_x w_z - \nu z w_{zz}\bigr) = 0,$$

где $D_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $D_z = \dfrac{\partial}{\partial z}$, $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx$.

⊙ *Литература для уравнения* 9.3.1.3: F. L. Crabtree, D. Kuchemann, L. Sowerby (1963), Л. Г. Лойцянский (1973, стр. 555–558), Г. Шлихтинг (1974, стр. 223–225), G. I. Burde (1994), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 295–296).

9.3.2. Уравнения стационарного пограничного слоя неньютоновских жидкостей

1. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = k\biggl(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\biggr)^{n-1}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}.$

Это уравнение описывает пограничный слой на плоской пластине, обтекаемой степенной неньютоновской жидкостью, где w — функция тока, x и y — соответственно продольная и поперечная координаты, n и k — реологические параметры ($n > 0$, $k > 0$).

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1 w(C_1^{2-n} C_2^{2n-1} x + C_3, C_2 y + C_4) + C_5,$$
$$w_2 = w(x, y + \varphi(x)),$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные, а $\varphi(x)$ — произвольная функция, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \frac{1}{C_1^2 n(2n-1)} \bigl[C_1(n-1)y + C_2\bigr]^{\frac{2n-1}{n-1}} + C_3 y + C_4 - kC_1 x \quad \text{при} \quad n \neq 1/2,$$
$$w(x,y) = -\frac{1}{C_1^2} \ln(C_1 y + C_2) + C_3 y + C_4 + 2kC_1 x \quad \text{при} \quad n = 1/2.$$

3°. Точные решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \bigl[\lambda(2-n)x + C_1\bigr]^{\frac{1}{2-n}} F(y) \quad \text{при} \quad n \neq 2,$$
$$w(x,y) = C_1 e^{\lambda x} F(y) \quad \text{при} \quad n = 2,$$

где $F = F(y)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\lambda(F_y')^2 - \lambda F F_{yy}'' = k(F_{yy}'')^{n-1} F_{yyy}''',$$

порядок которого может быть понижен на две единицы. Уравнение для F имеет частное решение в виде степенной функции $F = A_n(y + C)^{\beta_n}$, где $\beta_n = \frac{2n-1}{n-2}$.

4°. Автомодельное решение ($n \neq 2$, λ — любое):

$$w(x,y) = x^{\frac{2\lambda n - \lambda + 1}{2-n}} \psi(z), \quad z = x^\lambda y, \tag{1}$$

где функция $\psi = \psi(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{\lambda n + \lambda + 1}{2-n} (\psi_z')^2 - \frac{2\lambda n - \lambda + 1}{2-n} \psi \psi_{zz}'' = k(\psi_{zz}'')^{n-1} \psi_{zzz}''', \tag{2}$$

порядок которого может быть понижен на две единицы.

Специальный случай 1. Обобщенная задача Блазиуса об обтекании плоской пластины поступательным потоком степенной жидкости со скоростью U_i характеризуется граничными условиями:

$$\partial_x w = \partial_y w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w \to U_\text{i} \quad \text{при} \quad y \to \infty, \qquad \partial_y w = U_\text{i} \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Решение этой задачи (в области $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$) ищется в виде (1) при $\lambda = -\frac{1}{n+1}$. Граничные условия для функции $\psi(z)$ имеют вид

$$\psi = \psi_z' = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad \psi_z' \to U_i \quad \text{при} \quad z \to \infty. \tag{3}$$

В работах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1989, 1993) указаны точные аналитические решения задачи (2)–(3) при $\lambda = -\frac{1}{n+1}$ для значений $n = \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, 2$.

Специальный случай 2. Обобщенная задача Шлихтинга о симметричном истечении плоской ламинарной струи степенной жидкости из тонкой щели характеризуется граничными условиями

$$\partial_x w = \partial_{yy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w \to 0 \quad \text{при} \quad y \to \infty,$$

которые дополняются интегральным условием сохранения количества движения

$$\int_0^\infty (\partial_y w)^2 \, dy = A \qquad (A = \text{const}).$$

Решение этой задачи (в области $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$) ищется в виде (1) при $\lambda = -\frac{2}{3n}$. Решение уравнения (2) для функции $\psi(z)$ с соответствующими граничными и интегральным условиями приведено в книге З. П. Шульмана, Б. М. Берковского (1966).

5°. Автомодельное решение при $n = 2$ (λ — любое):

$$w(x,y) = x^\lambda U(z), \quad z = yx^{-1/3},$$

где функция $U = U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\lambda - \tfrac{1}{3})(U_z')^2 + \lambda U U_{zz}'' = k U_{zz}'' U_{zzz}''',$$

порядок которого может быть понижен на две единицы.

6°. Обобщенно-автомодельное решение (λ — любое):

$$w(x,y) = e^{\lambda(2n-1)x}\Phi(\tau), \quad \tau = e^{\lambda(2-n)x}y,$$

где функция $\Phi = \Phi(\tau)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\lambda(n+1)(\Phi'_\tau)^2 - \lambda(2n-1)\Phi\Phi''_{\tau\tau} = k(\Phi''_{\tau\tau})^{n-1}\Phi'''_{\tau\tau\tau},$$

порядок которого может быть понижен на две единицы.

7°. Точное решение при $n \neq 1/2$:

$$w(x,y) = C_1 \ln|x| + C_2 + g(\xi), \quad \xi = x^{\frac{1}{1-2n}}y,$$

где функция $g = g(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{1}{1-2n}(g'_\xi)^2 - C_1 g''_{\xi\xi} = k(g''_{\xi\xi})^{n-1}g'''_{\xi\xi\xi},$$

порядок которого может быть понижен на две единицы.

8°. Точное решение при $n = 1/2$:

$$w(x,y) = C_1 x + C_2 + h(\zeta), \quad \zeta = e^{\lambda x}y,$$

где функция $h = h(\zeta)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\lambda(h'_\zeta)^2 - C_1 h''_{\zeta\zeta} = k(h''_{\zeta\zeta})^{-1/2}h'''_{\zeta\zeta\zeta},$$

порядок которого может быть понижен на две единицы.

9°. Закон сохранения:

$$D_x\big(nw_y^2\big) + D_y\big(-nw_x w_y - kw_{yy}^n\big) = 0,$$

где $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$ и $D_y = \frac{\partial}{\partial y}$.

⊙ *Литература для уравнения* 9.3.2.1: З. П. Шульман, Б. М. Берковский (1966), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 297–298).

2. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = k\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^{n-1}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + f(x).$

Уравнение стационарного пограничного слоя степенной жидкости с градиентом давления.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x, y + \varphi(x)) + C,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, а C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Вырожденные решения (линейные и квадратичные по y) для любой $f(x)$:

$$w(x,y) = \pm y\left[2\int f(x)\,dx + C_1\right]^{1/2} + \varphi(x),$$
$$w(x,y) = C_1 y^2 + \varphi(x)y + \frac{1}{4C_1}\left[\varphi^2(x) - 2\int f(x)\,dx\right] + C_2,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция; C_1, C_2 — произвольные постоянные. Эти решения не зависят от k и отвечают невязкому движению жидкости.

3°. Автомодельное решение при $f(x) = ax^m$:

$$w(x,y) = x^{\frac{2nm+2n-m+1}{2(n+1)}}\psi(z), \quad z = x^{\frac{2m-n-nm}{2(n+1)}}y,$$

где функция $\psi = \psi(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{nm+n+m+1}{2(n+1)}(\psi'_z)^2 - \frac{2nm+2n-m+1}{2(n+1)}\psi\psi''_{zz} = k(\psi''_{zz})^{n-1}\psi'''_{zzz} + a.$$

Отметим, что к последнему уравнению сводится решение обобщенной задачи Фолкнера — Скен о симметричном обтекании клина степенной жидкостью.

4°. Обобщенно-автомодельное решение при $f(x) = ae^{\beta x}$:

$$w(x,y) = \exp\left(\beta\frac{2n-1}{2n+2}x\right)\Phi(\tau), \quad \tau = \exp\left(\beta\frac{2-n}{2n+2}x\right)y,$$

где функция $\Phi = \Phi(\tau)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{1}{2}\beta(\Phi'_\tau)^2 - \beta\frac{2n-1}{2n+2}\Phi\Phi''_{\tau\tau} = k(\Phi''_{\tau\tau})^{n-1}\Phi'''_{\tau\tau\tau} + a.$$

5°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов при $f(x) = a$:

$$w(x,y) = C_1x + h(y),$$

где функция $h = h(y)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k(h''_{yy})^{n-1}h'''_{yyy} + C_1h''_{yy} + a = 0.$$

Его общее решение можно представить в параметрическом виде:

$$y = -k\int_{C_2}^{t}\frac{u^{n-1}\,du}{C_1u+a}, \quad h = k^2\int_{C_3}^{t}\frac{u^{n-1}\varphi(u)\,du}{C_1u+a}, \quad \text{где} \quad \varphi(u) = \int_{C_4}^{u}\frac{v^n\,dv}{C_1v+a}.$$

6°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов при $f(x) = ax^{\frac{n}{2-n}}$, $n \neq 2$:

$$w(x,y) = x^{\frac{1}{2-n}}F(y),$$

где функция $F = F(y)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{1}{2-n}(F'_y)^2 - \frac{1}{2-n}FF''_{yy} = k(F''_{yy})^{n-1}F'''_{yyy} + a.$$

7°. Автомодельное решение при $f(x) = ax^m$, $n = 2$:

$$w(x,y) = x^{\frac{1}{2}m+\frac{5}{6}}U(z), \quad z = yx^{-1/3},$$

где функция $U = U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\tfrac{1}{2}(m+1)(U'_z)^2 + \tfrac{1}{6}(3m+5)UU''_{zz} = kU''_{zz}U'''_{zzz} + a.$$

8°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов при $f(x) = ae^{\lambda x}$, $n = 2$:

$$w(x,y) = e^{\frac{1}{2}\lambda x}G(y),$$

где функция $G = G(y)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\tfrac{1}{2}\lambda(G'_y)^2 - \tfrac{1}{2}\lambda GG''_{yy} = k(G''_{yy})^{n-1}G'''_{yyy} + a.$$

9°. Точное решение $f(x) = ax^{\frac{2n+1}{1-2n}}$, $n \neq 1/2$:

$$w(x,y) = C_1\ln|x| + C_2 + g(\xi), \quad \xi = x^{\frac{1}{1-2n}}y,$$

где функция $g = g(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k(g''_{\xi\xi})^{n-1}g'''_{\xi\xi\xi} + C_1g''_{\xi\xi} - \frac{1}{1-2n}(g'_\xi)^2 + a = 0,$$

10°. Точное решение $f(x) = ae^{\lambda x}$, $n = 1/2$:

$$w(x,y) = C_1x + C_2 + h(\zeta), \quad \zeta = e^{\frac{1}{2}\lambda x}y,$$

где функция $h = h(\zeta)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k(h''_{\zeta\zeta})^{-1/2}h'''_{\zeta\zeta\zeta} + C_1h''_{\zeta\zeta} - \tfrac{1}{2}\lambda(h'_\zeta)^2 + a = 0.$$

11°. Закон сохранения:

$$D_x\bigl[nw_y^2 - nF(x)\bigr] + D_y\bigl(-nw_xw_y - kw_{yy}^n\bigr) = 0,$$

где $D_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $D_y = \dfrac{\partial}{\partial y}$, $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx$.

⦿ *Литература для уравнения* 9.3.2.2: З. П. Шульман, Б. М. Берковский (1966), А. Д. Полянин (2001 *c*), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 298–300).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}-\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left[f\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right].$

Уравнение стационарного пограничного слоя на плоской пластине, обтекаемой неньютоновской жидкостью общего вида (w — функция тока, x и y — продольная и поперечная координаты).

Предварительные замечания. К данному уравнению сводится система уравнений пограничного слоя неньютоновской жидкости

$$u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+u_2\frac{\partial u_1}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[f\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right],$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}=0,$$

путем введения функции тока w по формулам $u_1=\frac{\partial w}{\partial y}$, $u_2=-\frac{\partial w}{\partial x}$ (u_1 и u_2 — продольная и поперечная компоненты скорости жидкости).

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=C_1^{-2}w(C_1^3x+C_2,C_1y+C_3)+C_4,$$
$$w_2=w(x,y+\varphi(x)),$$

где C_1, …, C_4 — произвольные постоянные, а $\varphi(x)$ — произвольная функция, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения, содержащие произвольные функции:

$$w(x,y)=C_1y^2+\varphi(x)y+\frac{1}{4C_1}\varphi^2(x)+C_2,$$
$$w(x,y)=g(z)+C_1x+C_2,\quad z=y+\varphi(x),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные; $\varphi(x)$ — произвольная функция. Во второй формуле функция $g=g(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(g''_{zz})+C_1g'_z=C_3,$$

общее решение которого можно представить в параметрическом виде

$$g=\frac{1}{C_1^2}\int\frac{f'_t(t)}{t}\bigl[f(t)-C_2\bigr]\,dt+C_3,\qquad z=C_4-\frac{1}{C_1}\int\frac{f'_t(t)}{t}\,dt.$$

3°. Автомодельное решение:

$$w(x,y)=x^{2/3}\psi(\xi),\qquad \xi=yx^{-1/3},$$

где функция $\psi=\psi(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\psi'_\xi)^2-2\psi\psi''_{\xi\xi}=3[f(\psi''_{\xi\xi})]'_\xi.$$

4°. Преобразование Мизеса

$$\xi=x,\quad \eta=w,\quad U(\xi,\eta)=\frac{\partial w}{\partial y},\qquad \text{где}\quad w=w(x,y),$$

приводит к нелинейному уравнению второго порядка

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}=\frac{\partial}{\partial \eta}\left[f\left(U\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)\right].$$

Последнее допускает, например, точное решение типа бегущей волны $U=U(a\xi+b\eta)$.

5°. Закон сохранения:

$$D_x\bigl(w_y^2\bigr)+D_y\bigl[-w_xw_y-f(w_{yy})\bigr]=0,$$

где $D_x=\frac{\partial}{\partial x}$, $D_y=\frac{\partial}{\partial y}$.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *c*), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 300).

4. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}-\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left[f\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]+g(x).$

Уравнение стационарного пограничного неньютоновской жидкости общего вида с градиентом давления.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x, y + \varphi(x)) + C,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, а C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Существуют вырожденные решения; см. п. 2° уравнения 9.3.2.2, где $f(x)$ следует заменить на $g(x)$.

3°. Точное решение при $g(x) = a$:

$$w(x,y) = \zeta(z) + C_1 x + C_2, \quad z = y + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция; C_1, C_2 — произвольные постоянные. Функция $\zeta = \zeta(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(\zeta''_{zz}) + C_1\zeta'_z + a\zeta = C_3.$$

4°. Автомодельное решение при $g(x) = a(x+b)^{-1/3}$:

$$w(x,y) = (x+b)^{2/3}\psi(\xi), \quad \xi = y(x+b)^{-1/3},$$

где функция $\psi = \psi(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\psi'_\xi)^2 - 2\psi\psi''_{\xi\xi} = 3[f(\psi''_{\xi\xi})]'_\xi + 3a.$$

5°. Закон сохранения:

$$D_x\bigl[w_y^2 - G(x)\bigr] + D_y\bigl[-w_x w_y - f(w_{yy})\bigr] = 0,$$

где $D_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $D_y = \dfrac{\partial}{\partial y}$, $G(x) = \displaystyle\int g(x)\,dx$.

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *c*), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 301).

9.3.3. Уравнения нестационарного пограничного слоя ньютоновской жидкости

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nu\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3}$.

Это уравнение описывает нестационарный гидродинамический пограничный слой на плоской пластине, где w — функция тока, x и y — соответственно продольная и поперечная координаты, ν — кинематическая вязкость жидкости. Аналогичное уравнение описывает нестационарное истечение плоской ламинарной струи из тонкой щели.

Предварительные замечания. К данному уравнению сводится система уравнений нестационарного гидродинамического пограничного слоя (u_1 и u_2 — продольная и поперечная компоненты скорости жидкости)

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2},$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0,$$

путем введения функции тока w по формулам $u_1 = \frac{\partial w}{\partial y}$, $u_2 = -\frac{\partial w}{\partial x}$.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(x, y + \varphi(x,t), t) + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx + \chi(t),$$
$$w_2 = C_1 w(C_2 x + C_2 C_3 t + C_4,\ C_1 C_2 y + C_1 C_2 C_5 t + C_6,\ C_1^2 C_2^2 t + C_7) + C_5 x - C_3 y + C_8,$$

где $\varphi(x,t)$, $\chi(t)$ — произвольные функции, а $C_1, \ldots, C_8$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Вырожденные решения, линейные и квадратичные по y:

$$w = C_1 y + \varphi(x,t),$$
$$w = C_1 y^2 + \varphi(x,t) y + \frac{1}{4C_1}\varphi^2(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx,$$

где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция двух переменных [здесь и далее аддитивная произвольная функция времени $\chi = \chi(t)$ в точных решениях для функции тока опускается]; C_1 — произвольная постоянная.

3°. Точные решения, содержащие произвольные функции:

$$w = \frac{6\nu x + C_1}{y + \varphi(x,t)} + \frac{C_2}{[y + \varphi(x,t)]^2} + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx,$$

$$w = C_1 \exp\bigl[-C_2 y - C_2\varphi(x,t)\bigr] + C_3 y + C_3\varphi(x,t) + \nu C_2 x + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx,$$

$$w = 6\nu C_1 x^{1/3}\,\mathrm{th}\,\xi + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx, \qquad \xi = C_1\frac{y + \varphi(x,t)}{x^{2/3}},$$

$$w = -6\nu C_1 x^{1/3}\,\mathrm{tg}\,\xi + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx, \qquad \xi = C_1\frac{y + \varphi(x,t)}{x^{2/3}},$$

где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция двух переменных; C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Для построения этих решений в качестве основы использованы более простые стационарные решения, указанные в 9.3.1.1.

Отметим также решение

$$w = f(x)\exp\bigl[-\lambda y - \lambda g(t)\bigr] + \bigl[\nu\lambda + g'_t(t)\bigr]x,$$

где $f(x)$, $g(t)$ — произвольные функции, λ — произвольная постоянная. Его можно получить из указанного выше второго решения при $\varphi(x,t) = -\frac{1}{\lambda}\ln f(x) + g(t)$, $C_2 = \lambda$, $C_3 = 0$.

4°. Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по x:

$$w(x,y,t) = xF(y,t) + G(y,t), \tag{1}$$

где функции $F = F(y,t)$ и $G = G(y,t)$ определяются из более простых уравнений с двумя переменными

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - F\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y} - F\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 G}{\partial y^3}. \tag{3}$$

Уравнение (2) решается независимо от уравнения (3). Если $F = F(y,t)$ — решение уравнения (2), то функции

$$F_1 = F(y + \psi(t), t) + \psi'_t(t),$$

$$F_2 = C_1F(C_1y + C_1C_2t + C_3, C_1^2t + C_4) + C_2,$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, а $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

Если известно частное решение $F = F(y,t)$ уравнения (2), то соответствующее уравнение (3) заменой $U = \frac{\partial G}{\partial y}$ приводится к линейному уравнению второго порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t} - F\frac{\partial U}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial F}{\partial y}U. \tag{4}$$

Точные решения уравнения (2) приведены в табл. 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения в последних двух строках табл. 7, определяющие решение типа бегущей волны и автомодельное решение, являются автономными и поэтому допускают понижение порядка.

В табл. 8 приведены преобразования, упрощающие уравнение (4) для соответствующих решений уравнения (2) из табл. 7. Видно, что в первых трех случаях решения уравнения (4) выражаются через решения линейного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами. В остальных трех случаях уравнение (4) приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Четвертое уравнение в табл. 8 имеет частные решения (A, B — любые):

$$Z(\eta) = A + B\int \Phi(\eta)\,d\eta, \quad \Phi(\eta) = \exp\left(\frac{C_1}{\nu\lambda}e^\eta - \eta\right);$$

$$Z(\eta,t) = A\nu\lambda^2 t + A\int \Phi(\eta)\left[\int \frac{d\eta}{\Phi(\eta)}\right]d\eta.$$

О других точных решениях этого уравнения см. книгу А. Д. Полянин (2001$\,b$), где рассматривалось более общее линейное уравнение вида $\partial_t w = f(x)\partial_{xx}w + g(x)\partial_x w$.

ТАБЛИЦА 7
Точные решения уравнения (2) в 9.3.3.1.

№	Функция $F=F(y,t)$ (или общий вид решения)	Замечания (или определяющее уравнение)
1	$F=\psi(t)$	$\psi(t)$ — произвольная функция
2	$F=\frac{y}{t+C_1}+\psi(t)$	$\psi(t)$ — произвольная функция, C_1 — любое
3	$F=\frac{6\nu}{y+\psi(t)}+\psi'_t(t)$	$\psi(t)$ — произвольная функция
4	$F=C_1\exp\bigl[-\lambda y+\lambda\psi(t)\bigr]-\psi'_t(t)+\nu\lambda$	$\psi(t)$ — произвольная функция; C_1, λ — любые
5	$F=F(\xi),\ \xi=y+\lambda t$	$\lambda F''_{\xi\xi}+(F'_\xi)^2-FF''_{\xi\xi}=\nu F'''_{\xi\xi\xi}$
6	$F=t^{-1/2}\bigl[H(\xi)-\frac{1}{2}\xi\bigr],\ \xi=yt^{-1/2}$	$\frac{3}{4}-2H'_\xi+(H'_\xi)^2-HH''_{\xi\xi}=\nu H'''_{\xi\xi\xi}$

ТАБЛИЦА 8
Преобразования уравнения (4) для соответствующих точных решений уравнения (2)
[номер в первом столбце соответствует номеру точного решения $F=F(y,t)$ в табл. 7].

No.	Преобразования уравнения (4)	Полученное уравнение
1	$U=u(\zeta,t),\ \zeta=y+\int\psi(t)\,dt$	$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}$
2	$U=\frac{1}{t+C_1}u(z,\tau),\ \tau=\frac{1}{3}(t+C_1)^3+C_2,$ $z=(t+C_1)y+\int\psi(t)(t+C_1)\,dt+C_3$	$\frac{\partial u}{\partial\tau}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$
3	$U=\zeta^{-3}u(\zeta,t),\ \zeta=y+\psi(t)$	$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}$
4	$U=e^\eta Z(\eta,t),\ \eta=-\lambda y+\lambda\psi(t)$	$\frac{\partial Z}{\partial t}=\nu\lambda^2\frac{\partial^2 Z}{\partial\eta^2}+(\nu\lambda^2-C_1\lambda e^\eta)\frac{\partial Z}{\partial\eta}$
5	$U=u(\xi,t),\ \xi=y+\lambda t$	$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\bigl[F(\xi)-\lambda\bigr]\frac{\partial u}{\partial\xi}-F'_\xi(\xi)u$
6	$U=t^{-1/2}u(\xi,\tau),\ \xi=yt^{-1/2},\ \tau=\ln t$	$\frac{\partial u}{\partial\tau}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+H(\xi)\frac{\partial u}{\partial\xi}+\bigl[1-H'_\xi(\xi)\bigr]u$

Уравнение 5 в табл. 8 имеет частное стационарное решение $u_0=F'_\xi(\xi)$ (сравни с уравнением 5 в табл. 7). Поэтому другими частными решениями этого уравнения будут функции (см. А. Д. Полянин, 2001 *b*):

$$u(\xi)=C_1F'_\xi(\xi)+C_2F'_\xi(\xi)\int\frac{\Psi(\xi)\,d\xi}{[F'_\xi(\xi)]^2},\quad \Psi(\xi)=\exp\biggl[\frac{\lambda}{\nu}\xi-\frac{1}{\nu}\int F(\xi)\,d\xi\biggr];$$

$$u(\xi,t)=C_1\nu tF'_\xi(\xi)+C_1F'_\xi(\xi)\int\frac{\Psi(\xi)\Phi(\xi)}{[F'_\xi(\xi)]^2}\,d\xi,\quad \Phi(\xi)=\int\frac{[F'_\xi(\xi)]^2}{\Psi(\xi)}\,d\xi.$$

Частный случай 1. Решение, экспоненциально зависящее от времени:

$$w(x,y,t)=f(y)x+e^{-\lambda t}\int g(y)\,dy,$$

где функции $f=f(y)$ и $g=g(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(f'_y)^2-ff''_{yy}=\nu f'''_{yyy},$$
$$-\lambda g+gf'_y-fg'_y=\nu g''_{yy}.$$

Частный случай 2. Периодическое решение:

$$w(x,y,t) = f(y)x + \sin(\lambda t)\int g(y)\,dy + \cos(\lambda t)\int h(y)\,dy,$$

где функции $f = f(y)$, $g = g(y)$, $h = h(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}(f'_y)^2 - ff''_{yy} = \nu f'''_{yyy},\\ -\lambda h + f'_y g - fg'_y = \nu g''_{yy},\\ \lambda g + f'_y h - fh'_y = \nu h''_{yy}.\end{gathered}$$

5°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$\begin{aligned}w(x,y,t) &= \bigl[A(t)e^{k_1x} + B(t)e^{k_2x}\bigr]e^{\lambda y} + \varphi(t)x + ay,\\ A(t) &= C_1\exp\biggl[(\nu\lambda^2 - ak_1)t + \lambda\int\varphi(t)\,dt\biggr],\\ B(t) &= C_2\exp\biggl[(\nu\lambda^2 - ak_2)t + \lambda\int\varphi(t)\,dt\biggr],\end{aligned}$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция; C_1, C_2, a, k_1, k_2, λ — произвольные постоянные.

6°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$\begin{aligned}w(x,y,t) &= A(t)\exp(kx + \lambda y) + B(t)\exp(\beta kx + \beta\lambda y) + \varphi(t)x + ay,\\ A(t) &= C_1\exp\biggl[(\nu\lambda^2 - ak)t + \lambda\int\varphi(t)\,dt\biggr],\\ B(t) &= C_2\exp\biggl[(\nu\beta^2\lambda^2 - ak\beta)t + \beta\lambda\int\varphi(t)\,dt\biggr],\end{aligned}$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция; C_1, C_2, a, k, β, λ — произвольные постоянные.

7°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = \int u(z,t)\,dz + \varphi(t)y + \psi(t)x, \qquad z = kx + \lambda y,$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции, k, λ — произвольные постоянные, а функция $u(z,t)$ определена линейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \bigl[k\varphi(t) - \lambda\psi(t)\bigr]\frac{\partial u}{\partial z} = \nu\lambda^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{\lambda}\varphi'_t(t).$$

Преобразование

$$u = U(\xi,t) - \frac{1}{\lambda}\varphi(t), \qquad \xi = z - \int\bigl[k\varphi(t) - \lambda\psi(t)\bigr]\,dt$$

приводит его к линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu\lambda^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}.$$

8°. Точные решения:

$$\begin{aligned}w &= e^{\nu\lambda^2 t}(C_1e^{\lambda z} + C_2e^{-\lambda z}) + \frac{\partial}{\partial t}\int\varphi(x,t)\,dx, \qquad z = y + \varphi(x,t);\\ w &= e^{-\nu\lambda^2 t}\bigl[C_1\sin(\lambda z) + C_2\cos(\lambda z)\bigr] + \frac{\partial}{\partial t}\int\varphi(x,t)\,dx, \qquad z = y + \varphi(x,t);\\ w &= C_1e^{-\nu\lambda^2 z}\sin(\lambda z - 2\nu\lambda^2 t + C_2) + \frac{\partial}{\partial t}\int\varphi(x,t)\,dx, \qquad z = y + \varphi(x,t),\end{aligned}$$

где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция двух аргументов; C_1, C_2, λ — произвольные постоянные. Для периодической функции $\varphi(x,t) = \varphi(x,t+T)$ последнее решение при $\lambda = \sqrt{\dfrac{\pi}{\nu T}}$ также будет периодическим: $w(x,y,t) = w(x,y,t+T)$.

9°. «Двумерное» решение:

$$w = W(\xi,\eta) + a_1x + a_2y, \quad \xi = k_1x + \lambda_1 t, \quad \eta = k_2y + \lambda_2 t,$$

где функция W описывается уравнением

$$(\lambda_1 + a_2k_1)\frac{\partial^2 W}{\partial\xi\partial\eta} + (\lambda_2 - a_1k_2)\frac{\partial^2 W}{\partial\eta^2} + k_1k_2\left(\frac{\partial W}{\partial\eta}\frac{\partial^2 W}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial W}{\partial\xi}\frac{\partial^2 W}{\partial\eta^2}\right) = \nu k_2^2\frac{\partial^3 W}{\partial\eta^3}.$$

В частном случае

$$a_1 = \lambda_2/k_2, \quad a_2 = -\lambda_1/k_1,$$

имеем уравнение стационарного пограничного слоя 9.3.1.1:

$$\frac{\partial W}{\partial\eta}\frac{\partial^2 W}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial W}{\partial\xi}\frac{\partial^2 W}{\partial\eta^2} = \beta\frac{\partial^3 W}{\partial\eta^3}, \qquad \beta = \nu\frac{k_2}{k_1}.$$

10°. «Двумерное» решение:

$$w = V(\xi,\eta), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{t}},$$

где функция V описывается уравнением

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial\eta} - \frac{1}{2}\xi\frac{\partial^2 V}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{1}{2}\eta\frac{\partial^2 V}{\partial\eta^2} + \frac{\partial V}{\partial\eta}\frac{\partial^2 V}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial V}{\partial\xi}\frac{\partial^2 V}{\partial\eta^2} = \nu\frac{\partial^3 V}{\partial\eta^3}.$$

Последнее имеет, например, решения вида $V = F(\eta)\xi + G(\eta)$.

⦿ *Литература для уравнения* 9.3.3.1: Л. И. Верещагина (1973), Л. В. Овсянников (1978), G. I. Burde (1995), D. K. Ludlow, P. A. Clarkson, A. P. Bassom (2000), А. Д. Полянин (2001 *a*), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2001), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 301–305), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 553–557).

2. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + f(x,t).$

Это уравнение описывает нестационарный гидродинамический пограничный слой с градиентом давления.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(x, y + \varphi(x,t), t) + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx,$$
$$w_2 = -w(x,-y,t) + \psi(t),$$

где $\varphi(x,t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции, также будут решениями этого уравнения.

2°. При $f(x,t) = g(t)$ преобразование

$$w = u(\xi,y,t) - h'_t(t)y, \quad \xi = x + h(t), \qquad \text{где} \quad h(t) = -\int_{t_0}^t (t-\tau)g(\tau)\,d\tau, \tag{1}$$

приводит к более простому уравнению вида 9.3.3.1:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial y} - \frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}.$$

Отметим, что функции $f = g(t)$ и $h = h(t)$ связаны простым соотношением $h''_{tt} = -g$.

В общем случае преобразование (1) приводит рассматриваемое уравнение к аналогичному уравнению с измененной функцией $f(x,t)$ согласно правилу:

$$f(x,t) \quad \xrightarrow{\text{преобразование (1)}} \quad f(x,t) - g(t).$$

3°. Вырожденное решение (квадратичное по переменной y) для любой $f(x,t)$:

$$w(x,y,t) = Cy^2 + \varphi(x,t)y + \frac{1}{4C}\varphi^2(x,t) + \frac{1}{2C}\int\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} - f(x,t)\right]dx,$$

где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция двух аргументов [здесь и далее аддитивная произвольная функция времени $\psi = \psi(t)$ в точных решениях для функции тока опускается]; C — произвольная постоянная. Это решение не зависит от ν и отвечает невязкому течению жидкости.

Вырожденное решение (линейное по y) для любой $f(x,t)$:

$$w(x,y,t) = \psi(x,t)y + \varphi(x,t),$$

ТАБЛИЦА 9

Точные решения уравнения (3) для различных $f_1(t)$ [$\psi(t)$ — произвольная функция].

Функция $f_1 = f_1(t)$	Функция $F = F(y,t)$ (или общий вид решения)	Определяющее уравнение (или определяющие коэффициенты)
Любая	$F = a(t)y + \psi(t)$	$a'_t + a^2 = f_1(t)$
$f_1(t) = Ae^{-\beta t}$, $A>0$, $\beta>0$	$F = Be^{-\frac{1}{2}\beta t}\sin[\lambda y + \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t)$, $F = Be^{-\frac{1}{2}\beta t}\cos[\lambda y + \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t)$	$B = \pm\sqrt{\frac{2A\nu}{\beta}}$, $\lambda = \sqrt{\frac{\beta}{2\nu}}$
$f_1(t) = Ae^{\beta t}$, $A>0$, $\beta>0$	$F = Be^{\frac{1}{2}\beta t}\operatorname{sh}[\lambda y + \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t)$	$B = \pm\sqrt{\frac{2A\nu}{\beta}}$, $\lambda = \sqrt{\frac{\beta}{2\nu}}$
$f_1(t) = Ae^{\beta t}$, $A<0$, $\beta>0$	$F = Be^{\frac{1}{2}\beta t}\operatorname{ch}[\lambda y + \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t)$	$B = \pm\sqrt{\frac{2\|A\|\nu}{\beta}}$, $\lambda = \sqrt{\frac{\beta}{2\nu}}$
$f_1(t) = Ae^{\beta t}$, A — любое, $\beta>0$	$F = \psi(t)e^{\lambda y} - \frac{Ae^{\beta t-\lambda y}}{4\lambda^2\psi(t)} + \frac{\psi'_t(t)}{\lambda\psi(t)} - \nu\lambda$	$\lambda = \pm\sqrt{\dfrac{\beta}{2\nu}}$
$f_1(t) = At^{-2}$	$F = t^{-1/2}\bigl[H(\xi) - \frac{1}{2}\xi\bigr]$, $\xi = yt^{-1/2}$	$\frac{3}{4} - A - 2H'_\xi + (H'_\xi)^2 - HH''_{\xi\xi} = \nu H'''_{\xi\xi\xi}$
$f_1(t) = A$	$F = F(\xi)$, $\xi = y + \lambda t$	$-A + \lambda F''_{\xi\xi} + (F'_\xi)^2 - FF''_{\xi\xi} = \nu F'''_{\xi\xi\xi}$

где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция, а функция $\psi = \psi(x,t)$ определяется дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial\psi}{\partial x} = f(x,t).$$

О методах интегрирования и точных решениях таких уравнений (для различных f) см. книги Э. Камке (1966), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2003).

Вырожденные решения при $f(x,t) = f(x)$:

$$w(x,y,t) = \pm y\left[2\int f(x)\,dx + C_1\right]^{1/2} + \varphi(x,t),$$

где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция.

4°. Решение с обобщенным разделением переменных (линейное по переменной x) при $f(x,t) = f_1(t)x + f_2(t)$:

$$w(x,y,t) = xF(y,t) + G(y,t), \tag{2}$$

где функции $F = F(y,t)$ и $G = G(y,t)$ определяются из более простых уравнений с двумя переменными

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - F\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} + f_1(t), \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y} - F\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 G}{\partial y^3} + f_2(t). \tag{4}$$

Уравнение (3) решается независимо от уравнения (4).

Если $F = F(y,t)$ — решение уравнения (3), то функция

$$F_1 = F(y + \psi(t), t) + \psi'_t(t),$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, также будет решением этого уравнения.

Точные решения уравнения (3) для различных зависимостей $f_1 = f_1(t)$ представлены в табл. 9 (два более сложных решения этого уравнения приведены в конце п. 4°).

Преобразование $U = \frac{\partial G}{\partial y}$ приводит уравнение (4) к линейному уравнению второго порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t} - F\frac{\partial U}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial F}{\partial y}U + f_2(t). \tag{5}$$

Остановимся подробнее на первом решении уравнения (3), указанном в табл. 9:

$$F(y,t) = a(t)y + \psi(t), \qquad \text{где} \qquad a'_t + a^2 = f_1(t). \tag{6}$$

Уравнение Риккати для функции $a = a(t)$ подстановкой $a = h'_t/h$ сводится к линейному уравнению второго порядка $h''_{tt} - f_1(t)h = 0$. Точные решения этого уравнения для различных $f_1(t)$ описаны в книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*). В частности, при $f_1(t) = \mathrm{const}$ имеем

$$a(t) = k\frac{C_1\cos(kt) - C_2\sin(kt)}{C_1\sin(kt) + C_2\cos(kt)} \quad \text{при} \quad f_1 = -k^2 < 0,$$

$$a(t) = k\frac{C_1\operatorname{ch}(kt) + C_2\operatorname{sh}(kt)}{C_1\operatorname{sh}(kt) + C_2\operatorname{ch}(kt)} \quad \text{при} \quad f_1 = k^2 > 0.$$

Подставив решение (6) [для произвольной $f_1(t)$] в уравнение (5), получим

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \bigl[a(t)y + \psi(t)\bigr]\frac{\partial U}{\partial y} - a(t)U + f_2(t).$$

Преобразование (А. Д. Полянин, 2001 *b*)

$$U = \frac{1}{\Phi(t)}\left[u(z,\tau) + \int f_2(t)\Phi(t)\,dt\right], \quad \tau = \int \Phi^2(t)\,dt + C_1,$$

$$z = y\Phi(t) + \int \psi(t)\Phi(t)\,dt + C_2, \quad \Phi(t) = \exp\left[\int a(t)\,dt\right],$$

приводит к линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Замечание 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения в последних двух строках табл. 9 (см. последний столбец), определяющие автомодельное решение и решение типа бегущей волны, являются автономными и поэтому допускают понижение порядка.

Замечание 2. Пусть $w(x,y,t)$ — решение уравнения нестационарного гидродинамического пограничного слоя при $f(x,t) = f_1(t)x + f_2(t)$. Тогда функция

$$w_1 = w(x + h(t), y, t) - h'_t(t)y, \qquad \text{где} \quad h''_{tt} - f_1(t)h = 0,$$

также будет решением этого уравнения.

Замечание 3. Уравнение (4) в специальном случае $f_2(t) = 0$ допускает частное решение $G = G(t)$, где $G(t)$ — произвольная функция.

Частный случай 1. Решение при $f(x,t) = Ax + Be^{-\lambda t}$:

$$w(x,y,t) = xg(y) + e^{-\lambda t}\int h(y)\,dy,$$

где функции $g = g(y)$ и $h = h(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(g')^2 - gg'' = \nu g''' + A,$$
$$-\lambda h + hg' - gh' = \nu h'' + B.$$

Штрихи обозначают производные по y.

Частный случай 2. Периодическое решение при $f(x,t) = Ax + B_1\sin(\lambda t) + B_2\cos(\lambda t)$:

$$w(x,y,t) = xg(y) + \sin(\lambda t)\int h_1(y)\,dy + \cos(\lambda t)\int h_2(y)\,dy,$$

где функции $g = g(y)$, $h_1 = h_1(y)$, $h_2 = h_2(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(g')^2 - gg'' = \nu g''' + A,$$
$$-\lambda h_2 + g'h_1 - gh'_1 = \nu h''_1 + B_1,$$
$$\lambda h_1 + g'h_2 - gh'_2 = \nu h''_2 + B_2.$$

Ниже указаны два более сложных точных решения уравнения (3).

Решение:

$$F(y,t) = -\frac{\gamma'_t}{\gamma}y + \gamma^3\exp\left(\nu\int\frac{dt}{\gamma^2}\right)\left(A\operatorname{ch}\frac{y}{\gamma} + B\operatorname{sh}\frac{y}{\gamma}\right),$$

где A, B — произвольные постоянные, а $\gamma = \gamma(t)$ — произвольная функция, соответствует правой части уравнения (3) вида

$$f_1(t) = -\frac{\gamma''_{tt}}{\gamma} + 2\left(\frac{\gamma'_t}{\gamma}\right)^2 + (B^2 - A^2)\gamma^4 \exp\left(2\nu \int \frac{dt}{\gamma^2}\right).$$

Решение:

$$F(y,t) = -\frac{\gamma'_t}{\gamma} y + \gamma^3 \exp\left(-\nu \int \frac{dt}{\gamma^2}\right)\left(A\cos\frac{y}{\gamma} + B\sin\frac{y}{\gamma}\right),$$

где A, B — произвольные постоянные, а $\gamma = \gamma(t)$ — произвольная функция, соответствует правой части уравнения (3) вида

$$f_1(t) = -\frac{\gamma''_{tt}}{\gamma} + 2\left(\frac{\gamma'_t}{\gamma}\right)^2 + (A^2 + B^2)\gamma^4 \exp\left(-2\nu \int \frac{dt}{\gamma^2}\right).$$

5°. Решение с обобщенным разделением переменных при $f(x,t) = g(x)e^{\beta t}$, $\beta > 0$:

$$w(x,y,t) = \varphi(x,t)e^{\lambda y} + \psi(x,t)e^{-\lambda y} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial t}\int \ln|\varphi(x,t)|\,dx - \nu\lambda x,$$

$$\psi(x,t) = -\frac{e^{\beta t}}{2\lambda^2\varphi(x,t)}\int g(x)\,dx, \qquad \lambda = \pm\sqrt{\frac{\beta}{2\nu}},$$

где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция двух аргументов.

6°. Точное решение с обобщенным разделением переменных при $f(x,t) = g(x)e^{\beta t}$, $\beta > 0$:

$$w(x,y,t) = \pm\frac{1}{\lambda}\exp\left(\tfrac{1}{2}\beta t\right)\sqrt{\psi(x)}\,\operatorname{sh}\left[\lambda y + \varphi(x,t)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx,$$

$$w(x,y,t) = \pm\frac{1}{\lambda}\exp\left(\tfrac{1}{2}\beta t\right)\sqrt{\psi(x)}\,\operatorname{ch}\left[\lambda y + \varphi(x,t)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx,$$

$$\psi(x) = 2\int g(x)\,dx + C_1, \qquad \lambda = \sqrt{\frac{\beta}{2\nu}},$$

где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция двух аргументов.

7°. Точное решение с обобщенным разделением переменных при $f(x,t) = g(x)e^{-\beta t}$, $\beta > 0$:

$$w(x,y,t) = \pm\frac{1}{\lambda}\exp\left(-\tfrac{1}{2}\beta t\right)\sqrt{\psi(x)}\,\sin\left[\lambda y + \varphi(x,t)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx,$$

$$w(x,y,t) = \pm\frac{1}{\lambda}\exp\left(-\tfrac{1}{2}\beta t\right)\sqrt{\psi(x)}\,\cos\left[\lambda y + \varphi(x,t)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx,$$

$$\psi(x) = 2\int g(x)\,dx + C_1, \qquad \lambda = \sqrt{\frac{\beta}{2\nu}},$$

где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция двух аргументов.

8°. Точное решение при $f(x,t) = xg(t)$:

$$w(x,y,t) = \frac{\psi'_t}{\psi}xy + \left(\frac{2\psi'_t}{\psi^2} - \nu\psi\right)x + \varphi(z)\exp(\psi y), \qquad z = \frac{x}{\psi}, \qquad \psi = \psi(t),$$

где $\varphi(z)$ — произвольная функция, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\psi''_{tt} = g(t)\psi.$$

9°. Решение с обобщенным разделением переменных при $f(x,t) = ae^{\beta x - \gamma t}$:

$$w(x,y,t) = \varphi(x,t)e^{\lambda y} - \frac{a}{2\beta\lambda^2\varphi(x,t)}e^{\beta x - \lambda y - \gamma t}$$
$$+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial t}\int \ln|\varphi(x,t)|\,dx - \nu\lambda x + \frac{2\nu\lambda^2 + \gamma}{\beta}\left(y + \frac{1}{\lambda}\ln|\varphi(x,t)|\right),$$

где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция двух аргументов, λ — произвольная постоянная.

10°. Решение с обобщенным разделением переменных при $f(x,t)=f(t)$:

$$w(x,y,t)=\int u(z,t)\,dz+\varphi(t)y+\psi(t)x,\qquad z=kx+\lambda y,$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции, k, λ — произвольные постоянные, а функция $u(z,t)$ определяется линейным уравнением второго порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\bigl[k\varphi(t)-\lambda\psi(t)\bigr]\frac{\partial u}{\partial z}=\nu\lambda^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{\lambda}\varphi'_t(t)+\frac{1}{\lambda}f(t).$$

Преобразование

$$u=U(\xi,t)-\frac{1}{\lambda}\varphi(t)+\frac{1}{\lambda}\int f(t)\,dt,\qquad \xi=z-\int\bigl[k\varphi(t)-\lambda\psi(t)\bigr]\,dt$$

приводит его линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\nu\lambda^2\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}.$$

11°. Решение с обобщенным разделением переменных при $f(x,t)=f(t)$:

$$w(x,y,t)=Ce^{-\lambda y+\lambda\varphi(x,t)}-a(t)\varphi(x,t)-\frac{\partial}{\partial t}\int\varphi(x,t)\,dx+a(t)y+\nu\lambda x,\quad a(t)=\int f(t)\,dt,$$

где $\varphi(x,t)$ — произвольная функциядвух аргументов; C, λ — произвольные постоянные.

12°. Решение с обобщенным разделением переменных при $f(x,t)=f(t)$:

$$w(x,y,t)=\varphi(x,t)e^{\lambda y}+\psi(x,t)e^{-\lambda y}+\chi(x,t)+a(t)y,$$

где λ — любое, $\varphi(x,t)$ — произвольная функция двух аргументов, а остальные функции описываются формулами

$$\psi(x,t)=\frac{C\nu e^{2\nu\lambda^2 t}}{\varphi(x,t)}\left[x-\int a(t)\,dt\right],\quad a(t)=\int f(t)\,dt+Ce^{2\nu\lambda^2 t},$$
$$\chi(x,t)=\frac{1}{\lambda}a(t)\ln|\varphi(x,t)|+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial t}\int\ln|\varphi(x,t)|\,dx-\nu\lambda x.$$

13°. Точные решения при $f(x,t)=f(t)$:

$$w=e^{\nu\lambda^2 t}(C_1e^{\lambda z}+C_2e^{-\lambda z})+\frac{\partial}{\partial t}\int\varphi(x,t)\,dx+z\int f(t)\,dt,\qquad z=y+\varphi(x,t);$$
$$w=e^{-\nu\lambda^2 t}\bigl[C_1\sin(\lambda z)+C_2\cos(\lambda z)\bigr]+\frac{\partial}{\partial t}\int\varphi(x,t)\,dx+z\int f(t)\,dt,\quad z=y+\varphi(x,t);$$
$$w=C_1e^{-\lambda z}\sin(\lambda z-2\nu\lambda^2 t+C_2)+\frac{\partial}{\partial t}\int\varphi(x,t)\,dx+z\int f(t)\,dt,\qquad z=y+\varphi(x,t),$$

где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция двух аргументов; C_1, C_2, λ — произвольные постоянные. Для периодической функции $f(t)=f(t+T)$, удовлетворяющей условию $\int_0^T f(t)\,dt=0$, при $\varphi(x,t)=\varphi(x)$ и $\lambda=\sqrt{\pi/(\nu T)}$ последнее решение также будет периодическим: $w(x,y,t)=w(x,y,t+T)$.

14°. Точные решения при $f(x,t)=A$:

$$w=-\frac{A}{6\nu}z^3+C_2z^2+C_1z+\frac{\partial}{\partial t}\int\varphi(x,t)\,dx,\qquad z=y+\varphi(x,t);$$
$$w=kx+C_1\exp\left(-\frac{k}{\nu}z\right)-\frac{A}{2k}z^2+C_2z+\frac{\partial}{\partial t}\int\varphi(x,t)\,dx,\qquad z=y+\varphi(x,t),$$

где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция двух аргументов; C_1, C_2, k — произвольные постоянные.

15°. В табл. 10 описаны решения уравнения нестационарного гидродинамического пограничного слоя с градиентом давления, зависящие от двух обобщенных переменных.

При $f(x,t)=f(k_1x+\lambda_1 t)$ имеется также широкий класс «двумерных» решений вида

$$w=z(\xi,\eta)+a_1x+a_2y,\qquad \xi=k_1x+\lambda_1 t,\qquad \eta=k_2y+\lambda_2 t,$$

ТАБЛИЦА 10

Решения уравнения нестационарного гидродинамического пограничного слоя, зависящие от двух обобщенных переменных. Обозначения: $\mathcal{R}[z]=\nu z_{\eta\eta\eta}+z_\xi z_{\eta\eta}-z_\eta z_{\xi\eta}$ и $g=g(u)$ — произвольная функция.

Функция $f=f(x,t)$	Общий вид решения	Уравнение для функции $z=z(\xi,\eta)$
$f=f(x+\lambda t)$	$w=z(\xi,y)-\lambda y,\ \xi=x+\lambda t$	$\nu z_{yyy}+z_\xi z_{yy}-z_y z_{\xi y}+f(\xi)=0$
$f=g(x)t^{-2}$	$w=z(x,\eta)t^{-1/2},\ \eta=yt^{-1/2}$	$\nu z_{\eta\eta\eta}+z_x z_{\eta\eta}-z_\eta z_{x\eta}+\frac{1}{2}\eta z_{\eta\eta}+z_\eta+g(x)=0$
$f=e^{\lambda t}g(xe^{-\lambda t})$	$w=e^{\lambda t}z(\xi,y),\ \xi=xe^{-\lambda t}$	$\nu z_{yyy}+z_\xi z_{yy}-z_y z_{\xi y}+\lambda\xi z_{\xi y}-\lambda z_y+g(\xi)=0$
$f=t^{-n-2}g(xt^n)$	$w=z(\xi,\eta)t^{-(2n+1)/2}$, $\xi=xt^n,\ \eta=yt^{-1/2}$	$\mathcal{R}[z]+\frac{1}{2}\eta z_{\eta\eta}-n\xi z_{\xi\eta}+(1+n)z_\eta+g(\xi)=0$
$f=ax^n$	$w=z(\xi,\eta)t^{-(n+3)/(2n-2)}$, $\xi=xt^{2/(n-1)},\ \eta=yt^{-1/2}$	$\mathcal{R}[z]+\frac{1}{2}\eta z_{\eta\eta}-\frac{2\xi}{n-1}z_{\xi\eta}+\frac{n+1}{n-1}z_\eta+a\xi^n=0$
$f=ae^{\lambda x}$	$w=z(\xi,\eta)t^{-1/2}$, $\xi=x+\frac{2}{\lambda}\ln t,\ \eta=yt^{-1/2}$	$\mathcal{R}[z]+\frac{1}{2}\eta z_{\eta\eta}-\frac{2}{\lambda}z_{\xi\eta}+z_\eta+ae^{\lambda\xi}=0$

где функция z описывается уравнением

$$(\lambda_1+a_2k_1)\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+(\lambda_2-a_1k_2)\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}+k_1k_2\left(\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}\right)=\nu k_2^2\frac{\partial^3 z}{\partial\eta^3}+f(\xi).$$

16°. При

$$f(x,t)=a'(t)X^{-1/3}-\tfrac{1}{3}a^2(t)X^{-5/3}-b''(t),\qquad X=x+b(t),$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — произвольные функции, имеется решение

$$w=[a(t)X^{-1/3}-b'(t)]y+6\nu Xy^{-1}.$$

⦿ *Литература для уравнения* 9.3.3.2: Л. И. Верещагина (1973), Л. В. Овсянников (1978), G. I. Burde (1995), D. K. Ludlow, P. A. Clarkson, A. P. Bassom (2000), А. Д. Полянин (2001 *а*), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2001), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 305–310), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 557–563).

3. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial z\partial t}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\nu\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+f(x,t).$

Предварительные замечания. К данному уравнению сводится система уравнений осесимметричного нестационарного ламинарного пограничного слоя

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}=\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)+f(x,t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}=0 \tag{2}$$

(u и v — осевая и радиальная компоненты скорости жидкости, x и r — цилиндрические координаты) путем введения функции тока w и новой переменной z по формулам

$$u=\frac{2}{r}\frac{\partial w}{\partial r},\quad v=-\frac{2}{r}\frac{\partial w}{\partial x},\quad z=\frac{1}{4}r^2.$$

Система (1), (2) описывает осесимметричную струю ($f\equiv 0$) и пограничный слой на протяженном теле вращения ($f\not\equiv 0$).

1°. Уравнение сохраняется при замене w на $w+\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — произвольная функция.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных (квадратичное по z) для произвольной $f(x,t)$:

$$w(x,z,t)=Cz^2+\varphi(x,t)z+\frac{1}{4C}\varphi^2(x,t)+\frac{1}{2C}\frac{\partial}{\partial t}\int\varphi(x,t)\,dx-\frac{1}{2C}\int f(x,t)\,dx-\nu x+\psi(t),$$

где $\varphi(x,t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции, C — произвольная постоянная.

Уравнение имеет также «невязкое» решение вида $w=\varphi(x,t)z+\psi(x,t)$, где $\psi(x,t)$ — произвольная функция, а функция $\varphi=\varphi(x,t)$ описывается уравнением с частными производными первого порядка $\partial_t\varphi+\varphi\partial_x\varphi=f(x,t)$.

3°. Решение с обобщенным разделением переменных (линейное по x) при $f(x,t)=a(t)x+b(t)$:

$$w(x,z,t)=x\varphi(z,t)+\psi(z,t),$$

где функции $\varphi=\varphi(z,t)$ и $\psi=\psi(z,t)$ описываются системой уравнений с частными производными

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial t}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2-\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\nu\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)+a(t),$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}-\varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\nu\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)+b(t).$$

Первое уравнение имеет точное решение $\varphi=C(t)z$, где функция $C=C(t)$ описывается уравнением Риккати $C_t'+C^2=a(t)$. Второе уравнение заменой $V=\frac{\partial\psi}{\partial z}$ сводится к линейному уравнению второго порядка.

4°. «Двумерное» решение при $f(x,t)=f(x+\lambda t)$:

$$w(x,z,t)=U(\xi,z)-\lambda z,\quad \xi=x+\lambda t,$$

где функция $U=U(\xi,z)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial z}-\frac{\partial U}{\partial\xi}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\nu\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)+f(\xi),$$

которое с точностью до переобозначений совпадает со стационарным уравнением (см. уравнение 9.3.1.3 и его решения).

5°. Решение с обобщенным разделением переменных (линейное по x) при $f(x,t)=f(t)$:

$$w(x,z,t)=A(t)x+B(t)+z\int f(t)\,dt+u(z,t),$$

где $A(t)$, $B(t)$ — произвольные функции, а функция $u=u(z,t)$ описывается линейным параболическим уравнением второго порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t}-A(t)\frac{\partial u}{\partial z}=\nu z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

6°. Пусть $w(x,z,t)$ — решение уравнения нестационарного осесимметричного пограничного слоя при $f(x,t)=a(t)x+b(t)$. Тогда функция

$$w_1=w(\xi,z,t)-\varphi_t'(t)z+\psi(t),\qquad \xi=x+\varphi(t),$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, а $\varphi=\varphi(t)$ — решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения $\varphi_{tt}''-a(t)\varphi=0$, также будет решением этого уравнения.

⊙ *Литература для уравнения* 9.3.3.3: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 310–311).

9.3.4. Уравнения нестационарного пограничного слоя неньютоновских жидкостей

1. $\displaystyle\boldsymbol{\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=k\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^{n-1}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}}.$

Уравнение нестационарного пограничного слоя на плоской пластине, обтекаемой степенной жидкостью (w — функция тока, x и y — продольная и поперечная координаты).

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=C_1w(C_1^{n-2}C_2^{2n-1}x+C_1^{n-2}C_2^{2n-1}C_3t,\ C_2y+C_2C_5t,\ C_1^{n-1}C_2^{2n}t)+C_5x-C_3y,$$
$$w_2=w(x+C_6,y+C_7,t+C_8)+C_9,$$
$$w_3=w\bigl(x,y+\varphi(x,t),t\bigr)+\frac{\partial}{\partial t}\int\varphi(x,t)\,dx+\psi(t),$$

где $C_1,\ \dots,\ C_9$ — произвольные постоянные, а $\varphi(x,t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по x:

$$w(x,y,t)=\psi(t)x+\int U(z,t)\,dz,\quad z=y+\int\psi(t)\,dt,$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, а функция $U(z,t)$ описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t}=k\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^{n-1}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Об этом уравнении см. 1.6.18.2 при $f(x)=\mathrm{const}$ и 1.6.18.3 при $f(U)=kU^{n-1}$ (при $n=2$ см. частный случай уравнения 8.1.1.2).

3°. Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по x:

$$w(x,y,t)=\frac{xy}{t+C_1}+\psi(t)x+\int U(y,t)\,dy,$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, C_1 — произвольная постоянная, а функция $U(y,t)$ описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t}=k\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^{n-1}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\left[\frac{y}{t+C_1}+\psi(t)\right]\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{1}{t+C}U.$$

Преобразование

$$U=\frac{1}{t+C_1}u(\zeta,\tau),\quad \tau=\tfrac{1}{3}(t+C_1)^3+C_2,\quad \zeta=(t+C_1)y+\int\psi(t)(t+C_1)\,dt+C_3$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=k\left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)^{n-1}\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}.$$

Об этом уравнении см. 1.6.18.2 при $f(x)=\mathrm{const}$ и 1.6.18.3 при $f(U)=kU^{n-1}$.

4°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t)=\int v(\eta,t)\,d\eta+\varphi(t)y+\psi(t)x,\qquad \eta=kx+\lambda y,$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции, k, λ — произвольные постоянные, а функция $v(\eta,t)$ описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\big[k\varphi(t)-\lambda\psi(t)\big]\frac{\partial v}{\partial \eta}=k\lambda^{2n}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^{n-1}\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}-\frac{1}{\lambda}\varphi'_t(t).$$

Преобразование

$$v=R(\zeta,t)-\frac{1}{\lambda}\varphi(t),\quad \zeta=\eta-\int\big[k\varphi(t)-\lambda\psi(t)\big]\,dt$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial R}{\partial t}=k\lambda^{2n}\left(\frac{\partial R}{\partial \zeta}\right)^{n-1}\frac{\partial^2 R}{\partial \zeta^2}.$$

⊙ *Литература для уравнения* 9.3.4.1: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 311–312).

2. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left[f\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right].$

Уравнение нестационарного пограничного слоя на плоской пластине, обтекаемой неньютоновской жидкостью (w — функция тока, x и y — продольная и поперечная координаты).

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=w(x,y+\varphi(x,t),t)+\frac{\partial}{\partial t}\int\varphi(x,t)\,dx+\psi(t),$$

$$w_2=C_1^{-2}w(C_1^3x+C_1^3C_2t+C_3,\ C_1y+C_1C_4t+C_5,\ C_1^2t+C_6)+C_4x-C_2y+C_7,$$

где $\varphi(x,t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции, а $C_1,\ \dots,\ C_7$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по x:

$$w(x,y,t)=\psi(t)x+\int U(z,t)\,dz,\quad z=y+\int\psi(t)\,dt,$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, а функция $U(z,t)$ описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left[f\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right].$$

Последнее допускает точные решения вида [для любой функции $f=f(v)$]:

$$\begin{aligned}
&U(z,t)=H(\zeta), && \zeta=kz+\lambda t && \Longrightarrow\ \text{уравнение}\ \ \lambda H=kf(kH'_\zeta)+C;\\
&U(z,t)=az+H(\zeta), && \zeta=kz+\lambda t && \Longrightarrow\ \text{уравнение}\ \ \lambda H=kf(kH'_\zeta+a)+C;\\
&U(z,t)=\sqrt{t}\,H(\zeta), && \zeta=z/\sqrt{t} && \Longrightarrow\ \text{уравнение}\ \ \tfrac12 H-\tfrac12\zeta H'_\zeta=[f(H'_\zeta)]'_\zeta,
\end{aligned}$$

где a, k, C, λ — произвольные постоянные. Решение первых двух уравнений для $H=H(\zeta)$ можно получить в параметрическом виде [см. Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2001 *a*)].

3°. Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по x:

$$w(x,y,t)=\frac{xy}{t+C}+\psi(t)x+\int U(y,t)\,dy,$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, C — произвольная постоянная, а функция $U(y,t)$ описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial y}\left[f\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right]+\left[\frac{y}{t+C}+\psi(t)\right]\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{1}{t+C}U.$$

Преобразование

$$U=\frac{1}{t+C_1}u(\zeta,\tau),\quad \tau=\tfrac13(t+C_1)^3+C_2,\quad \zeta=(t+C_1)y+\int\psi(t)(t+C_1)\,dt+C_3$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[f\left(\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)\right].$$

Об этом уравнении см. п. 2°.

4°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t)=\int v(\eta,t)\,d\eta+\varphi(t)y+\psi(t)x,\qquad \eta=kx+\lambda y,$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции, k, λ — произвольные постоянные, а функция $v(\eta,t)$ описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\big[k\varphi(t)-\lambda\psi(t)\big]\frac{\partial v}{\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial\eta}\left[f\left(\lambda^2\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)\right]-\frac{1}{\lambda}\varphi'_t(t).$$

Преобразование

$$v=R(\zeta,t)-\frac{1}{\lambda}\varphi(t),\quad \zeta=\eta-\int\big[k\varphi(t)-\lambda\psi(t)\big]\,dt$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial R}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[f\left(\lambda^2\frac{\partial R}{\partial\zeta}\right)\right].$$

⊙ *Литература для уравнения* 9.3.4.2: А. Д. Полянин (2001 *a*), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 312–313).

3. $$\boldsymbol{\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left[f\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]+g(x,t).}$$

Уравнение нестационарного пограничного слоя неньютоновской жидкости с градиентом давления.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x, y+\varphi(x,t), t) + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx + \psi(t),$$

где $\varphi(x,t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции, также будет решением этого уравнения.

2°. Существует вырожденное решение; см. п. 3° уравнения 9.3.3.2, где $f(x,t)$ следует заменить на $g(x,t)$.

3°. При $g(x,t)=g(t)$, преобразование

$$w = u(\xi,y,t) - \varphi'_t(t)y, \quad \xi = x+\varphi(t), \qquad \text{где} \quad \varphi(t) = -\int_{t_0}^{t}(t-\tau)g(\tau)\,d\tau,$$

Приводит к более простому уравнению вида 9.3.4.2:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial y} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[f\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right].$$

Отметим, что функции $g=g(t)$ и $\varphi=\varphi(t)$ связаны простым соотношением: $\varphi''_{tt}=-g$.

4°. «Двумерное» решение (линейное по x) при $g(x,t)=g(t)$:

$$w(x,y,t) = a(t)x + \int U(y,t)\,dy,$$

где функция $U=U(y,t)$ описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t} - a(t)\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[f\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right] + g(t).$$

Преобразование

$$U = u(\xi,t) + \int g(t)\,dt, \quad \xi = y + \int a(t)\,dt$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left[f\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right].$$

Об этом уравнении см. 9.3.4.2, п. 2°.

5°. «Двумерное» решение (линейное по x) при $g(x,t)=s(t)x+h(t)$:

$$w(x,y,t) = \bigl[a(t)y+\psi(t)\bigr]x + \int Q(y,t)\,dy,$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, функция $a=a(t)$ описывается уравнением Риккати

$$a'_t + a^2 = s(t),$$

а функция $Q=Q(y,t)$ удовлетворяет уравнению второго порядка

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left[f\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right] + \bigl[a(t)y+\psi(t)\bigr]\frac{\partial Q}{\partial y} - a(t)Q + h(t).$$

Преобразование

$$Q = \frac{1}{\Phi(t)}\left[Z(\xi,\tau) + \int h(t)\Phi(t)\,dt\right], \quad \tau = \int \Phi^2(t)\,dt + A, \quad \xi = y\Phi(t) + \int \psi(t)\Phi(t)\,dt + B,$$

где $\Phi(t) = \exp\left[\int a(t)\,dt\right]$, приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial Z}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[f\left(\frac{\partial Z}{\partial \xi}\right)\right].$$

Об этом уравнении см. 9.3.4.2, п. 2°.

6°. «Двумерное» решение при $g(x,t)=g(t)$:

$$w(x,y,t)=\int v(\eta,t)\,d\eta+\varphi(t)y+\psi(t)x, \qquad \eta=kx+\lambda y,$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции, k, λ — произвольные постоянные, а функция $v(\eta,t)$ описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\bigl[k\varphi(t)-\lambda\psi(t)\bigr]\frac{\partial v}{\partial \eta}=\frac{\partial}{\partial \eta}\left[f\left(\lambda^2\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)\right]-\frac{1}{\lambda}\varphi_t'(t)+\frac{1}{\lambda}g(t).$$

Преобразование

$$v=R(\zeta,t)-\frac{1}{\lambda}\varphi(t)+\frac{1}{\lambda}\int g(t)\,dt, \quad \zeta=\eta-\int\bigl[k\varphi(t)-\lambda\psi(t)\bigr]\,dt$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial R}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial \zeta}\left[f\left(\lambda^2\frac{\partial R}{\partial \zeta}\right)\right].$$

⦿ *Литература для уравнения* 9.3.4.3: А. Д. Полянин (2001 *a*), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 313–314).

9.3.5. Родственные уравнения

1. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=f(x)\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1(x,y)=C_1w(x,C_1y+\varphi(x))+C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а $\varphi(x)$ — произвольная функция, также будет решением этого уравнения.

2°. Вырожденные решения, линейные и квадратичные по y:

$$w(x,y)=C_1y+\varphi(x),$$
$$w(x,y)=C_1y^2+\varphi(x)y+\frac{1}{4C_1}\varphi^2(x)+C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, $\varphi(x)$ — произвольная функция.

3°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y)=\varphi(x)e^{\lambda y}-\lambda\int f(x)\,dx+C,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция; C, λ — произвольные постоянные.

4°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y)=\varphi(y)\int f(x)\,dx+\psi(y),$$

где функции $\varphi=\varphi(y)$ и $\psi=\psi(y)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(\varphi_y')^2-\varphi\varphi_{yy}''=\varphi_{yyy}''',$$
$$\varphi_y'\psi_y'-\varphi\psi_{yy}''=\psi_{yyy}'''.$$

О точных решениях этой системы см. 9.3.1.1, п. 5° [уравнения (2)–(3) при $\nu=1$].

5°. Обобщенно-автомодельное решение:

$$w(x,y)=\varphi(x)U(z), \quad z=\psi(x)y$$

где функции $\varphi=\varphi(x)$, $\psi=\psi(x)$, $U=U(z)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(\varphi\psi)_x'=C_1f(x)\psi^2,$$
$$\varphi_x'=C_2f(x)\psi,$$
$$C_1(U_z')^2-C_2UU_{zz}''=U_{zzz}'''.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(y)\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3} + g(y)x + h(y).$

Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по x:

$$w = \varphi(y)x + \psi(y),$$

где функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f\varphi'''_{yyy} + \varphi\varphi''_{yy} - (\varphi'_y)^2 + g = 0,$$
$$f\psi'''_{yyy} + \varphi\psi''_{yy} - \varphi'_y\psi'_y + h = 0.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[f(y)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] + g(y)x + h(y).$

Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по x:

$$w = \varphi(y)x + \psi(y),$$

где функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(f\varphi''_{yy})'_y + \varphi\varphi''_{yy} - (\varphi'_y)^2 + g = 0,$$
$$(f\psi''_{yy})'_y + \varphi\psi''_{yy} - \varphi'_y\psi'_y + h = 0.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)^{n-1}\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3}.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1(x,y) = C_1^{2n-1}w(x, C_1^{2-n}y + \varphi(x)) + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а $\varphi(x)$ — произвольная функция, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \left[(2-n)\int f(x)\,dx + C\right]^{\frac{1}{2-n}}\theta(y),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\theta=\theta(y)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\theta'_y)^2 - \theta\theta''_{yy} = (\theta''_{yy})^{n-1}\theta'''_{yyy}.$$

3°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w = U(z), \qquad z = y\left[\int f(x)\,dx + C\right]^{\frac{1}{1-2n}} + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, а функция $U=U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(U'_z)^2 = (1-2n)(U''_{zz})^{n-1}U'''_{zzz}.$$

Это уравнение может быть проинтегрировано.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F\left(x, w, \dfrac{\partial w}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right).$

Частный случай уравнения 11.4.1.5 при $n=3$.

9.4. Уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера)

9.4.1. Стационарные уравнения

1. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial x}(\Delta w) - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y}(\Delta w) = 0, \qquad \Delta w = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$

Предварительные замечания. К данному уравнению сводятся двумерные стационарные уравнения идеальной жидкости (уравнения Эйлера)

$$u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$
$$u_1\frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_2}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0$$

путем введения функции тока w по формулам $u_1 = \frac{\partial w}{\partial y}$, $u_2 = -\frac{\partial w}{\partial x}$ с последующим исключением давления p из первых двух уравнений (с помощью перекрестного дифференцирования и вычитания).

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1 w(C_2 x + C_3, C_2 y + C_4) + C_5,$$
$$w_2 = w(x\cos\alpha + y\sin\alpha,\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha),$$

где $C_1, \ldots, C_5$, α — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения общего вида:

$$w(x,y) = \varphi_1(\xi), \quad \xi = a_1 x + b_1 y;$$
$$w(x,y) = \varphi_2(r), \quad r = \sqrt{(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2};$$

где $\varphi_1(\xi)$, $\varphi_2(r)$ — произвольные функции; a_1, b_1, a_2, b_2 — произвольные постоянные.

3°. Любые решения линейных уравнений

$$\begin{aligned}
&\Delta w = 0 && \text{(уравнение Лапласа)},\\
&\Delta w = C && \text{(уравнение Пуассона)},\\
&\Delta w = \lambda w && \text{(уравнение Гельмгольца)},\\
&\Delta w = \lambda w + C && \text{(неоднородное уравнение Гельмгольца)},
\end{aligned}$$

где C, λ — произвольные постоянные, являются также решениями исходного уравнения. Об уравнениях Лапласа, Пуассона, Гельмгольца см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянин (2001 *b*).

Решения уравнения Лапласа $\Delta w = 0$ соответствуют безвихревым (потенциальным) решениям уравнений Эйлера. Такие решения подробно рассматриваются в книгах по гидродинамике [см. Г. Ламб (1947), Л. И. Седов (1966), Л. Г. Лойцянский (1973), М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат (1973), Дж. Бэтчелор (1973)], где широко используются методы теории функций комплексного переменного.

4°. В левой части рассматриваемого уравнения стоит якобиан функций w и $v = \Delta w$. Равенство якобиана нулю означает, что эти величины функционально зависимы, т. е. v должна выражаться через w:

$$\Delta w = f(w), \tag{1}$$

где $f(w)$ — произвольная функция. Любое решение уравнения второго порядка (1) для любой функции $f(w)$ будет решением исходного уравнения.

Результаты п. 3° соответствуют частным случаям линейной функции $f(w) = \lambda w + C$. О решениях уравнения (1) для некоторых нелинейных зависимостей $f = f(w)$ см. 5.1.1.1, 5.2.1.1, 5.3.1.1, 5.3.2.1, 5.3.3.1, 5.4.1.1.

5°. Точные решения в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y) = A_1 x^2 + A_2 x + B_1 y^2 + B_2 y + C,$$
$$w(x,y) = A_1\exp(\lambda x) + A_2\exp(-\lambda x) + B_1\exp(\lambda y) + B_2\exp(-\lambda y) + C,$$
$$w(x,y) = A_1\sin(\lambda x) + A_2\cos(\lambda x) + B_1\sin(\lambda y) + B_2\cos(\lambda y) + C,$$

где A_1, A_2, B_1, B_2, C, λ — произвольные постоянные. Эти решения являются частными случаями решений, описанных в п. 3°.

6°. Точные решения с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y) = (Ax+B)e^{-\lambda y} + C,$$
$$w(x,y) = \bigl[A_1\sin(\beta x) + A_2\cos(\beta x)\bigr]\bigl[B_1\sin(\lambda y) + B_2\cos(\lambda y)\bigr] + C,$$
$$w(x,y) = \bigl[A_1\sin(\beta x) + A_2\cos(\beta x)\bigr]\bigl[B_1\operatorname{sh}(\lambda y) + B_2\operatorname{ch}(\lambda y)\bigr] + C,$$
$$w(x,y) = \bigl[A_1\operatorname{sh}(\beta x) + A_2\operatorname{ch}(\beta x)\bigr]\bigl[B_1\sin(\lambda y) + B_2\cos(\lambda y)\bigr] + C,$$
$$w(x,y) = \bigl[A_1\operatorname{sh}(\beta x) + A_2\operatorname{ch}(\beta x)\bigr]\bigl[B_1\operatorname{sh}(\lambda y) + B_2\operatorname{ch}(\lambda y)\bigr] + C,$$
$$w(x,y) = Ae^{\alpha x+\beta y} + Be^{\gamma x+\lambda y} + C, \quad \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 + \lambda^2,$$

где A, B, C, D, k, β, λ — произвольные постоянные. Эти решения являются частными случаями решений, описанных в п. 3°.

7°. Точное решение:

$$w(x,y) = F(z)x + G(z), \quad z = y + kx,$$

где k — произвольная постоянная, а функции $F = F(z)$ и $G = G(z)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$F'_z F''_{zz} - F F'''_{zzz} = 0, \qquad (2)$$

$$G'_z F''_{zz} - F G'''_{zzz} = \frac{2k}{(k^2+1)} F F''_{zz}. \qquad (3)$$

В результате однократного интегрирования получим систему уравнений второго порядка

$$(F'_z)^2 - F F''_{zz} = A_1, \qquad (4)$$

$$G'_z F'_z - F G''_{zz} = \frac{2k}{k^2+1} \int F F''_{zz}\, dz + A_2, \qquad (5)$$

где A_1, A_2 — произвольные постоянные.

Автономное уравнение (4) заменой $Z(F) = (F'_z)^2$ приводится к линейному уравнению первого порядка.

Общее решение уравнения (2) [или (4)] описывается формулами:

$$F(z) = B_1 z + B_2, \qquad A_1 = B_1^2;$$

$$F(z) = B_1 \exp(\lambda z) + B_2 \exp(-\lambda z), \quad A_1 = -4\lambda^2 B_1 B_2;$$

$$F(z) = B_1 \sin(\lambda z) + B_2 \cos(\lambda z), \qquad A_1 = \lambda^2 (B_1^2 + B_2^2),$$

где B_1, B_2, λ — произвольные постоянные.

Общее решение уравнения (3) [или (5)] имеет вид

$$G = C_1 \int F\, dz - \int F\left(\int \frac{\psi\, dz}{F^2}\right) dz + C_2,$$

$$F = F(z), \quad \psi = \frac{2k}{k^2+1} \int F F''_{zz}\, dz + A_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

8°. Существуют точные решения следующих видов:

$$w(x,y) = x^a U(\zeta), \qquad \zeta = y/x;$$

$$w(x,y) = e^{ax} V(\rho), \qquad \rho = bx + cy;$$

$$w(x,y) = W(\zeta) + a \ln|x|, \quad \zeta = y/x;$$

где a, b, c — произвольные постоянные.

9°. О других точных решениях см. уравнение 9.4.1.2.

⊙ *Литература для уравнения* 9.4.1.1: А. А. Бучнев (1971), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 314–316).

2. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial r}(\Delta w) - \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\Delta w) = 0, \qquad \Delta w = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}.$

Предварительные замечания. К данному уравнению сводится уравнение 9.4.1.1 путем перехода к полярной системе координат [с центром в точке (x_0, y_0), где x_0 и y_0 — любые] по формулам:

$$x = r\cos\theta + x_0, \qquad y = r\sin\theta + y_0 \qquad \text{(прямое преобразование)},$$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{y-y_0}{x-x_0} \qquad \text{(обратное преобразование)}.$$

Радиальная и тангенциальная компоненты скорости жидкости выражаются через функцию тока w следующим образом: $u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}$ и $u_\theta = -\frac{\partial w}{\partial r}$.

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(r,\theta) = r^\lambda U(\theta),$$

где функция $U = U(\theta)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$U''_{\theta\theta} + \lambda^2 U = C U^{\frac{\lambda-2}{\lambda}} \qquad (\lambda,\ C \text{ — любые числа}).$$

Его решение можно представить в неявном виде. В частности, при $C = 0$ имеем

$$U = A_1 \sin(\lambda\theta) + A_2 \cos(\lambda\theta) \quad \text{при} \quad \lambda \neq 0,$$

$$U = A_1 \theta + A_2 \qquad \text{при} \quad \lambda = 0.$$

Значению $\lambda = 0$ соответствует решение, зависящее только от угловой координаты θ.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(r,\theta) = f(r)g(\theta),$$

где функции $f = f(r)$ и $g = g(\theta)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\mathbf{L}(f) = (\beta - \lambda r^{-2})f,$$
$$g''_{\theta\theta} = \lambda g,$$

где β, λ — произвольные постоянные и использовано обозначение $\mathbf{L}(f) = r^{-1}(rf'_r)'_r$.

3°. Точное решение:

$$w = b\theta + U(\xi), \quad \xi = \theta + a\ln r, \tag{1}$$

где функция $U = U(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$abU'''_{\xi\xi\xi} = 2bU''_{\xi\xi} + 2U'_\xi U''_{\xi\xi}.$$

После однократного интегрирования, имеем

$$abU''_{\xi\xi} = (U'_\xi)^2 + 2bU'_\xi + C_1, \tag{2}$$

где C_1 — произвольная постоянная. Интегрируя далее, получим

$$\xi = ab\int\frac{dz}{z^2 + 2bz + C_1} + C_2, \quad z = U'_\xi.$$

4°. Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по θ:

$$w(r,\theta) = f(r)\theta + g(r).$$

Здесь функции $f = f(r)$ и $g = g(r)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &- f'_r\mathbf{L}(f) + f[\mathbf{L}(f)]'_r = 0,\\ &- g'_r\mathbf{L}(f) + f[\mathbf{L}(g)]'_r = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\mathbf{L}(f) = r^{-1}(rf'_r)'_r$.

Система (3) допускает первые интегралы. В результате для определения функций f и g получим линейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(f) &= Af,\\ \mathbf{L}(g) &= Ag + B, \end{aligned} \tag{4}$$

где A, B — произвольные постоянные. При $A = 0$ решения уравнений (4) имеют вид

$$f(r) = C_1\ln r + C_2,$$
$$g(r) = \tfrac{1}{4}Br^2 + C_3\ln r + C_4.$$

При $A \neq 0$ решения уравнений (4) выражаются через функции Бесселя.

5°. О других точных решениях см. уравнение 9.4.1.1.

⦿ *Литература для уравнения* 9.4.1.2: А. А. Бучнев (1971), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 316–317).

3. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial \mathrm{E}w}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial \mathrm{E}w}{\partial z} - \frac{2}{r}\frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{E}w = 0, \qquad \mathrm{E}w = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$

Предварительные замечания. К данному уравнению сводятся стационарные уравнения Эйлера, записанные для осесимметричного случая в цилиндрической системе координат, в результате введения функции тока w по формулам $u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial z}$, $u_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}$, где u_r и u_z — радиальная и осевая компоненты скорости жидкости, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1°. Любая функция $w = w(r,z)$, являющаяся решением линейного уравнения второго порядка $\mathrm{E}w = 0$, будет также решением рассматриваемого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w = \varphi(r),$$
$$w = (C_1z^2 + C_2z + C_3)r^2 + C_4z + C_5,$$

где $\varphi(r)$ — произвольная функция, $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные.

3°. Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по z:

$$w(r,z) = \varphi(r)z + \psi(r).$$

Здесь $\varphi = \varphi(r)$ и $\psi = \psi(r)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\varphi[\mathbf{L}(\varphi)]'_r - \varphi'_r\mathbf{L}(\varphi) - 2r^{-1}\varphi\,\mathbf{L}(\varphi) = 0, \\ &\varphi[\mathbf{L}(\psi)]'_r - \psi'_r\mathbf{L}(\varphi) - 2r^{-1}\varphi\,\mathbf{L}(\psi) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{L}(\varphi) = \varphi''_{rr} - r^{-1}\varphi'_r$.

Система (1) допускает первые интегралы. В результате для определения функций φ и ψ получим линейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} &\mathbf{L}(\varphi) = 4C_1r^2\varphi, \\ &\mathbf{L}(\psi) = 4C_1r^2\psi + 4C_2r^2, \end{aligned} \tag{2}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Подстановка $\xi = r^2$ приводит (2) к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} &\varphi''_{\xi\xi} = C_1\varphi, \\ &\psi''_{\xi\xi} = C_1\psi + C_2. \end{aligned}$$

Интегрируя, получим

$$\varphi = \begin{cases} A_1\operatorname{ch}(k\xi) + B_1\operatorname{sh}(k\xi) & \text{при } C_1 = k^2 > 0, \\ A_1\cos(k\xi) + B_1\sin(k\xi) & \text{при } C_1 = -k^2 < 0, \\ A_1\xi + B_1 & \text{при } C_1 = 0, \end{cases}$$

$$\psi = \begin{cases} A_2\operatorname{ch}(k\xi) + B_2\operatorname{sh}(k\xi) - C_2/C_1 & \text{при } C_1 = k^2 > 0, \\ A_2\cos(k\xi) + B_2\sin(k\xi) - C_2/C_1 & \text{при } C_1 = -k^2 < 0, \\ \frac{1}{2}C_2\xi^2 + A_2\xi + B_2 & \text{при } C_1 = 0, \end{cases}$$

где A_1, B_1, A_2, B_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература для уравнения* 9.4.1.3: А. А. Бучнев (1971), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 317–318).

9.4.2. Нестационарные уравнения

1. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial t}(\Delta w) + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w) - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w) = 0, \qquad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$

Предварительные замечания. К данному уравнению сводятся двумерные нестационарные уравнения идеальной несжимаемой жидкости (уравнения Эйлера)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_2}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

путем введения функции тока w по формулам $u_1 = \frac{\partial w}{\partial y}$, $u_2 = -\frac{\partial w}{\partial x}$ с последующим исключением давления p из первых двух уравнений (с помощью перекрестного дифференцирования и вычитания).

О стационарных решениях см. разд. 9.4.1.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$\begin{aligned} w_1 &= -w(y,\,x,\,t), \\ w_2 &= C_1w(C_2x + C_3,\, C_2y + C_4,\, C_1C_2^2t + C_5) + C_6, \\ w_3 &= w(x\cos\alpha + y\sin\alpha,\, -x\sin\alpha + y\cos\alpha,\, t), \\ w_4 &= w(x\cos\beta t + y\sin\beta t,\, -x\sin\beta t + y\cos\beta t,\, t) - \tfrac{1}{2}\beta(x^2 + y^2), \\ w_5 &= w(x + \varphi(t),\, y + \psi(t),\, t) + \psi'_t(t)x - \varphi'_t(t)y + \chi(t), \end{aligned}$$

где $C_1, \ldots, C_6$, α, β — произвольные постоянные, а $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ — произвольные функции, также будут решениями этого уравнения.

2°. Любое решение уравнения Пуассона $\Delta w = C$ является также решением исходного уравнения. Решения уравнения Лапласа $\Delta w = 0$ описывают безвихревые (потенциальные) течения идеальной несжимаемой жидкости.

3°. Точные решения общего вида:

$$w(x,y,t) = Q(z) + \psi_t'(t)x - \varphi_t'(t)y, \quad z = C_1[x+\varphi(t)] + C_2[y+\psi(t)];$$
$$w(x,y,t) = Q(z) + \psi_t'(t)x - \varphi_t'(t)y, \quad z = [x+\varphi(t)]^2 + [y+\psi(t)]^2;$$

где $Q(z)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции; C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Аналогичным образом по формулам из п. 1° можно построить нестационарные решения, исходя из других стационарных решений (см. разд. 9.4.1).

4°. Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по x:

$$w(x,y,t) = F(y,t)x + G(y,t), \tag{1}$$

где функции $F(y,t)$ и $G = G(y,t)$ определяются из системы одномерных уравнений третьего порядка

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t \partial y^2} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - F\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = 0, \tag{2}$$
$$\frac{\partial^3 G}{\partial t \partial y^2} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - F\frac{\partial^3 G}{\partial y^3} = 0. \tag{3}$$

Уравнение (2) решается независимо от уравнения (3). Если $F = F(y,t)$ — решение уравнения (2), то функции

$$F_1 = F(y+\psi(t), t) + \psi_t'(t),$$
$$F_2 = C_1 F(C_1 y + C_1 C_2 t + C_3, C_1^2 t + C_4) + C_2,$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, а $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

Интегрируя уравнения (2) и (3) по y, получим систему уравнений второго порядка

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - F\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = f_1(t), \tag{4}$$
$$\frac{\partial^2 G}{\partial t \partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y} - F\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = f_2(t), \tag{5}$$

где $f_1(t)$, $f_2(t)$ — произвольные функции. Уравнение (5) линейно относительно функции G. Подстановка

$$G = \int U\,dy - hF + h_t' y, \quad \text{где} \quad U = U(y,t), \quad F = F(y,t), \tag{6}$$

а функция $h = h(t)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$h_{tt}'' - f_1(t)h = f_2(t), \tag{7}$$

приводит (5) к линейному однородному уравнению с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t} - F\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y}U. \tag{8}$$

Таким образом, если известно частное решение уравнения (2) или (4), то определение функции G сводится к решению линейных уравнений (7), (8) с последующим интегрированием по формуле (6).

Точные решения уравнения (2) приведены в табл. 11. Обыкновенные дифференциальные уравнения в двух последних строках табл. 11 подстановкой $H_z' = V(H)$ сводятся к уравнениям первого порядка с разделяющимися переменными. В табл. 12 указаны общие решения уравнения (5), соответствующие точным решениям уравнения (2) из табл. 11.

ТАБЛИЦА 11
Точные решения уравнений (2) и (4).

№	Функция $F=F(y,t)$ (или общий вид решения)	Функция $f_1(t)$ в уравнении (4)	Определяющие функции (или определяющее уравнение)
1	$F=\varphi(t)y+\psi(t)$	$f_1(t)=\varphi'_t+\varphi^2$	$\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — произвольны
2	$F=A\exp[-\lambda y-\lambda\psi(t)]+\psi'_t(t)$	$f_1(t)=0$	$\psi(t)$ — произвольна; A, λ — любые
3	$F=A\,\mathrm{sh}[\lambda y+\lambda\psi(t)]+\psi'_t(t)$	$f_1(t)=A^2\lambda^2$	$\psi(t)$ — произвольна; A, λ — любые
4	$F=A\,\mathrm{ch}[\lambda y+\lambda\psi(t)]+\psi'_t(t)$	$f_1(t)=-A^2\lambda^2$	$\psi(t)$ — произвольна; A, λ — любые
5	$F=A\sin[\lambda y+\lambda\psi(t)]+\psi'_t(t)$	$f_1(t)=A^2\lambda^2$	$\psi(t)$ — произвольна; A, λ — любые
6	$F=A\cos[\lambda y+\lambda\psi(t)]+\psi'_t(t)$	$f_1(t)=A^2\lambda^2$	$\psi(t)$ — произвольна; A, λ — любые
7	$F=t^{-1}H(z)+\psi'_t(t),\ z=y+\psi(t)$	$f_1(t)=At^{-2}$	$-A-H'_z+(H'_z)^2-HH''_{zz}=0$
8	$F=t^{-1/2}\bigl[H(z)-\frac{1}{2}z\bigr],\ z=yt^{-1/2}$	$f_1(t)=At^{-2}$	$\frac{3}{4}-A-2H'_z+(H'_z)^2-HH''_{zz}=0$

ТАБЛИЦА 12
Точные решения уравнения (5) [номер в первом столбце соответствует номеру точного решения в табл. 11].

№	Общее решение уравнения (5) [везде $\Theta(\xi)$ — произвольная функция]	Обозначения
1	$G=\frac{1}{\Phi^2(t)}\Theta(\xi)+\frac{y}{\Phi(t)}\int f_2(t)\Phi(t)\,dt,\ \xi=y\Phi(t)+\int\psi(t)\Phi(t)\,dt$	$\Phi(t)=\exp\bigl[\int\varphi(t)\,dt\bigr]$
2	Формула (6), где $U=e^{-\lambda z}\Theta(\xi),\ \xi=t+\frac{1}{A\lambda}e^{\lambda z}$	$z=y+\psi(t)$
3	Формула (6), где $U=\mathrm{sh}(\lambda z)\Theta(\xi),\ \xi=t+\frac{1}{A\lambda}\ln\bigl\lvert\mathrm{th}\,\frac{\lambda z}{2}\bigr\rvert$	$z=y+\psi(t)$
4	Формула (6), где $U=\mathrm{ch}(\lambda z)\Theta(\xi),\ \xi=t+\frac{2}{A\lambda}\,\mathrm{arctg}\bigl(e^{\lambda z}\bigr)$	$z=y+\psi(t)$
5	Формула (6), где $U=\sin(\lambda z)\Theta(\xi),\ \xi=t+\frac{1}{A\lambda}\ln\bigl\lvert\mathrm{tg}\,\frac{\lambda z}{2}\bigr\rvert$	$z=y+\psi(t)$
6	Формула (6), где $U=\cos(\lambda z)\Theta(\xi),\ \xi=t+\frac{1}{A\lambda}\ln\bigl\lvert\mathrm{tg}\bigl(\frac{\lambda z}{2}+\frac{\pi}{4}\bigr)\bigr\rvert$	$z=y+\psi(t)$
7	Формула (6), где $U=\Theta(\xi)H(z),\ \xi=t\exp\bigl[\int\frac{dz}{H(z)}\bigr]$	$z=y+\psi(t)$
8	Формула (6), где $U=\Theta(\xi)H(z)\exp\bigl[-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{H(z)}\bigr],\ \xi=t\exp\bigl[\int\frac{dz}{H(z)}\bigr]$	$z=\frac{y}{\sqrt{t}}$

Общее решение линейного неоднородного уравнения (7) можно найти по формуле

$$h(t)=C_1h_1(t)+C_2h_2(t)+\frac{1}{W_0}\biggl[h_2(t)\int h_1(t)f_2(t)\,dt-h_1(t)\int h_2(t)f_2(t)\,dt\biggr], \qquad (9)$$

где $h_1=h_1(t)$ и $h_2=h_2(t)$ — фундаментальные решения соответствующего однородного уравнения при $f_2\equiv 0$, $W_0=h_1(h_2)'_t-h_2(h_1)'_t$ — детерминант Вронского ($W_0=\mathrm{const}$).

Для точных решений 2–8 из табл. 11 в формуле (9) следует положить:

$h_1=1,\quad h_2=t,\quad W_0=1$ для решения 2;

$h_1=e^{-A\lambda t},\quad h_2=e^{A\lambda t},\quad W_0=2A\lambda$ для решений 3, 5, 6;

$h_1=\cos(A\lambda t),\quad h_2=\sin(A\lambda t),\quad W_0=A\lambda$ для решения 4;

$h_1=|t|^{\frac{1}{2}-\mu},\quad h_2=|t|^{\frac{1}{2}+\mu},\quad W_0=2\mu=(1+4A)^{\frac{1}{2}}$ для решений 7, 8.

5°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = F(\zeta,t)x + G(\zeta,t), \quad \zeta = y + kx,$$

где функции $F(\zeta,t)$ и $G = G(\zeta,t)$ определяются из системы одномерных уравнений третьего порядка

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t \partial \zeta^2} + \frac{\partial F}{\partial \zeta}\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} - F\frac{\partial^3 F}{\partial \zeta^3} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^3 G}{\partial t \partial \zeta^2} + \frac{\partial G}{\partial \zeta}\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} - F\frac{\partial^3 G}{\partial \zeta^3} = \frac{2k}{k^2+1}\left(F\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \zeta}\right). \tag{11}$$

Интегрируя уравнения (10) и (11) по ζ, получим

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \zeta} + \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta}\right)^2 - F\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} = f_1(t), \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t \partial \zeta} + \frac{\partial F}{\partial \zeta}\frac{\partial G}{\partial \zeta} - F\frac{\partial^2 G}{\partial \zeta^2} = Q(\zeta,t), \tag{13}$$

где $f_1(t)$ — произвольная функция, а функция $Q(\zeta,t)$ описывается формулой

$$Q(\zeta,t) = -\frac{2k}{k^2+1}\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{2k}{k^2+1}\int F\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2}\,d\zeta + f_2(t), \qquad f_2(t) \text{ — любая.}$$

Уравнение (13) линейно относительно функции G. Подстановка $U = \frac{\partial G}{\partial \zeta}$ приводит его к линейному уравнению первого порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t} - F\frac{\partial U}{\partial \zeta} = -\frac{\partial F}{\partial \zeta}U + Q(\zeta,t). \tag{14}$$

Уравнение (10) с точностью до переобозначения совпадает уравнением (2), точные решения которого описаны в табл. 11. В этих случаях решения соответствующего уравнения (14) можно найти в квадратурах.

6°. Точное решение [частный случай решения вида (1)]:

$$w(x,y,t) = \exp\left[-\lambda y - \lambda\int\varphi(t)\,dt\right]\left[C_1 x + C_2 - C_1\int\psi(t)\,dt\right] + \varphi(t)x + \psi(t)y,$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции; C_1, C_2, λ — произвольные постоянные.

7°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y,t) = e^{-\lambda y}\big[A(t)e^{\beta x} + B(t)e^{-\beta x}\big] + \varphi(t)x + \psi(t)y,$$

$$A(t) = C_1\exp\left[-\beta\int\psi(t)\,dt - \lambda\int\varphi(t)\,dt\right],$$

$$B(t) = C_2\exp\left[\beta\int\psi(t)\,dt - \lambda\int\varphi(t)\,dt\right],$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции; C_1, C_2, λ, β — произвольные постоянные.

8°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y,t) = e^{-\lambda y}\big[A(t)\sin(\beta x) + B(t)\cos(\beta x)\big] + \varphi(t)x + \psi(t)y,$$

$$A(t) = \exp\left(-\lambda\int\varphi\,dt\right)\left[C_1\sin\left(\beta\int\psi\,dt\right) + C_2\cos\left(\beta\int\psi\,dt\right)\right],$$

$$B(t) = \exp\left(-\lambda\int\varphi\,dt\right)\left[C_1\cos\left(\beta\int\psi\,dt\right) - C_2\sin\left(\beta\int\psi\,dt\right)\right],$$

где $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ — произвольные функции; C_1, C_2, λ, β — произвольные постоянные.

9°. Точные решения с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y,t) = A(t)\exp(k_1 x + \lambda_1 y) + B(t)\exp(k_2 x + \lambda_2 y) + \varphi(t)x + \psi(t)y,$$

$$A(t) = C_1\exp\left[\lambda_1\int\varphi(t)\,dt - k_1\int\psi(t)\,dt\right],$$

$$B(t) = C_2\exp\left[\lambda_2\int\varphi(t)\,dt - k_2\int\psi(t)\,dt\right],$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции; C_1, C_2 — произвольные постоянные; k_1, λ_1, k_2, λ_2 — произвольные параметры, связанные одним из двух соотношений:

$$k_1^2 + \lambda_1^2 = k_2^2 + \lambda_2^2 \quad \text{(первое семейство решений)},$$
$$k_1\lambda_2 = k_2\lambda_1 \quad \text{(второе семейство решений)}.$$

10°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y,t) = \bigl[C_1\sin(\lambda x) + C_2\cos(\lambda x)\bigr]\bigl[A(t)\sin(\beta y) + B(t)\cos(\beta y)\bigr] + \varphi(t)x,$$
$$A(t) = C_3\cos\biggl(\beta\int\varphi\,dt + C_4\biggr), \quad B(t) = C_3\sin\biggl(\beta\int\varphi\,dt + C_4\biggr),$$

где $\varphi = \varphi(t)$ — произвольная функция; $C_1, \ldots, C_4$, λ, β — произвольные постоянные.

11°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y,t) = \bigl[C_1\operatorname{sh}(\lambda x) + C_2\operatorname{ch}(\lambda x)\bigr]\bigl[A(t)\sin(\beta y) + B(t)\cos(\beta y)\bigr] + \varphi(t)x,$$
$$A(t) = C_3\cos\biggl(\beta\int\varphi\,dt + C_4\biggr), \quad B(t) = C_3\sin\biggl(\beta\int\varphi\,dt + C_4\biggr),$$

где $\varphi = \varphi(t)$ — произвольная функция; $C_1, \ldots, C_4$, λ, β — произвольные постоянные.

12°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = f(z) + g(t)z + \varphi(t)x + \psi(t)y, \qquad z = kx + \lambda y + \int\bigl[\lambda\varphi(t) - k\psi(t)\bigr]\,dt,$$

где $f(z)$, $g(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции; k, λ — произвольные постоянные.

13°. Существует «двумерное» решение вида

$$w(x,y,t) = W(\rho_1,\rho_2) + c_1x + c_2y, \qquad \rho_1 = a_1x + a_2y + a_3t, \qquad \rho_2 = b_1x + b_2y + b_3t.$$

14°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = t^{(2-k)/k}\Psi(\xi,\eta),$$
$$\xi = t^{-1/k}\bigl[x\cos(\lambda\ln t) - y\sin(\lambda\ln t)\bigr], \quad \eta = t^{-1/k}\bigl[x\sin(\lambda\ln t) + y\cos(\lambda\ln t)\bigr],$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $\Psi(\xi,\eta)$ описывается уравнением

$$-\widetilde{\Delta}\Psi + \biggl(\frac{\partial\Psi}{\partial\eta} - \frac{1}{k}\xi - \lambda\eta\biggr)\frac{\partial}{\partial\xi}\widetilde{\Delta}\Psi - \biggl(\frac{\partial\Psi}{\partial\xi} + \frac{1}{k}\eta - \lambda\xi\biggr)\frac{\partial}{\partial\eta}\widetilde{\Delta}\Psi = 0, \qquad \widetilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}.$$

15°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = \frac{\varphi_t'(x^2 - y^2 + 2\varphi xy)}{2(1+\varphi^2)} + \frac{y - \varphi x}{1+\varphi^2}F(\zeta,t) - 2G(\zeta,t), \qquad \zeta = x + \varphi y,$$

где $\varphi = \varphi(t)$ — произвольная функция, а функции $F = F(\zeta,t)$ и $G = G(\zeta,t)$ описываются уравнениями

$$F\frac{\partial^3F}{\partial\zeta^3} - \frac{\partial F}{\partial\zeta}\frac{\partial^2F}{\partial\zeta^2} + \frac{2\varphi\varphi_t'}{1+\varphi^2}\frac{\partial^2F}{\partial\zeta^2} + \frac{\partial^3F}{\partial\zeta^2t} = 0, \tag{15}$$
$$F\frac{\partial^3G}{\partial\zeta^3} - \frac{\partial^2F}{\partial\zeta^2}\frac{\partial G}{\partial\zeta} + \frac{2\varphi\varphi_t'}{1+\varphi^2}\frac{\partial^2G}{\partial\zeta^2} + \frac{\partial^3G}{\partial\zeta^2t} = -\frac{\varphi_t'}{(1+\varphi^2)^2}\zeta\frac{\partial^2F}{\partial\zeta^2}. \tag{16}$$

Уравнение (15) решается независимо от уравнения (16). Если $F = F(\zeta,t)$ — решение уравнения (15), то функция

$$F_1 = F(y + \sigma(t), t) - \sigma_t'(t),$$

где $\sigma(t)$ — произвольная функция, также будет решением этого уравнения.

Интегрируя уравнения (15) и (16) по ζ, получим

$$F\frac{\partial^2F}{\partial\zeta^2} - \biggl(\frac{\partial F}{\partial\zeta}\biggr)^2 + \frac{2\varphi\varphi_t'}{1+\varphi^2}\frac{\partial F}{\partial\zeta} + \frac{\partial^2F}{\partial\zeta\partial t} = \psi_1(t),$$
$$F\frac{\partial^2G}{\partial\zeta^2} - \frac{\partial F}{\partial\zeta}\frac{\partial G}{\partial\zeta} + \frac{2\varphi\varphi_t'}{1+\varphi^2}\frac{\partial G}{\partial\zeta} + \frac{\partial^2G}{\partial\zeta\partial t} = \frac{\varphi_t'}{(1+\varphi^2)^2}\biggl(F - \zeta\frac{\partial F}{\partial\zeta}\biggr) + \psi_2(t),$$

где $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ — произвольные функции. Замена $u = \frac{\partial G}{\partial \zeta}$ приводит последнее уравнение к линейному уравнению первого порядка (при известной F).

Отметим, что уравнение (15) допускает частные решения вида:

$$F(\zeta,t) = a(t)\zeta + b(t),$$

$$F(\zeta,t) = a(t)e^{-\lambda\zeta} + \frac{a_t'(t)}{\lambda a(t)} + \frac{2\varphi\varphi_t'}{\lambda(1+\varphi^2)},$$

где $a(t)$, $b(t)$ — произвольные функции, λ — произвольная постоянная.

⦿ *Литература для уравнения* 9.4.2.1: А. А. Бучнев (1971), B. J. Cantwell (1978), П. Олвер (1989), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 318–322), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 574–579).

2. $\displaystyle \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial Q}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial Q}{\partial \theta} = 0, \qquad Q = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}.$

Предварительные замечания. К данному уравнению сводится уравнение 9.4.4.1 путем перехода к полярной системе координат [с центром в точке (x_0, y_0), где x_0 и y_0 — любые] по формулам:

$$x = r\cos\theta + x_0, \qquad y = r\sin\theta + y_0 \qquad \text{(прямое преобразование)},$$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{y-y_0}{x-x_0} \qquad \text{(обратное преобразование)}.$$

Радиальная и тангенциальная компоненты скорости жидкости выражаются через функцию тока w следующим образом: $u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}$, $u_\theta = -\frac{\partial w}{\partial r}$.

1°. Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по θ:

$$w(r,\theta,t) = f(r,t)\theta + g(r,t), \tag{1}$$

где функции $f = f(r,t)$ и $g = g(r,t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\mathbf{L}(f_t) - r^{-1}f_r\mathbf{L}(f) + r^{-1}f[\mathbf{L}(f)]_r = 0, \tag{2}$$

$$\mathbf{L}(g_t) - r^{-1}g_r\mathbf{L}(f) + r^{-1}f[\mathbf{L}(g)]_r = 0. \tag{3}$$

Здесь индексы r и t обозначают соответствующие частные производные, $\mathbf{L}(f) = r^{-1}(rf_r)_r$.

2°. Для частного решения уравнения (2) вида

$$f = \varphi(t)\ln r + \psi(t) \tag{4}$$

где $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ — произвольные функции, уравнение (3) заменой $U = \mathbf{L}(g)$ сводится к линейному уравнению первого порядка $U_t + r^{-1}fU_r = 0$. Два частных решения этого уравнения описываются формулами

$$U = \Theta(\zeta), \quad \zeta = r^2 - 2\int\psi(t)\,dt \qquad \text{(первое семейство решений, } \varphi = 0),$$

$$U = \Theta(\zeta), \quad \zeta = \int\frac{r\,dr}{\ln r} - \int\varphi(t)\,dt \qquad \text{(второе семейство решений, } \psi = 0),$$

где $\Theta(\zeta)$ — произвольная функция. Второе слагаемое в решении (1) [при условии, что первое слагаемое имеет вид (4)] выражается через $U = U(r,t)$ следующим образом:

$$g(r,t) = C_1(t)\ln r + C_2(t) + \int\Phi(r,t)\,dr, \qquad \Phi(r,t) = \frac{1}{r}\int rU(r,t)\,dr,$$

где $C_1(t)$, $C_2(t)$ — произвольные функции.

Замечание. Уравнение (2) имеет также частное решение $f = -\dfrac{r^2}{2(t+C)}$.

3°. «Двумерное» решение:

$$w(r,\theta,t) = Ar^2t + H(\xi,\eta), \qquad \xi = r\cos(\theta + At^2), \qquad \eta = r\sin(\theta + At^2),$$

где A — произвольная постоянная, а функция $H(\xi,\eta)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial H}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi}\widetilde{\Delta}H - \frac{\partial H}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\widetilde{\Delta}H + 4A = 0, \qquad \widetilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}.$$

4°. О других точных решениях см. уравнение 9.4.2.1.

⦿ *Литература для уравнения* 9.4.2.2: А. А. Бучнев (1971), П. Олвер (1989), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 322–323), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 579–580).

9.5. Другие нелинейные уравнения третьего порядка

9.5.1. Уравнения, содержащие смешанные производные второго порядка

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(C_1 x + aC_1\varphi(t), C_1^2 t + C_2) + \varphi_t'(t),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а $\varphi(t)$ — произвольная функция, также будет решением этого уравнения.

2°. Существуют точные решения следующих видов:

$$w = U(z), \qquad z = x + \lambda t \quad \text{(решение типа бегущей волны)};$$
$$w = |t|^{-1/2} V(\xi), \quad \xi = x|t|^{-1/2} \quad \text{(автомодельное решение)}.$$

⦿ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 580).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \nu\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}.$

Это уравнение встречается в гидродинамике [см. уравнение (2) в 9.3.3.1 и уравнение (4) при $f_1(t) = 0$ в 10.3.3.1].

1°. Пусть $w = w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(x + \psi(t), t) + \psi_t'(t),$$
$$w_2 = C_1 w(C_1 x + C_1 C_2 t + C_3, C_1^2 t + C_4) + C_2,$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, а C_1, …, C_4 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x,t) = \frac{C_1 x}{C_1 t + C_2} + \psi(t),$$
$$w(x,t) = \frac{6\nu}{x + \psi(t)} + \psi_t'(t),$$
$$w(x,t) = C_1 \exp\bigl[-\lambda x + \lambda\psi(t)\bigr] - \psi_t'(t) + \nu\lambda,$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция; C_1, C_2, λ — произвольные постоянные. Первое решение является «невязким» (оно не зависит от ν).

3°. Решение типа бегущей волны (λ — произвольная постоянная):

$$w = F(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где функция $F(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\lambda F_{zz}'' + (F_z')^2 - FF_{zz}'' = \nu F_{zzz}'''.$$

4°. Автомодельное решение:

$$w = t^{-1/2}\bigl[G(\xi) - \tfrac{1}{2}\xi\bigr], \quad \xi = xt^{-1/2},$$

где функция $G = G(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\tfrac{3}{4} - 2G_\xi' + (G_\xi')^2 - GG_{\xi\xi}'' = \nu G_{\xi\xi\xi}'''.$$

Решения в пп. 3° и 4° можно обобщить с помощью формул из п. 1°.

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *a*).

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \nu\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + f(t).$

Это уравнение встречается в гидродинамике [см. уравнение (3) в 9.3.3.2 и уравнение (4) в 10.3.3.1].

1°. Пусть $w = w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + \psi(t), t) + \psi'_t(t),$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, также будет решением этого уравнения.

2°. Вырожденное решение (линейное по x) для любой $f(t)$:

$$w(x,t) = \varphi(t)x + \psi(t),$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, а функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается уравнением Риккати $\varphi'_t + \varphi^2 = f(t)$. О точных решениях этого уравнения см. книгу В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

3°. Точные решения с обобщенным разделением переменных при $f(t) = Ae^{-\beta t}$, $A > 0$, $\beta > 0$:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= Be^{-\frac{1}{2}\beta t} \sin[\lambda x + \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t), \\ w(x,t) &= Be^{-\frac{1}{2}\beta t} \cos[\lambda x + \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t), \end{aligned} \qquad B = \pm\sqrt{\frac{2A\nu}{\beta}}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\beta}{2\nu}},$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция.

4°. Решение с обобщенным разделением переменных при $f(t) = Ae^{\beta t}$, $A > 0$, $\beta > 0$:

$$w(x,t) = Be^{\frac{1}{2}\beta t} \operatorname{sh}[\lambda x + \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t), \qquad B = \pm\sqrt{\frac{2A\nu}{\beta}}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\beta}{2\nu}},$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция.

5°. Решение с обобщенным разделением переменных при $f(t) = Ae^{\beta t}$, $A < 0$, $\beta > 0$:

$$w(x,t) = Be^{\frac{1}{2}\beta t} \operatorname{ch}[\lambda x + \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t), \qquad B = \pm\sqrt{\frac{2|A|\nu}{\beta}}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\beta}{2\nu}},$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция.

6°. Решение с обобщенным разделением переменных при $f(t) = Ae^{\beta t}$, $\beta > 0$ (A — любое):

$$w(x,t) = \psi(t)e^{\lambda x} - \frac{Ae^{\beta t - \lambda x}}{4\lambda^2\psi(t)} + \frac{\psi'_t(t)}{\lambda\psi(t)} - \nu\lambda, \qquad \lambda = \pm\sqrt{\frac{\beta}{2\nu}},$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция.

7°. Автомодельное решение при $f(t) = At^{-2}$:

$$w(x,t) = t^{-1/2}\bigl[u(z) - \tfrac{1}{2}z\bigr], \quad z = xt^{-1/2},$$

где функция $u = u(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\tfrac{3}{4} - A - 2u'_z + (u'_z)^2 - uu''_{zz} = \nu u'''_{zzz},$$

порядок которого можно понизить на единицу.

8°. Решение типа бегущей волны при $f(t) = A$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = x + \lambda t,$$

где функция $w(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$-A + \lambda w''_{\xi\xi} + (w'_\xi)^2 - ww''_{\xi\xi} = \nu w'''_{\xi\xi\xi},$$

порядок которого можно понизить на единицу.

⦿ *Литература*: V. A. Galaktionov (1995), А. Д. Полянин (2001 *a*), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 324–325).

4. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(t)\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}.$

1°. Пусть $w = w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + \psi(t), t) + \psi'_t(t),$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения с обобщенным разделением переменных:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \frac{C_1 x}{C_1 t + C_2} + \varphi(t), \\ w(x,t) &= \varphi(t)e^{-\lambda x} - \frac{\varphi'_t(t)}{\lambda\varphi(t)} + \lambda f(t), \end{aligned}$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция; C_1, C_2, λ — произвольные постоянные. Первое решение является вырожденным.

► *О других уравнениях, содержащих смешанные вторые производные см. разд. 9.3 и 9.4.*

9.5.2. Уравнения, содержащие смешанные третьи производные

1. $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = a e^{\lambda w}$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w\bigl(C_1 x + C_2,\, C_3 y + C_4\bigr) + \frac{1}{\lambda}\ln(C_1^2 C_3),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,y) = -\frac{3}{\lambda}\ln z, \qquad z = f(y)x - \frac{1}{6}a\lambda f(y)\int\frac{dy}{f^3(y)},$$

где $f(y)$ — произвольная функция.

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 582–583).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w\dfrac{\partial w}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t}$.

Уравнение ББМ. Описывает длинные волны в дисперсных системах.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1 w(\pm x + C_2, \pm C_1 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (берутся либо верхние, либо нижние знаки).

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w(x,t) = -a + \wp\left(\frac{x - at}{2\sqrt{3a\beta}} + C_1, C_2, C_3\right),$$

где $\wp(z, C_2, C_3)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса $\bigl(\wp'_z = \sqrt{4\wp^3 - C_2\wp - C_3}\,\bigr)$; a, C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. См. также уравнение 9.5.2.3, п. 2° при $a = -1$, $b = \beta$, $k = 1$.

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = u(x)/t,$$

где функция $u = u(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $\beta u''_{xx} - uu'_x - u = 0$. Его решение можно представить в параметрическом виде

$$u = \sqrt{2\beta}(\tau - \ln|\tau| + C_1)^{1/2}, \qquad x = \frac{1}{2}\sqrt{2\beta}\int\frac{d\tau}{\tau(\tau - \ln|\tau| + C_1)^{1/2}} + C_2.$$

4°. Точное решение:

$$w(x,t) = U(\xi)/t, \qquad \xi = x - a\ln|t|,$$

где функция $U = U(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $\beta(aU'''_{\xi\xi\xi} + U''_{\xi\xi}) - (U + a)U'_\xi - U = 0$.

5°. Законы сохранения при $\beta = 1$:

$$\begin{aligned}
&D_t w + D_x\bigl(-w_{tx} - \tfrac{1}{2}w^2\bigr) = 0,\\
&D_t\bigl(\tfrac{1}{2}w^2 + \tfrac{1}{2}w_x^2\bigr) + D_x\bigl(-ww_{tx} - \tfrac{1}{3}w^3\bigr) = 0,\\
&D_t\bigl(\tfrac{1}{3}w^3\bigr) + D_x\bigl(w_t^2 - w_{tx}^2 - w^2 w_{tx} - \tfrac{1}{4}w^4\bigr) = 0,
\end{aligned}$$

где $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

⊙ *Литература*: D. N. Peregrine (1966), T. B. Benjamin, J. L. Bona, J. J. Mahony (1972), P. O. Olver (1979), N. H. Ibragimov (1994, pp. 194–196).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + aw^k\dfrac{\partial w}{\partial x} - b\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} = 0$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1 w(\pm x + C_2, \pm C_1^k t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (берутся либо верхние, либо нижние знаки).

2°. Решение типа бегущей волны (солитон):

$$w(x,t) = \left\{ \frac{C_1(k+1)(k+2)}{2a} \operatorname{ch}^{-2}\left[\frac{k}{2\sqrt{b}}(x - C_1 t + C_2) \right] \right\}^{1/k},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Существует решение в виде произведения функций разных аргументов $w(x,t) = t^{-1/k}\theta(x)$.

⊙ *Литература*: W. E. Schiesser (2003, частное сообщение), S. Hamdi, W. H. Enright, W. E. Schiesser, J. J. Gottlieb (2003), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 583).

4. $\boldsymbol{\dfrac{\partial w}{\partial t} + aw^k \dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} = 0}$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^2 w(\pm C_1^{-k} x + C_2, \pm C_1^k t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (берутся либо верхние, либо нижние знаки).

2°. Решение типа бегущей волны (солитон):

$$w(x,t) = \left\{ \frac{C_1(k+1)(k+2)}{2a} \operatorname{ch}^{-2}\left[\frac{k}{2\sqrt{bC_1}}(x - C_1 t + C_2) \right] \right\}^{1/k},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Существует автомодельное решение вида $w(x,t) = x^{2/k} U(z)$, где $z = xt$.

4°. Решение с обобщенным разделением переменных при $k = 1$:

$$w(x,t) = \frac{x + C_2}{at + C_1} + \frac{2ab}{(at + C_1)^2}.$$

⊙ *Литература*: W. E. Schiesser (2003, частное сообщение), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 584).

5. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} = kw\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}}$.

Это уравнение встречается на стыке проективной геометрии и гравитации.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w\bigl(C_2 x + C_2 k\varphi(t), C_1 C_2 t + C_3\bigr) + \varphi_t'(t),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а $\varphi(t)$ — произвольная функция, также будет решением этого уравнения.

2°. Вырожденное решение, квадратичное по x:

$$w(x,t) = Cx^2 + \varphi(t)x + \psi(t),$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции, C — произвольная постоянная.

3°. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = t^{-\alpha-1} U(z), \quad z = t^\alpha x,$$

где α — произвольная постоянная, а функция $U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $(\alpha - 1)U_{zz}'' + \alpha z U_{zzz}''' = kUU_{zzz}'''$.

4°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = (Akt + B)^{-1} u(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $u(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $uu_{xxx}''' + Au_{xx}'' = 0$.

5°. Уравнение допускает первый интеграл:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = kw\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{k}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \psi(t),$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция. При $\psi = 0$ подстановка $u = kw$ приводит к уравнению вида 7.1.1.2 при $a = -\frac{1}{2}$.

⊙ *Литература*: V. S. Dryuma (2000), М. В. Павлов (2001), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 584).

6. $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} = f(t) w \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + g(x,t)$.

Уравнение допускает первый интеграл:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = f(t) w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2} f(t) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \int g(x,t)\, dx + \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial y} \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial x} \dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(C_2 x + C_3, C_4 y + C_5) + C_6,$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x,y) = axy + f(x) + g(y);$$
$$w(x,y) = \frac{1}{\lambda} \bigl[f(x) + g(y) \bigr] - \frac{2}{\lambda} \ln \left| b \int \exp\bigl[f(x) \bigr]\, dx + \frac{a\lambda}{2b} \int \exp\bigl[g(y) \bigr]\, dy \right|,$$
$$w(x,y) = \varphi(z), \quad z = ax + by;$$
$$w(x,y) = \psi(\xi), \quad \xi = xy;$$

где $f = f(y)$, $g = g(y)$, $\varphi(z)$, $\psi(\xi)$ — произвольные функции; a, b, λ — произвольные постоянные.

3°. Существуют точные решения следующих видов:

$$w(x,y) = |x|^a F(r), \quad r = y|x|^b;$$
$$w(x,y) = e^{ax} G(\eta), \quad \eta = bx + cy;$$
$$w(x,y) = e^{ax} H(\zeta), \quad \zeta = y e^{bx};$$
$$w(x,y) = |x|^a U(\rho), \quad \rho = y + b \ln|x|;$$
$$w(x,y) = V(r) + a \ln|x|, \quad r = y|x|^b;$$
$$w(x,y) = W(\rho) + a \ln|x|, \quad \rho = y + b \ln|x|;$$

где a, b, c — произвольные постоянные (в формулах x и y можно поменять местами).

4°. В левой части рассматриваемого уравнения стоит якобиан функций w и $v = w_{xy}$. Равенство якобиана нулю означает, что эти величины функционально зависимы, т. е. v должна выражаться через w:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \Phi(w), \tag{1}$$

где $\Phi(w)$ — произвольная функция. Любое решение уравнения второго порядка (1) для любой функции $\Phi(w)$ будет решением исходного уравнения.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial y} \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \dfrac{\partial w}{\partial x} \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1 w(C_2 x + C_3, C_4 y + C_5) + C_6,$$
$$w_2 = w\bigl(x + \varphi(y), y\bigr),$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные, а $\varphi(y)$ — произвольная функция, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x,y) = Ax^2 + fx + g;$$
$$w(x,y) = f \exp(Ax) + g \exp(-Ax);$$
$$w(x,y) = f \sin(Ax) + g \cos(Ax);$$
$$w(x,y) = A \ln\bigl[(x+f)^2 \bigr] + B;$$
$$w(x,y) = A \ln\bigl[\sin^2(fx+g) \bigr] + B;$$
$$w(x,y) = A \ln\bigl[\operatorname{sh}^2(fx+g) \bigr] + B;$$
$$w(x,y) = A \ln\bigl[\operatorname{ch}^2(fx+g) \bigr] + B;$$
$$w(x,y) = \varphi(z), \quad z = Ax + By;$$

где $f = f(y)$, $g = g(y)$, $\varphi(z)$ — произвольные функции; A, B — произвольные постоянные.

3°. В левой части рассматриваемого уравнения стоит якобиан функций w и $v = w_{xx}$. Равенство якобиана нулю означает, что эти величины функционально зависимы, т. е. v должна выражаться через w:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varphi(w), \tag{1}$$

где $\varphi(w)$ — произвольная функция. Любое решение уравнения второго порядка (1) для любой функции $\varphi(w)$ будет решением исходного уравнения.

Интегрируя (1), получим общее решение исходного уравнения в неявном виде:

$$\int \left[f(y) + 2\int \varphi(w)\,dw\right]^{-1/2} dw = g(y) \pm x,$$

где $f = f(y)$, $g = g(y)$, $\varphi(w)$ — произвольные функции.

9. $\boldsymbol{\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = f(y)\dfrac{\partial w}{\partial x}}$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2} w(C_1 x + C_2, y) + C_3,$$
$$w_2 = w\bigl(x + \varphi(y), y\bigr),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а $\varphi(y)$ — произвольная функция, также будут решениями этого уравнения.

2°. Существует решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по x:

$$w(x,y) = -\frac{1}{2}x^2\left[\int f(y)\,dy + C\right] + x\varphi(y) + \psi(y),$$

где $\varphi(y)$, $\psi(y)$ — произвольные функции, C — произвольная постоянная.

3°. Точные решения в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y) = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx} + C_3 + \frac{1}{k^2}\int f(y)\,dy,$$
$$w(x,y) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) + C_3 - \frac{1}{k^2}\int f(y)\,dy,$$

где C_1, C_2, C_3, k — произвольные постоянные.

4°. Рассматриваемое уравнение можно представить как равенство нулю якобиана двух функций w и $v = w_{xx} + \int f(y)\,dy$. Отсюда следует, что величины w и v функционально зависимы, т. е. v должна выражаться через w:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \int f(y)\,dy = \varphi(w), \tag{1}$$

где $\varphi(w)$ — произвольная функция. Любое решение уравнения второго порядка (1) для любой функции $\varphi(w)$ будет решением исходного уравнения.

Уравнение (1) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение с независимой переменной x и параметром y. Интегрируя, получим его общее решение в неявном виде:

$$\int \left[\psi_1(y) - 2w\int f(y)\,dy + 2\int \varphi(w)\,dw\right]^{-1/2} dw = \psi_2(y) \pm x,$$

где $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$, $\varphi(w)$ — произвольные функции.

10. $\boldsymbol{\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = f(y)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x)\dfrac{\partial w}{\partial y}}$.

Первый интеграл:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varphi(w) + \int g(x)\,dx - \int f(y)\,dy,$$

где $\varphi(w)$ — произвольная функция. Полученное уравнение можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с независимой переменной x и параметром y.

11. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3}-\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)=2\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right).$

Общее решение:

$$w=f\bigl(\varphi(x)y+\psi(x)\bigr),$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(z)$ — произвольные функции.

Замечание. Рассматриваемое уравнение можно представить в виде равенства нулю якобиана двух величин:

$$w_x v_y - w_y v_x = 0, \qquad \text{где} \quad v = w_{yy}/w_y^2.$$

12. $\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}-\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\left[\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right].$

Две формы представления общего решения:

$$w=f\bigl(\varphi(x)+\psi(y)\bigr),$$
$$w=\bar f\bigl(\bar\varphi(x)\bar\psi(y)\bigr),$$

где $\varphi(x)$, $\psi(y)$, $\bar\varphi(x)$, $\bar\psi(y)$, $f(z_1)$, $\bar f(z_2)$ — произвольные функции.

Замечание. Рассматриваемое уравнение можно представить в виде равенства нулю якобиана двух величин:

$$w_x v_y - w_y v_x = 0, \qquad \text{где} \quad v = w_{xy}/(w_x w_y).$$

9.5.3. Другие уравнения

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t}+aw^k\dfrac{\partial w}{\partial x}-b\dfrac{\partial^3 w}{\partial t^3}=0.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=C_1^{-1}w(\pm C_1^k x+C_2,\pm t+C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (берутся либо верхние, либо нижние знаки).

2°. Решение типа бегущей волны (солитон):

$$w(x,t)=\left\{\frac{C_1(k+1)(k+2)}{2a}\operatorname{ch}^{-2}\left[\frac{k}{2C_1\sqrt{b}}(x-C_1t+C_2)\right]\right\}^{1/k},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Замечание. Это решение получил W. E. Schiesser (2003, частное сообщение).

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t)=x^{1/k}f(t),$$

где функция $f(t)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$bf'''_{ttt}-f'_t-\frac{a}{k}f^{k+1}=0.$$

4°. Решение с обобщенным разделением переменных при $k=1$:

$$w(x,t)=\varphi(t)x+\psi(t),$$

где функции $\varphi=\varphi(t)$ и $\psi=\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$b\varphi'''_{ttt}-\varphi'_t-a\varphi^2=0,$$
$$b\psi'''_{ttt}-\psi'_t-a\varphi\psi=0.$$

2. $a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}+b\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3}=(ay^3+bx^3)f(w).$

Точное решение:

$$w=w(z), \qquad z=xy,$$

где функция $w(w)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w'''_{zzz}=f(w).$$

Замечание. В исходном уравнении вместо постоянных a и b могут стоять произвольные функции $a=a(x,y,w,w_x,w_y,\dots)$ и $b=b(x,y,w,w_x,w_y,\dots)$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = b\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + c\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3}$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(C_1x + C_2, C_1y + C_3) + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y) = c\lambda x + C_1e^{a\lambda y} + C_2y + C_3,$$
$$w(x,y) = C_1e^{\lambda x} + C_2x + b\lambda y + C_3,$$
$$w(x,y) = C_1e^{-a\lambda x} + \frac{c\lambda}{a}x + C_2e^{\lambda y} - ab\lambda y + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3, λ — произвольные постоянные.

3°. Точное решение:

$$w = u(z) + C_3x, \quad z = C_1x + C_2y,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Функция $u(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным второго порядка (C_4 — произвольная постоянная)

$$C_1C_2(C_1 + aC_2)(u'_z)^2 + 2aC_2^2C_3u'_z = 2(bC_1^3 + cC_2^3)u''_{zz} + C_4.$$

Значению $C_3 = 0$ соответствует решение типа бегущей волны. В этом случае подстановка $F(u) = (u'_z)^2$ приводит к линейному уравнению первого порядка.

4°. Существует автомодельное решение вида $w = w(y/x)$.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + b\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3}$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-1}w(C_1x + C_2, C_1y + C_3) + C_4xy + C_5x + C_6y + C_7,$$

где $C_1, \ldots, C_7$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w(x,y) = -\frac{aC_1^3 + bC_2^3}{C_1^2C_2^2}z(\ln|z| - 1), \quad z = C_1x + C_2y + C_3.$$

3°. Точные решения в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \tfrac{1}{2}bC_1x^2 + C_2x + C_3\exp(C_1y) + C_4y + C_5,$$
$$w(x,y) = \tfrac{1}{2}aC_1y^2 + C_2y + C_3\exp(C_1x) + C_4x + C_5,$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные.

4°. Точное решение:

$$w = U(\zeta) + C_3x^2 + C_4y^2, \quad \zeta = C_1x + C_2y,$$

где функция $U(\zeta)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(C_1^2U''_{\zeta\zeta} + 2C_3)(C_2^2U''_{\zeta\zeta} + 2C_4) = (aC_1^3 + bC_2^3)U'''_{\zeta\zeta\zeta},$$

которое интегрируется с помощью подстановки $F(\zeta) = U''_{\zeta\zeta}$.

5°. Существует автомодельное решение вида $w = xu(y/x)$.