Из книги A. D. Polyanin and V. F. Zaitsev, «Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition», Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2011 [русский перевод].

# 10. Уравнения четвертого порядка

## 10.1. Уравнения, содержащие производную первого порядка по $t$

### 10.1.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + F\Big(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)$

**1.** $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + bw\ln w + f(t)w.$

1°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \exp\left[Ae^{bt}x + Be^{bt} + \frac{aA^4}{3b}e^{4bt} + e^{bt}\int e^{-bt}f(t)\,dt\right],$$

где $A$, $B$ — произвольные постоянные.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = \exp\left[Ae^{bt} + e^{bt}\int e^{-bt}f(t)\,dt\right]\varphi(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где $A$, $\lambda$ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''''_{zzzz} - \lambda\varphi'_z + b\varphi\ln\varphi = 0,$$

порядок которого можно понизить на единицу.

3°. Замена

$$w(x,t) = \exp\left[e^{bt}\int e^{-bt}f(t)\,dt\right]u(x,t)$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + bu\ln u.$$

**2.** $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + f(t)w\ln w + [g(t)x + h(t)]w.$

Частный случай уравнения 11.1.2.5 при $n = 4$.

**3.** $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (bx + c)\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(w).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + C_1e^{-bt}, t + C_2),$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + C_1e^{-bt},$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aw''''_{zzzz} + (bz + c)w'_z + f(w) = 0.$$

**4.** $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial w}{\partial x} - b\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4}.$

Это уравнение описывает эволюцию нелинейных волн в рассеивающей среде.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^3w(C_1x + aC_1C_2t + C_3, C_1^4t + C_4) + C_2,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x,t) = -\frac{x + C_1}{at + C_2},$$
$$w(x,t) = -\frac{120b}{a(x + aC_1t + C_2)^3} + C_1.$$

Первое решение является вырожденным, а второе — решением типа бегущей волны.

3°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\left(\frac{40b}{9a}\right)^{1/3} \int_0^{C_1^3 w + C_2} \frac{d\eta}{(1 - \eta^2)^{2/3}} = C_1x + aC_1C_2t + C_3.$$

В частном случае $C_1 = 1$, $C_2 = C_3 = 0$ получим стационарное решение.

4°. Решение типа бегущей волны (обобщает второе решение из п. 2° и решение из п. 3°):

$$w = w(\xi), \quad \xi = x - \lambda t,$$

где функция $w(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением третьего порядка

$$bw'''_{\xi\xi\xi} = \tfrac{1}{2}aw^2 + \lambda w + C.$$

Здесь $C$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

5°. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = t^{-3/4}u(\eta), \quad \eta = xt^{-1/4},$$

где функция $u(\eta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$bu''''_{\eta\eta\eta\eta} = auu'_\eta + \tfrac{1}{4}\eta u'_\eta + \tfrac{3}{4}u.$$

6°. Точное решение:

$$w(x,t) = U(\zeta) + 2C_1t, \quad \zeta = x + aC_1t^2 + C_2t,$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, а функция $U(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением третьего порядка

$$bU'''_{\zeta\zeta\zeta} - \tfrac{1}{2}aU^2 + C_2U = -2C_1\zeta + C_3.$$

7°. Точное решение:

$$w = \varphi^3F(z) + \frac{1}{a\varphi}(\varphi'_tx + \psi'_t), \quad z = \varphi(t)x + \psi(t).$$

Здесь функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются формулами

$$\varphi(t) = (4At + C_1)^{-1/4},$$
$$\psi(t) = C_2(4At + C_1)^{3/4} + C_3(4At + C_1)^{-1/4},$$

где $A$, $C_1$, $C_2$, $C_3$ — произвольные постоянные, а функция $F(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$bF''''_{zzzz} - aFF'_z - 2AF + 3\frac{A^2}{a}z = 0.$$

8°. Положим $a = b = -1$ (к такому случаю можно свести исходное уравнение путем подходящего растяжения независимых переменных).

Уравнение допускает формальное решение в виде ряда

$$w(x,t) = \frac{1}{[x - \varphi(t)]^3} \sum_{n=0}^{\infty} w_n(t)[x - \varphi(t)]^n,$$

коэффициенты которого $w_n = w_n(t)$ определяются по формулам

$$w_0 = -120, \quad w_1 = w_2 = 0, \quad w_3 = -\varphi'(t), \quad w_4 = w_5 = 0, \quad w_6 = \psi(t),$$
$$(n+1)(n-6)(n^2 - 13n + 60)w_n = \sum_{m=6}^{n-6}(m-3)w_{n-m}w_m + w'_{n-4},$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции. Данное решение имеет сингулярную особенность при $x = \varphi(t)$.

$9^\circ$. При $a = b = -1$ уравнение допускает формальное решение в виде ряда

$$w(x,t) = \frac{x}{t} + \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{t}{x^4}\right)^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} A_k^n x^{2k},$$

где $A_0^1$ — произвольная постоянная, а другие коэффициенты можно выразить через $A_0^1$ с помощью рекуррентных соотношений. Данное решение можно обобщить путем сдвигов по независимым переменным.

⊙ *Литература для уравнения* 10.1.1.4: О. В. Руденко, В. А. Робсман (2002), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 590–591). Решения в пп. $8^\circ$ и $9^\circ$ получил В. Г. Байдулов (частное сообщение, 2002).

**5.** $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = aw\frac{\partial w}{\partial x} - b\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + f(t).$

Преобразование

$$w = u(z,t) + \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau, \qquad z = x + a\int_{t_0}^{t}(t-\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

где $t_0$ — любое число (при котором имеют смысл данные интегралы), приводит к более простому уравнению вида 10.1.1.4:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au\frac{\partial u}{\partial x} - b\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}.$$

**6.** $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + bw\frac{\partial w}{\partial x} + cw.$

$1^\circ$. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + bC_1e^{ct} + C_2,\ t + C_3) + C_1ce^{ct},$$

где $C_1$, $C_2$, $C_3$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

$2^\circ$. Точное решение:

$$w = U(z) + C_1ce^{ct}, \qquad z = x + bC_1e^{ct} + C_2t,$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, а функция $U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aU''''_{zzzz} + bUU'_z - C_2U'_z + cU = 0.$$

При $C_1 = 0$ имеем решение типа бегущей волны.

$3^\circ$. Существует вырожденное решение, линейное по $x$:

$$w(x,t) = \varphi(t)x + \psi(t).$$

**7.** $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + [f(t)\ln w + g(t)]\frac{\partial w}{\partial x}.$

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \exp[\varphi(t)x + \psi(t)],$$

где

$$\varphi(t) = -\left[\int f(t)\,dt + C_1\right]^{-1}, \qquad \psi(t) = \varphi(t)\int[g(t) + a\varphi^3(t)]\,dt + C_2\varphi(t),$$

$C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные.

**8.** $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + b\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$

$1^\circ$. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^2 w(C_1x + 2bC_1C_2t + C_3, C_1^4t + C_4) + C_2x + bC_2^2t + C_5,$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

$2^\circ$. Точное решение:

$$w(x,t) = C_1 t + C_2 + \int \theta(z)\,dz, \quad z = x + \lambda t,$$

где $C_1$, $C_2$, $\lambda$ — произвольные постоянные, а функция $\theta(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением третьего порядка

$$a\theta'''_{zzz} + b\theta^2 - \lambda\theta - C_1 = 0.$$

Значению $C_1 = 0$ отвечает решение типа бегущей волны.

$3^\circ$. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = t^{-1/2}u(\zeta), \quad \zeta = xt^{-1/4},$$

где функция $u(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$au''''_{\zeta\zeta\zeta\zeta} + b(u'_\zeta)^2 + \tfrac{1}{4}\zeta u'_\zeta + \tfrac{1}{2}u = 0.$$

$4^\circ$. Существует вырожденное решение, квадратичное по $x$:

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t).$$

**9.** $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + f(t).$

Подстановка $w = U(x,t) + \displaystyle\int f(t)\,dt$ приводит к более простому уравнению вида 10.1.1.8:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + b\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2.$$

**10.** $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + cw + f(t).$

$1^\circ$. Точное решение:

$$w(x,t) = Ae^{ct} + e^{ct}\int e^{-ct}f(t)\,dt + \theta(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где $A$, $\lambda$ — произвольные постоянные, а функция $\theta(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\theta''''_{zzzz} + b\bigl(\theta'_z\bigr)^2 - \lambda\theta'_z + c\theta = 0.$$

$2^\circ$. Существует вырожденное решение вида

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t).$$

$3^\circ$. Замена

$$w = U(x,t) + e^{ct}\int e^{-ct}f(t)\,dt$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + b\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + cU.$$

### 10.1.2. Другие уравнения

**1.** $\dfrac{\partial w}{\partial t} + w\dfrac{\partial w}{\partial x} + \alpha\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \gamma\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0.$

*Уравнение Курамото — Сивашинского* (Kuramoto — Sivashinsky). Это уравнение описывает нелинейные волны в диссипативно — дисперсионных средах с неустойчивостью, волны при стекании тонких пленок жидкости по наклонной плоскости, длинные волны жидкости под ледяным покровом, концентрацию вещества при химических реакциях и др.

$1^\circ$. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x - C_1 t + C_2, t + C_3) + C_1,$$

где $C_1$, $C_2$, $C_3$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

$2^\circ$. Вырожденное решение:

$$w(x,t) = \frac{x + C_1}{t + C_2},$$

$3^\circ$. Решения типа бегущей волны:

$$w(x,t) = C_1 + \left[\tfrac{15}{76}\left(16\alpha - \beta^2\gamma^{-1}\right) + 15\beta k + 60\gamma k^2\right]F - \left(15\beta + 180\gamma k\right)F^2 + 60\gamma F^3,$$
$$F = k\left[1 + C_2 \exp(-kx - \lambda t)\right]^{-1},$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, а коэффициенты $\beta$, $k$, $\lambda$ определяются по формулам

$$\beta = 0, \qquad k = \pm\sqrt{\tfrac{11}{19}\alpha\gamma^{-1}}, \quad \lambda = -C_1 k - \tfrac{30}{19}\alpha k^2 \quad \text{(первая группа решений);}$$
$$\beta = \pm 4\sqrt{\alpha\gamma}, \qquad k = \pm\sqrt{\alpha\gamma^{-1}}, \quad \lambda = -C_1 k - \tfrac{3}{2}\beta k^3 \quad \text{(вторая группа решений);}$$
$$\beta = \pm\tfrac{12}{\sqrt{47}}\sqrt{\alpha\gamma}, \quad k = \pm\sqrt{\tfrac{1}{47}\alpha\gamma^{-1}}, \quad \lambda = -C_1 k - \tfrac{60}{47}\alpha k^2 \quad \text{(третья группа решений);}$$
$$\beta = \pm\tfrac{16}{\sqrt{73}}\sqrt{\alpha\gamma}, \quad k = \pm\sqrt{\tfrac{1}{73}\alpha\gamma^{-1}}, \quad \lambda = -C_1 k - \tfrac{90}{73}\alpha k^2 \quad \text{(четвертая группа решений).}$$

**Специальный случай.** При $\beta = 0$, $\alpha = \gamma = 1$, $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ получим решение

$$w(x,t) = \tfrac{15}{19}k\left(11H^3 - 9H + 2\right), \quad H = \operatorname{th}\left(\tfrac{1}{2}kx - \tfrac{15}{19}k^2 t\right), \quad k = \pm\sqrt{\tfrac{11}{19}},$$

которое описывает концентрационные волны при протекании химических реакций.

$4^\circ$. Точное решение:

$$w(x,t) = U(\zeta) + 2C_1 t, \qquad \zeta = x - C_1 t^2 + C_2 t,$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, а функция $U(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением третьего порядка ($C_3$ — произвольная постоянная)

$$\gamma U'''_{\zeta\zeta\zeta} + \beta U''_{\zeta\zeta} + \alpha U'_\zeta + \tfrac{1}{2}U^2 + C_2 U = -2C_1\zeta + C_3.$$

Частный случай $C_1 = 0$ соответствует решению типа бегущей волны.

⦿ *Литература для уравнения* 10.1.2.1: Y. Kuramoto, T. Tsuzuki (1976), B. J. Cohen, J. A. Krommes, W. M. Tang, M. N. Rosenbluth (1976), В. Я. Шкадов (1977), J. Topper, T. Kawahara (1978), G. I. Sivashinsky (1983), А. В. Марченко (1988), Н. А. Кудряшов (1988, 1989), R. Conte, M. Musette (1989), N. A. Kudryashov (1990), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 593).

**2.** $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + b\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + c.$

Существует решение с обобщенным разделением переменных в виде полинома четвертой степени по $x$:

$$w = \varphi_4(t)x^4 + \varphi_3(t)x^3 + \varphi_2(t)x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t).$$

**3.** $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^k \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right).$

При $k = 3$ это уравнение встречается в задачах о движении крупных пузырей в узких трубах и в задачах о растекании капель по твердой поверхности.

$1^\circ$. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(C_2 x + C_3, C_1^k C_2^4 t + C_4),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

$2^\circ$. Точные решения:

$$w(x,t) = A(x + C_1 t + C_2)^{3/k}, \qquad A = \left[\frac{C_1 k^3}{3a(k-3)(2k-3)}\right]^{1/k};$$
$$w(x,t) = (Bt + C_1)^{-1/k}(x + C_2)^{4/k}, \qquad B = 8ak^{-3}(k+4)(k-4)(2-k).$$

$3^\circ$. Решение типа бегущей волны (обобщает первое решение из п. $2^\circ$):

$$w = w(z), \qquad z = x + \lambda t,$$

где $\lambda$ — произвольная постоянная, а функция $w = w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением третьего порядка $aw^k w'''_{zzz} - \lambda w = C_1$. Подстановка $U(z) = (w'_z)^2$ приводит его к уравнению второго порядка

$$aU''_{ww} = \pm 2(\lambda w^{1-k} + C_1 w^{-k})U^{-1/2}.$$

О его решениях для некоторых значений $k$ и $C_1$ см. книгу В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

$4^\circ$. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = t^{-\frac{4\beta+1}{k}} u(\xi), \quad \xi = xt^\beta,$$

где $\beta$ — произвольная постоянная, а функция $u = u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$-(4\beta+1)u + k\beta\xi u'_\xi = ak(u^k u'''_{\xi\xi\xi})'_\xi.$$

$5^\circ$. Точное решение:

$$w(x,t) = (C_1t+C_2)^{-1/k} V(\zeta), \quad \zeta = x + C_3 \ln|C_1t+C_2|,$$

где функция $V = V(\zeta)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$ak(V^k V'''_{\zeta\zeta\zeta})'_\zeta - kC_1C_3V'_\zeta + C_1V = 0.$$

**Замечание.** В частном случае $C_3 = 0$ имеем решение в виде произведения функций разных переменных.

$6^\circ$. Обобщенно-автомодельное решение:

$$w(x,t) = e^{-4\beta t}\varphi(\eta), \quad \eta = xe^{k\beta t},$$

где $\beta$ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(\eta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$-4\beta\varphi + k\beta\eta\varphi'_\eta = a(\varphi^k\varphi'''_{\eta\eta\eta})'_\eta.$$

⊙ *Литература для уравнения* 10.1.2.3: F. P. Bretherton (1962), V. M. Starov (1983), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 594).

**4.** $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^3}{\partial x^3}\left[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + \dfrac{a}{f(w)} + b.$

Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$\int f(w)\,dw = at - \frac{b}{24}x^4 + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

# 10.2. Уравнения, содержащие вторую производную по $t$

## 10.2.1. Уравнение Буссинеска и его модификации

**1.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0.$

*Уравнение Буссинеска в канонической форме* (Boussinesq). Используется для описания длинных слабонелинейных волн на поверхности жидкости, распространяющихся вдоль оси $x$.

$1^\circ$. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^2 w(C_1x + C_2, \pm C_1^2 t + C_3),$$

где $C_1$, $C_2$, $C_3$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

$2^\circ$. Точные решения:

$$\begin{aligned}
w(x,t) &= 2C_1x - 2C_1^2t^2 + C_2t + C_3,\\
w(x,t) &= (C_1t+C_2)x - \frac{1}{12C_1^2}(C_1t+C_2)^4 + C_3t + C_4,\\
w(x,t) &= -\frac{(x+C_1)^2}{(t+C_2)^2} + \frac{C_3}{t+C_2} + C_4(t+C_2)^2,\\
w(x,t) &= -\frac{x^2}{t^2} + C_1t^3x - \frac{C_1^2}{54}t^8 + C_2t^2 + \frac{C_4}{t},\\
w(x,t) &= -\frac{(x+C_1)^2}{(t+C_2)^2} - \frac{12}{(x+C_1)^2},\\
w(x,t) &= -3\lambda^2\cos^{-2}\left[\tfrac{1}{2}\lambda(x \pm \lambda t) + C_1\right],
\end{aligned}$$

где $C_1, \ldots, C_4$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

$3^\circ$. Решение типа бегущей волны (обобщает последнее решение из п. $2^\circ$):

$$w = w(\zeta), \quad \zeta = x + \lambda t,$$

где функция $w(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка ($C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные)

$$w''_{\zeta\zeta} + w^2 + 2\lambda^2 w + C_1\zeta + C_2 = 0.$$

При $C_1 = 0$ это уравнение интегрируется в квадратурах.

$4^\circ$. Автомодельное решение:

$$w = \frac{1}{t}U(z), \quad z = \frac{x}{\sqrt{t}},$$

где функция $U = U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$U''''_{zzzz} + (UU'_z)'_z + \tfrac{1}{4}z^2U''_{zz} + \tfrac{7}{4}zU'_z + 2U = 0.$$

$5^\circ$. Вырожденное решение (обобщает четыре первых решения из п. $2^\circ$):

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi''_{tt} &= -6\varphi^2, \\ \psi''_{tt} &= -6\varphi\psi, \\ \chi''_{tt} &= -2\varphi\chi - \psi^2. \end{aligned}$$

$6^\circ$. Точное решение:

$$w = f(\xi) - 4C_1^2t^2 - 4C_1C_2t, \quad \xi = x - C_1t^2 - C_2t,$$

где функция $f(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением третьего порядка

$$f'''_{\xi\xi\xi} + ff'_\xi + C_2^2f'_\xi - 2C_1f = 8C_1^2\xi + C_3, \tag{1}$$

$C_1$, $C_2$, $C_3$ — произвольные постоянные. Уравнение (1) приводится ко второму уравнению Пенлеве.

$7^\circ$. Решение с обобщенным разделением переменных (обобщает предпоследнее решение из п. $2^\circ$):

$$w = (x + C_1)^2u(t) - \frac{12}{(x + C_1)^2},$$

где функция $u = u(t)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$u''_{tt} = -6u^2.$$

Функция $u(t)$ представима через эллиптическую функцию Вейерштрасса.

$8^\circ$. Точное решение:

$$w = \frac{1}{t}F(z) - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{t} + Ct\right)^2, \quad z = \frac{x}{\sqrt{t}} - \frac{1}{3}Ct^{3/2},$$

где $C$ — произвольная постоянная, а функция $F = F(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением четвертого порядка

$$F''''_{zzzz} + (FF'_z)'_z + \tfrac{3}{4}zF'_z + \tfrac{3}{2}F - \tfrac{9}{8}z^2 = 0.$$

Его решение представимо через решение четвертого уравнения Пенлеве.

$9^\circ$. Точное решение:

$$w(x,t) = (a_1t + a_0)^2U(z) - \left(\frac{a_1x + b_1}{a_1t + a_0}\right)^2, \quad z = x(a_1t + a_0) + b_1t + b_0.$$

Здесь $a_1$, $a_0$, $b_1$, $b_0$ — произвольные постоянные, а функция $U = U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$U''_{zz} + \tfrac{1}{2}U^2 = c_1z + c_2, \tag{2}$$

где $c_1$, $c_2$ — произвольные постоянные. При $c_1 = 0$ решение уравнения (2) можно представить в неявном виде; при $c_1 \neq 0$ уравнение сводится к первому уравнению Пенлеве.

$10^\circ$. Точное решение:

$$w(x,t) = (a_1t + a_0)^2 U(z) - \left[ \frac{a_1^2 x + \lambda(a_1 t + a_0)^5 + a_1 b_1}{a_1(a_1 t + a_0)} \right]^2,$$
$$z = x(a_1t + a_0) + \frac{\lambda}{6a_1^2}(a_1t + a_0)^6 + b_1 t + b_0.$$

Здесь $a_1$, $a_0$, $b_1$, $b_0$ — произвольные постоянные, а функция $U = U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением третьего порядка

$$U'''_{zzz} + UU'_z + 5\lambda U = 50\lambda^2 z + c, \tag{3}$$

где $c$ — произвольная постоянная. Уравнение (2) сводится ко второму уравнению Пенлеве.

$11^\circ$. Точное решение:

$$w(x,t) = \varphi^2(t)U(z) - \frac{1}{\varphi^2(t)}\left[x\varphi'_t(t) + \psi'_t(t)\right]^2, \quad z = \varphi(t)x + \psi(t).$$

Здесь функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\varphi''_{tt} = A\varphi^5, \tag{4}$$
$$\psi''_{tt} = A\varphi^4\psi, \tag{5}$$

где $A$ — произвольная постоянная, а функция $U = U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением четвертого порядка

$$U''''_{zzzz} + UU''_{zz} + (U'_z)^2 + AzU'_z + 2AU = 2A^2z^2.$$

Первый интеграл уравнения (4) имеет вид

$$(\varphi'_t)^2 = \tfrac{1}{3}A\varphi^6 + B,$$

где $B$ — произвольная постоянная. Решение этого уравнения можно выразить через эллиптические функции Якоби. Общее решение уравнения (5) можно выразить через функцию $\varphi = \varphi(t)$ по формуле

$$\psi = C_1\varphi(t) + C_2\varphi(t)\int \frac{dt}{\varphi^2(t)},$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные.

$12^\circ$. Уравнение Буссинеска интегрируется методом обратной задачи рассеяния. Всякая быстро убывающая при $x \to +\infty$ функция $F = F(x,y;t)$, удовлетворяющая одновременно двум линейным уравнениям

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0,$$
$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = 0$$

порождает решение уравнения Буссинеска в виде

$$w = 12\frac{d}{dx}K(x,x;t),$$

где $K(x,y;t)$ — решение линейного интегрального уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко

$$K(x,y;t) + F(x,y;t) + \int_x^\infty K(x,s;t)F(s,y;t)\,ds = 0.$$

Время $t$ входит в это уравнение как параметр.

⊙ *Литература для уравнения* 10.2.1.1: J. Boussinesq (1872), В. Е. Захаров (1973), M. Toda (1975), A. C. Scott (1975), T. Nishitani, M. Tajiri (1982), G. R. W. Quispel, F. W. Nijhoff, H. W. Capel (1982), J. Weiss (1985), М. Абловиц, Х. Сигур (1987), P. A. Clarkson, M. D. Kruskal (1989), P. A. Clarkson, D. K. Ludlow, T. J. Priestley (1997), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 595–597).

**2.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + b\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4}.$

*Ненормированное уравнение Буссинеска.*

$1^\circ$. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^2 w(C_1 x + C_2, \pm C_1^2 t + C_3),$$

где $C_1$, $C_2$, $C_3$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

$2^\circ$. Точные решения:

$$\begin{aligned}
w(x,t) &= 2C_1 x + 2aC_1^2 t^2 + C_2 t + C_3,\\
w(x,t) &= (C_1 t + C_2)x + \frac{a}{12C_1^2}(C_1 t + C_2)^4 + C_3 t + C_4,\\
w(x,t) &= \frac{(x+C_1)^2}{a(t+C_2)^2} + \frac{C_3}{t+C_2} + C_4(t+C_2)^2,\\
w(x,t) &= \frac{x^2}{at^2} + C_1 t^3 x + \frac{aC_1^2}{54}t^8 + C_2 t^2 + \frac{C_4}{t},\\
w(x,t) &= \frac{(x+C_1)^2}{a(t+C_2)^2} - \frac{12b}{a(x+C_1)^2},\\
w(x,t) &= \frac{3\lambda^2}{a}\operatorname{ch}^{-2}\left[\frac{\lambda}{2\sqrt{b}}(x \pm \lambda t) + C_1\right],
\end{aligned}$$

где $C_1, \ldots, C_4$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

$3^\circ$. Решение типа бегущей волны (обобщает последнее решение из п. $2^\circ$):

$$w = u(\zeta), \quad \zeta = x + \lambda t,$$

где функция $u = u(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка ($C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные)

$$bu''_{\zeta\zeta} + au^2 - 2\lambda^2 u + C_1\zeta + C_2 = 0.$$

При $C_1 = 0$ это уравнение интегрируется в квадратурах.

$4^\circ$. Автомодельное решение:

$$w = \frac{1}{t}U(z), \quad z = \frac{x}{\sqrt{t}},$$

где функция $U = U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2U + \tfrac{7}{4}zU'_z + \tfrac{1}{4}z^2 U''_{zz} = a(UU'_z)'_z + bU''''_{zzzz}.$$

$5^\circ$. Вырожденное решение (обобщает четыре первых решения из п. $2^\circ$):

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\varphi''_{tt} &= 6a\varphi^2,\\
\psi''_{tt} &= 6a\varphi\psi,\\
\chi''_{tt} &= 2a\varphi\chi + a\psi^2.
\end{aligned}$$

$6^\circ$. Точное решение:

$$w = f(\xi) + 4aC_1^2 t^2 + 4aC_1 C_2 t, \quad \xi = x + aC_1 t^2 + aC_2 t,$$

где функция $f(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением третьего порядка

$$bf'''_{\xi\xi\xi} + aff'_\xi - a^2 C_2^2 f'_\xi - 2aC_1 f = 8aC_1^2\xi + C_3,$$

а $C_1$, $C_2$, $C_3$ — произвольные постоянные.

$7^\circ$. Точное решение (обобщает предпоследнее решение из п. $2^\circ$):

$$w = (x+C_1)^2 u(t) - \frac{12b}{a(x+C_1)^2},$$

где функция $u = u(t)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$u''_{tt} = 6au^2.$$

Функция $u(t)$ представима через эллиптическую функцию Вейерштрасса.

$8^\circ$. Точное решение:

$$w = \frac{1}{t}F(z) + \frac{1}{4a}\left(\frac{x}{t} + Ct\right)^2, \quad z = \frac{x}{\sqrt{t}} - \frac{1}{3}Ct^{3/2},$$

где $C$ — произвольная постоянная, а функция $F = F(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a(FF'_z)'_z + bF''''_{zzzz} = \frac{3}{4}zF'_z + \frac{3}{2}F + \frac{9}{8a}z^2.$$

$9^\circ$. См. также уравнение 10.2.1.3, п. $6^\circ$.

⦿ *Литература для уравнения* 10.2.1.2: T. Nishitani, M. Tajiri (1982), G. R. W. Quispel, F. W. Nijhoff, H. W. Capel (1982), P. A. Clarkson, M. D. Kruskal (1989), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 597–599).

**3.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 6\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4}.$

Решения этого уравнения можно представить в виде

$$w(x,t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\ln u), \tag{1}$$

где функция $u = u(x,t)$ описывается билинейным уравнением

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - u\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 4\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 - u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0. \tag{2}$$

$1^\circ$. Одно- и двухсолитонные решения исходного уравнения, порождаются следующими решениями уравнения (2):

$$u = 1 + A\exp\bigl(kx \pm kt\sqrt{1+k^2}\,\bigr),$$
$$u = 1 + A_1\exp(k_1x + m_1t) + A_2\exp(k_2x + m_2t) + A_1A_2p_{12}\exp\bigl[(k_1+k_2)x + (m_1+m_2)t\bigr],$$

где $A$, $A_1$, $A_2$, $k$, $k_1$, $k_2$ — произвольные постоянные,

$$m_i = \pm k_i\sqrt{1+k_i^2}, \quad p_{12} = \frac{3(k_1-k_2)^2 + (n_1-n_2)^2}{3(k_1+k_2)^2 + (n_1-n_2)^2}, \quad n_i = \frac{m_i}{k_i}.$$

$2^\circ$. Рациональные решения порождаются следующими решениями уравнения (2):

$$u = x \pm t,$$
$$u = x^2 - t^2 - 3,$$
$$u = (x \pm t)^3 + x \mp 5t.$$

$3^\circ$. Точное решение уравнения (2):

$$u = \exp(2kx - 2mt) + (Cx - At)\exp(kx - mt) - B,$$
$$A = \frac{C(2k^2+1)}{\sqrt{1+k^2}}, \quad B = \frac{C^2(4k^2+3)}{12k^2(1+k^2)}, \quad m = \sqrt{k^2+k^4},$$

где $k$, $C$ — произвольные постоянные.

$4^\circ$. Точные решения уравнения (2):

$$u = \sin(kx - mt) + Ax + Bt,$$
$$u = \sin(kx) + C\sin(mt) + E\cos(mt),$$

где $k$, $C$ — произвольные постоянные,

$$m = \sqrt{k^2 - k^4}, \quad A = \sqrt{\frac{3m^2}{3-4k^2}}, \quad B = \frac{A(2k^2-1)}{\sqrt{1-k^2}}, \quad E = \sqrt{\frac{1 - C^2 + k^2C^2 - 4k^2}{1-k^2}}.$$

$5^\circ$. Точное решение ($C$ — произвольная постоянная):

$$u = \sin(kx) + C\exp\bigl(t\sqrt{k^4-k^2}\,\bigr) + \frac{4k^2-1}{4C(k^2-1)}\exp\bigl(-t\sqrt{k^4-k^2}\,\bigr).$$

$6^\circ$. Замена $w = \frac{1}{6}(U-1)$ приводит к уравнению вида 10.2.1.2:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial^4 U}{\partial x^4}.$$

⦿ *Литература для уравнения* 10.2.1.3: R. Hirota (1973), М. Абловиц, Х. Сигур (1987), О. В. Капцов (1998).

**4.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + c\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4}.$

Замена $w = U - (a/b)$ приводит к уравнению вида 10.2.1.2:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = b\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial U}{\partial x}\right) + c\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}.$$

## 10.2.2. Уравнения с квадратичной нелинейностью

**1.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + bw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c.$

$1^\circ$. Решение типа бегущей волны:

$$w(x,t) = u(\xi), \quad \xi = \beta x + \lambda t,$$

где $\beta$, $\lambda$ — произвольные постоянные, а функция $u = u(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\beta^4 u''''_{\xi\xi\xi\xi} + (b\beta^2 u - \lambda^2)u''_{\xi\xi} + c = 0.$$

$2^\circ$. Точное решение:

$$w(x,t) = U(z) + bC_1^2 t^2 + 2bC_1C_2 t, \quad z = x - \tfrac{1}{2}bC_1 t^2 - bC_2 t,$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, а функция $U = U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aU''''_{zzzz} + bUU''_{zz} - b^2C_2^2U''_{zz} + bC_1U'_z + c - 2bC_1^2 = 0.$$

$3^\circ$. Существует вырожденное решение, квадратичное по $x$:

$$w(x,t) = f_2(t)x^2 + f_1(t)x + f_0(t).$$

**2.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + c.$

Частный случай уравнения 11.3.5.3 при $n = 4$.

**3.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + f(t).$

Частный случай уравнения 11.3.2.2 при $n = 4$.

$1^\circ$. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}At^2 + Bt + C + \int_0^t (t-\tau)f(\tau)\,d\tau + \varphi(x).$$

Здесь $A$, $B$, $C$ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''''_{xxxx} + b(\varphi'_x)^2 - A = 0,$$

порядок которого можно понизить с помощью подстановки $U(x) = \varphi'_x$.

$2^\circ$. Замена

$$w = u(x,t) + \int_0^t (t-\tau)f(\tau)\,d\tau$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + b\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$$

Это уравнение допускает решение типа бегущей волны $u = u(kx + \lambda t)$ и автомодельное решение $u = t^{-1}\phi(z)$, где $z = xt^{-1/2}$.

**4.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + a\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + bw + f(t).$

$1^\circ$. Точное решение:
$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(z), \quad z = x + \lambda t,$$
где $\lambda$ — произвольная постоянная, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(z)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями
$$\varphi''_{tt} - b\varphi - f(t) = 0,$$
$$\psi''''_{zzzz} - \lambda^2\psi''_{zz} + a(\psi'_z)^2 + b\psi = 0.$$
Решение первого уравнения для $\varphi(t)$ имеет вид
$$\varphi(t) = C_1\operatorname{ch}(kt) + C_2\operatorname{sh}(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t f(\tau)\operatorname{sh}\bigl[k(t-\tau)\bigr]\,d\tau \quad \text{при} \quad b = k^2 > 0,$$
$$\varphi(t) = C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t f(\tau)\sin\bigl[k(t-\tau)\bigr]\,d\tau \quad \text{при} \quad b = -k^2 < 0,$$
где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные.

$2^\circ$. Замена $w = u(x,t) + \varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ описана в п. $1^\circ$, приводит к более простому уравнению
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + bu.$$

**5.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + b\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + c.$

$1^\circ$. Решение с обобщенным разделением переменных:
$$w(x,t) = \varphi_4(t)x^4 + \varphi_3(t)x^3 + \varphi_2(t)x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t),$$
где функции $\varphi_n(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений
$$\begin{aligned}
\varphi''_4 &= 144b\varphi_4^2,\\
\varphi''_3 &= 144b\varphi_3\varphi_4,\\
\varphi''_2 &= 12b(3\varphi_3^2 + 4\varphi_2\varphi_4),\\
\varphi''_1 &= 24b\varphi_2\varphi_3,\\
\varphi''_0 &= 24a\varphi_4 + 4b\varphi_2^2 + c.
\end{aligned}$$

$2^\circ$. Точное решение:
$$w(x,t) = C_1x^2 + C_2xt + C_3t^2 + C_4x + C_5t + u(z), \quad z = kx + \lambda t,$$
где $C_1$, …, $C_5$, $k$, $\lambda$ — произвольные постоянные, а функция $u(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением
$$\lambda^2 u''_{zz} + 2C_3 = ak^4 u''''_{zzzz} + b(k^2u''_{zz} + 2C_1)^2 + c,$$
которое можно проинтегрировать с помощью подстановки $U(z) = u''_{zz}$. Частному случаю $C_1 = \ldots = C_5 = 0$ соответствует решение типа бегущей волны.

$3^\circ$. Решение с обобщенным разделением переменных:
$$w(x,t) = C_1xt^2 + C_2t^2 + C_3t + f(x),$$
где $C_1$, $C_2$, $C_3$ — произвольные постоянные, а функция $f(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением
$$2C_1x + 2C_2 = af''''_{xxxx} + b(f''_{xx})^2 + c,$$
которое можно проинтегрировать с помощью подстановки $F(x) = f''_{xx}$.

$4^\circ$. Замена
$$w(x,t) = V(x,t) + \tfrac{1}{2}ct^2$$
приводит к более простому уравнению
$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a\frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + b\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)^2,$$
которое допускает автомодельное решение вида $V = V(\xi)$, где $\xi = xt^{-1/2}$.

**6.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + f(t)w + g(t)$.

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \varphi(t)(A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x) + \psi(t),$$

где $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ — произвольные постоянные, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''_{tt} = 24A_4a\varphi^2 + f(t)\varphi,$$
$$\psi''_{tt} = 24A_4a\varphi\psi + f(t)\psi + g(t).$$

**7.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + bw^2 + f(t)w + g(t)$.

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \varphi(t)\Theta(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка ($C$ — произвольная постоянная):

$$\varphi''_{tt} = C\varphi^2 + b\varphi\psi + f(t)\varphi,$$
$$\psi''_{tt} = C\varphi\psi + b\psi^2 + f(t)\psi + g(t),$$

а функция $\Theta(x)$ удовлетворяет линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка с постоянными коэффициентами

$$a\Theta''''_{xxxx} + b\Theta = C.$$

**8.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + cw^2 - f(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - g(t)\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} - h(t)w - p(t)$.

1°. Решение с обобщенным разделением переменных при $c/(a+b) = k^2 > 0$:

$$w(x,t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)\cos(kx) + \varphi_3(t)\sin(kx),$$

где функции $\varphi_n = \varphi_n(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi_1'' = c\varphi_1^2 + bk^2(\varphi_2^2 + \varphi_3^2) - h(t)\varphi_1 - p(t),$$
$$\varphi_2'' = (2c - ak^2)\varphi_1\varphi_2 + [k^2f(t) - k^4g(t) - h(t)]\varphi_2,$$
$$\varphi_3'' = (2c - ak^2)\varphi_1\varphi_3 + [k^2f(t) - k^4g(t) - h(t)]\varphi_3.$$

Штрихи обозначают производные по $t$. Из двух последних уравнений имеем $\varphi_2''/\varphi_2 = \varphi_3''/\varphi_3$. Отсюда следует, что

$$\varphi_3 = C_1\varphi_2 + C_2\varphi_2\int\frac{dt}{\varphi_2^2}, \qquad (1)$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных при $c/(a+b) = -k^2 < 0$:

$$w(x,t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)\,\mathrm{ch}(kx) + \varphi_3(t)\,\mathrm{sh}(kx),$$

где функции $\varphi_n = \varphi_n(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi_1'' = c\varphi_1^2 + bk^2(\varphi_3^2 - \varphi_2^2) - h(t)\varphi_1 - p(t),$$
$$\varphi_2'' = (2c + ak^2)\varphi_1\varphi_2 - [k^2f(t) + k^4g(t) + h(t)]\varphi_2,$$
$$\varphi_3'' = (2c + ak^2)\varphi_1\varphi_3 - [k^2f(t) + k^4g(t) + h(t)]\varphi_3.$$

Функцию $\varphi_3$ можно выразить через функцию $\varphi_2$ по формуле (1).

3°. *Частный случай*: $a/b = -\frac{4}{3}$, $bc < 0$.

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)\cos(kx) + \psi_3(t)\cos(\tfrac{1}{2}kx), \qquad k = \sqrt{-3c/b}.$$

Здесь функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\psi_1'' = c\psi_1^2 + bk^2\psi_2^2 + \left(A + \tfrac{1}{4}bk^2\right)\psi_3^2 - h(t)\psi_1 - p(t),$$
$$\psi_2'' = (2c - ak^2)\psi_1\psi_2 + A\psi_3^2 + \left[k^2f(t) - k^4g(t) - h(t)\right]\psi_2,$$
$$\psi_3'' = \left(2c - \tfrac{1}{4}ak^2\right)\psi_1\psi_3 + bk^2\psi_2\psi_3 + \left[\tfrac{1}{4}k^2f(t) - \tfrac{1}{16}k^4g(t) - h(t)\right]\psi_3,$$

где $A = \frac{1}{8}\left[4c - (a+b)k^2\right]$.

Существует более общее точное решение вида

$$w(x,t)=\psi_1(t)+\psi_2(t)\cos(kx)+\psi_3(t)\sin(kx)+\psi_4(t)\cos(\tfrac12 kx)+\psi_5(t)\sin(\tfrac12 kx),$$

где $k=\sqrt{-3c/b}$.

4°. *Частный случай*: $a/b=-\frac43$, $bc>0$.

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t)=\psi_1(t)+\psi_2(t)\operatorname{ch}(kx)+\psi_3(t)\operatorname{ch}(\tfrac12 kx),\qquad k=\sqrt{3c/b}.$$

Здесь функции $\psi_n=\psi_n(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\psi_1''&=c\psi_1^2-bk^2\psi_2^2+\bigl(A-\tfrac14 bk^2\bigr)\psi_3^2-h(t)\psi_1-p(t),\\
\psi_2''&=(2c+ak^2)\psi_1\psi_2+A\psi_3^2-\bigl[k^2f(t)+k^4g(t)+h(t)\bigr]\psi_2,\\
\psi_3''&=\bigl(2c+\tfrac14 ak^2\bigr)\psi_1\psi_3-k^2\psi_2\psi_3-\bigl[\tfrac14 k^2f(t)+\tfrac1{16}k^4g(t)+h(t)\bigr]\psi_3,
\end{aligned}$$

где $A=\frac18\bigl[4c+(a+b)k^2\bigr]$.

Существует более общее точное решение вида

$$w(x,t)=\psi_1(t)+\psi_2(t)\operatorname{ch}(kx)+\psi_3(t)\operatorname{sh}(kx)+\psi_4(t)\operatorname{ch}(\tfrac12 kx)+\psi_5(t)\operatorname{sh}(\tfrac12 kx),$$

где $k=\sqrt{3c/b}$.

⦿ *Литература для уравнения* 10.2.2.8: V. A. Galaktionov (1995).

**9.** $$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac34\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-a(t)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-b(t)\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-c(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-d(t)\frac{\partial w}{\partial x}-e(t)w-f(t).$$

Существует решение с обобщенным разделением переменных в виде полинома четвертой степени по $x$:

$$w(x,t)=\varphi_4(t)x^4+\varphi_3(t)x^3+\varphi_2(t)x^2+\varphi_1(t)x+\varphi_0(t).$$

⦿ *Литература*: V. A. Galaktionov (1995).

**10.** $$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=f(t)w\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+g(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+h(t)\frac{\partial w}{\partial x}+p(t)w+q(t).$$

Решение с обобщенным разделением переменных в виде полинома четвертой степени по $x$:

$$w(x,t)=\varphi_4(t)x^4+\varphi_3(t)x^3+\varphi_2(t)x^2+\varphi_1(t)x+\varphi_0(t),$$

где функции $\varphi_n=\varphi_n(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\varphi_4''&=(24f\varphi_4+p)\varphi_4,\\
\varphi_3''&=(24f\varphi_4+p)\varphi_3+4h\varphi_4,\\
\varphi_2''&=(24f\varphi_4+p)\varphi_2+12g\varphi_4+3h\varphi_3,\\
\varphi_1''&=(24f\varphi_4+p)\varphi_1+6g\varphi_3+2h\varphi_2,\\
\varphi_0''&=(24f\varphi_4+p)\varphi_2+2g\varphi_2+h\varphi_1+q.
\end{aligned}$$

► *О других уравнениях с квадратичной нелинейностью см. разд. 10.2.1.*

### 10.2.3. Другие уравнения

**1.** $$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+bw\ln w+\bigl[f(x)+g(t)\bigr]w.$$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t)=\varphi(t)\psi(x),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned}
\varphi_{tt}''-\bigl[b\ln\varphi+g(t)+C\bigr]\varphi&=0,\\
a\psi_{xxxx}''''+\bigl[b\ln\psi+f(x)-C\bigr]\psi&=0,
\end{aligned}$$

$C$ — произвольная постоянная.

**2.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + f(x)w\ln w + \big[bf(x)t + g(x)\big]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = e^{-bt}\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''''_{xxxx} + f(x)\varphi\ln\varphi + \big[g(x) - b^2\big]\varphi = 0.$$

**3.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + f\left(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + g(t).$

$1^\circ$. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = C_1t^2 + C_2t + \int_{t_0}^{t}(t-\tau)g(\tau)\,d\tau + \varphi(x),$$

где $C_1$, $C_2$, $t_0$ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''''_{xxxx} + f\big(x,\varphi'_x\big) - 2C_1 = 0,$$

порядок которого можно понизить с помощью подстановки $u(x) = \varphi'_x$.

$2^\circ$. Замена $w = U(x,t) + \displaystyle\int_0^t (t-\tau)g(\tau)\,d\tau$ приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + f\left(x,\ \frac{\partial U}{\partial x}\right).$$

**4.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + f\left(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bw + g(t).$

$1^\circ$. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(x),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} - b\varphi - g(t) = 0,$$
$$a\psi''''_{xxxx} + f\big(x,\psi'_x\big) + b\psi = 0.$$

Решение первого уравнения для $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) = C_1\,\mathrm{ch}(kt) + C_2\,\mathrm{sh}(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t g(\tau)\,\mathrm{sh}\big[k(t-\tau)\big]\,d\tau \quad \text{при} \quad b = k^2 > 0,$$
$$\varphi(t) = C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t g(\tau)\sin\big[k(t-\tau)\big]\,d\tau \quad \text{при} \quad b = -k^2 < 0,$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные.

$2^\circ$. Подстановка $w = U(x,t) + \varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ описана в п. $1^\circ$, приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + f\left(x,\ \frac{\partial U}{\partial x}\right) + bU.$$

**5.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^3}{\partial x^3}\left[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] - a^2\dfrac{f'(w)}{f^3(w)} + b.$

Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$\int f(w)\,dw = at - \frac{1}{24}bx^4 + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

## 10.3. Уравнения, содержащие смешанные производные

### 10.3.1. Уравнение Кадомцева — Петвиашвили

**1.** $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}-6w\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+a\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0.$

*Уравнение Кадомцева — Петвиашвили в канонической форме.* Возникает в теории длинных слабонелинейных волн на поверхности жидкости, распространяющихся вдоль оси $x$, причем изменение по $y$ является достаточно медленным.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=C_1^2 w\bigl(C_1 x+6C_1\varphi(t),\ \pm C_1^2 y+C_2,\ C_1^3 t+C_3\bigr)+\varphi_t'(t),$$

где $C_1$, $C_2$, $C_3$ — произвольные постоянные, а $\varphi(t)$ — произвольная функция, также будут решениями этого уравнения.

2°. Не зависящие от времени решения удовлетворяют уравнению Буссинеска 10.2.1.2 (см. также 10.2.1.1). Не зависящие от $y$ решения удовлетворяют уравнению Кортевега — де Фриза 9.1.1.1.

3°. Односолитонное решение:

$$w(x,y,t)=-2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\bigl[1+Ae^{kx+kpy-k(k^2+ap^2)t}\bigr],$$

где $A$, $k$, $p$ — произвольные постоянные.

4°. Двухсолитонное решение:

$$w(x,y,t)=-2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\bigl(1+A_1e^{\eta_1}+A_2e^{\eta_2}+A_1A_2Be^{\eta_1+\eta_2}\bigr),$$

$$\eta_i=k_ix+k_ip_iy-k_i(k_i^2+ap_i^2)t,\quad B=\frac{3(k_1-k_2)^2-a(p_1-p_2)^2}{3(k_1+k_2)^2-a(p_1-p_2)^2},$$

где $A_1$, $A_2$, $k_1$, $k_2$, $p_1$, $p_2$ — произвольные постоянные.

5°. $N$-солитонное решение:

$$w(x,y,t)=-2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\det\mathbf{A},$$

где $N\times N$-матрица $\mathbf{A}$ имеет элементы

$$A_{nm}=\delta_{nm}+f_n(y,t)\frac{\exp[(p_n+q_m)x]}{p_n+q_m},\qquad \delta_{nm}=\begin{cases}1 & \text{при } n=m,\\ 0 & \text{при } n\neq m,\end{cases}$$

$$f_n(y,t)=C_n\exp\bigl[\sqrt{3/a}\,(q_n^2-p_n^2)y+4(p_n^3+q_n^3)t\bigr],\qquad n,m=1,\,2,\,\ldots,\,N,$$

в которых $p_n$, $q_m$, $C_n$ — произвольные постоянные ($C_n>0$).

6°. Рациональные решения:

$$w(x,y,t)=-2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln(x+py-ap^2t),$$

$$w(x,y,t)=-2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\left[(x+p_1y-ap_1^2t)(x+p_2y-ap_2^2t)+\frac{12}{a(p_1-p_2)^2}\right],$$

где $p$, $p_1$, $p_2$ — произвольные постоянные.

7°. Двумерный солитон, убывающий по степенному закону (при $a=-1$):

$$w(x,y,t)=4\frac{(\widetilde{x}+\beta\widetilde{y})^2-\gamma^2(\widetilde{y})^2-3/\gamma^2}{\bigl[(\widetilde{x}+\beta\widetilde{y})^2+\gamma^2(\widetilde{y})^2+3/\gamma^2\bigr]^2},\quad \widetilde{x}=x-(\beta^2+\gamma^2)t,\quad \widetilde{y}=y+2\beta t,$$

где $\beta$, $\gamma$ — произвольные постоянные.

8°. «Двумерное» решение:

$$w=U(z,t)+\tfrac{1}{6}a\lambda^2,\qquad z=x+\lambda y,$$

где $\lambda$ — произвольная постоянная, а функция $U=U(z,t)$ описывается уравнением третьего порядка вида 9.1.4.1:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial^3 U}{\partial z^3}-6U\frac{\partial U}{\partial z}=\varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция. При $\varphi=0$ имеем уравнение Кортевега — де Фриза 9.1.1.1.

9°. «Двумерное» решение:

$$w = V(\xi, t), \quad \xi = x + C_1 y - aC_1^2 t,$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, а функция $V = V(\xi, t)$ описывается уравнением третьего порядка вида 9.1.4.1:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^3 V}{\partial \xi^3} - 6V\frac{\partial V}{\partial \xi} = \varphi(t),$$

которое содержит произвольную функцию $\varphi(t)$. При $\varphi = 0$ имеем уравнение Кортевега — де Фриза 9.1.1.1.

10°. «Двумерное» решение:

$$w(x, y, t) = u(\eta, t), \quad \eta = x + \frac{y^2}{4at},$$

где функция $u(\eta, t)$ описывается уравнением третьего порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3} - 6u\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{2t}u = \psi(t),$$

которое содержит произвольную функцию $\psi(t)$. При $\psi = 0$ имеем цилидрическое уравнение Кортевега — де Фриза 9.1.2.1.

11°. Существует вырожденное решение, квадратичное по $x$:

$$w = x^2\varphi(y, t) + x\psi(y, t) + \chi(y, t).$$

12°. Уравнение Кадомцева — Петвиашвили интегрируется методом обратной задачи рассеяния. Всякая быстро убывающая при $x \to +\infty$ функция $F(x, z; y, t)$, удовлетворяющая одновременно двум линейным уравнениям

$$\sqrt{\frac{a}{3}}\,\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial t} + 4\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial z^3}\right) = 0$$

порождает решение уравнения Кадомцева — Петвиашвили в виде

$$w = -2\frac{d}{dx}K(x, x; y, t),$$

где $K = K(x, z; y, t)$ — решение линейного интегрального уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко

$$K(x, z; y, t) + F(x, z; y, t) + \int_x^\infty K(x, s; y, t)F(s, z; y, t)\,ds = 0.$$

Переменные $y$ и $t$ входят как параметры.

⊙ *Литература для уравнения* 10.3.1.1: Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили (1970), В. С. Дрюма (1974), В. Е. Захаров, А. Б. Шабат (1974), И. М. Кричевер, С. П. Новиков (1978), R. S. Johnson (1979), В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский (1980), Ф. Калоджеро, А. Дегасперис (1985, стр. 60–61), М. Абловиц, Х. Сигур (1987, стр. 227–229, 262), В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов (2000), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 605–606).

**2.** $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + a\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + bw\frac{\partial w}{\partial x}\right) + c\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$

*Ненормированное уравнение Кадомцева — Петвиашвили*. Преобразование $w = -\frac{6a}{b}U(x, y, \tau)$, $\tau = at$ приводит к уравнению вида 10.3.1.1:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} - 6U\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{c}{a}\,\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

### 10.3.2. Стационарные уравнения гидродинамики (уравнения Навье — Стокса)

**1.** $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial x}(\Delta w)-\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y}(\Delta w)=\nu\Delta\Delta w, \qquad \Delta w=\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$

**Предварительные замечания.** К данному уравнению сводятся двумерные стационарные уравнения вязкой несжимаемой жидкости

$$\begin{aligned} u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+u_2\frac{\partial u_1}{\partial y}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\Delta u_1,\\ u_1\frac{\partial u_2}{\partial x}+u_2\frac{\partial u_2}{\partial y}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\Delta u_2,\\ \frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}&=0\end{aligned}$$

путем введения функции тока $w$ по формулам $u_1=\frac{\partial w}{\partial y}$, $u_2=-\frac{\partial w}{\partial x}$ с последующим исключением давления из первых двух уравнений (с помощью перекрестного дифференцирования и вычитания).

$1^\circ$. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$\begin{aligned} w_1&=-w(y,x),\\ w_2&=w(C_1x+C_2,\,C_1y+C_3)+C_4,\\ w_3&=w(x\cos\alpha+y\sin\alpha,\,-x\sin\alpha+y\cos\alpha),\end{aligned}$$

где $C_1,\ldots,C_4$, $\alpha$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

$2^\circ$. Любое решение уравнения Пуассона $\Delta w=C$ является также решением исходного уравнения (это — «невязкие» решения). Об использовании этих решений в гидродинамике идеальной несжимаемой жидкости см. книги Г. Ламба (1947), Л. И. Седова (1966), Л. Г. Лойцянского (1973), М. А. Лаврентьева, Б. В. Шабата (1973), Дж. Бэтчелора (1973).

$3^\circ$. Точные решения в виде функции одного аргумента или суммы функций разных аргументов:

$$\begin{aligned} w(y)&=C_1y^3+C_2y^2+C_3y+C_4,\\ w(x,y)&=C_1x^2+C_2x+C_3y^2+C_4y+C_5,\\ w(x,y)&=C_1\exp(-\lambda y)+C_2y^2+C_3y+C_4+\nu\lambda x,\\ w(x,y)&=C_1\exp(\lambda x)-\nu\lambda x+C_2\exp(\lambda y)+\nu\lambda y+C_3,\\ w(x,y)&=C_1\exp(\lambda x)+\nu\lambda x+C_2\exp(-\lambda y)+\nu\lambda y+C_3,\end{aligned}$$

где $C_1,\ldots,C_5$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

$4^\circ$. Точные решения с обобщенным разделением переменных:

$$\begin{aligned} w(x,y)&=A(kx+\lambda y)^3+B(kx+\lambda y)^2+C(kx+\lambda y)+D,\\ w(x,y)&=6\nu x(y+\lambda)^{-1}+A(y+\lambda)^3+B(y+\lambda)^{-1}+C(y+\lambda)^{-2}+D,\\ w(x,y)&=Ae^{-\lambda(y+kx)}+B(y+kx)^2+C(y+kx)+\nu\lambda(k^2+1)x+D,\\ w(x,y)&=Ae^{\lambda y+\beta x}+Be^{\gamma x}+\nu\gamma y+\frac{\nu}{\lambda}\gamma(\beta-\gamma)x+C,\qquad \gamma=\pm\sqrt{\lambda^2+\beta^2},\\ w(x,y)&=(Ax+B)e^{-\lambda y}+\nu\lambda x+C,\\ w(x,y)&=\bigl[A\,\mathrm{sh}(\beta x)+B\,\mathrm{ch}(\beta x)\bigr]e^{-\lambda y}+\frac{\nu}{\lambda}(\beta^2+\lambda^2)x+C,\\ w(x,y)&=\bigl[A\sin(\beta x)+B\cos(\beta x)\bigr]e^{-\lambda y}+\frac{\nu}{\lambda}(\lambda^2-\beta^2)x+C,\end{aligned}$$

где $A$, $B$, $C$, $D$, $k$, $\beta$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

**Специальный случай.** Полагая в пятом решении $A=-\nu\lambda$, $B=C=0$, $\lambda=\sqrt{k/\nu}$, получим $w=\sqrt{k\nu}\,x\bigl[1-\exp\bigl(-\sqrt{k/\nu}\,y\bigr)\bigr]$. Это решение описывает стационарное движение вязкой жидкости, вызванное движением точек поверхности $y=0$ со скоростью $u_1|_{y=0}=kx$.

$5^\circ$. Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по $x$:

$$w(x,y)=F(y)x+G(y), \tag{1}$$

где функции $F=F(y)$ и $G=G(y)$ описывается автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$F'_yF''_{yy}-FF'''_{yyy}=\nu F''''_{yyyy}, \tag{2}$$

$$G'_yF''_{yy}-FG'''_{yyy}=\nu G''''_{yyyy}. \tag{3}$$

В результате однократного интегрирования получим систему уравнений третьего порядка

$$(F'_y)^2 - FF''_{yy} = \nu F'''_{yyy} + A, \tag{4}$$

$$G'_y F'_y - FG''_{yy} = \nu G'''_{yyy} + B, \tag{5}$$

где $A$, $B$ — произвольные постоянные. Порядок автономного уравнения (4) может быть понижен на единицу.

Уравнение (2) имеет частные решения:

$$F(y) = ay + b, \tag{6}$$

$$F(y) = 6\nu(y+a)^{-1}, \tag{7}$$

$$F(y) = ae^{-\lambda y} + \lambda\nu, \tag{8}$$

где $a$, $b$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

В общем случае уравнение (5) подстановкой $U = G'_y$ приводится к линейному неоднородному уравнению второго порядка

$$\nu U''_{yy} + FU'_y - F'_y U + B = 0, \qquad \text{где} \quad U = G'_y. \tag{9}$$

Соответствующее однородное уравнение (при $B = 0$) имеет два линейно независимых частных решения:

$$U_1 = \begin{cases} F''_{yy} & \text{при } F''_{yy} \not\equiv 0, \\ F & \text{при } F''_{yy} \equiv 0, \end{cases} \quad U_2 = U_1 \int \frac{\Phi\,dy}{U_1^2}, \qquad \text{где} \quad \Phi = \exp\biggl(-\frac{1}{\nu}\int F\,dy\biggr); \tag{10}$$

(Первое частное решение однородного уравнения следует из сопоставления уравнений (2) и (9) при $B = 0$.) Поэтому общие решения уравнений (9) и (3) определяются формулами (см. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001 *a*):

$$U = C_1U_1 + C_2U_2 + C_3\biggl(U_2\int\frac{U_1}{\Phi}\,dy - U_1\int\frac{U_2}{\Phi}\,dy\biggr), \quad G = \int U\,dy + C_4, \quad C_3 = -\frac{B}{\nu}. \tag{11}$$

Общее решение уравнения (3), соответствующее частному решению (7), имеет вид

$$G(y) = \tilde C_1(y+a)^3 + \tilde C_2 + \tilde C_3(y+a)^{-1} + \tilde C_4(y+a)^{-2},$$

где $\tilde C_1$, $\tilde C_2$, $\tilde C_3$, $\tilde C_4$ — произвольные постоянные (они выражаются через $C_1, \ldots, C_4$).

Общие решения уравнения (3), соответствующее частным решениям (6) и (8), определяются по формулам (10), (11).

**Специальный случай.** Решение вида (1) при $G(y) = kF(y)$ описывает ламинарное движение жидкости в плоском канале с пористыми стенками. В этом случае уравнение (3) выполняется в силу уравнения (2).

6°. Точное решение (обобщает решение из п. 5°):

$$w(x,y) = F(z)x + G(z), \qquad z = y + kx,$$

где функции $F = F(z)$ и $G = G(z)$ описывается автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$F'_z F''_{zz} - FF'''_{zzz} = \nu(k^2+1)F''''_{zzzz}, \tag{12}$$

$$G'_z F''_{zz} - FG'''_{zzz} = \nu(k^2+1)G''''_{zzzz} + 4k\nu F'''_{zzz} + \frac{2k}{k^2+1}FF''_{zz}. \tag{13}$$

В результате однократного интегрирования получим систему уравнений третьего порядка

$$(F'_z)^2 - FF''_{zz} = \nu(k^2+1)F'''_{zzz} + A, \tag{14}$$

$$G'_z F'_z - FG''_{zz} = \nu(k^2+1)G'''_{zzz} + \psi(z) + B, \tag{15}$$

где $A$, $B$ — произвольные постоянные, а функция $\psi(z)$ определяется формулой

$$\psi(z) = 4k\nu F''_{zz} + \frac{2k}{k^2+1}\int FF''_{zz}\,dz.$$

Порядок автономного уравнения (14) может быть понижен на единицу.

Уравнение (12) имеет частные решения:

$$F(z) = az + b, \quad z = y + kx,$$

$$F(z) = 6\nu(k^2+1)(z+a)^{-1},$$

$$F(z) = ae^{-\lambda z} + \lambda\nu(k^2+1),$$

где $a$, $b$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

В общем случае уравнение (15) подстановкой $U = G'_z$ приводится к линейному неоднородному уравнению второго порядка, которое при $\psi = B = 0$ (т. е. в однородном случае) имеет частное решение

$$U = \begin{cases} F''_{zz} & \text{при } F''_{zz} \not\equiv 0, \\ F & \text{при } F''_{zz} \equiv 0. \end{cases}$$

Поэтому его общее решение можно выразить в квадратурах (см. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001 *a*).

7°. Автомодельное решение:

$$w = \int F(z)\,dz + C_1, \quad z = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right),$$

где функция $F$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$3\nu(F'_z)^2 - 2F^3 + 12\nu F^2 + C_2F + C_3 = 0, \tag{16}$$

где $C_1$, $C_2$, $C_3$ — произвольные постоянные. Общее решение уравнения (16) можно записать в неявном виде (его можно выразить в эллиптических функциях Вейерштрасса).

8°. Уравнение имеет точное решение вида

$$w = a\ln|x| + \int V(z)\,dz + C_1, \quad z = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right).$$

Значению $a = 0$ соответствует автомодельное решение (16).

9°. О других точных решениях см. уравнение 10.3.2.4.

⦿ *Литература для уравнения* 10.3.2.1: A. S. Berman (1953), В. В. Пухначев (1960), R. Berker (1963), Л. Г. Лойцянский (1973, стр. 491–493), А. Д. Полянин (2001 *d*), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 333–336).

**2.** $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w) - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w) = \nu\Delta\Delta w + f(y), \qquad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$

**Предварительные замечания.** К данному уравнению путем введения функции тока $w$ по формулам $u_1 = \frac{\partial w}{\partial y}$, $u_2 = -\frac{\partial w}{\partial x}$ сводится система уравнений

$$\begin{aligned} u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta u_1 + F(y), \\ u_1\frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_2}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta u_2, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

описывающая плоское течение вязкой несжимаемой жидкости под действием поперечной силы. Здесь $f(y) = F'_y(y)$.

Случай $F(y) = a\sin(\lambda y)$ соответствует модели А. Н. Колмогорова, которая используется для описания докритических и переходных режимов (от ламинарного течения к турбулентному).

1°. Точное решение в виде функции одного аргумента:

$$w(y) = -\frac{1}{6\nu}\int_0^y (y-z)^3 f(z)\,dz + C_1y^3 + C_2y^2 + C_3y + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов для произвольной $f(y)$:

$$\begin{aligned} w(x,y) &= -\frac{1}{2\nu}\int_0^y (y-z)^2\Phi(z)\,dz + C_1e^{-\lambda y} + C_2y^2 + C_3y + C_4 + \nu\lambda x, \\ \Phi(z) &= e^{-\lambda z}\int e^{\lambda z}f(z)\,dz, \end{aligned}$$

где $C_1, \ldots, C_4$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

**Специальный случай.** В случае $f(y) = a\beta\cos(\beta y)$, что соответствует $F(y) = a\sin(\beta y)$, из предыдущей формулы при $C_1 = C_2 = C_4 = 0$, $B = -\nu\lambda$ можно получить решение

$$w(x,y) = -\frac{a}{\beta^2(B^2 + \nu^2\beta^2)}\bigl[B\sin(\beta y) + \nu\beta\cos(\beta y)\bigr] + Cy - Bx,$$

где $B$, $C$ — произвольные постоянные. Это решение описывает течение с периодической структурой.

$3^\circ$. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов при $f(y) = Ae^{\lambda y} + Be^{-\lambda y}$:

$$w(x,y) = C_1 e^{-\lambda x} + C_2 x - \frac{A}{\lambda^3(C_2+\nu\lambda)} e^{\lambda y} + \frac{B}{\lambda^3(C_2-\nu\lambda)} e^{-\lambda y} - \nu\lambda y,$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные.

$4^\circ$. Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по $x$:

$$w(x,y) = \varphi(y)x + \psi(y),$$

где функции $\varphi = \varphi(y)$ и $\psi = \psi(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$\varphi'_y \varphi''_{yy} - \varphi\varphi'''_{yyy} = \nu\varphi''''_{yyyy}, \tag{1}$$

$$\psi'_y \varphi''_{yy} - \varphi\psi'''_{yyy} = \nu\psi''''_{yyyy} + f(y). \tag{2}$$

После однократного интегрирования получим систему уравнений третьего порядка

$$(\varphi'_y)^2 - \varphi\varphi''_{yy} = \nu\varphi'''_{yyy} + A, \tag{3}$$

$$\psi'_y\varphi'_y - \varphi\psi''_{yy} = \nu\psi'''_{yyy} + \int f(y)\,dy + B, \tag{4}$$

где $A$, $B$ — произвольные постоянные. Порядок автономного уравнения (3) может быть понижен на единицу.

Уравнение (1) имеет частные решения:

$$\varphi(y) = ay + b,$$
$$\varphi(y) = 6\nu(y+a)^{-1},$$
$$\varphi(y) = ae^{-\lambda y} + \lambda\nu,$$

где $a$, $b$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

В общем случае уравнение (4) подстановкой $U = \psi'_y$ приводится к линейному неоднородному уравнению второго порядка

$$\nu U''_{yy} + \varphi U'_y - \varphi'_y U + F = 0, \qquad \text{где} \quad U = \psi'_y, \quad F = \int f(y)\,dy + B. \tag{5}$$

Соответствующее однородное уравнение (при $F = 0$) имеет два линейно независимых частных решения:

$$U_1 = \begin{cases} \varphi''_{yy} & \text{при } \varphi \neq ay+b, \\ \varphi & \text{при } \varphi = ay+b, \end{cases} \quad U_2 = U_1 \int \frac{\Phi\,dy}{U_1^2}, \qquad \text{где} \quad \Phi = \exp\left(-\frac{1}{\nu}\int \varphi\,dy\right);$$

(Первое частное решение однородного уравнения следует из сопоставления уравнений (1) и (5) при $F = 0$.) Поэтому общие решения уравнений (5) и (2) определяются формулами (см. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001 *a*):

$$U = C_1U_1 + C_2U_2 + \frac{1}{\nu}U_1\int U_2\frac{F}{\Phi}\,dy - \frac{1}{\nu}U_2\int U_1\frac{F}{\Phi}\,dy, \quad \psi = \int U\,dy + C_4.$$

⦿ *Литература для уравнения* 10.3.2.2: О. М. Белоцерковский, А. М. Опарин (2000, стр. 106–110), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 336–337).

**3.** $\displaystyle \left(\frac{\partial w}{\partial y} + ax\right)\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w) - \left(\frac{\partial w}{\partial x} - ay\right)\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w) + 2a\Delta w = \nu\Delta\Delta w.$

Это уравнение используется для описания движения вязкой несжимаемой жидкости, возникающегося между двумя параллельными дисками, которые сближаются (см. A. Craik, 1989 и уравнение 10.3.3.2 в стационарном случае).

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = -w(y,\,x),$$
$$w_2 = w(x+C_1,\,y+C_2) - aC_2x + aC_1y + C_3,$$
$$w_3 = w(x\cos\beta + y\sin\beta,\,-x\sin\beta + y\cos\beta),$$

где $C_1$, $C_2$, $C_3$, $\beta$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

$2^\circ$. Любое решение уравнения Пуассона $\Delta w = C$ является также решением исходного уравнения (это — «невязкие» решения). Об уравнении Пуассона см., например, книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

$3^\circ$. Решение, зависящее от одной пространственной переменной $x$:

$$w(x) = \int_0^x (x-\xi)U(\xi)\,d\xi + C_1 x + C_2,$$

где $C_1, C_2$ — произвольные постоянные, а функция $U(x)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$axU'_x + 2aU = \nu U''_{xx}.$$

Общее решение этого уравнения приведено в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

Аналогичным образом строится решение вида $w = w(y)$.

$4^\circ$. Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по $x$:

$$w(x,y) = F(y)x + G(y), \tag{1}$$

где функции $F = F(y)$ и $G = G(y)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением четвертого порядка

$$F'_y F''_{yy} - FF'''_{yyy} + a(3F''_{yy} + yF'''_{yyy}) = \nu F''''_{yyyy}, \tag{2}$$
$$F''_{yy} G'_y - FG'''_{yyy} + a(2G''_{yy} + yG'''_{yyy}) = \nu G''''_{yyyy}, \tag{3}$$

Уравнение (2) решается независимо от уравнения (3). Если $F = F(y)$ — решение уравнения (2), то функция

$$F_1 = F(y+C) - aC,$$

где $C$ — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

Интегрируя уравнения (2) и (3) по $y$, получим

$$(F'_y)^2 - FF''_{yy} + a(2F'_y + yF''_{yy}) = \nu F'''_{yyy} + C_1, \tag{4}$$
$$F'_y G'_y - FG''_{yy} + a(G'_y + yG''_{yy}) = \nu G'''_{yyy} + C_2, \tag{5}$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные.

Уравнение (2) имеет частное (вырожденное) решение

$$F(y) = Ay + B, \tag{6}$$

где $A$, $B$ — произвольные постоянные. Подставив (6) в (5) и сделав замену $Q = G''_{yy}$, получаем линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$-\bigl[(A-a)y + B\bigr]Q'_y + 2aQ = \nu Q''_{yy},$$

общее решение которого приведено в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

Аналогичным образом строится решение вида $w(x,y) = f(x)y + g(x)$.

$5^\circ$. Отметим, что уравнение (2) имеет частные решения

$$F = ay + C_1 \exp\bigl(-2\sqrt{a/\nu}\,y\bigr) + C_2 \exp\bigl(2\sqrt{a/\nu}\,y\bigr) \quad \text{при} \quad a > 0,$$
$$F = ay + C_1 \cos\bigl(2\sqrt{-a/\nu}\,y\bigr) + C_2 \sin\bigl(2\sqrt{-a/\nu}\,y\bigr) \quad \text{при} \quad a < 0,$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные.

⊙ *Литература для уравнения* 10.3.2.3: S. N. Aristov, I. M. Gitman (2002), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 611–612).

**4.** $\displaystyle \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial r}(\Delta w) - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\Delta w) = \nu\Delta\Delta w, \qquad \Delta w = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}.$

**Предварительные замечания.** К данному уравнению сводится уравнение 10.3.2.1 путем перехода к полярной системе координат [с центром в точке $(x_0, y_0)$, где $x_0$ и $y_0$ — любые] по формулам:

$$x = r\cos\theta + x_0, \qquad y = r\sin\theta + y_0 \qquad \text{(прямое преобразование)},$$
$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{y-y_0}{x-x_0} \qquad \text{(обратное преобразование)}.$$

Радиальная и тангенциальная компоненты скорости жидкости выражаются через функцию тока $w$ следующим образом: $u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}$, $u_\theta = -\frac{\partial w}{\partial r}$.

$1^\circ$. Любое решение уравнения Пуассона $\Delta w = C$ является также решением исходного уравнения (это — «невязкие» решения).

$2^\circ$. Точные решения в виде функции одного аргумента и суммы функций разных аргументов:

$$w(r) = C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4,$$
$$w(r,\theta) = A\nu\theta + C_1 r^{A+2} + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4,$$

где $A, C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

$3^\circ$. Точное решение:

$$w = b\theta + U(\xi), \quad \xi = \theta + a\ln r, \tag{1}$$

где функция $U(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\nu(a^2+1)U_\xi^{(4)} - a(b+4\nu)U'''_{\xi\xi\xi} + 2(b+2\nu)U''_{\xi\xi} + 2U'_\xi U''_{\xi\xi} = 0.$$

После однократного интегрирования имеем

$$\nu(a^2+1)U'''_{\xi\xi\xi} - a(b+4\nu)U''_{\xi\xi} + 2(b+2\nu)U'_\xi + (U'_\xi)^2 = C_1, \tag{2}$$

где $C_1$ — произвольная постоянная. Уравнение (2) является автономным и не зависит явно от $U$. Преобразование

$$z = U'_\xi, \quad u(z) = U''_{\xi\xi}$$

приводит его к уравнению Абеля второго рода

$$\nu(a^2+1)uu'_z - a(b+4\nu)u + 2(b+2\nu)z + z^2 = C_1, \tag{3}$$

которое интегрируется в квадратурах, например, в случаях $a = 0$ и $b = -4\nu$:

$$\nu u^2 + \tfrac{2}{3}z^3 + 2(b+2\nu)z^2 = 2C_1 z + C_2 \quad \text{при} \quad a = 0,$$
$$\nu(a^2+1)u^2 + \tfrac{2}{3}z^3 - 4\nu z^2 = 2C_1 z + C_2 \quad \text{при} \quad b = -4\nu.$$

Четыре других случая разрешимости уравнения (3) описаны в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) [сначала надо привести (3) к каноническому виду заменой $u = k\bar{u}$, где $k = \mathrm{const}$].

Отметим, что значениям $a = b = 0$ в (1)–(3) соответствует решение, зависящее только от угловой координаты $\theta$ (это решение можно записать в неявном виде, см. уравнение 10.3.2.1, п. $7^\circ$).

$4^\circ$. Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по $\theta$:

$$w(r,\theta) = f(r)\theta + g(r).$$

Здесь функции $f = f(r)$ и $g = g(r)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-f'_r\mathbf{L}(f) + f[\mathbf{L}(f)]'_r = \nu r\mathbf{L}^2(f), \tag{4}$$
$$-g'_r\mathbf{L}(f) + f[\mathbf{L}(g)]'_r = \nu r\mathbf{L}^2(g), \tag{5}$$

где $\mathbf{L}(f) = r^{-1}(rf'_r)'_r$.

Частное решения уравнения (4) имеет вид $f(r) = C_1\ln r + C_2$. Соответствующее ему уравнение (5) подстановкой $Q = \mathbf{L}(g)$ сводится к линейному уравнению второго порядка, которое легко интегрируется (поскольку имеет частное решение $Q = 1$). В результате получим точное решение системы (4)–(5):

$$f(r) = C_1\ln r + C_2, \quad g(r) = C_3 r^2 + C_4\ln r + C_5\int\left[\int rQ(r)\,dr\right]\frac{dr}{r} + C_6,$$
$$Q(r) = \int r^{(C_2/\nu)-1}\exp\left(\frac{C_1}{2\nu}\ln^2 r\right)dr,$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные.

⊙ *Литература для уравнения* 10.3.2.4: G. B. Jeffery (1915), В. В. Пухначев (1960), R. Berker (1963), Л. Г. Лойцянский (1973), А. Д. Полянин (2001 *d*), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 337–338).

**5.** $$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial \mathbf{E}w}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial \mathbf{E}w}{\partial z}\right) - \frac{2}{r^2}\frac{\partial w}{\partial z}\mathbf{E}w = \nu\mathbf{E}^2 w,$$

$$\text{где} \quad \mathbf{E}w = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \quad \mathbf{E}^2 w = \mathbf{E}(\mathbf{E}w).$$

**Предварительные замечания.** К данному уравнению сводятся стационарные уравнения Навье — Стокса, записанные для осесимметричного случая в цилиндрической системе координат, в результате введения функции тока $w$ по формулам $u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial z}$, $u_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}$, где $u_r$ и $u_z$ — радиальная и осевая компоненты скорости жидкости, $r = \sqrt{x^2+y^2}$ [см. Дж. Хаппель, Г. Бреннер (1976, стр. 124)].

$1^\circ$. Любая функция $w = w(r, z)$, являющаяся решением линейного уравнения второго порядка $\mathrm{E}w = 0$, будет также решением рассматриваемого уравнения.

$2^\circ$. Точные решения в виде функции одного аргумента и суммы функций разных аргументов:

$$w(r) = C_1 r^4 + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4,$$
$$w(r, z) = A\nu z + C_1 r^{A+2} + C_2 r^4 + C_3 r^2 + C_4,$$

где $A, C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

$3^\circ$. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(r, z) = r^2 f(z),$$

где функция $f = f(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением ($C$ — произвольная постоянная):

$$\nu f'''_{zzz} + 2 f f''_{zz} - (f'_z)^2 = C. \qquad (1)$$

Данное решение описывает осесимметричное натекание жидкости на стенку (течение в окрестности критической точки).

$4^\circ$. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной $r$ (обобщает решение из п. $3^\circ$):

$$w(r, z) = r^2 f(z) + Az + B,$$

где $A$, $B$ — произвольные постоянные, а функция $f = f(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (1).

$5^\circ$. Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по $z$:

$$w(r, z) = \varphi(r) z + \psi(r).$$

Здесь $\varphi = \varphi(r)$ и $\psi = \psi(r)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi[\mathbf{L}(\varphi)]'_r - \varphi'_r \mathbf{L}(\varphi) - 2r^{-1}\varphi\,\mathbf{L}(\varphi) = \nu r \mathbf{L}^2(\varphi), \qquad (2)$$
$$\varphi[\mathbf{L}(\psi)]'_r - \psi'_r \mathbf{L}(\varphi) - 2r^{-1}\varphi\,\mathbf{L}(\psi) = \nu r \mathbf{L}^2(\psi), \qquad (3)$$

где $\mathbf{L}(\varphi) = \varphi''_{rr} - r^{-1}\varphi'_r$.

Частное решение уравнения (2):

$$\varphi(r) = C_1 r^2 + C_2,$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные. В этом случае замена $U = \mathbf{L}(\psi)$ приводит (3) к линейному уравнению второго порядка.

⦿ *Литература для уравнения* 10.3.2.5: Г. Шлихтинг (1974, стр. 99–100), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 338–339).

**6.** $$\frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial \mathbf{E}w}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial \mathbf{E}w}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(2\operatorname{ctg}\theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{2}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)\mathbf{E}w = \nu \mathbf{E}^2 w,$$

$$\text{где}\ \ \mathbf{E}w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right), \qquad \mathbf{E}^2 w = \mathbf{E}(\mathbf{E}w).$$

**Предварительные замечания.** К данному уравнению сводятся стационарные уравнения Навье — Стокса, записанные для осесимметричного случая в сферической системе координат, в результате введения функции тока $w$ по формулам $u_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial w}{\partial \theta}$, $u_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial r}$, где $u_r$ и $u_\theta$ — радиальная и угловая компоненты скорости жидкости, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$1^\circ$. Любая функция $w = w(r, \theta)$, являющаяся решением линейного уравнения второго порядка $\mathrm{E}w = 0$, будет также решением рассматриваемого уравнения.

**Частный случай.** Точное решение:

$$w(r, \theta) = (C_1 r^2 + C_2 r^{-1}) \sin^2\theta,$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные.

$2^\circ$. Автомодельное решение:

$$w(r, \theta) = \nu r f(\xi), \quad \xi = \cos\theta,$$

где функция $f = f(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$2(1 - \xi^2) f'_\xi - f^2 + 4\xi f + C_1 \xi^2 + C_2 \xi + C_3 = 0; \qquad (1)$$

$C_1, C_2, C_3$ — произвольные постоянные.

Уравнение Риккати (1) заменой $f = -2(1-\xi^2)g'_\xi/g$ сводится к гипергеометрическому уравнению

$$(1-\xi^2)^2 g''_{\xi\xi} + (C_1\xi^2 + C_2\xi + C_3)g = 0,$$

которое при $C_1\xi^2 + C_2\xi + C_3 = A(1-\xi^2)$ имеет степенные решения

$$g = (1+\xi)^k, \quad k = \tfrac{1}{2}\bigl(1 \pm \sqrt{1+A}\bigr).$$

**Специальный случай.** В задаче Ландау об истечении осесимметричной затопленной струи-источника решение уравнения (1) дается формулой

$$f(\xi) = \frac{2(1-\xi^2)}{B-\xi} \qquad (C_1 = C_2 = C_3 = 0),$$

где постоянную интегрирования $B$ можно выразить через импульс струи.

3°. Обтекание твердой сферической частицы радиуса $a$ однородным поступательным потоком со скоростью $U_0$ характеризуется граничными условиями

$$w = \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = a, \qquad w \to \tfrac{1}{2}U_0 r^2 \sin^2\theta \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{2}$$

Асимптотическое решение рассматриваемого уравнения с граничными условиями (2) при малых числах Рейнольдса $\mathrm{Re} = aU_0/\nu \to 0$ в области $r/a \leqslant O(\mathrm{Re}^{-1})$ имеет вид

$$\frac{w}{U_0} = \frac{1}{4}(r-a)^2\left(2+\frac{a}{r}\right)\sin^2\theta + \frac{3}{32}\,\mathrm{Re}\,(r-a)^2\left[2+\frac{a}{r}-\left(2+\frac{a}{r}+\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta\right]\sin^2\theta + O(\mathrm{Re}^2).$$

При $\mathrm{Re} = aU_0/\nu \to 0$ в области $r/a \geqslant O(\mathrm{Re}^{-1})$ справедливо разложение Озеена:

$$\frac{w}{U_0} = \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta - \frac{3}{2\,\mathrm{Re}}(1+\cos\theta)\bigl[1 - e^{-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,r(1-\cos\theta)}\bigr] + O(1).$$

⊙ *Литература для уравнения* 10.3.2.6: Н. А. Слезкин (1934), I. Proudman, J. R. A. Pearson (1957), М. Ван-Дайк (1967, стр. 205–215), А. Найфэ (1976, стр. 39, 154–159), Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц (1986), Л. Г. Лойцянский (1973, стр. 494-495).

### 10.3.3. Нестационарные уравнения гидродинамики (уравнения Навье — Стокса)

**1.** $$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta w) + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w) - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w) = \nu\Delta\Delta w, \qquad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

**Предварительные замечания.** К данному уравнению сводятся двумерные нестационарные уравнения вязкой несжимаемой жидкости

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta u_1,\\
\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_2}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta u_2,\\
\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} &= 0,
\end{aligned}$$

путем введения функции тока $w$ по формулам $u_1 = \frac{\partial w}{\partial y}$, $u_2 = -\frac{\partial w}{\partial x}$ с последующим исключением давления из первых двух уравнений (с помощью перекрестного дифференцирования и вычитания).

О стационарных решениях см. уравнение 10.3.2.1.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$\begin{aligned}
w_1 &= -w(y,\,x,\,t),\\
w_2 &= w(C_1x + C_2,\; C_1y + C_3,\; C_1^2t + C_4) + C_5,\\
w_3 &= w(x\cos\alpha + y\sin\alpha,\; -x\sin\alpha + y\cos\alpha,\; t),\\
w_4 &= w(x\cos\beta t + y\sin\beta t,\; -x\sin\beta t + y\cos\beta t,\; t) - \tfrac{1}{2}\beta(x^2+y^2),\\
w_5 &= w(x+\varphi(t),\; y+\psi(t),\; t) + \psi'_t(t)x - \varphi'_t(t)y + \chi(t),
\end{aligned}$$

где $C_1, \ldots, C_4, \alpha, \beta$ — произвольные постоянные, а $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ — произвольные функции, также будут решениями этого уравнения.

$2^\circ$. Любое решение уравнения Пуассона $\Delta w = C$ является также решением исходного уравнения (это — «невязкие» решения). Об уравнении Пуассона см., например, книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

Пример невязкого решения, содержащего пять произвольных функций:

$$w = \varphi(t)x^2 + \psi(t)xy + [C - \varphi(t)]y^2 + a(t)x + b(t)y + c(t).$$

$3^\circ$. Решение, зависящее от одной пространственной переменной:

$$w = W(x,t),$$

где функция $W$ удовлетворяет линейному неоднородному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial W}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = f_1(t)x + f_0(t),$$

$f_1(t)$, $f_0(t)$ — произвольные функции. Аналогичному уравнению удовлетворяет решение вида $w = V(y,t)$.

$4^\circ$. Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по $x$:

$$w(x,y,t) = F(y,t)x + G(y,t), \tag{1}$$

где функции $F(y,t)$ и $G = G(y,t)$ определяются из системы одномерных уравнений четвертого порядка

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t \partial y^2} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - F\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = \nu\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^3 G}{\partial t \partial y^2} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - F\frac{\partial^3 G}{\partial y^3} = \nu\frac{\partial^4 G}{\partial y^4}. \tag{3}$$

Уравнение (2) решается независимо от уравнения (3). Если $F = F(y,t)$ — решение уравнения (2), то функции

$$F_1 = F(y + \psi(t), t) + \psi'_t(t),$$
$$F_2 = C_1 F(C_1 y + C_1 C_2 t + C_3, C_1^2 t + C_4) + C_2,$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, а $C_1$, ..., $C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

Интегрируя уравнения (2) и (3) по $y$, получим

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - F\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} + f_1(t), \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t \partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y} - F\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 G}{\partial y^3} + f_2(t), \tag{5}$$

где $f_1(t)$, $f_2(t)$ — произвольные функции. Уравнение (5) линейно относительно функции $G$. Подстановка

$$G = \int U\,dy - hF + h'_t y, \qquad \text{где} \quad U = U(y,t), \quad F = F(y,t), \tag{6}$$

где функция $h = h(t)$ удовлетворяет линейному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$h''_{tt} - f_1(t)h = f_2(t), \tag{7}$$

приводит (5) к линейному однородному уравнению второго порядка параболического типа

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + F\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}U. \tag{8}$$

Таким образом, если известно частное решение уравнения (2) или (4), то определение функции $G$ сводится к решению линейных уравнений (7)–(8) с последующим интегрированием по формуле (6).

Точные решения уравнения (2) приведены в табл. 13 (два более сложных решения этого уравнения указаны в конце п. $4^\circ$). Обыкновенные дифференциальные уравнения в двух последних строках табл. 13, определяющие решение типа бегущей волны и автомодельное решение, являются автономными и поэтому допускают понижение порядка.

Общее решение линейного неоднородного уравнения (7) можно найти по формуле

$$h(t) = C_1 h_1(t) + C_2 h_2(t) + \frac{1}{W_0}\left[h_2(t)\int h_1(t) f_2(t)\,dt - h_1(t)\int h_2(t) f_2(t)\,dt\right], \tag{9}$$

ТАБЛИЦА 13
Точные решения уравнений (2) и (4); $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции; $A$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

| № | Функция $F=F(y,t)$ (или общий вид решения) | Функция $f_1(t)$ в уравнении (4) | Определяющие коэффициенты (или определяющее уравнение) |
|---|---|---|---|
| 1 | $F=\varphi(t)y+\psi(t)$ | $f_1(t)=\varphi'_t+\varphi^2$ | — |
| 2 | $F=\frac{6\nu}{y+\psi(t)}+\psi'_t(t)$ | $f_1(t)=0$ | — |
| 3 | $F=A\exp\bigl[-\lambda y-\lambda\psi(t)\bigr]+\psi'_t(t)+\nu\lambda$ | $f_1(t)=0$ | — |
| 4 | $F=Ae^{-\beta t}\sin[\lambda y+\lambda\psi(t)]+\psi'_t(t)$ | $f_1(t)=Be^{-2\beta t}$ | $\beta=\nu\lambda^2$, $B=A^2\lambda^2>0$ |
| 5 | $F=Ae^{-\beta t}\cos[\lambda y+\lambda\psi(t)]+\psi'_t(t)$ | $f_1(t)=Be^{-2\beta t}$ | $\beta=\nu\lambda^2$, $B=A^2\lambda^2>0$ |
| 6 | $F=Ae^{\beta t}\,\mathrm{sh}[\lambda y+\lambda\psi(t)]+\psi'_t(t)$ | $f_1(t)=Be^{2\beta t}$ | $\beta=\nu\lambda^2$, $B=A^2\lambda^2>0$ |
| 7 | $F=Ae^{\beta t}\,\mathrm{ch}[\lambda y+\lambda\psi(t)]+\psi'_t(t)$ | $f_1(t)=Be^{2\beta t}$ | $\beta=\nu\lambda^2$, $B=-A^2\lambda^2<0$ |
| 8 | $F=\psi(t)e^{\lambda y}-\frac{Ae^{\beta t-\lambda y}}{4\lambda^2\psi(t)}+\frac{\psi'_t(t)}{\lambda\psi(t)}-\nu\lambda$ | $f_1(t)=Ae^{\beta t}$ | $\beta=2\nu\lambda^2$ |
| 9 | $F=F(\xi)$, $\xi=y+\lambda t$ | $f_1(t)=A$ | $-A+\lambda F''_{\xi\xi}+(F'_\xi)^2-FF''_{\xi\xi}=\nu F'''_{\xi\xi\xi}$ |
| 10 | $F=t^{-1/2}\bigl[U(\xi)-\frac{1}{2}\xi\bigr]$, $\xi=yt^{-1/2}$ | $f_1(t)=At^{-2}$ | $\frac{3}{4}-A-2U'_\xi+(U'_\xi)^2-UU''_{\xi\xi}=\nu U'''_{\xi\xi\xi}$ |

где $h_1=h_1(t)$ и $h_2=h_2(t)$ фундаментальные решения соответствующего однородного уравнения при $f_2\equiv 0$, $W_0=h_1(h_2)'_t-h_2(h_1)'_t$ — детерминант Вронского (в данном случае $W_0=\mathrm{const}$). В табл. 14 приведены фундаментальные решения однородного уравнения (7), соответствующие указанным в табл. 13 точным решениям уравнения (2).

Уравнение (8) для любой функции $F=F(y,t)$ имеет тривиальное решение. Выражения в табл. 13–14 и формулы (6) и (9) при $U=0$ описывают некоторые точные решения вида (1). Более широкий класс точных решений можно получить, если рассмотреть нетривиальные решения уравнения (8).

В табл. 15 приведены преобразования, упрощающие уравнение (8) для некоторых из указанных в табл. 13 решений уравнения (2) [или (4)]. Видно, что в первых двух случаях решения уравнения (8) выражаются через решения линейного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами. Еще в трех случаях уравнение (8) приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Третье уравнение в табл. 15 имеет частные решения ($B_1$, $B_2$ — произвольные постоянные):

$$Z(\eta)=B_1+B_2\int\Phi(\eta)\,d\eta,\quad \Phi(\eta)=\exp\biggl(\frac{A}{\nu\lambda}e^{\eta}-\eta\biggr),$$
$$Z(\eta,t)=B_1\nu\lambda^2t+B_1\int\Phi(\eta)\biggl[\int\frac{d\eta}{\Phi(\eta)}\biggr]\,d\eta.$$

О других точных решениях этого уравнения см. книгу А. Д. Полянин (2001 *b*), где рассматривалось более общее линейное уравнение вида $\partial_t w=f(x)\partial_{xx}w+g(x)\partial_x w$.

**Специальный случай 1.** Решение, экспоненциально зависящее от времени:

$$w(x,y,t)=f(y)x+e^{-\lambda t}\int g(y)\,dy,$$

где функции $f=f(y)$ и $g=g(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(f'_y)^2-ff''_{yy}=\nu f'''_{yyy}+C_1,$$
$$-\lambda g+gf'_y-fg'_y=\nu g''_{yy}+C_2,$$

$C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные.

ТАБЛИЦА 14

Фундаментальная система решений, определяющая общее решение (9) неоднородного уравнения (7) [номер в первом столбце соответствует номеру точного решения из табл. 13].

| № | Фундаментальная система решений | Вронскиан $W_0$ | Обозначения и замечания |
|---|---|---|---|
| 1 | $h_1 = \Phi(t)$, $h_2 = \Phi(t) \int \frac{dt}{\Phi^2(t)}$ | $W_0 = 1$ | $\Phi(t) = \exp\bigl[\int \varphi(t)\,dt\bigr]$ |
| 2 | $h_1 = 1$, $h_2 = t$ | $W_0 = 1$ | — |
| 3 | $h_1 = 1$, $h_2 = t$ | $W_0 = 1$ | — |
| 4 | $h_1 = I_0\bigl(\frac{A\lambda}{\beta} e^{-\beta t}\bigr)$, $h_2 = K_0\bigl(\frac{A\lambda}{\beta} e^{-\beta t}\bigr)$ | $W_0 = \beta$ | $I_0(z)$, $K_0(z)$ — модифицированные функции Бесселя, $\beta = \nu\lambda^2$ |
| 5 | $h_1 = I_0\bigl(\frac{A\lambda}{\beta} e^{-\beta t}\bigr)$, $h_2 = K_0\bigl(\frac{A\lambda}{\beta} e^{-\beta t}\bigr)$ | $W_0 = \beta$ | $I_0(z)$, $K_0(z)$ — модифицированные функции Бесселя, $\beta = \nu\lambda^2$ |
| 6 | $h_1 = I_0\bigl(\frac{A\lambda}{\beta} e^{\beta t}\bigr)$, $h_2 = K_0\bigl(\frac{A\lambda}{\beta} e^{\beta t}\bigr)$ | $W_0 = -\beta$ | $I_0(z)$, $K_0(z)$ — модифицированные функции Бесселя, $\beta = \nu\lambda^2$ |
| 7 | $h_1 = J_0\bigl(\frac{A\lambda}{\beta} e^{\beta t}\bigr)$, $h_2 = Y_0\bigl(\frac{A\lambda}{\beta} e^{\beta t}\bigr)$ | $W_0 = \frac{2\beta}{\pi}$ | $J_0(z)$, $Y_0(z)$ — функции Бесселя, $\beta = \nu\lambda^2$ |
| 8 | $h_1 = I_0\bigl(\frac{2\sqrt{A}}{\beta} e^{\beta t/2}\bigr)$, $h_2 = K_0\bigl(\frac{2\sqrt{A}}{\beta} e^{\beta t/2}\bigr)$ | $W_0 = -\frac{\beta}{2}$ | $I_0(z)$, $K_0(z)$ — модифицированные функции Бесселя, $\beta = 2\nu\lambda^2$ |
| 9 | $h_1 = \operatorname{ch}(kt)$, $h_2 = \operatorname{sh}(kt)$<br>$h_1 = \cos(kt)$, $h_2 = \sin(kt)$ | $W_0 = k$<br>$W_0 = k$ | при $A = k^2 > 0$<br>при $A = -k^2 < 0$ |
| 10 | $h_1 = \lvert t\rvert^{\frac{1}{2}-\mu}$, $h_2 = \lvert t\rvert^{\frac{1}{2}+\mu}$<br>$h_1 = \lvert t\rvert^{\frac{1}{2}}$, $h_2 = \lvert t\rvert^{\frac{1}{2}} \ln\lvert t\rvert$<br>$h_1 = \lvert t\rvert^{\frac{1}{2}} \cos(\mu \ln\lvert t\rvert)$, $h_2 = \lvert t\rvert^{\frac{1}{2}} \sin(\mu\ln\lvert t\rvert)$ | $W_0 = 2\mu$<br>$W_0 = 1$<br>$W_0 = \mu$ | при $A > -\frac{1}{4}$; $\mu = \frac{1}{2}\lvert 1+4A\rvert^{\frac{1}{2}}$<br>при $A = -\frac{1}{4}$<br>при $A < -\frac{1}{4}$; $\mu = \frac{1}{2}\lvert 1+4A\rvert^{\frac{1}{2}}$ |

ТАБЛИЦА 15

Преобразования уравнения (8) для соответствующих точных решений уравнения (4) [номер в первом столбце соответствует номеру точного решения $F = F(y,t)$ в табл. 13].

| № | Преобразования уравнения (8) | Полученное уравнение |
|---|---|---|
| 1 | $U = \frac{1}{\Phi(t)} u(z,\tau)$, $\tau = \int \Phi^2(t)\,dt + C_1$,<br>$z = y\Phi(t) + \int \psi(t)\Phi(t)\,dt + C_2$, $\Phi(t) = \exp\bigl[\int \varphi(t)\,dt\bigr]$ | $\frac{\partial u}{\partial \tau} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ |
| 2 | $U = \zeta^{-3} u(\zeta, t)$, $\zeta = y + \psi(t)$ | $\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}$ |
| 3 | $U = e^{\eta} Z(\eta, t)$, $\eta = -\lambda y - \lambda\psi(t)$ | $\frac{\partial Z}{\partial t} = \nu\lambda^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \eta^2} + (\nu\lambda^2 - A\lambda e^{\eta}) \frac{\partial Z}{\partial \eta}$ |
| 9 | $U = u(\xi, t)$, $\xi = y + \lambda t$ | $\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \bigl[F(\xi) - \lambda\bigr] \frac{\partial u}{\partial \xi} - F'_\xi(\xi) u$ |
| 10 | $U = t^{-1/2} u(\xi, \tau)$, $\xi = y t^{-1/2}$, $\tau = \ln t$ | $\frac{\partial u}{\partial \tau} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + H(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \bigl[1 - H'_\xi(\xi)\bigr] u$ |

**Специальный случай 2.** Периодическое решение:

$$w(x,y,t) = f(y)x + \sin(\lambda t) \int g(y)\,dy + \cos(\lambda t) \int h(y)\,dy,$$

где функции $f = f(y)$, $g = g(y)$, $h = h(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(f'_y)^2 - ff''_{yy} = \nu f'''_{yyy} + C_1,$$
$$-\lambda h + f'_y g - fg'_y = \nu g''_{yy} + C_2,$$
$$\lambda g + f'_y h - fh'_y = \nu h''_{yy} + C_3.$$

Ниже указаны еще два точных решения уравнения (2):

$$F(y,t) = -\frac{\gamma'_t}{\gamma} y + \gamma^3 \exp\left(\nu \int \frac{dt}{\gamma^2}\right)\left(A \operatorname{ch} \frac{y}{\gamma} + B \operatorname{sh} \frac{y}{\gamma}\right),$$
$$F(y,t) = -\frac{\gamma'_t}{\gamma} y + \gamma^3 \exp\left(-\nu \int \frac{dt}{\gamma^2}\right)\left(A \cos \frac{y}{\gamma} + B \sin \frac{y}{\gamma}\right),$$

где $A$, $B$ — произвольные постоянные, $\gamma = \gamma(t)$ — произвольная функция. Первая формула, приведенная на отдельной строке после (3), позволяет обобщить эти решения и получить решения, содержащие сразу две произвольные функции.

5°. Точное решение (обобщает решение из п. 4°):

$$w(x,y,t) = F(\xi,t)x + G(\xi,t), \quad \xi = y + kx,$$

где $k$ — произвольная постоянная, а функции $F(\xi,t)$ и $G = G(\xi,t)$ определяются из системы одномерных уравнений четвертого порядка

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t \partial \xi^2} + \frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - F\frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} = \nu(k^2+1)\frac{\partial^4 F}{\partial \xi^4}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^3 G}{\partial t \partial \xi^2} + \frac{\partial G}{\partial \xi}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - F\frac{\partial^3 G}{\partial \xi^3} = \nu(k^2+1)\frac{\partial^4 G}{\partial \xi^4} + 4\nu k\frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} + \frac{2k}{k^2+1}\left(F\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \xi}\right). \tag{11}$$

Интегрируя уравнения (10) и (11) по $\xi$, получим

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \xi} + \left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)^2 - F\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = \nu(k^2+1)\frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} + f_1(t), \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t \partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{\partial G}{\partial \xi} - F\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} = \nu(k^2+1)\frac{\partial^3 G}{\partial \xi^3} + Q(\xi,t), \tag{13}$$

где $f_1(t)$ — произвольная функция, а функция $Q(\xi,t)$ описывается формулой

$$Q(\xi,t) = 4\nu k\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{2k}{k^2+1}\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{2k}{k^2+1}\int F\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}\,d\xi + f_2(t),$$

$f_2(t)$ — произвольная функция.

Уравнение (13) линейно относительно функции $G$. Подстановка $U = \frac{\partial G}{\partial \xi}$ приводит его к линейному уравнению второго порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu(k^2+1)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + F\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial F}{\partial \xi}U + Q(\xi,t). \tag{14}$$

Таким образом, если известно частное решение уравнения (10) или (12), то определение функции $G$ сводится к линейному уравнению второго порядка (14). Уравнение (10) с помощью сжатия независимых переменных $\xi = (k^2+1)\zeta$, $t = (k^2+1)\tau$ приводится к уравнению (2), в котором $y$ и $t$ следует заменить на $\zeta$ и $\tau$ [точные решения уравнения (2) описаны в табл. 13].

6°. Точные решения:

$$w(x,y,t) = Az^3 + Bz^2 + Cz + \psi'_t(t)x, \quad z = y + kx + \psi(t);$$
$$w(x,y,t) = Ae^{-\lambda z} + Bz^2 + Cz + \nu\lambda(k^2+1)x + \psi'_t(t)x,$$

где $A$, $B$, $C$, $k$, $\lambda$ — произвольные постоянные, $\psi(t)$ — произвольная функция.

7°. Решение с обобщенным разделением переменных [частный случай решения вида (1)]:

$$w(x,y,t) = e^{-\lambda y}\big[f(t)x + g(t)\big] + \varphi(t)x + \psi(t)y,$$
$$f(t) = C_1 E(t), \quad E(t) = \exp\left[\nu\lambda^2 t - \lambda\int \varphi(t)\,dt\right],$$
$$g(t) = C_2 E(t) - C_1 E(t)\int \psi(t)\,dt,$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции; $C_1$, $C_2$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

8°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y,t) = e^{-\lambda y}\bigl[A(t)e^{\beta x} + B(t)e^{-\beta x}\bigr] + \varphi(t)x + \psi(t)y,$$
$$A(t) = C_1 \exp\left[\nu(\lambda^2+\beta^2)t - \beta\int\psi(t)\,dt - \lambda\int\varphi(t)\,dt\right],$$
$$B(t) = C_2 \exp\left[\nu(\lambda^2+\beta^2)t + \beta\int\psi(t)\,dt - \lambda\int\varphi(t)\,dt\right],$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции; $C_1$, $C_2$, $\lambda$, $\beta$ — произвольные постоянные.

9°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y,t) = e^{-\lambda y}\bigl[A(t)\sin(\beta x) + B(t)\cos(\beta x)\bigr] + \varphi(t)x + \psi(t)y,$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции, $\lambda$, $\beta$ — произвольные постоянные, а функции $A(t)$ и $B(t)$ удовлетворяют линейной неавтономной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} A'_t &= \bigl[\nu(\lambda^2-\beta^2) - \lambda\varphi(t)\bigr]A + \beta\psi(t)B,\\ B'_t &= \bigl[\nu(\lambda^2-\beta^2) - \lambda\varphi(t)\bigr]B - \beta\psi(t)A. \end{aligned} \tag{15}$$

Общее решение системы (15) имеет вид

$$A(t) = \exp\left[\nu(\lambda^2-\beta^2)t - \lambda\int\varphi\,dt\right]\left[C_1\sin\left(\beta\int\psi\,dt\right) + C_2\cos\left(\beta\int\psi\,dt\right)\right],$$
$$B(t) = \exp\left[\nu(\lambda^2-\beta^2)t - \lambda\int\varphi\,dt\right]\left[C_1\cos\left(\beta\int\psi\,dt\right) - C_2\sin\left(\beta\int\psi\,dt\right)\right],$$

где $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ — произвольные функции; $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные. В частности, при $\varphi = \dfrac{\nu}{\lambda}(\lambda^2-\beta^2)$, $\psi = a$ получим периодическое решение

$$\begin{aligned} A(t) &= C_1\sin(a\beta t) + C_2\cos(a\beta t),\\ B(t) &= C_1\cos(a\beta t) - C_2\sin(a\beta t). \end{aligned}$$

10°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y,t) = A(t)\exp(k_1x + \lambda_1y) + B(t)\exp(k_2x + \lambda_2y) + \varphi(t)x + \psi(t)y,$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции, $k_1$, $\lambda_1$, $k_2$, $\lambda_2$ — произвольные постоянные, связанные одним из двух соотношений:

$$\begin{aligned} &k_1^2+\lambda_1^2 = k_2^2+\lambda_2^2 &&\text{(первое семейство решений)},\\ &k_1\lambda_2 = k_2\lambda_1 &&\text{(второе семейство решений)}, \end{aligned}$$

а функции $A(t)$ и $B(t)$ удовлетворяют линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} A'_t &= \bigl[\nu(k_1^2+\lambda_1^2) + \lambda_1\varphi(t) - k_1\psi(t)\bigr]A,\\ B'_t &= \bigl[\nu(k_2^2+\lambda_2^2) + \lambda_2\varphi(t) - k_2\psi(t)\bigr]B. \end{aligned}$$

Эти уравнения легко интегрируются:

$$A(t) = C_1\exp\left[\nu(k_1^2+\lambda_1^2)t + \lambda_1\int\varphi(t)\,dt - k_1\int\psi(t)\,dt\right],$$
$$B(t) = C_2\exp\left[\nu(k_2^2+\lambda_2^2)t + \lambda_2\int\varphi(t)\,dt - k_2\int\psi(t)\,dt\right].$$

11°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y,t) = \bigl[C_1\sin(\lambda x) + C_2\cos(\lambda x)\bigr]\bigl[A(t)\sin(\beta y) + B(t)\cos(\beta y)\bigr] + \varphi(t)x,$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция, $C_1$, $C_2$, $\lambda$, $\beta$ — произвольные постоянные, а функции $A(t)$ и $B(t)$ удовлетворяют линейной неавтономной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} A'_t &= -\nu(\lambda^2+\beta^2)A - \beta\varphi(t)B,\\ B'_t &= -\nu(\lambda^2+\beta^2)B + \beta\varphi(t)A. \end{aligned} \tag{16}$$

Общее решение системы (16) имеет вид

$$A(t) = \exp\bigl[-\nu(\lambda^2+\beta^2)t\bigr]\left[C_3 \sin\left(\beta \int \varphi\,dt\right) + C_4 \cos\left(\beta \int \varphi\,dt\right)\right], \quad \varphi = \varphi(t),$$

$$B(t) = \exp\bigl[-\nu(\lambda^2+\beta^2)t\bigr]\left[-C_3 \cos\left(\beta \int \varphi\,dt\right) + C_4 \sin\left(\beta \int \varphi\,dt\right)\right],$$

где $C_3$, $C_4$ — произвольные постоянные.

12°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y,t) = \bigl[C_1 \operatorname{sh}(\lambda x) + C_2 \operatorname{ch}(\lambda x)\bigr]\bigl[A(t)\sin(\beta y) + B(t)\cos(\beta y)\bigr] + \varphi(t)x,$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция, $C_1$, $C_2$, $\lambda$, $\beta$ — произвольные постоянные, а функции $A(t)$ и $B(t)$ удовлетворяют линейной неавтономной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} A'_t &= \nu(\lambda^2-\beta^2)A - \beta\varphi(t)B,\\ B'_t &= \nu(\lambda^2-\beta^2)B + \beta\varphi(t)A. \end{aligned} \tag{17}$$

Общее решение системы (17) имеет вид

$$A(t) = \exp\bigl[\nu(\lambda^2-\beta^2)t\bigr]\left[C_3 \sin\left(\beta \int \varphi\,dt\right) + C_4 \cos\left(\beta \int \varphi\,dt\right)\right], \quad \varphi = \varphi(t),$$

$$B(t) = \exp\bigl[\nu(\lambda^2-\beta^2)t\bigr]\left[-C_3 \cos\left(\beta \int \varphi\,dt\right) + C_4 \sin\left(\beta \int \varphi\,dt\right)\right],$$

где $C_3$, $C_4$ — произвольные постоянные.

13°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = u(z,t) + \varphi(t)x + \psi(t)y, \qquad z = kx + \lambda y,$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции, $k$, $\lambda$ — произвольные постоянные, а функция $u(z,t)$ описывается линейным уравнением четвертого порядка:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} + \bigl[k\psi(t) - \lambda\varphi(t)\bigr]\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = \nu(k^2+\lambda^2)\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}.$$

Преобразование

$$U(\xi,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \xi = z - \int \bigl[k\psi(t) - \lambda\varphi(t)\bigr]\,dt$$

приводит его к линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu(k^2+\lambda^2)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}.$$

14°. Существуют «двумерные» решения вида

$$w(x,y,t) = W(\rho_1,\rho_2) + c_1 x + c_2 y, \quad \rho_1 = a_1 x + a_2 y + a_3 t, \quad \rho_2 = b_1 x + b_2 y + b_3 t.$$

15°. «Двумерное» решение ($a$, $b$, $c$ — произвольные постоянные):

$$w(x,y,t) = Z(X,Y), \quad X = \frac{x+a}{\sqrt{t+c}}, \quad Y = \frac{y+b}{\sqrt{t+c}},$$

где функция $Z = Z(X,Y)$ описывается уравнением

$$-\bar{\Delta} Z + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y} - \frac{1}{2}X\right)\frac{\partial}{\partial X}(\bar{\Delta} Z) - \left(\frac{\partial Z}{\partial X} + \frac{1}{2}Y\right)\frac{\partial}{\partial Y}(\bar{\Delta} Z) = \nu\bar{\Delta}\bar{\Delta} Z, \quad \bar{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}.$$

16°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = \Psi(\xi,\eta), \ \xi = t^{-1/2}\bigl[x\cos(k\ln t) - y\sin(k\ln t)\bigr], \ \eta = t^{-1/2}\bigl[x\sin(k\ln t) + y\cos(k\ln t)\bigr],$$

где $k$ — произвольная постоянная, а функция $\Psi(\xi,\eta)$ описывается уравнением

$$-\widetilde{\Delta}\Psi + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} - \frac{1}{2}\xi - k\eta\right)\frac{\partial}{\partial \xi}\widetilde{\Delta}\Psi - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\eta - k\xi\right)\frac{\partial}{\partial \eta}\widetilde{\Delta}\Psi = \nu\widetilde{\Delta}\widetilde{\Delta}\Psi, \quad \widetilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}.$$

$17^\circ$. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t)=\frac{\varphi'_t(x^2-y^2+2\varphi xy)}{2(1+\varphi^2)}+\frac{y-\varphi x}{1+\varphi^2}F(\zeta,t)-2G(\zeta,t),\qquad \zeta=x+\varphi y,$$

где $\varphi=\varphi(t)$ — произвольная функция, а функции $F=F(\zeta,t)$ и $G=G(\zeta,t)$ описываются уравнениями

$$\nu(1+\varphi^2)\frac{\partial^4 F}{\partial\zeta^4}-F\frac{\partial^3 F}{\partial\zeta^3}+\frac{\partial F}{\partial\zeta}\frac{\partial^2 F}{\partial\zeta^2}-\frac{2\varphi\varphi'_t}{1+\varphi^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\zeta^2}-\frac{\partial^3 F}{\partial\zeta^2\partial t}=0,\tag{18}$$

$$\nu(1+\varphi^2)\frac{\partial^4 G}{\partial\zeta^4}-F\frac{\partial^3 G}{\partial\zeta^3}+\frac{\partial^2 F}{\partial\zeta^2}\frac{\partial G}{\partial\zeta}-\frac{2\varphi\varphi'_t}{1+\varphi^2}\frac{\partial^2 G}{\partial\zeta^2}-\frac{\partial^3 G}{\partial\zeta^2\partial t}=\frac{\varphi'_t}{(1+\varphi^2)^2}\zeta\frac{\partial^2 F}{\partial\zeta^2}.\tag{19}$$

Уравнение (18) решается независимо от уравнения (19). Если $F=F(\zeta,t)$ — решение уравнения (18), то функция

$$F_1=F(y+\sigma(t),t)-\sigma'_t(t),$$

где $\sigma(t)$ — произвольная функция, также будет решением этого уравнения.

Интегрируя уравнения (18) и (19) по $\zeta$, получим

$$\nu(1+\varphi^2)\frac{\partial^3 F}{\partial\zeta^3}-F\frac{\partial^2 F}{\partial\zeta^2}+\left(\frac{\partial F}{\partial\zeta}\right)^2-\frac{2\varphi\varphi'_t}{1+\varphi^2}\frac{\partial F}{\partial\zeta}-\frac{\partial^2 F}{\partial\zeta\partial t}=\psi_1(t),$$

$$\nu(1+\varphi^2)\frac{\partial^3 G}{\partial\zeta^3}-F\frac{\partial^2 G}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial F}{\partial\zeta}\frac{\partial G}{\partial\zeta}-\frac{2\varphi\varphi'_t}{1+\varphi^2}\frac{\partial G}{\partial\zeta}-\frac{\partial^2 G}{\partial\zeta\partial t}=\frac{\varphi'_t}{(1+\varphi^2)^2}\left(\zeta\frac{\partial F}{\partial\zeta}-F\right)+\psi_2(t),$$

где $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ — произвольные функции. Замена $u=\frac{\partial G}{\partial\zeta}$ приводит последнее уравнение к линейному уравнению второго порядка параболического типа (при известной $F$).

Отметим, что уравнение (18) допускает частные решения вида

$$F(\zeta,t)=a(t)\zeta+b(t),$$

$$F(\zeta,t)=a(t)e^{-\lambda\zeta}+\frac{a'_t(t)}{\lambda a(t)}+\frac{2\varphi\varphi'_t}{\lambda(1+\varphi^2)}-\nu\lambda(1+\varphi^2),$$

где $a(t)$, $b(t)$ — произвольные функции, $\lambda$ — произвольная постоянная.

$18^\circ$. О других точных решениях см. уравнение 10.3.3.3.

⊙ *Литература для уравнения* 10.3.3.1: N. Rott (1956), В. В. Пухначев (1960, 2006), R. Berker (1963), Л. Г. Лойцянский (1973), Л. В. Овсянников (1978), B. J. Cantwell (1978), S. P. Lloyd (1981), D. K. Ludlow, P. A. Clarkson, A. P. Bassom (1999), А. Д. Полянин (2001 *d*), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 340–346), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 616–623).

**2.** $\displaystyle \frac{\partial}{\partial t}(\Delta w)+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+ax\right)\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w)-\left(\frac{\partial w}{\partial x}-ay\right)\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w)+2a\Delta w=\nu\Delta\Delta w.$

**Предварительные замечания.** К данному уравнению сводится система уравнений

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+u_2\frac{\partial u_1}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\Delta u_1,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_2}{\partial x}+u_2\frac{\partial u_2}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\Delta u_2,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}=2a,$$

описывающая движение вязкой несжимаемой жидкости между двумя параллельными дисками, которые сближаются. Здесь $a$ — относительная скорость дисков, $u_1$ и $u_2$ — горизонтальные компоненты скорости жидкости, $u_3=-2az$ — вертикальная компонента скорости жидкости (направленная перпендикулярно плоскостям дисков). Введение функции тока $w$ по формулам $u_1=ax+\frac{\partial w}{\partial y}$, $u_2=ay-\frac{\partial w}{\partial x}$ с последующим исключением давления $p$ (с помощью перекрестного дифференцирования) приводит к рассматриваемому уравнению. При $a=0$ см. уравнение 10.3.3.1.

О стационарных решениях см. уравнение 10.3.2.3.

$1^\circ$. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=-w(y,\,x,\,t),$$

$$w_2=w(x\cos\beta+y\sin\beta,\,-x\sin\beta+y\cos\beta,\,t),$$

$$w_3=w\bigl(x+\varphi(t),\,y+\psi(t),\,t+C\bigr)+\bigl[\psi'_t(t)-a\psi(t)\bigr]x+\bigl[a\varphi(t)-\varphi'_t(t)\bigr]y+\chi(t),$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ — произвольные функции, а $C$, $\beta$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

$2^\circ$. Любое решение уравнения Пуассона $\Delta w = C$ является также решением исходного уравнения (это — «невязкие» решения). Об уравнении Пуассона см., например, книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

$3^\circ$. Решение, зависящее от одной пространственной переменной $x$:

$$w(x,t) = \int_0^x (x-\xi)U(\xi,t)\,d\xi + f_1(t)x + f_0(t),$$

где $f_1(t)$, $f_0(t)$ — произвольные функции, а функция $U(x,t)$ удовлетворяет линейному неоднородному параболическому уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t} + ax\frac{\partial U}{\partial x} + 2aU = \nu\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

Это уравнение можно свести к линейному уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами (см. А. Д. Полянин, 2001 *b*).

Аналогичным образом строится решение вида $w = w(y,t)$.

$4^\circ$. Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по $x$:

$$w(x,y,t) = F(y,t)x + G(y,t), \tag{1}$$

где функции $F(y,t)$ и $G = G(y,t)$ определяются из системы одномерных уравнений четвертого порядка

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t\partial y^2} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - F\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} + a\left(3\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + y\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\right) = \nu\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^3 G}{\partial t\partial y^2} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - F\frac{\partial^3 G}{\partial y^3} + a\left(2\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + y\frac{\partial^3 G}{\partial y^3}\right) = \nu\frac{\partial^4 G}{\partial y^4}. \tag{3}$$

Уравнение (2) решается независимо от уравнения (3). Если $F = F(y,t)$ — решение уравнения (2), то функция

$$F_1 = F\bigl(y+\psi(t),t\bigr) + \psi_t'(t) - a\psi(t),$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, также будет решением этого уравнения.

Интегрируя уравнения (2) и (3) по $y$, получим

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - F\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + a\left(2\frac{\partial F}{\partial y} + y\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) = \nu\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} + f_1(t), \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y} - F\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + a\left(\frac{\partial G}{\partial y} + y\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right) = \nu\frac{\partial^3 G}{\partial y^3} + f_2(t), \tag{5}$$

где $f_1(t)$, $f_2(t)$ — произвольные функции.

Уравнение (2) имеет частное решение

$$F(y,t) = f_1(t)y + f_0(t), \tag{6}$$

где $f_1 = f_1(t)$, $f_0 = f_0(t)$ — произвольные функции. Подставив (6) в (5), получим линейное уравнение, порядок которого можно понизить на две единицы:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - \bigl[(f_1 - a)y + f_0\bigr]\frac{\partial Q}{\partial y} + 2aQ = \nu\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}, \qquad Q = \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}.$$

Уравнение для $Q$ можно свести к линейному уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами (см. А. Д. Полянин, 2001 *b*).

Отметим, что уравнение (2) имеет частные решения

$$\begin{aligned} F(y,t) &= ay + \bigl[C_1\exp(-\lambda y) + C_2\exp(\lambda y)\bigr]\exp\bigl[(\nu\lambda^2 - 4a)t\bigr],\\ F(y,t) &= ay + \bigl[C_1\cos(\lambda y) + C_2\sin(\lambda y)\bigr]\exp\bigl[-(\nu\lambda^2 + 4a)t\bigr], \end{aligned} \tag{7}$$

где $C_1$, $C_2$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

Аналогичным образом строится решение вида $w(x,y,t) = f(x,t)y + g(x,t)$.

$5^\circ$. О других точных решениях см. уравнение 10.3.3.4.

**Замечание.** Результаты пп. $1^\circ$–$4^\circ$ за исключение формул (7) сохраняются, если в исходном уравнении $a = a(t)$ — произвольная функция (в этом случае в п. $1^\circ$ надо положить $C = 0$).

⊙ *Литература для уравнения* 10.3.3.2: A. Craik (1989), S. N. Aristov, I. M. Gitman (2002), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 624–625).

**3.** $\dfrac{\partial Q}{\partial t}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \theta}\dfrac{\partial Q}{\partial r}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}\dfrac{\partial Q}{\partial \theta}=\nu\Delta Q,\quad Q=\Delta w=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial w}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}.$

**Предварительные замечания.** К данному уравнению сводится уравнение 10.3.3.1 путем перехода к полярной системе координат [с центром в точке $(x_0, y_0)$, где $x_0$ и $y_0$ — любые] по формулам:

$$x=r\cos\theta+x_0,\qquad y=r\sin\theta+y_0\qquad\text{(прямое преобразование)},$$
$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},\quad \operatorname{tg}\theta=\frac{y-y_0}{x-x_0}\qquad\text{(обратное преобразование)}.$$

Радиальная и тангенциальная компоненты скорости жидкости выражаются через функцию тока $w$ следующим образом: $u_r=\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}$, $u_\theta=-\frac{\partial w}{\partial r}$.

1°. Решение с осевой симметрией
$$w=W(r,t)$$
описывается линейным неоднородным уравнением теплопроводности
$$\frac{\partial W}{\partial t}-\frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial W}{\partial r}\right)=\varphi(t)\ln r+\psi(t),\tag{1}$$
где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по $\theta$:
$$w(r,\theta,t)=f(r,t)\theta+g(r,t),\tag{2}$$
где функции $f=f(r,t)$ и $g=g(r,t)$ описываются уравнениями
$$\mathbf{L}(f_t)-r^{-1}f_r\mathbf{L}(f)+r^{-1}f[\mathbf{L}(f)]_r=\nu\mathbf{L}^2(f),\tag{3}$$
$$\mathbf{L}(g_t)-r^{-1}g_r\mathbf{L}(f)+r^{-1}f[\mathbf{L}(g)]_r=\nu\mathbf{L}^2(g).\tag{4}$$
Здесь индексы $r$ и $t$ обозначают частные производные по соответствующим переменным, $\mathbf{L}(f)=r^{-1}(rf_r)_r$, $\mathbf{L}^2(f)=\mathbf{L}\mathbf{L}(f)$.

Уравнение (3) имеет частное решение вида
$$f=\varphi(t)\ln r+\psi(t),$$
где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции. В этом случае уравнение (4) заменой $U=\mathbf{L}(g)$ сводится к линейному уравнению второго порядка.

**Замечание.** Уравнение (3) имеет также частное решение $f=-\dfrac{r^2}{2(t+C)}$.

3°. Рассмотрим подробнее случай $f=\psi(t)$ из п. 2°, который соответствует $w=\psi(t)\theta+g(r,t)$. Для определения функции $g$ имеем
$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\psi(t)}{r}\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right),\qquad\text{где}\quad U=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial g}{\partial r}\right).\tag{5}$$

Приведем некоторые точные решения уравнения (5):
$$U=\frac{a}{t}\exp\left[-\frac{r^2}{4\nu t}+\frac{1}{2\nu}\int\frac{\psi(t)}{t}\,dt\right]+b,$$
$$U=r^2+4\nu t-2\int\psi(t)\,dt+a,$$
$$U=r^4+p(t)r^2+q(t),\quad p(t)=16\nu t-4\int\psi(t)\,dt+a,\quad q(t)=2\int\bigl[2\nu-\psi(t)\bigr]p(t)\,dt+b,$$
где $a$, $b$ — произвольные постоянные. Второе и третье решения являются частными случаями решения вида
$$U=r^{2n}+A_{2n-2}(t)r^{2n-2}+\dots+A_2(t)r^2+A_0(t),$$
которое содержит $n$ произвольных постоянных.

Функцию $g(r,t)$ можно выразить через $U(r,t)$ по формуле
$$g(r,t)=C_1(t)\ln r+C_2(t)+\int\Phi(r,t)\,dr,\qquad \Phi(r,t)=\frac{1}{r}\int rU(r,t)\,dr,$$
где $C_1(t)$, $C_2(t)$ — произвольные функции.

4°. «Двумерное» решение:

$$w(r,\theta,t) = Ar^2t + \nu H(\xi,\eta), \quad \xi = r\cos(\theta + At^2), \quad \eta = r\sin(\theta + At^2),$$

где $A$ — произвольная постоянная, а функция $H(\xi,\eta)$ описывается уравнением

$$\widetilde{\Delta}\widetilde{\Delta}H - \frac{\partial H}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi}\widetilde{\Delta}H + \frac{\partial H}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\widetilde{\Delta}H - \frac{4A}{\nu^2} = 0, \quad \widetilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}.$$

⊙ *Литература для уравнения* 10.3.3.3: В. В. Пухначев (1960, 2006), Л. Г. Лойцянский (1973), D. K. Ludlow, P. A. Clarkson, A. P. Bassom (1999), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 346–347).

**4.** $$\boldsymbol{\frac{\partial Q}{\partial t} + ar\frac{\partial Q}{\partial r} + 2aQ + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial Q}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial Q}{\partial \theta} = \nu\Delta Q,}$$

$$\textbf{где}\ \boldsymbol{Q = \Delta w = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}.}$$

К данному уравнению сводится уравнение 10.3.3.2 путем перехода к полярной системе координат: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

1°. Решение с осевой симметрией

$$w = W(r,t),$$

описывается линейным уравнением параболического типа

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + ar\frac{\partial Q}{\partial r} + 2aQ = \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial Q}{\partial r}\right), \quad Q = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial W}{\partial r}\right).$$

2°. Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по $\theta$:

$$w(r,\theta,t) = f(r,t)\theta + g(r,t), \tag{1}$$

где функции $f = f(r,t)$ и $g = g(r,t)$ описываются уравнениями

$$\mathbf{L}(f_t) + ar[\mathbf{L}(f)]_r + 2a\mathbf{L}(f) - r^{-1}f_r\mathbf{L}(f) + r^{-1}f[\mathbf{L}(f)]_r = \nu\mathbf{L}^2(f), \tag{2}$$

$$\mathbf{L}(g_t) + ar[\mathbf{L}(g)]_r + 2a\mathbf{L}(g) - r^{-1}g_r\mathbf{L}(f) + r^{-1}f[\mathbf{L}(g)]_r = \nu\mathbf{L}^2(g). \tag{3}$$

Здесь индексы $r$ и $t$ обозначают частные производные по соответствующим переменным, $\mathbf{L}(f) = r^{-1}(rf_r)_r$, $\mathbf{L}^2(f) = \mathbf{L}\mathbf{L}(f)$.

Уравнение (2) имеет частное решение вида

$$f = \varphi(t)\ln r + \psi(t),$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции. В этом случае уравнение (3) заменой $U = \mathbf{L}(g)$ сводится к линейному уравнению второго порядка.

**5.** $$\boldsymbol{\frac{\partial \mathrm{E}w}{\partial t} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial \mathrm{E}w}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial \mathrm{E}w}{\partial z}\right) - \frac{2}{r^2}\frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{E}w = \nu\mathrm{E}^2 w,}$$

$$\textbf{где}\ \boldsymbol{\mathrm{E}w = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \quad \mathrm{E}^2 w = \mathrm{E}(\mathrm{E}w).}$$

**Предварительные замечания.** К данному уравнению сводятся нестационарные уравнения Навье — Стокса, записанные для осесимметричного случая в цилиндрической системе координат, в результате введения функции тока $w$ по формулам $u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial z}$, $u_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}$, где $u_r$ и $u_z$ — радиальная и осевая компоненты скорости жидкости, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ [см. Дж. Хаппель, Г. Бреннер (1976, стр. 124)].

1°. Любая функция $w = w(r,z,t)$, являющаяся решением линейного стационарного уравнения второго порядка $\mathrm{E}w = 0$, будет также решением рассматриваемого уравнения.

2°. Решение с осевой симметрией:

$$w = U(r,t) + \varphi(t)r^2 + \psi(t),$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции, а функция $U = U(r,t)$ описывается линейным уравнением параболического типа

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \nu r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right) = 0.$$

3°. Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по $z$:

$$w(r,z,t) = f(r,t)z + g(r,t).$$

Здесь $f = f(r,t)$ и $g = g(r,t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\mathbf{L}(f_t) + r^{-1}f[\mathbf{L}(f)]_r - r^{-1}f_r\mathbf{L}(f) - 2r^{-2}f\,\mathbf{L}(f) = \nu\mathbf{L}^2(f), \tag{1}$$

$$\mathbf{L}(g_t) + r^{-1}f[\mathbf{L}(g)]_r - r^{-1}g_r\mathbf{L}(f) - 2r^{-2}f\,\mathbf{L}(g) = \nu\mathbf{L}^2(g), \tag{2}$$

где $\mathbf{L}(f) = f_{rr} - r^{-1}f_r$; индексы снизу обозначают соответствуют частные производные.

Частное решения уравнения (1):

$$f(r,t) = C_1(t)r^2 + C_2(t),$$

где $C_1(t)$, $C_2(t)$ — произвольные функции. В этом случае замена $U = \mathbf{L}(g)$ приводит (2) к линейному уравнению второго порядка.

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 347), В. В. Пухначев (2006).

### 10.3.4. Другие уравнения

**1.** $\displaystyle \frac{\partial^3 w}{\partial t\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = f(t)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w\bigl(x+\varphi(t),t\bigr) + \varphi'_t(t),$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция, также будет решением этого уравнения.

2°. Два точных решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$w = (Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x})\exp\left[\lambda^2\int f(t)\,dt\right], \qquad w = A\sin(\lambda x + B)\exp\left[-\lambda^2\int f(t)\,dt\right],$$

где $A$, $B$, $\lambda$ — произвольные постоянные.

3°. После однократного интегрирования по $x$ получим уравнение третьего порядка

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(t)\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция.

**2.** $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}.$

Частный случай уравнения 11.4.1.2 при $n = 4$.

**3.** $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + g(x).$

Частный случай уравнения 11.4.1.3 при $n = 2$.

**4.** $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} + f(t)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + g(t)\frac{\partial}{\partial x}\left(w\frac{\partial w}{\partial x}\right) + h(t)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$

*Обобщенное уравнение Кадомцева — Петвиашвили.* Частный случай уравнения 11.4.1.9.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w\bigl(x+\varphi(t), \pm y + C, t\bigr) - \frac{\varphi'_t(t)}{g(t)},$$

где $C$ — произвольная постоянная, а $\varphi(t)$ — произвольная функция, также будут решениями этого уравнения.

2°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = u(z,t), \qquad z = x + C_1 y - C_1^2\int h(t)\,dt + C_2,$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, а функция $u(z,t)$ описывается дифференциальным уравнением третьего порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f(t)\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + g(t)u\frac{\partial u}{\partial z} = \varphi(t),$$

$\varphi(t)$ — произвольная функция.

3°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = U(\xi,t), \qquad \xi = x + \theta(t)(y + C_1)^2, \qquad \theta(t) = \left[4\int h(t)\,dt + C_2\right]^{-1},$$

где функция $U(\xi,t)$ описывается дифференциальным уравнением третьего порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t} + f(t)\frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + g(t)U\frac{\partial U}{\partial \xi} + 2h(t)\theta(t)U = \psi(t),$$

$\psi(t)$ — произвольная функция.