Из книги A. D. Polyanin and V. F. Zaitsev, «Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition», Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2011 [русский перевод].

11. Уравнения старших порядков

11.1. Уравнения, содержащие производную первого порядка по t, линейные относительно старшей производной

11.1.1. Уравнения пятого порядка

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t}+w\dfrac{\partial w}{\partial x}=a\dfrac{\partial^5 w}{\partial x^5}.$

Частный случай уравнения 11.1.3.1 при $n=5$, $b=-1$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t}-bw^k\dfrac{\partial w}{\partial x}=a\dfrac{\partial^5 w}{\partial x^5}.$

Частный случай уравнения 11.1.3.2 при $n=5$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial^5 w}{\partial x^5}+be^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 11.1.3.3 при $n=5$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial^5 w}{\partial x^5}+(b\ln w+c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 11.1.3.4 при $n=5$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial^5 w}{\partial x^5}+(b\operatorname{Arsh} w+c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 11.1.3.5 при $n=2$, $k=1$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial^5 w}{\partial x^5}+(b\operatorname{Arch} w+c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 11.1.3.6 при $n=2$, $k=1$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial^5 w}{\partial x^5}+(b\arcsin w+c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 11.1.3.7 при $n=2$, $k=1$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial^5 w}{\partial x^5}+(b\arccos w+c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 11.1.3.8 при $n=2$, $k=1$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t}+w\dfrac{\partial w}{\partial x}+a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}=b\dfrac{\partial^5 w}{\partial x^5}.$

Уравнение Кавахары. Описывает магнитоакустические волны в плазме.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=w(\pm x+C_1,\pm t+C_2),$$
$$w_2=w(x-C_3t,t)+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (в первой формуле берутся либо верхние, либо нижние знаки).

2°. Вырожденное решение:

$$w(x,t) = \frac{x + C_1}{t + C_2}.$$

3°. Решения типа бегущей волны:

$$w(x,t) = \frac{105a^2}{169b\,\mathrm{ch}^4 z} + 2C_1, \quad z = \tfrac{1}{2}kx - (18bk^5 + C_1k)t + C_2, \quad k = \sqrt{\frac{a}{13b}} \quad \text{при } ab > 0;$$

$$w(x,t) = \frac{105a^2}{169b\,\mathrm{sh}^4 z} + 2C_1, \quad z = \tfrac{1}{2}kx - (18bk^5 + C_1k)t + C_2, \quad k = \sqrt{\frac{a}{13b}} \quad \text{при } ab > 0;$$

$$w(x,t) = \frac{105a^2}{169b\cos^4 z} + 2C_1, \quad z = \tfrac{1}{2}kx - (18bk^5 + C_1k)t + C_2, \quad k = \sqrt{-\frac{a}{13b}} \quad \text{при } ab < 0,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4°. Решение типа бегущей волны при $a = 0$:

$$w(x,t) = \frac{1680b}{(x + C_1t + C_2)^4} - C_1.$$

5°. Точное решение:

$$w(x,t) = U(\zeta) + 2C_1t, \qquad \zeta = x - C_1t^2 + C_2t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $U(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением четвертого порядка (C_3 — произвольная постоянная)

$$bU''''_{\zeta\zeta\zeta\zeta} - aU''_{\zeta\zeta} - \tfrac{1}{2}U^2 - C_2U = 2C_1\zeta + C_3.$$

Частный случай $C_1 = 0$ соответствует решению типа бегущей волны.

⦿ *Литература для уравнения* 11.1.1.9: T. Kawahara (1972), Н. А. Кудряшов (1990), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 632).

10. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} + aw\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = c\frac{\partial^5 w}{\partial x^5} + kw.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x - aC_1e^{kt} + C_2, t + C_3) + C_1ke^{kt},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение:

$$w = U(z) + C_1ke^{kt}, \qquad z = x - aC_1e^{kt} + C_2t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$cU_z^{(5)} - bU'''_{zzz} - aUU'_z - C_2U'_z + kU = 0.$$

При $C_1 = 0$ имеем решение типа бегущей волны.

3°. Существует вырожденное решение, линейное по x:

$$w(x,t) = \varphi(t)x + \psi(t).$$

11. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} + a_1\frac{\partial w}{\partial x} + a_2w\frac{\partial w}{\partial x} + a_3\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_4\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + a_5w\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + a_6\frac{\partial^5 w}{\partial x^5} = 0.$

Описывает длинные волны на воде (см. P. J. Olver, 1984).

1°. Решения типа бегущей волны:

$$w(x,t) = A + C_1\exp(kx + C_2t), \qquad k = \pm\sqrt{-\frac{a_2}{a_3 + a_5}}, \quad A = -\frac{a_6k^5 + a_4k^3 + a_1k + C_2}{a_5k^3 + a_2k};$$

$$w(x,t) = A + C_1\,\mathrm{sh}(kx + C_2t + C_3), \quad k = \pm\sqrt{-\frac{a_2}{a_3 + a_5}}, \quad A = -\frac{a_6k^5 + a_4k^3 + a_1k + C_2}{a_5k^3 + a_2k};$$

$$w(x,t) = A + C_1\,\mathrm{ch}(kx + C_2t + C_3), \quad k = \pm\sqrt{-\frac{a_2}{a_3 + a_5}}, \quad A = -\frac{a_6k^5 + a_4k^3 + a_1k + C_2}{a_5k^3 + a_2k};$$

$$w(x,t) = A + C_1\sin(kx + C_2t + C_3), \quad k = \pm\sqrt{\frac{a_2}{a_3 + a_5}}, \quad A = \frac{a_6k^5 - a_4k^3 + a_1k + C_2}{a_5k^3 - a_2k},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

2°. Существуют точные решения типа бегущей волны следующих видов:

$$w(x,t) = A + \frac{B}{\operatorname{ch} z} + \frac{C}{\operatorname{ch}^2 z},$$
$$w(x,t) = A + \frac{B}{\operatorname{sh} z} + \frac{C}{\operatorname{sh}^2 z},$$
$$w(x,t) = A + B\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} + \frac{C}{\operatorname{ch}^2 z},$$
$$w(x,t) = A + \frac{B + C\operatorname{sh} z + D\operatorname{ch} z}{(E + \operatorname{ch} z)^2},$$

где $z = kx + \lambda t + \text{const}$, а постоянные A, B, C, D, E, k, λ определяются путем подстановки указанных выражений в исходное уравнение.

⊙ *Литература*: Н. А. Кудряшов, М. И. Сухарев (2001), P. Saucez, A. Vande Wouwer, W. E. Schiesser, P. Zegeling (2003).

11.1.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x+bt, w)$.

Точное решение:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = x + bt,$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aw_\xi^{(n)} - bw'_\xi + f(\xi, w) = 0.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + bw\ln w + f(t)w$.

1°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \exp\left[Ae^{bt}x + Be^{bt} + \frac{aA^n}{b(n-1)}e^{nbt} + e^{bt}\int e^{-bt}f(t)\,dt\right],$$

где A, B — произвольные постоянные.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = \exp\left[Ae^{bt} + e^{bt}\int e^{-bt}f(t)\,dt\right]\varphi(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где A, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi_z^{(n)} - \lambda\varphi'_z + b\varphi\ln\varphi = 0,$$

порядок которого можно понизить на единицу.

3°. Замена

$$w(x,t) = \exp\left[e^{bt}\int e^{-bt}f(t)\,dt\right]u(x,t)$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^n u}{\partial x^n} + bu\ln u.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + bw\ln w + \big[f(x) + g(t)\big]w$.

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \exp\left[Ce^{bt} + e^{bt}\int e^{-bt}g(t)\,dt\right]\varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi_x^{(n)} + b\varphi\ln\varphi + f(x)\varphi = 0.$$

2°. Замена

$$w(x,t) = \exp\left[e^{bt} \int e^{-bt} g(t)\, dt\right] u(x,t)$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + bu \ln u + f(x)u.$$

4. $\boldsymbol{\dfrac{\partial w}{\partial t} = a \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(t) w \ln w + g(t) w}$.

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \exp\bigl[\varphi(t)x + \psi(t)\bigr].$$

Здесь функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются формулами

$$\varphi(t) = Ae^F, \quad \psi(t) = Be^F + e^F \int e^{-F}(aA^n e^{nF} + g)\, dt, \qquad F = \int f\, dt,$$

где A, B — произвольные постоянные.

5. $\boldsymbol{\dfrac{\partial w}{\partial t} = a \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(t) w \ln w + \bigl[g(t)x + h(t)\bigr] w}$.

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \exp\bigl[\varphi(t)x + \psi(t)\bigr].$$

Здесь функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются формулами

$$\varphi(t) = Ae^F + e^F \int e^{-F} g\, dt, \quad F = \int f\, dt,$$
$$\psi(t) = Be^F + e^F \int e^{-F}(a\varphi^n + h)\, dt,$$

где A, B — произвольные постоянные.

6. $\boldsymbol{\dfrac{\partial w}{\partial t} = a \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x) w \ln w + \bigl[bf(x)t + g(x)\bigr] w}$.

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = e^{-bt}\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi_x^{(n)} + f(x)\varphi \ln \varphi + \bigl[g(x) + b\bigr]\varphi = 0.$$

11.1.3. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(w) \dfrac{\partial w}{\partial x}$

Предварительные замечания. Уравнения данного вида допускают точные решения типа бегущей волны

$$w = w(z), \qquad z = x + \lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $(n-1)$-го порядка (C — произвольная постоянная)

$$aw_z^{(n-1)} + \int f(w)\, dw - \lambda w = C.$$

1. $\boldsymbol{\dfrac{\partial w}{\partial t} = a \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + bw \dfrac{\partial w}{\partial x}}$.

Обобщенное уравнение Бюргерса — Кортевега — де Фриза.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{n-1} w(C_1 x + bC_1C_2 t + C_3, C_1^n t + C_4) + C_2,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x,t) = -\frac{x + C_1}{b(t + C_2)},$$
$$w(x,t) = (-1)^n \frac{a(2n-2)!}{b(n-1)!} \frac{1}{(x + bC_1 t + C_2)^{n-1}} + C_1.$$

Здесь первое решение является вырожденным, а второе решение является решением типа бегущей волны (частный случай решения из п. 3°).

3°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(\xi), \quad \xi = x + \lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $w(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $(n-1)$-го порядка

$$aw_\xi^{(n-1)} + \tfrac{1}{2}bw^2 = \lambda w + C.$$

4°. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = t^{\frac{1-n}{n}} u(\eta), \qquad \eta = xt^{-\frac{1}{n}},$$

где функция $u(\eta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$au_\eta^{(n)} + buu'_\eta + \frac{1}{n}\eta u'_\eta + \frac{n-1}{n}u = 0.$$

5°. Точное решение:

$$w(x,t) = U(\zeta) + 2C_1 t, \qquad \zeta = x + bC_1 t^2 + C_2 t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $U(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $(n-1)$-го порядка

$$aU_\zeta^{(n-1)} + \tfrac{1}{2}bU^2 - C_2 U = 2C_1\zeta + C_3.$$

6°. Точное решение:

$$w = \varphi^{n-1}F(z) + \frac{1}{b\varphi}(\varphi'_t x + \psi'_t), \qquad z = \varphi(t)x + \psi(t).$$

Здесь функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются формулами

$$\varphi(t) = (Ant + C_1)^{-\frac{1}{n}},$$
$$\psi(t) = C_2(Ant + C_1)^{\frac{n-1}{n}} + C_3(Ant + C_1)^{-\frac{1}{n}} + \frac{B}{A^2(n-1)},$$

где A, B, C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функция $F(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aF_z^{(n)} + bFF'_z + A(n-2)F + \frac{A^2}{b}(1-n)z + \frac{B}{b} = 0.$$

⊙ *Литература для уравнения* 11.1.3.1: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 635–636).

2. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^n w}{\partial x^n} + bw^k\frac{\partial w}{\partial x}.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{n-1} w(C_1^k x + C_2, C_1^{nk} t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = t^{\frac{1-n}{nk}} U(z), \qquad z = xt^{-\frac{1}{n}},$$

где функция $U = U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aU_z^{(n)} + bU^k U'_z + \frac{1}{n}zU'_z + \frac{n-1}{nk}U = 0.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}+be^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=w(C_1x+C_2,C_1^nt+C_3)+\frac{n-1}{\lambda}\ln C_1,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение:

$$w(x,t)=U(z)+\frac{1-n}{n\lambda}\ln t,\qquad z=xt^{-\frac{1}{n}},$$

где функция $U=U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aU_z^{(n)}+be^{\lambda U}U_z'+\frac{1}{n}zU_z'+\frac{n-1}{n\lambda}=0.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}+(b\ln w+c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

1°. Пусть функция $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=e^{C_1}w(x+bC_1t+C_2,t+C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t)=\exp\left[\frac{x+C_2}{C_1-bt}+\frac{a}{b(n-2)}\frac{1}{(C_1-bt)^{n-1}}-\frac{c}{b}\right],$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Точное решение:

$$w(x,t)=e^{\lambda t}u(z),\qquad z=x+\tfrac{1}{2}b\lambda t^2+kt,$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $u(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$au_z^{(n)}+(b\ln u+c-k)u_z'-\lambda u=0.$$

Значению $\lambda=0$ соответствует решение типа бегущей волны.

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 636).

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial^{2n+1} w}{\partial x^{2n+1}}+[b\,\mathrm{Arsh}(kw)+c]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t)=\frac{1}{k}\,\mathrm{sh}\left[\frac{x+C_2}{C_1-bt}+\frac{a}{b(2n-1)}\frac{1}{(C_1-bt)^{2n}}-\frac{c}{b}\right],$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial^{2n+1} w}{\partial x^{2n+1}}+[b\,\mathrm{Arch}(kw)+c]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t)=\frac{1}{k}\,\mathrm{ch}\left[\frac{x+C_2}{C_1-bt}+\frac{a}{b(2n-1)}\frac{1}{(C_1-bt)^{2n}}-\frac{c}{b}\right],$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 637).

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial^{2n+1} w}{\partial x^{2n+1}}+[b\arcsin(kw)+c]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t)=\frac{1}{k}\sin\left[\frac{x+C_2}{C_1-bt}+\frac{a(-1)^n}{b(2n-1)}\frac{1}{(C_1-bt)^{2n}}-\frac{c}{b}\right],$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 637).

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^{2n+1} w}{\partial x^{2n+1}} + [b\arccos(kw) + c]\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \frac{1}{k}\cos\left[\frac{x + C_2}{C_1 - bt} + \frac{a(-1)^n}{b(2n-1)}\,\frac{1}{(C_1 - bt)^{2n}} - \frac{c}{b}\right],$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

11.1.4. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x,t,w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + (bx + c)\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(w)$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + C_1 e^{-bt}, t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + C_1 e^{-bt},$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aw_z^{(n)} + (bz + c)w_z' + f(w) = 0.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(w)$.

Преобразование $w = u(z,t)$, $z = x + \displaystyle\int f(t)\,dt$ приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^n u}{\partial z^n} + g(u),$$

которое имеет точное решение типа бегущей волны $u = u(kz + \lambda t)$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + \big[bx + f(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(w)$.

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + Ce^{-bt} + e^{-bt}\int e^{bt} f(t)\,dt,$$

где C — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aw_z^{(n)} + bzw_z' + g(w) = 0.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + bw\ln w + \big[g(x) + h(t)\big]w$.

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \exp\left[Ce^{bt} + e^{bt}\int e^{-bt} h(t)\,dt\right]\varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi_x^{(n)} + f(x)\varphi_x' + b\varphi\ln\varphi + g(x)\varphi = 0.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + bw\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(t)$.

Преобразование

$$w = u(z,t) + \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau, \qquad z = x + b\int_{t_0}^{t} (t - \tau)f(\tau)\,d\tau,$$

где t_0 — любое число, приводит к уравнению вида 11.1.3.1:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^n u}{\partial x^n} + bu\frac{\partial u}{\partial x}.$$

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 638).

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + bw\dfrac{\partial w}{\partial x} + cw.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + bC_1e^{ct} + C_2,\ t + C_3) + C_1ce^{ct},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение:

$$w = U(z) + C_1ce^{ct}, \qquad z = x + bC_1e^{ct} + C_2t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aU_z^{(n)} + bUU_z' - C_2U_z' + cU = 0.$$

При $C_1 = 0$ имеем решение типа бегущей волны.

3°. Существует вырожденное решение, линейное по x:

$$w(x,t) = \varphi(t)x + \psi(t).$$

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + \big[bw + f(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t).$

Преобразование

$$w = u(z,t) + \int_{t_0}^t g(\tau)\,d\tau, \qquad z = x + \int_{t_0}^t f(\tau)\,d\tau + b\int_{t_0}^t (t-\tau)g(\tau)\,d\tau,$$

где t_0 — любое, приводит к уравнению вида 11.1.3.1:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^n u}{\partial x^n} + bu\frac{\partial u}{\partial x}.$$

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(t)w\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t)w = 0.$

Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w\big(x + C_1\psi(t) + C_2,\ t\big) - C_1\varphi(t),$$

где

$$\varphi(t) = \exp\left[-\int g(t)\,dt\right], \qquad \psi(t) = \int f(t)\varphi(t)\,dt,$$

также будет решением этого уравнения (C_1, C_2 — произвольные постоянные).

Замечание. В уравнении a может быть произвольной функцией времени, $a = a(t)$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + [f(t)\ln w + g(t)]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \exp[\varphi(t)x + \psi(t)],$$

где

$$\varphi(t) = -\left[\int f(t)\,dt + C_1\right]^{-1}, \qquad \psi(t) = \varphi(t)\int [g(t) + a\varphi^{n-1}(t)]\,dt + C_2\varphi(t),$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные.*

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^{2n+1} w}{\partial x^{2n+1}} + [f(t)\,\mathrm{Arsh}(kw) + g(t)]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \frac{1}{k}\,\mathrm{sh}\big[\varphi(t)x + \psi(t)\big],$$

где

$$\varphi(t) = -\left[\int f(t)\,dt + C_1\right]^{-1}, \qquad \psi(t) = \varphi(t)\int [g(t) + a\varphi^{2n}(t)]\,dt + C_2\varphi(t),$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные.

* В уравнениях 11.1.4.9–11.1.4.13 и их решениях a может быть произвольной функцией времени, $a = a(t)$.

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^{2n+1} w}{\partial x^{2n+1}} + [f(t)\,\mathrm{Arch}(kw) + g(t)]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \frac{1}{k}\,\mathrm{ch}\big[\varphi(t)x + \psi(t)\big],$$

где

$$\varphi(t) = -\biggl[\int f(t)\,dt + C_1\biggr]^{-1}, \quad \psi(t) = \varphi(t)\int [g(t) + a\varphi^{2n}(t)]\,dt + C_2\varphi(t),$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные.

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^{2n+1} w}{\partial x^{2n+1}} + [f(t)\arcsin(kw) + g(t)]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \frac{1}{k}\sin\big[\varphi(t)x + \psi(t)\big],$$

где

$$\varphi(t) = -\biggl[\int f(t)\,dt + C_1\biggr]^{-1}, \quad \psi(t) = \varphi(t)\int [g(t) + a(-1)^n\varphi^{2n}(t)]\,dt + C_2\varphi(t),$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные.

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^{2n+1} w}{\partial x^{2n+1}} + [f(t)\arccos(kw) + g(t)]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \frac{1}{k}\cos\big[\varphi(t)x + \psi(t)\big],$$

где

$$\varphi(t) = -\biggl[\int f(t)\,dt + C_1\biggr]^{-1}, \quad \psi(t) = \varphi(t)\int [g(t) + a(-1)^n\varphi^{2n}(t)]\,dt + C_2\varphi(t),$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные.

11.1.5. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + F\Bigl(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + b\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{n-2} w(C_1 x + 2bC_1C_2 t + C_3, C_1^n t + C_4) + C_2 x + bC_2^2 t + C_5,$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = C_1 t + C_2 + \int \theta(z)\,dz, \quad z = x + \lambda t,$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные, а функция $\theta(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $(n-1)$-го порядка

$$a\theta_z^{(n-1)} + b\theta^2 - \lambda\theta - C_1 = 0.$$

Значению $C_1 = 0$ отвечает решение типа бегущей волны.

3°. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = t^{\frac{2-n}{n}} u(\zeta), \quad \zeta = xt^{-\frac{1}{n}},$$

где функция $u(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$au_\zeta^{(n)} + b(u'_\zeta)^2 + \frac{1}{n}\zeta u'_\zeta + \frac{n-2}{n}u = 0.$$

4°. Существует вырожденное решение, линейное по x:

$$w(x,t)=\varphi(t)x^2+\psi(t)x+\chi(t).$$

5°. Преобразование Беклунда

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{u}{2},\qquad \frac{\partial w}{\partial t}=\frac{a}{2}\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-1}}+\frac{b}{4}u^2 \tag{1}$$

связывает рассматриваемое уравнение с обобщенным уравнением Бюргерса — Кортевега — де Фриза 11.1.3.1:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^n u}{\partial x^n}+bu\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{2}$$

Пусть $u=u(x,t)$ — некоторое решение уравнения (2). Тогда линейная система уравнений первого порядка (1) позволяет найти соответствующее решение $w=w(x,t)$ исходного уравнения.

⊙ *Литература для уравнения* 11.1.5.1: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 640).

2. $\boldsymbol{\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}+b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2+f(t).}$

1°. Точное решение:

$$w(x,t)=C_1t+C_2+\int f(t)\,dt+\Theta(z),\quad z=x+\lambda t,$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\Theta_z^{(n)}+b\big(\Theta_z'\big)^2-\lambda\Theta_z'-C_1=0.$$

2°. Подстановка $w=U(x,t)+\displaystyle\int f(t)\,dt$ приводит к более простому уравнению вида 11.1.5.1:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a\frac{\partial^n U}{\partial x^n}+b\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big)^2.$$

3. $\boldsymbol{\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}+b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2+cw+f(t).}$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=w(x+C_1,t)+C_2e^{ct},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение:

$$w(x,t)=Ae^{ct}+e^{ct}\int e^{-ct}f(t)\,dt+\theta(z),\quad z=x+\lambda t,$$

где A, λ — произвольные постоянные, а функция $\theta(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\theta_z^{(n)}+b\big(\theta_z'\big)^2-\lambda\theta_z'+c\theta=0.$$

3°. Существует вырожденное решение, квадратичное по x:

$$w(x,t)=\varphi(t)x^2+\psi(t)x+\chi(t).$$

4°. Замена $w=U(x,t)+e^{ct}\displaystyle\int e^{-ct}f(t)\,dt$ приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a\frac{\partial^n U}{\partial x^n}+b\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big)^2+cU.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + cw\dfrac{\partial w}{\partial x} + kw^2 + f(t)w + g(t).$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp(\lambda x),$$

где λ — корень квадратного уравнения $b\lambda^2 + c\lambda + k = 0$, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_t = k\varphi^2 + f(t)\varphi + g(t), \tag{1}$$

$$\psi'_t = \big[(c\lambda + 2k)\varphi + f(t) + a\lambda^n\big]\psi. \tag{2}$$

Уравнение Риккати (1) интегрируется в квадратурах, например, в следующих частных случаях [см. Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2001 *a*)]:

$$\text{(a)}\ \ k = 0, \qquad \text{(b)}\ \ g(t) \equiv 0, \qquad \text{(c)}\ \ f(t) = \text{const},\ \ g(t) = \text{const}.$$

После решения уравнения (1) легко можно получить решение уравнения (2), которое линейно относительно функции ψ.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + g(x) + h(t).$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = At + B + \int h(t)\,dt + \varphi(x).$$

Здесь A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi_x^{(n)} + f(x)\big(\varphi'_x\big)^2 + g(x) - A = 0.$$

2°. Замена $w = U(x,t) + \int h(t)\,dt$ приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a\frac{\partial^n U}{\partial x^n} + f(x)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + g(x).$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + bw + g(x) + h(t).$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + Ae^{bt} + e^{bt}\int e^{-bt}h(t)\,dt.$$

Здесь A — произвольная постоянная, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi_x^{(n)} + f(x)(\varphi'_x)^2 + b\varphi + g(x) = 0.$$

2°. Замена $w = U(x,t) + e^{bt}\int e^{-bt}h(t)\,dt$ приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a\frac{\partial^n U}{\partial x^n} + f(x)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + bU + g(x).$$

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(t)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + bf(t)w^2 + g(t)w + h(t).$

1°. Точные решения с обобщенным разделением переменных, содержащие экспоненту от x:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp\big(\pm x\sqrt{-b}\,\big), \qquad b < 0, \tag{1}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f, g, h не указываются)

$$\varphi'_t = bf\varphi^2 + g\varphi + h, \tag{2}$$

$$\psi'_t = \big[2bf\varphi + g + a(\pm\sqrt{-b}\,)^n\big]\psi. \tag{3}$$

Уравнение (2) для функции $\varphi=\varphi(t)$ является уравнением Риккати и может быть сведено к линейному уравнению второго порядка. В книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001 *a*) приведено много решений этого уравнения для различных функций f, g, h.

Если решение уравнения (2) известно, то решение уравнения (3) для функции $\psi=\psi(t)$ определяется формулой

$$\psi(t)=C\exp\left[a(\pm\sqrt{-b}\,)^n t+\int(2bf\varphi+g)\,dt\right], \tag{4}$$

где C — произвольная постоянная.

Отметим два частных случая интегрирования уравнения (2).

Решение уравнения (2) при $h\equiv 0$:

$$\varphi(t)=e^G\left(C_1-b\int fe^G\,dt\right)^{-1},\quad G=\int g\,dt,$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Если функции f, g, h пропорциональны:

$$g=\alpha f,\quad h=\beta f\qquad(\alpha,\,\beta=\mathrm{const}),$$

то решение уравнения (2) имеет вид

$$\int\frac{d\varphi}{b\varphi^2+\alpha\varphi+\beta}=\int f\,dt+C_2, \tag{5}$$

где C_2 — произвольная постоянная. После интегрирования левой части выражения (5) можно получить явный вид зависимости $\varphi=\varphi(t)$.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных (обобщает решение из п. 1°):

$$w(x,t)=\varphi(t)+\psi(t)\exp\bigl(x\sqrt{-b}\,\bigr)+\chi(t)\exp\bigl(-x\sqrt{-b}\,\bigr),\qquad b<0, \tag{6}$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi'_t=bf\varphi^2+g\varphi+h+4bf\psi\chi, \tag{7}$$
$$\psi'_t=\bigl[2bf\varphi+g+a(\sqrt{-b}\,)^n\bigr]\psi, \tag{8}$$
$$\chi'_t=\bigl[2bf\varphi+g+a(-\sqrt{-b}\,)^n\bigr]\chi. \tag{9}$$

Для уравнений четного порядка при $n=2m$ ($m=1,\,2,\,\ldots$) из уравнений (8) и (9) следует, что функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$ пропорциональны. Полагая $\psi(t)=A\theta(t)$ и $\chi(t)=B\theta(t)$, в этом случае решение (6) можно записать в виде

$$w(x,t)=\varphi(t)+\theta(t)\bigl[A\exp\bigl(x\sqrt{-b}\,\bigr)+B\exp\bigl(-x\sqrt{-b}\,\bigr)\bigr],\qquad b<0, \tag{10}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\theta(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t=bf\bigl(\varphi^2+4AB\theta^2\bigr)+g\varphi+h, \tag{11}$$
$$\theta'_t=\bigl[2bf\varphi+g+(-1)^m ab^m\bigr]\theta. \tag{12}$$

Из уравнения (12) можно выразить φ через θ, а затем подставить в (11). В итоге получается нелинейное уравнение второго порядка для функции θ (при f, g, $h=\mathrm{const}$ это уравнение является автономным и допускает понижение порядка).

Отметим два частных случая решения вида (10), которые выражаются через гиперболические функции:

$$w(x,t)=\varphi(t)+\theta(t)\,\mathrm{ch}\bigl(x\sqrt{-b}\,\bigr)\qquad\text{при}\quad A=\tfrac12,\ B=\tfrac12;$$
$$w(x,t)=\varphi(t)+\theta(t)\,\mathrm{sh}\bigl(x\sqrt{-b}\,\bigr)\qquad\text{при}\quad A=\tfrac12,\ B=-\tfrac12.$$

3°. Решение с обобщенным разделением переменных, содержащее тригонометрические функции x:

$$w(x,t)=\varphi(t)+\psi(t)\cos\bigl(x\sqrt{b}\,\bigr)+\chi(t)\sin\bigl(x\sqrt{b}\,\bigr),\qquad b>0, \tag{13}$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (которая здесь не приводится).

Для уравнений четного порядка при $n = 2m$ ($m = 1, 2, \ldots$) имеются точные решения следующего вида (c — любое):

$$w(x,t) = \varphi(t) + \theta(t)\cos\bigl(x\sqrt{b} + c\bigr), \qquad b > 0, \tag{14}$$

где c — произвольная постоянная, а функции $\varphi(t)$ и $\theta(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi'_t = bf\bigl(\varphi^2 + \theta^2\bigr) + g\varphi + h, \tag{15}$$

$$\theta'_t = \bigl[2bf\varphi + g + (-1)^m ab^m\bigr]\theta. \tag{16}$$

Из уравнения (16) можно выразить φ через θ, а затем подставить в (15). В итоге получается нелинейное уравнение второго порядка для функции θ (при $f,\, g,\, h = \mathrm{const}$ это уравнение является автономным и допускает понижение порядка).

⊙ *Литература для уравнения* 11.1.5.7: V. A. Galaktionov (1995), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 353–354).

8. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(w)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^n + \bigl[xg(t) + h(t)\bigr]\frac{\partial w}{\partial x}.$

Переходя к новым независимым переменным

$$\tau = \int \varphi^n(t)\,dt, \quad z = \varphi(t)x + \int h(t)\varphi(t)\,dt, \quad \varphi(t) = \exp\left[\int g(t)\,dt\right],$$

приходим к более простому уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = a\frac{\partial^n w}{\partial z^n} + f(w)\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^n,$$

которое имеет точное решение типа бегущей волны $w = u(kz + \lambda\tau)$ и автомодельное решение $w = v(z\tau^{-1/n})$.

9. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f\left(x,\ \frac{\partial w}{\partial x}\right) + g(t).$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = At + B + \int g(t)\,dt + \varphi(x).$$

Здесь A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi_x^{(n)} + f\bigl(x, \varphi'_x\bigr) - A = 0.$$

2°. Замена

$$w = U(x,t) + \int g(t)\,dt$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a\frac{\partial^n U}{\partial x^n} + f\left(x,\ \frac{\partial U}{\partial x}\right).$$

10. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f\left(x,\ \frac{\partial w}{\partial x}\right) + bw + g(t).$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + Ae^{bt} + e^{bt}\int e^{-bt}g(t)\,dt.$$

Здесь A — произвольная постоянная, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi_x^{(n)} + f\bigl(x, \varphi'_x\bigr) + b\varphi = 0.$$

2°. Замена

$$w = U(x,t) + e^{bt}\int e^{-bt}g(t)\,dt$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a\frac{\partial^n U}{\partial x^n} + f\left(x,\ \frac{\partial U}{\partial x}\right) + bU.$$

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + wf\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big).$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = A\exp\Big[\lambda x + a\lambda^n t + \int f(t,\lambda)\,dt\Big],$$

где A, λ — произвольные постоянные.

11.1.6. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + F\Big(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dots, \dfrac{\partial^{n-1} w}{\partial x^{n-1}}\Big)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(t)\sum\limits_{i,j=0}^{i,j<n} b_{ij}\dfrac{\partial^i w}{\partial x^i}\dfrac{\partial^j w}{\partial x^j} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} g_k(t)\dfrac{\partial^k w}{\partial x^k} + h(t).$

Здесь принято обозначение: $\frac{\partial^0 w}{\partial x^0} \equiv w$.

1°. В общем случае уравнение имеет решения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp(\lambda x),$$

где λ — корни алгебраического уравнения: $\sum\limits_{i,j=0}^{i,j<n} b_{ij}\lambda^{i+j} = 0.$

2°. Пусть n — четное число и в первой сумме все коэффициенты $b_{ij} = 0$, когда сумма их индексов $i+j$ — нечетное число. В этом случае исходное уравнение имеет также решения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t) = \varphi_1(t) + \psi_1(t)\big[A\operatorname{ch}(\lambda x) + B\operatorname{sh}(\lambda x)\big],$$
$$w(x,t) = \varphi_2(t) + \psi_2(t)\big[A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)\big],$$

где A, B — произвольные постоянные, параметр λ определяется путем решения алгебраических уравнений, а функции $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, $\psi_2(t)$ находятся из соответствующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + F\Big(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dots,\ \dfrac{\partial^{n-1} w}{\partial x^{n-1}}\Big) + g(t).$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = At + B + \int g(t)\,dt + \varphi(x).$$

Здесь A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi_x^{(n)} + F\big(x, \varphi_x', \dots, \varphi_x^{(n-1)}\big) - A = 0,$$

порядок которого понижается подстановкой $U(x) = \varphi_x'$.

2°. Замена $w = u(x,t) + \int g(t)\,dt$ приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^n u}{\partial x^n} + F\Big(x,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \dots,\ \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}\Big).$$

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 646).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + F\Big(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dots,\ \dfrac{\partial^{n-1} w}{\partial x^{n-1}}\Big) + bw + g(t).$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + Ae^{bt} + e^{bt}\int e^{-bt}g(t)\,dt.$$

Здесь A — произвольная постоянная, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi_x^{(n)} + F\big(x, \varphi_x', \dots, \varphi_x^{(n-1)}\big) + b\varphi = 0.$$

2°. Замена $w = u(x,t) + e^{bt}\int e^{-bt} g(t)\,dt$ приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^n u}{\partial x^n} + F\left(x,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \dots,\ \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}\right) + bu.$$

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 646).

4. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^n w}{\partial x^n} + wF\left(t,\ \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x},\ \dots,\ \frac{1}{w}\frac{\partial^{n-1} w}{\partial x^{n-1}}\right).$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = A\exp\left[\lambda x + a\lambda^n t + \int F(t,\lambda,\dots,\lambda^{n-1})\,dt\right],$$

где A, λ — произвольные постоянные.

5. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}} + wF\left(t,\ \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \dots,\ \frac{1}{w}\frac{\partial^{2n-2} w}{\partial x^{2n-2}}\right).$

Точные решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \left[A\operatorname{ch}(\lambda x) + B\operatorname{sh}(\lambda x)\right]\exp\left[a\lambda^{2n} t + \int F(t,\lambda^2,\dots,\lambda^{2n-2})\,dt\right],$$

$$w(x,t) = \left[A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)\right]\exp\left[(-1)^n a\lambda^{2n} t + \Phi(t)\right],$$

$$\Phi(t) = \int F\left(t,-\lambda^2,\dots,(-1)^{n-1}\lambda^{2n-2}\right)dt,$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

11.1.7. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x,t,w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x,t,w)$

1. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = aw\frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(t)w + g(t).$

1°. Вырожденное решение:

$$w(x,t) = F(t)\left(A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0\right) + F(t)\int \frac{g(t)}{F(t)}\,dt, \quad F(t) = \exp\left[\int f(t)\,dt\right],$$

где A_0, A_1, …, A_{n-1} — произвольные постоянные.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \varphi(t)\left(x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0\right) + \varphi(t)\int \frac{g(t)}{\varphi(t)}\,dt,$$

$$\varphi(t) = F(t)\left[C - an!\int F(t)\,dt\right]^{-1}, \quad F(t) = \exp\left[\int f(t)\,dt\right],$$

где A_0, A_1, …, A_{n-1}, C — произвольные постоянные.

2. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = aw\frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x)w + \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k.$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = t\sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k + \sum_{k=0}^{n-1} C_k x^k - \frac{1}{a(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-\xi)^{n-1} f(\xi)\,d\xi,$$

где C_0, C_1, …, C_{n-1}, x_0 — произвольные постоянные.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=aw\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}+bw^2+f(t)w+g(t).$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t)=\varphi(t)\Theta(x)+\psi(t).$$

Здесь функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi_t'=C\varphi^2+b\varphi\psi+f(t)\varphi,$$
$$\psi_t'=C\varphi\psi+b\psi^2+f(t)\psi+g(t),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\Theta(x)$ удовлетворяет линейному обыкновенному дифференциальному уравнению n-го порядка

$$a\Theta_x^{(n)}+b\Theta=C.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=aw\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}}-ak^{2n}w^2+f(x)w+b_1\operatorname{sh}(kx)+b_2\operatorname{ch}(kx).$

Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по t:

$$w(x,t)=t\bigl[b_1\operatorname{sh}(kx)+b_2\operatorname{ch}(kx)\bigr]+\varphi(x).$$

Здесь функция $\varphi(x)$ определяется из линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$a\varphi_x^{(2n)}-ak^{2n}\varphi+f(x)=0.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=aw\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}+\bigl[xf(t)+g(t)\bigr]\dfrac{\partial w}{\partial x}+h(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t)=H(t)u(z,\tau),\quad z=xF(t)+\int g(t)F(t)\,dt,\quad \tau=\int F^n(t)H(t)\,dt,$$

где функции $F(t)$ и $H(t)$ определяются формулами

$$F(t)=\exp\biggl[\int f(t)\,dt\biggr],\quad H(t)=\exp\biggl[\int h(t)\,dt\biggr],$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=au\frac{\partial^n u}{\partial z^n},$$

которое допускает, например, точное решение типа бегущей волны $u=u(kz+\lambda\tau)$ и автомодельное решение вида $u=u(\xi)$, $\xi=z\tau^{-1/n}$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=aw\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}+f(x)w\dfrac{\partial w}{\partial x}+g(t)w+h(t).$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t)=\varphi(t)\Theta(x)+\psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\Theta(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi_t'=C\varphi^2+g(t)\varphi,$$
$$\psi_t'=\bigl[C\varphi+g(t)\bigr]\psi+h(t),$$
$$a\Theta_x^{(n)}+f(x)\Theta_x'=C,$$

C — произвольная постоянная. Последовательно интегрируя, для функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ получим

$$\varphi(t)=G(t)\biggl[A-C\int G(t)\,dt\biggr]^{-1},\quad G(t)=\exp\biggl[\int g(t)\,dt\biggr],$$
$$\psi(t)=B\varphi(t)+\varphi(t)\int\frac{h(t)}{\varphi(t)}\,dt,$$

где A, B — произвольные постоянные.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x)w\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x)w^2 + h(t)w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x)H(t)\left[A + B\int H(t)\,dt\right]^{-1}, \quad H(t) = \exp\left[\int h(t)\,dt\right],$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ определяется из линейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$a\varphi_x^{(n)} + f(x)\varphi'_x + g(x)\varphi + B = 0.$$

11.1.8. Другие уравнения

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n}{\partial x^n}\left(w^m\dfrac{\partial^k w}{\partial x^k}\right).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(C_2 x + C_3, C_1^m C_2^{n+k} t + C_4),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ удовлетворяет автономному обыкновенному дифференциальному уравнению $a[w^m w_z^{(k)}]_z^{(n)} - \lambda w'_z = 0$.

3°. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = t^{-\frac{(n+k)\beta+1}{m}} u(\xi), \quad \xi = xt^\beta,$$

где β — произвольная постоянная, а функция $u = u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$-[(n+k)\beta + 1]u + m\beta\xi u'_\xi = am[u^m u_\xi^{(k)}]_\xi^{(n)}.$$

4°. Точное решение:

$$w(x,t) = (C_1 t + C_2)^{-1/m} V(\zeta), \quad \zeta = x + C_3 \ln|C_1 t + C_2|,$$

где функция $V = V(\zeta)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$am[V^m V_\zeta^{(k)}]_\zeta^{(n)} - mC_1C_3V'_\zeta + C_1 V = 0.$$

Замечание. Частному случаю $C_3 = 0$ соответствует решение в виде произведения функций разных аргументов.

5°. Обобщенно-автомодельное решение:

$$w(x,t) = e^{-(n+k)\beta t}\varphi(\eta), \quad \eta = xe^{m\beta t},$$

где β — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(\eta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$-(n+k)\beta\varphi + m\beta\eta\varphi'_\eta = a[\varphi^m \varphi_\eta^{(k)}]_\eta^{(n)}.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n}{\partial x^n}\left(w^m\dfrac{\partial^k w}{\partial x^k}\right) + \big[xf(t) + g(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = u(z,\tau)H(t), \quad z = xF(t) + \int g(t)F(t)\,dt, \quad \tau = \int F^{n+k}(t)H^m(t)\,dt,$$

где функции $F(t)$ и $H(t)$ определены формулами

$$F(t) = \exp\left[\int f(t)\,dt\right], \quad H(t) = \exp\left[\int h(t)\,dt\right],$$

приводит к более простому уравнению вида 11.1.8.1:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(u^m\frac{\partial^k u}{\partial z^k}\right).$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, с. 357–358).

3. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(e^{\lambda w}\frac{\partial^k w}{\partial x^k}\right) + f(t).$

Преобразование

$$w(x,t) = u(x,\tau) + F(t), \quad \tau = \int \exp\bigl[\lambda F(t)\bigr]\,dt, \qquad F(t) = \int f(t)\,dt,$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(e^{\lambda u}\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right).$$

Последнее допускает, например, точные решения следующих видов:

$u = U(kx + \lambda\tau)$ (решение типа бегущей волны),
$u = V\bigl(x\tau^{-1/(n+k)}\bigr)$ (автомодельное решение),
$u = \varphi(x) + \psi(\tau)$ (решение в виде суммы функций разных аргументов).

4. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(e^{\lambda w}\frac{\partial^k w}{\partial x^k}\right) + f(x)e^{\lambda w}.$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w = -\frac{1}{\lambda}\ln(\lambda t + C) + \varphi(x),$$

где λ, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{\lambda\varphi}\frac{d^k\varphi}{dx^k}\right) + f(x)e^{\lambda\varphi} + 1 = 0.$$

При $k = 1$ это уравнение сводится к линейному с помощью подстановки $\psi = e^{\lambda\varphi}$.

5. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{k=0}^{n}[f_k(t)\ln w + g_k(t)]\frac{\partial^k w}{\partial x^k}.$

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \exp[\varphi(t)x + \psi(t)],$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_t = \sum_{k=0}^{n} f_k(t)\varphi^{k+1},$$
$$\psi'_t = \sum_{k=0}^{n} \varphi^k[f_k(t)\psi + g_k(t)].$$

6. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{a}{f(w)} + b.$

Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$\int f(w)\,dw = at - \frac{b}{n!}x^n + C_{n-1}x^{n-1} + \dots + C_1 x + C_0,$$

где $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$ — произвольные постоянные.

⦿ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 650).

7. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{g(t)}{f(w)} + h(x).$

Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$\int f(w)\,dw = \int g(t)\,dt - \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-\xi)^{n-1}h(\xi)\,d\xi + C_{n-1}x^{n-1} + \dots + C_1 x + C_0,$$

где $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$ — произвольные постоянные, x_0 — любое число (для которого последний интеграл имеет смысл).

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^n}{\partial x^n}\left[f(w)\dfrac{\partial^k w}{\partial x^k}\right].$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция
$$w_1 = w(C_1x + C_2, C_1^{n+k}t + C_3),$$
где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Данное уравнение имеет точные решения следующих видов:
$$w(x,t) = u(\xi), \quad \xi = kx + \lambda t \quad \text{(решение типа бегущей волны)},$$
$$w(x,t) = z(\zeta), \quad \zeta = x^{n+k}/t \quad \text{(автомодельное решение)}.$$

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^n}{\partial x^n}\left[f(w)\dfrac{\partial^k w}{\partial x^k}\right] + \bigl[xg(t) + h(t)\bigr]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Преобразование независимых переменных
$$z = xG(t) + \int h(t)G(t)\,dt, \quad \tau = \int G^{n+k}(t)\,dt, \qquad G(t) = \exp\left[\int g(t)\,dt\right],$$
приводит к более простому уравнению вида 11.1.8.8:
$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left[f(w)\frac{\partial^k w}{\partial z^k}\right].$$

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(w)\Bigl(\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Bigr)^k + \bigl[xg(t) + h(t)\bigr]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Преобразование
$$z = xG(t) + \int h(t)G(t)\,dt, \quad \tau = \int G^{nk}(t)\,dt, \qquad G(t) = \exp\left[\int g(t)\,dt\right],$$
приводит к более простому уравнению
$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = f(w)\left(\frac{\partial^n w}{\partial z^n}\right)^k.$$
Последнее допускает точное решение типа бегущей волны и автомодельное решение.

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^n}{\partial x^n}\bigl[f(x,w)\bigr] + \dfrac{g(t)}{f_w(x,w)} + h(x).$

Решение в неявном виде:
$$f(x,w) = \int g(t)\,dt - \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-\xi)^{n-1}h(\xi)\,d\xi + C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1x + C_0,$$
где $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ — произвольные постоянные, x_0 — любое число (для которого последний интеграл имеет смысл).

11.2. Уравнения общего вида, содержащие первую производную по t

11.2.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\Bigl(w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Bigr)$

Предварительные замечания. Рассмотрим уравнение
$$\frac{\partial w}{\partial t} = F\left(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n}\right). \tag{1}$$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение уравнения (1). Тогда функция $w(x + C_1, t + C_2)$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. В общем случае уравнение (1) допускает точное решение типа бегущей волны
$$w = w(\xi), \qquad \xi = kx + \lambda t, \tag{2}$$
где k, λ — произвольные постоянные, а функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением
$$F\bigl(w, kw'_\xi, \ldots, k^n w_\xi^{(n)}\bigr) - \lambda w'_\xi = 0.$$

В данном разделе рассмотрены частные случаи уравнения (1), которые помимо решения типа бегущей волны (2) допускают также другие точные решения.

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\left(\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right)$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-n} w(C_1 x + C_2, C_1^n t + C_3) + \sum_{k=0}^{n-1} A_k x^k,$$

где C_1, C_2, C_3, A_k — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = F(A)t + \frac{A}{n!}x^n + C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1 x + C_0,$$

где A, C_0, C_1, $\ldots$, C_{n-1} — произвольные постоянные.

3°. Точное решение линейное по переменной t:

$$w(x,t) = t\sum_{k=0}^{n-1} A_k x^k + \sum_{k=0}^{n-1} B_k x^k + \int_0^x \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\Phi\left(\sum_{k=0}^{n-1} A_k \xi^k\right) d\xi,$$

где A_k, B_k — произвольные постоянные, а $\Phi(u)$ — функция обратная к $F(u)$.

4°. Точное решение:

$$w(x,t) = A_1 t + \frac{1}{n!}A_2 x^n + \sum_{m=0}^{n-1} B_m x^m + U(z), \qquad z = kx + \lambda t,$$

где A_1, A_2, B_m, k, λ — произвольные постоянные, а функция $U = U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$A_1 + \lambda U'_z = F\bigl(A_2 + k^n U_z^{(n)}\bigr).$$

5°. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = t\,\Theta(\zeta), \quad \zeta = xt^{-1/n},$$

где функция $\Theta(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$nF\bigl(\Theta_\zeta^{(n)}\bigr) + \zeta\Theta'_\zeta - n\Theta = 0.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ldots, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right)$.

Точное решение:

$$w(x,t) = At + B + \varphi(\xi), \qquad \xi = kx + \lambda t,$$

где A, B, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(k\varphi'_\xi, k^2\varphi''_{\xi\xi}, \ldots, k^n\varphi_\xi^{(n)}\bigr) - \lambda\varphi'_\xi - A = 0.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ldots, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right) + aw$.

Частный случай уравнения 11.2.2.1 при $g(t) = a$ и $F_t = 0$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial w}{\partial x} + F\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ldots, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right)$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + aC_1 t + C_2, t + C_3) + C_1,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Вырожденное решение:

$$w(x,t) = -\frac{x + C_1}{a\tau} + \frac{1}{\tau}\int \tau F\Bigl(-\frac{1}{a\tau}, 0, \ldots, 0\Bigr)\,d\tau, \qquad \tau = t + C_2.$$

3°. Точное решение:

$$w(x,t) = U(\zeta) + 2C_1 t, \qquad \zeta = x + aC_1 t^2 + C_2 t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $U(\zeta)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(U'_\zeta, U''_{\zeta\zeta}, \ldots, U^{(n)}_\zeta\bigr) + aUU'_\zeta = C_2 U'_\zeta + 2C_1.$$

В частном случае $C_1 = 0$ имеем решение типа бегущей волны.

⊙ *Литература для уравнения* 11.2.1.4: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 653).

5. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = aw\frac{\partial w}{\partial x} + F\biggl(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n}\biggr) + bw.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + aC_1 e^{bt} + C_2, t + C_3) + C_1 b e^{bt},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Существует вырожденное решение, линейное по x:

$$w(x,t) = \varphi(t)x + \psi(t).$$

3°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(\xi), \quad \xi = x + \lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $w(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(w'_\xi, w''_{\xi\xi}, \ldots, w^{(n)}_\xi\bigr) + aww'_\xi - \lambda w'_\xi + bw = 0.$$

6. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = F\biggl(\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ldots, \frac{1}{w}\frac{\partial^n w}{\partial x^n}\biggr).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-1} w(x + C_2, C_1 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = t\varphi(\xi), \quad \xi = kx + \lambda \ln|t|,$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\biggl(\frac{k}{\varphi}\varphi'_\xi, \frac{k^2}{\varphi}\varphi''_{\xi\xi}, \ldots, \frac{k^n}{\varphi}\varphi^{(n)}_\xi\biggr) = \lambda\varphi'_\xi + \varphi.$$

7. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = wF\biggl(\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ldots, \frac{1}{w}\frac{\partial^n w}{\partial x^n}\biggr).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x + C_2, t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = Ce^{\lambda t}\varphi(x),$$

где C, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\biggl(\frac{\varphi'_x}{\varphi}, \frac{\varphi''_{xx}}{\varphi}, \ldots, \frac{\varphi^{(n)}_x}{\varphi}\biggr) = \lambda.$$

Это уравнение имеет частные решения вида $\varphi(x) = e^{\alpha x}$, где α — корни алгебраического (или трансцендентного) уравнения $F\bigl(\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n\bigr) - \lambda = 0$.

3°. Точное решение:
$$w(x,t) = Ce^{\lambda t}\psi(\xi), \quad \xi = kx + \beta t$$
где C, k, λ, β — произвольные постоянные, а функция $\psi(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением
$$\psi F\left(\frac{k}{\psi}\psi'_\xi,\ \frac{k^2}{\psi}\psi''_{\xi\xi},\ \ldots,\ \frac{k^n}{\psi}\psi^{(n)}_\xi\right) = \beta\psi'_\xi + \lambda\psi.$$
Это уравнение имеет частные решения вида $\psi(\xi) = e^{\mu\xi}$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w^m F\left(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right).$

При $m = 0$ см. уравнение 11.2.1.6, а при $m = 1$ — уравнение 11.2.1.7.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция
$$w_1 = C_1 w(x + C_2, C_1^{m-1}t + C_3),$$
где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:
$$w(x,t) = \bigl[(1-m)At + B\bigr]^{\frac{1}{1-m}}\varphi(x),$$
где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением
$$\varphi^{m-1}F\left(\frac{\varphi'_x}{\varphi},\ \frac{\varphi''_{xx}}{\varphi},\ \ldots,\ \frac{\varphi^{(n)}_x}{\varphi}\right) = A.$$

3°. Точное решение:
$$w(z,t) = (t + C)^{\frac{1}{1-m}}\Theta(z), \quad z = kx + \lambda\ln(t + C),$$
где C, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением
$$\Theta^m F\left(k\frac{\Theta'_z}{\Theta},\ k^2\frac{\Theta''_{zz}}{\Theta},\ \ldots,\ k^n\frac{\Theta^{(n)}_z}{\Theta}\right) = \lambda\Theta'_z + \frac{1}{1-m}\Theta.$$

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w^m F\left(w^k\dfrac{\partial w}{\partial x},\ w^{2k+1}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ w^{nk+n-1}\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция
$$w_1 = C_1 w(C_1^{-k-1}x + C_2, C_1^{m-1}t + C_3),$$
где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Автомодельное решение при $m \neq 1$, $k \neq -1$:
$$w(x,t) = t^{\frac{1}{1-m}}U(z), \quad z = xt^{\frac{k+1}{m-1}},$$
где функция $U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением
$$\frac{1}{1-m}U + \frac{k+1}{m-1}zU'_z = U^m F\bigl(U^k U'_z,\ U^{2k+1}U''_{zz},\ \ldots,\ U^{nk+n-1}U^{(n)}_z\bigr).$$

3°. Обобщенное автомодельное решение при $m = 1$, $k \neq -1$:
$$w(x,t) = \exp\left(-\frac{1}{k+1}t\right)u(\xi), \quad \xi = xe^t,$$
где функция $u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением
$$-\frac{1}{k+1}u + \xi u'_\xi = uF\bigl(u^k u'_\xi,\ u^{2k+1}u''_{\xi\xi}\ \ldots,\ u^{nk+n-1}u^{(n)}_\xi\bigr).$$

4°. При $k = -1$ см. уравнение 11.2.1.8.

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = e^{\beta w} F\left(\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + C_1, C_2 t + C_3) + \frac{1}{\beta} \ln C_2,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = -\frac{1}{\beta} \ln(A\beta t + B) + \varphi(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$e^{\beta\varphi} F\bigl(\varphi'_x,\ \varphi''_{xx},\ \ldots,\ \varphi^{(n)}_x\bigr) + A = 0.$$

3°. Точное решение:

$$w(x,t) = -\frac{1}{\beta} \ln(t + C) + \Theta(\xi), \quad \xi = kx + \lambda \ln(t + C),$$

где C, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$e^{\beta\Theta} F\bigl(k\Theta'_\xi,\ k^2\Theta''_{\xi\xi},\ \ldots,\ k^n\Theta^{(n)}_\xi\bigr) = \lambda\Theta'_\xi - \frac{1}{\beta}.$$

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a \ln w \dfrac{\partial w}{\partial x} + wF\left(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right).$

1°. Пусть функция $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = e^{C_1} w(x + aC_1 t + C_2, t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = \exp\left[-\frac{x}{at} + \frac{1}{t}\int tF\left(-\frac{1}{at},\ \ldots,\ \frac{1}{(-at)^n}\right) dt\right].$$

3°. Точное решение:

$$w(x,t) = e^{\lambda t} u(z), \qquad z = x + \tfrac{1}{2} a\lambda t^2 + kt,$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $u(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(a \ln u - k)u'_z - \lambda u + uF\left(\frac{u'_z}{u}, \frac{u''_{zz}}{u}, \ldots, \frac{u^{(n)}_z}{u}\right) = 0.$$

Значению $\lambda = 0$ соответствует решение типа бегущей волны.

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big/\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \ldots,\ \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big/\dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Частный случай уравнения 11.2.1.2.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-1} w(x + C_2, C_1 t + C_3) + C_4,$$

где C_1, $\ldots$, C_4 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = At + B + \varphi(\xi), \qquad \xi = kx + \lambda t,$$

где A, B, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(k\varphi''_{\xi\xi}/\varphi'_\xi,\ \ldots,\ k^{n-1}\varphi^{(n)}_\xi/\varphi'_\xi\bigr) = \lambda\varphi'_\xi + A.$$

3°. Точное решение:

$$w(x,t) = (t + C_1)\Theta(z) + C_2, \quad z = kx + \lambda \ln|t + C_1|,$$

где C_1, C_2, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(k\Theta''_{zz}/\Theta'_z,\ \ldots,\ k^{n-1}\Theta^{(n)}_z/\Theta'_z\bigr) = \lambda\Theta'_z + \Theta.$$

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial w}{\partial x} F\biggl(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\bigg/\dfrac{\partial w}{\partial x},\, \ldots,\, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\bigg/\dfrac{\partial w}{\partial x}\biggr)$.

Частный случай уравнения 11.2.1.2.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x + C_2, t + C_3) + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = At + B + \varphi(z), \quad z = kx + \lambda t,$$

где A, B, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k\varphi'_z F\bigl(k\varphi''_{zz}/\varphi'_z,\, \ldots,\, k^{n-1}\varphi_z^{(n)}/\varphi'_z\bigr) = \lambda\varphi'_z + A.$$

3°. Точное решение:

$$w(x,t) = Ae^{\beta t}\Theta(\xi) + B, \quad \xi = kx + \lambda t,$$

где A, B, k, β, λ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k\Theta'_\xi F\bigl(k\Theta''_{\xi\xi}/\Theta'_\xi,\, \ldots,\, k^{n-1}\Theta_\xi^{(n)}/\Theta'_\xi\bigr) = \lambda\Theta'_\xi + \beta\Theta.$$

14. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^{\beta} F\biggl(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\bigg/\dfrac{\partial w}{\partial x},\, \ldots,\, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\bigg/\dfrac{\partial w}{\partial x}\biggr)$.

Частный случай уравнения 11.2.1.2. При $\beta = 0$ и $\beta = 1$ см. уравнения 11.2.1.11 и 11.2.1.12.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x + C_2, C_1^{\beta-1}t + C_3) + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \bigl[A(1-\beta)t + B\bigr]^{\frac{1}{1-\beta}}\varphi(x) + C,$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\varphi'_x)^{\beta} F\bigl(\varphi''_{xx}/\varphi'_x,\, \ldots,\, \varphi_x^{(n)}/\varphi'_x\bigr) = A\varphi.$$

3°. Точное решение:

$$w(x,t) = (t + A)^{\frac{1}{1-\beta}}\Theta(z) + B, \quad z = kx + \lambda\ln(t + A),$$

где A, B, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k^{\beta}(\Theta'_z)^{\beta} F\bigl(k\Theta''_{zz}/\Theta'_z,\, \ldots,\, k^{n-1}\Theta_z^{(n)}/\Theta'_z\bigr) = \lambda\Theta'_z + \frac{1}{1-\beta}\Theta.$$

11.2.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\Bigl(t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Bigr)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\left(t, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ldots, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right) + g(t)w$.

Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x,t) + C\exp\left[\int g(t)\,dt\right],$$

где C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ldots, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right) + aw\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t).$

Преобразование

$$w = u(z,t) + \int_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau, \qquad z = x + a\int_{t_0}^{t} (t-\tau)g(\tau)\,d\tau,$$

где t_0 — любое число, приводит к более простому уравнению вида 11.2.1.4:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au\frac{\partial u}{\partial x} + F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right).$$

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 657).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\left(t, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ldots, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right) + f(t)w\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t)w.$

Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w\bigl(x + C_1\psi(t) + C_2,\, t\bigr) + C_1\varphi(t),$$

где

$$\varphi(t) = \exp\left[\int g(t)\,dt\right], \quad \psi(t) = \int f(t)\varphi(t)\,dt, \quad C_1, C_2 \text{ — произвольные постоянные,}$$

также будет решением этого уравнения.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = wF\left(t, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x + C_2, t),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = A\exp\left[\lambda x + \int F(t, \lambda, \ldots, \lambda^n)\,dt\right],$$

где A, λ — произвольные постоянные.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = wF\left(t, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ldots, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}}\right).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x + C_2, t),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = A\exp\left[\lambda x + \int F\bigl(t, \lambda^2, \ldots, \lambda^{2n}\bigr)\,dt\right],$$

$$w(x,t) = \bigl[A\operatorname{ch}(\lambda x) + B\operatorname{sh}(\lambda x)\bigr]\exp\left[\int F\bigl(t, \lambda^2, \ldots, \lambda^{2n}\bigr)\,dt\right],$$

$$w(x,t) = \bigl[A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)\bigr]\exp\left[\int F\bigl(t, -\lambda^2, \ldots, (-1)^n\lambda^{2n}\bigr)\,dt\right],$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)w^\beta\Phi\left(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ldots, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right) + g(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = G(t)u(x,\tau), \quad \tau = \int f(t)G^{\beta-1}(t)\,dt, \qquad G(t) = \exp\left[\int g(t)\,dt\right],$$

приводит к более простому уравнению вида 11.2.1.8:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = u^\beta\Phi\left(\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots, \frac{1}{u}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right),$$

которое, например, имеет точное решение типа бегущей волны $u = u(ax + b\tau)$ и решение в виде произведения функций разных аргументов $u = \varphi(x)\psi(\tau)$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)e^{\beta w}\Phi\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big) + g(t).$

Преобразование
$$w(x,t) = u(x,\tau) + G(t), \quad \tau = \int f(t)\exp\bigl[\beta G(t)\bigr]\,dt, \qquad G(t) = \int g(t)\,dt,$$
приводит к более простому уравнению вида 11.2.1.10:
$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = e^{\beta u}\Phi\Big(\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\Big),$$
которое, например, имеет точное решение типа бегущей волны $u = u(ax + b\tau)$ и решение в виде суммы функций разных аргументов $u = \varphi(x) + \psi(\tau)$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\Phi\Big(w,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big) + g(t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Преобразование
$$w = u(z,\tau), \quad z = x + \int g(t)\,dt, \quad \tau = \int f(t)\,dt,$$
приводит к более простому уравнению
$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \Phi\Big(u,\ \frac{\partial u}{\partial z},\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^n u}{\partial z^n}\Big),$$
которое имеет точное решение типа бегущей волны $u = u(kz + \lambda\tau)$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w\Phi_0\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \ldots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big) + \sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{\partial^k w}{\partial x^k}\Phi_k\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \ldots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big).$

Уравнение имеет точное решение в виде произведения функций разных аргументов:
$$w(x,t) = Ae^{\lambda x}\Theta(t),$$
где A, λ — произвольные постоянные.

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w\Phi_0\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}}\Big) + \sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{\partial^{2k} w}{\partial x^{2k}}\Phi_k\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}}\Big).$

Уравнение имеет точные решения в виде произведения функций разных аргументов:
$$w(x,t) = Ae^{\lambda x}\Theta_1(t),$$
$$w(x,t) = \bigl[A\,\mathrm{ch}(\lambda x) + B\,\mathrm{sh}(\lambda x)\bigr]\Theta_1(t),$$
$$w(x,t) = \bigl[A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)\bigr]\Theta_2(t),$$
где A, B, λ — произвольные постоянные.

11.2.3. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\Big(x, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\Big(x,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big).$

Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по t:
$$w(x,t) = Axt + Bt + C + \varphi(x),$$
где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением
$$F\bigl(x,\ \varphi''_{xx},\ \ldots,\ \varphi^{(n)}_x\bigr) = Ax + B.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\Big(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:
$$w(x,t) = At + B + \varphi(x),$$
где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением
$$F\bigl(x,\ \varphi'_x,\ \varphi''_{xx},\ \ldots,\ \varphi^{(n)}_x\bigr) = A.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\left(\dfrac{\partial w}{\partial x},\, x\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\, \ldots,\, x^{n-1}\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-1} w(C_1 x, C_1 t + C_2) + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = At + B + \varphi(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(\varphi'_x,\, x\varphi''_{xx},\, \ldots,\, x^{n-1}\varphi_x^{(n)}\bigr) = A.$$

3°. Точное решение:

$$w(x,t) = tU(z) + C, \quad z = x/t,$$

где C — произвольная постоянная, а функция $U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(U'_z,\, zU''_{zz},\, \ldots,\, z^{n-1}U_z^{(n)}\bigr) + zU'_z - U = 0.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax\dfrac{\partial w}{\partial x} + F\left(w,\, \dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\, \ldots,\, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + C_1 e^{-at}, t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + Ce^{-at},$$

где C — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(w, w'_z, w''_{zz}, \ldots, w_z^{(n)}\bigr) + azw'_z = 0.$$

⦿ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 659).

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\left(w,\, x\dfrac{\partial w}{\partial x},\, x^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\, \ldots,\, x^n\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right).$

Подстановка $x = \pm e^z$ приводит к уравнению вида 11.2.1.2.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = x^k F\left(w,\, x\dfrac{\partial w}{\partial x},\, \ldots,\, x^n\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(C_1 x, C_1^{-k} t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = w(z), \quad z = xt^{1/k},$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$kz^{k-1}F\bigl(w,\, zw'_z,\, \ldots,\, z^n w_z^{(n)}\bigr) - w'_z = 0.$$

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = x^k F\left(w,\, x\dfrac{\partial w}{\partial x},\, \ldots,\, x^n\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right) + ax\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Переходя к новым независимым переменным

$$z = xe^{at}, \quad \tau = \frac{1}{ak}\bigl(1 - e^{-akt}\bigr),$$

получим более простое уравнение вида 11.2.3.6:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = z^k F\left(w,\, z\frac{\partial w}{\partial z},\, \ldots,\, z^n\frac{\partial^n w}{\partial z^n}\right).$$

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = e^{\lambda x} F\Bigl(w,\, \dfrac{\partial w}{\partial x},\, \ldots,\, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Bigr).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + C_1, e^{-\lambda C_1} t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x,t) = w(z), \quad z = \lambda x + \ln t,$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$e^z F\bigl(w,\, \lambda w'_z,\, \ldots,\, \lambda^n w_z^{(n)}\bigr) - w'_z = 0.$$

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w F\Bigl(x,\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\, \ldots,\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Bigr).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x, t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = A e^{\mu t} \varphi(x),$$

где A, μ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(x,\, \varphi'_x/\varphi,\, \varphi''_{xx}/\varphi,\, \ldots,\, \varphi_x^{(n)}/\varphi\bigr) = \mu.$$

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w^\beta F\Bigl(x,\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\, \ldots,\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Bigr).$

При $\beta = 1$ см. уравнение 11.2.3.9.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x, C_1^{\beta-1} t + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \bigl[(1-\beta)At + B\bigr]^{\frac{1}{1-\beta}} \varphi(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi^{\beta-1} F\bigl(x,\, \varphi'_x/\varphi,\, \varphi''_{xx}/\varphi,\, \ldots,\, \varphi_x^{(n)}/\varphi\bigr) = A.$$

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = e^{\beta w} F\Bigl(x,\, \dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\, \ldots,\, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Bigr).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x, C_1 t + C_2) + \frac{1}{\beta} \ln C_1,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = -\frac{1}{\beta} \ln(A\beta t + B) + \varphi(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$e^{\beta\varphi} F\bigl(x,\, \varphi'_x,\, \varphi''_{xx},\, \ldots,\, \varphi_x^{(n)}\bigr) + A = 0.$$

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial w}{\partial x} F\biggl(x,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\bigg/\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dots,\ \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\bigg/\dfrac{\partial w}{\partial x}\biggr).$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = At + B + \varphi(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi'_x F\bigl(x,\ \varphi''_{xx}/\varphi'_x,\ \dots,\ \varphi^{(n)}_x/\varphi'_x\bigr) = A.$$

2°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = Ae^{\mu t}\Theta(x) + B,$$

где A, B, μ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\Theta'_x F\bigl(x,\ \Theta''_{xx}/\Theta'_x\ \dots,\ \Theta^{(n)}_x/\Theta'_x\bigr) = \mu\Theta.$$

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \biggl(\dfrac{\partial w}{\partial x}\biggr)^{\beta} F\biggl(x,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\bigg/\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dots,\ \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\bigg/\dfrac{\partial w}{\partial x}\biggr).$

При $\beta = 1$ см. уравнение 11.2.3.12.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x, C_1^{\beta-1}t + C_2) + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = At + B + \varphi(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\bigl(\varphi'_x\bigr)^{\beta} F\bigl(x,\ \varphi''_{xx}/\varphi'_x,\ \dots,\ \varphi^{(n)}_x/\varphi'_x\bigr) = A.$$

3°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \bigl[A(1-\beta)t + C_1\bigr]^{\frac{1}{1-\beta}}\bigl[\Theta(x) + B\bigr] + C_2,$$

где A, B, C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\Theta(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\bigl(\Theta'_x\bigr)^{\beta} F\bigl(x,\ \Theta''_{xx}/\Theta'_x\ \dots,\ \Theta^{(n)}_x/\Theta'_x\bigr) = A\Theta + AB.$$

11.2.4. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\Bigl(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dots, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Bigr)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\biggl(x, t, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \dots, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\biggr) + g(t)w.$

Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x,t) + C\exp\biggl[\int g(t)\,dt\biggr],$$

где C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\biggl(ax + bt,\ w,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dots,\ \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\biggr).$

Точное решение:

$$w = w(\xi), \quad \xi = ax + bt,$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(\xi,\ w,\ aw'_\xi,\ \dots,\ a^n w^{(n)}_\xi\bigr) - bw'_\xi = 0.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\Bigl(ax + bt,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \ldots,\ \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Bigr).$

Точное решение:

$$w = \varphi(\xi) + Ct, \quad \xi = ax + bt,$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(\xi,\, a\varphi'_\xi,\, \ldots,\, a^n\varphi^{(n)}_\xi\bigr) - b\varphi'_\xi - C = 0,$$

порядок которого понижается с помощью подстановки $U(\xi) = \varphi'_\xi$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)x^k\Phi\Bigl(w,\ x\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \ldots,\ x^n\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Bigr) + xg(t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Переходя к новым независимым переменным

$$z = xG(t), \quad \tau = \int f(t)G^{-k}(t)\,dt, \qquad G(t) = \exp\biggl[\int g(t)\,dt\biggr],$$

приходим к более простому уравнению вида 11.2.3.6:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = z^k\Phi\Bigl(w,\ z\frac{\partial w}{\partial z},\ \ldots,\ z^n\frac{\partial^n w}{\partial z^n}\Bigr).$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w\Phi\Bigl(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}}\Bigr) + f(t)e^{\lambda x}.$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = e^{\lambda x}E(t)\biggl[A + \int\frac{f(t)}{E(t)}\,dt\biggr] + Be^{-\lambda x}E(t),$$

$$E(t) = \exp\biggl[\int\Phi\bigl(t, \lambda^2, \ldots, \lambda^{2n}\bigr)\,dt\biggr],$$

где A, B — произвольные постоянные.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w\Phi\Bigl(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}}\Bigr) + f(t)e^{\lambda x} + g(t)e^{-\lambda x}.$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = e^{\lambda x}E(t)\biggl[A + \int\frac{f(t)}{E(t)}\,dt\biggr] + e^{-\lambda x}E(t)\biggl[B + \int\frac{g(t)}{E(t)}\,dt\biggr],$$

$$E(t) = \exp\biggl[\int\Phi\bigl(t, \lambda^2, \ldots, \lambda^{2n}\bigr)\,dt\biggr],$$

где A, B — произвольные постоянные.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w\Phi\Bigl(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}}\Bigr) + f(t)\,\mathrm{ch}(\lambda x) + g(t)\,\mathrm{sh}(\lambda x).$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \mathrm{ch}(\lambda x)E(t)\biggl[A + \int\frac{f(t)}{E(t)}\,dt\biggr] + \mathrm{sh}(\lambda x)E(t)\biggl[B + \int\frac{g(t)}{E(t)}\,dt\biggr],$$

$$E(t) = \exp\biggl[\int\Phi\bigl(t, \lambda^2, \ldots, \lambda^{2n}\bigr)\,dt\biggr],$$

где A, B — произвольные постоянные.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w\Phi\Bigl(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}}\Bigr) + f(t)\cos(\lambda x).$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \cos(\lambda x)E(t)\biggl[A + \int\frac{f(t)}{E(t)}\,dt\biggr] + B\sin(\lambda x)E(t),$$

$$E(t) = \exp\biggl[\int\Phi\bigl(t, -\lambda^2, \ldots, (-1)^n\lambda^{2n}\bigr)\,dt\biggr],$$

где A, B — произвольные постоянные.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w\Phi\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}}\Big) + f(t)\cos(\lambda x) + g(t)\sin(\lambda x).$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \cos(\lambda x)E(t)\left[A + \int \frac{f(t)}{E(t)}\,dt\right] + \sin(\lambda x)E(t)\left[B + \int \frac{g(t)}{E(t)}\,dt\right],$$

$$E(t) = \exp\left[\int \Phi\big(t, -\lambda^2, \ldots, (-1)^n\lambda^{2n}\big)\,dt\right],$$

где A, B — произвольные постоянные.

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)w^\beta\Phi\Big(x,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big) + g(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = G(t)u(x,\tau), \quad \tau = \int f(t)G^{\beta-1}(t)\,dt, \qquad G(t) = \exp\left[\int g(t)\,dt\right],$$

приводит к более простому уравнению вида 11.2.3.10:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = u^\beta\Phi\Big(x,\ \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{1}{u}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\Big),$$

которое имеет точное решение в виде произведения функций разных аргументов $u = \varphi(x)\psi(\tau)$.

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^k\Phi\Big(x,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big/\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \ldots,\ \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big/\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + g(t)w + h(t).$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \varphi(t)\Theta(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (C — произвольная постоянная)

$$\varphi'_t = Af(t)\varphi^k + g(t)\varphi, \tag{1}$$

$$\psi'_t = g(t)\psi + Bf(t)\varphi^k + h(t), \tag{2}$$

а функция $\Theta(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению n-го порядка

$$\big(\Theta'_x\big)^k\Phi\big(x,\ \Theta''_{xx}/\Theta'_x,\ \ldots,\ \Theta^{(n)}_x/\Theta'_x\big) = A\Theta + B.$$

Общее решение системы (1), (2) дается формулами

$$\varphi(t) = G(t)\left[C + A(1-k)\int f(t)G^{k-1}(t)\,dt\right]^{\frac{1}{1-k}}, \quad G(t) = \exp\left[\int g(t)\,dt\right],$$

$$\psi(t) = DG(t) + G(t)\int \big[Bf(t)\varphi^k(t) + h(t)\big]\frac{dt}{G(t)},$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \big[f_1(t)w + f_0(t)\big]\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^k\Phi\Big(x,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big/\dfrac{\partial w}{\partial x},\ldots,\ \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big/\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + g_1(t)w + g_0(t).$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \varphi(t)\Theta(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (C — произвольная постоянная):

$$\varphi'_t = Cf_1(t)\varphi^{k+1} + g_1(t)\varphi, \tag{1}$$

$$\psi'_t = \big[Cf_1(t)\varphi^k + g_1(t)\big]\psi + Cf_0(t)\varphi^k + g_0(t), \tag{2}$$

а функция $\Theta(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению n-го порядка

$$\big(\Theta'_x\big)^k\Phi\big(x,\ \Theta''_{xx}/\Theta'_x,\ \ldots,\ \Theta^{(n)}_x/\Theta'_x\big) = C.$$

Общее решение системы (1), (2) дается формулами

$$\varphi(t) = G(t)\left[A - kC\int f_1(t)G^k(t)\,dt\right]^{-1/k}, \quad G(t) = \exp\left[\int g_1(t)\,dt\right],$$

$$\psi(t) = B\varphi(t) + \varphi(t)\int \big[Cf_0(t)\varphi^k(t) + g_0(t)\big]\frac{dt}{\varphi(t)},$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)e^{\beta w}\Phi\Big(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big) + g(t).$

Преобразование

$$w(x,t) = u(x,\tau) + G(t), \quad \tau = \int f(t)\exp\bigl[\beta G(t)\bigr]\,dt, \qquad G(t) = \int g(t)\,dt,$$

приводит к более простому уравнению вида 11.2.3.11:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = e^{\beta u}\Phi\Big(x,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\Big),$$

которое имеет точное решение в виде суммы функций разных аргументов $u = \varphi(x) + \psi(\tau)$.

14. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w\Phi_0\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}}\Big) + \sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{\partial^{2k} w}{\partial x^{2k}}\Phi_k\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}}\Big) + f(t)e^{\lambda x} + g(t)e^{-\lambda x}.$

Существует точное решение с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t) = e^{\lambda x}\varphi(t) + e^{-\lambda x}\psi(t).$$

15. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w\Phi_0\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}}\Big) + \sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{\partial^{2k} w}{\partial x^{2k}}\Phi_k\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}}\Big) + f(t)\operatorname{ch}(\lambda x) + g(t)\operatorname{sh}(\lambda x).$

Существует точное решение с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t) = \operatorname{ch}(\lambda x)\varphi(t) + \operatorname{sh}(\lambda x)\psi(t).$$

16. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w\Phi_0\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}}\Big) + \sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{\partial^{2k} w}{\partial x^{2k}}\Phi_k\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}}\Big) + f(t)\cos(\lambda x) + g(t)\sin(\lambda x).$

Существует точное решение с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t) = \cos(\lambda x)\varphi(t) + \sin(\lambda x)\psi(t).$$

17. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = wF(t,\zeta_0,\zeta_1,\ldots,\zeta_n), \qquad \zeta_k = \sum\limits_{i=k}^{n}\dfrac{(-1)^{i+k}}{k!\,(i-k)!}x^{i-k}\dfrac{\partial^i w}{\partial x^i}, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = (C_0 + C_1 x + \cdots + C_n x^n)\varphi(t),$$

где $C_0,\ C_1,\ \ldots,\ C_n$ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi'_t = \varphi F(t, C_0\varphi, C_1\varphi, \ldots, C_n\varphi).$$

⊙ *Литература*: Ph. W. Doyle (1996), рассматривался случай $\partial_t F \equiv 0$.

11.3. Уравнения, содержащие вторую производную по t

11.3.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x + bt, w).$

Точное решение:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = x + bt,$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aw^{(n)}_\xi - b^2 w''_{\xi\xi} + f(\xi, w) = 0.$$

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + bw\ln w + f(t)w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t)\psi(x),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} - \bigl[b\ln\varphi + f(t) + C\bigr]\varphi = 0,$$
$$a\psi^{(n)}_x + \bigl(b\ln\psi - C\bigr)\psi = 0,$$

C — произвольная постоянная.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + bw\ln w + \bigl[f(x) + g(t)\bigr]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t)\psi(x),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} - \bigl[b\ln\varphi + g(t) + C\bigr]\varphi = 0,$$
$$a\psi^{(n)}_x + \bigl[b\ln\psi + f(x) - C\bigr]\psi = 0,$$

C — произвольная постоянная.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x)w\ln w + \bigl[bf(x)t + g(x)\bigr]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = e^{-bt}\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi^{(n)}_x + f(x)\varphi\ln\varphi + \bigl[g(x) - b^2\bigr]\varphi = 0.$$

11.3.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + F\Bigl(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + bw\ln w + \bigl[g(x) + h(t)\bigr]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t)\psi(x),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} - \bigl[b\ln\varphi + h(t) + C\bigr]\varphi = 0,$$
$$a\psi^{(n)}_x + f(x)\psi'_x + \bigl[b\ln\psi + g(x) - C\bigr]\psi = 0,$$

C — произвольная постоянная.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + b\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2 + f(t).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + C_1, t) + C_2 t + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = C_1 t^2 + C_2 t + \int_{t_0}^{t} (t-\tau) f(\tau)\,d\tau + \theta(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где C_1, C_2, t_0, λ — произвольные постоянные, а функция $\theta(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\theta^{(n)}_z - \lambda^2\theta''_{zz} + b\bigl(\theta'_z\bigr)^2 - 2C_1 = 0.$$

3°. Существует вырожденное решение, квадратичное по x:

$$w(x,t)=\varphi(t)x^2+\psi(t)x+\chi(t).$$

4°. Замена $w=U(x,t)+\int_0^t (t-\tau)f(\tau)\,d\tau$ приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a\frac{\partial^n U}{\partial x^n}+b\biggl(\frac{\partial U}{\partial x}\biggr)^2,$$

которое допускает автомодельное решение вида $U=t^{\frac{2(2-n)}{n}}u(\zeta)$, где $\zeta=xt^{-\frac{2}{n}}$.

3. $\displaystyle \boldsymbol{\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a\frac{\partial^n w}{\partial x^n}+b\biggl(\frac{\partial w}{\partial x}\biggr)^2+cw+f(t).}$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$\begin{aligned} w_1&=w(x+C_1,t)+C_2\operatorname{ch}(kt)+C_3\operatorname{sh}(kt) &&\text{при } c=k^2>0,\\ w_2&=w(x+C_1,t)+C_2\cos(kt)+C_3\sin(kt) &&\text{при } c=-k^2<0,\end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точное решение:

$$w(x,t)=\varphi(t)+\psi(z),\quad z=x+\lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(z)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\begin{gathered}\varphi''_{tt}-c\varphi-f(t)=0,\\ a\psi_z^{(n)}-\lambda^2\psi''_{zz}+b\bigl(\psi'_z\bigr)^2+c\psi=0.\end{gathered}$$

Общее решение первого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=C_1\operatorname{ch}(kt)+C_2\operatorname{sh}(kt)+\frac{1}{k}\int_0^t f(\tau)\operatorname{sh}\bigl[k(t-\tau)\bigr]\,d\tau &&\text{при}\quad c=k^2>0,\\ \varphi(t)&=C_1\cos(kt)+C_2\sin(kt)+\frac{1}{k}\int_0^t f(\tau)\sin\bigl[k(t-\tau)\bigr]\,d\tau &&\text{при}\quad c=-k^2<0,\end{aligned}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Существует вырожденное решение, квадратичное по x:

$$w(x,t)=\varphi_2(t)x^2+\varphi_1(t)x+\varphi_0(t).$$

4°. Подстановка $w=U(x,t)+\varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ описана в п. 2°, приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a\frac{\partial^n U}{\partial x^n}+b\biggl(\frac{\partial U}{\partial x}\biggr)^2+cU.$$

4. $\displaystyle \boldsymbol{\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a\frac{\partial^n w}{\partial x^n}+b\biggl(\frac{\partial w}{\partial x}\biggr)^2+cw\frac{\partial w}{\partial x}+kw^2+f(t)w+g(t).}$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t)=\varphi(t)+\psi(t)\exp(\lambda x),$$

где λ — корни квадратного уравнения $b\lambda^2+c\lambda+k=0$, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''_{tt}=k\varphi^2+f(t)\varphi+g(t), \tag{1}$$
$$\psi''_{tt}=\bigl[(c\lambda+2k)\varphi+f(t)+a\lambda^n\bigr]\psi. \tag{2}$$

В частном случае при $f(t)=\text{const}$, $g(t)=\text{const}$ уравнение (1) имеет частные решения вида $\varphi=\text{const}$ и ввиду его автономности может быть проинтегрировано в квадратурах. Уравнение (2) линейно относительно функции ψ, поэтому при $\varphi=\text{const}$ его общее решение выражается через экспоненты или синус и косинус.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + g(x) + h(t).$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = C_1 t^2 + C_2 t + \int_{t_0}^{t} (t-\tau)h(\tau)\,d\tau + \varphi(x).$$

Здесь C_1, C_2, t_0 — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi_x^{(n)} + f(x)\bigl(\varphi'_x\bigr)^2 + g(x) - 2C_1 = 0.$$

2°. Замена $w = U(x,t) + \displaystyle\int_0^t (t-\tau)h(\tau)\,d\tau$ приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a\frac{\partial^n U}{\partial x^n} + f(x)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + g(x).$$

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + bw + g(x) + h(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(x).$$

Здесь функции $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} - b\varphi - h(t) = 0,$$
$$a\psi_x^{(n)} + f(x)(\psi'_x)^2 + b\psi + g(x) = 0.$$

Решение первого уравнения для $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) = C_1\operatorname{ch}(kt) + C_2\operatorname{sh}(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t h(\tau)\operatorname{sh}\bigl[k(t-\tau)\bigr]\,d\tau \quad \text{при} \quad b = k^2 > 0,$$
$$\varphi(t) = C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t h(\tau)\sin\bigl[k(t-\tau)\bigr]\,d\tau \quad \text{при} \quad b = -k^2 < 0,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}} + f(t)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + bf(t)w^2 + g(t)w + h(t).$

1°. Точные решения с обобщенным разделением переменных, содержащие экспоненциальные функции x:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp\bigl(\pm x\sqrt{-b}\,\bigr), \qquad b < 0, \tag{1}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f, g, h не указываются)

$$\varphi''_{tt} = bf\varphi^2 + g\varphi + h, \tag{2}$$
$$\psi''_{tt} = \bigl[2bf\varphi + g + (-1)^n ab^n\bigr]\psi. \tag{3}$$

В частном случае, когда f, g, h — некоторые постоянные, уравнение (2) имеет частные решения вида $\varphi = \text{const}$. В этом случае общее решение уравнения (3) выражается через экспоненты или синус и косинус.

2°. Точное решение с обобщенным разделением переменных (обобщает решения из п. 1°):

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\bigl[A\exp\bigl(x\sqrt{-b}\,\bigr) + B\exp\bigl(-x\sqrt{-b}\,\bigr)\bigr], \qquad b < 0, \tag{4}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi''_{tt} = bf\bigl(\varphi^2 + 4AB\psi^2\bigr) + g\varphi + h, \tag{5}$$
$$\psi''_{tt} = \bigl[2bf\varphi + g + (-1)^n ab^n\bigr]\psi. \tag{6}$$

Из уравнения (8) можно выразить φ через ψ, а затем подставить в (7). В итоге получается нелинейное уравнение четвертого порядка для функции ψ (при $f,\ g,\ h = \mathrm{const}$ это уравнение является автономным и допускает понижение порядка).

Отметим два частных случая решения вида (6), которые выражаются через гиперболические функции:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\,\mathrm{ch}\big(x\sqrt{-b}\big) \quad \text{при } A = \tfrac{1}{2},\ B = \tfrac{1}{2};$$
$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\,\mathrm{sh}\big(x\sqrt{-b}\big) \quad \text{при } A = \tfrac{1}{2},\ B = -\tfrac{1}{2}.$$

3°. Решение с обобщенным разделением переменных, содержащие тригонометрические функции от x:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\cos\big(x\sqrt{b} + c\big), \qquad b > 0,$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi''_{tt} = bf\big(\varphi^2 + \psi^2\big) + g\varphi + h,$$
$$\psi''_{tt} = \big[2bf\varphi + g + (-1)^n ab^n\big]\psi.$$

⊙ *Литература*: V. A. Galaktionov (1995), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 371).

8. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f\left(x,\ \frac{\partial w}{\partial x}\right) + g(t).$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = C_1 t^2 + C_2 t + \int_{t_0}^{t} (t-\tau)g(\tau)\,d\tau + \varphi(x),$$

где $C_1,\ C_2,\ t_0$ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi_x^{(n)} + f\big(x, \varphi'_x\big) - 2C_1 = 0,$$

порядок которого можно понизить с помощью подстановки $u(x) = \varphi'_x$.

2°. Замена $w = U(x,t) + \displaystyle\int_0^t (t-\tau)g(\tau)\,d\tau$ приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a\frac{\partial^n U}{\partial x^n} + f\left(x,\ \frac{\partial U}{\partial x}\right).$$

9. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f\left(x,\ \frac{\partial w}{\partial x}\right) + bw + g(t).$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(x),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} - b\varphi - g(t) = 0,$$
$$a\psi_x^{(n)} + f\big(x, \psi'_x\big) + b\psi = 0.$$

Решение первого уравнения для $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) = C_1\,\mathrm{ch}(kt) + C_2\,\mathrm{sh}(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t g(\tau)\,\mathrm{sh}\big[k(t-\tau)\big]\,d\tau \qquad \text{при} \quad b = k^2 > 0,$$
$$\varphi(t) = C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t g(\tau)\sin\big[k(t-\tau)\big]\,d\tau \quad \text{при} \quad b = -k^2 < 0,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Подстановка $w = U(x,t) + \varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ описана в п. 1°, приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a\frac{\partial^n U}{\partial x^n} + f\left(x,\ \frac{\partial U}{\partial x}\right) + bU.$$

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + wf\Bigl(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x + C_2, t),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = e^{\lambda x}\varphi(t),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi(t)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\varphi''_{tt} = \bigl[a\lambda^n + f(t,\lambda)\bigr]\varphi.$$

11.3.3. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + F\Bigl(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial^{n-1} w}{\partial x^{n-1}}\Bigr)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + bw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c.$

1°. Решение типа бегущей волны:

$$w(x,t) = u(\xi), \qquad \xi = kx + \lambda t,$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $u = u(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$ak^n u_\xi^{(n)} + (bk^2 u - \lambda^2)u''_{\xi\xi} + c = 0.$$

2°. Точное решение:

$$w = U(z) + 4bC_1^2 t^2 + 4bC_1C_2 t, \qquad z = x + bC_1 t^2 + bC_2 t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aU_z^{(n)} + bUU''_{zz} - b^2C_2^2 U''_{zz} - 2bC_1 U'_z = 8bC_1^2 - c.$$

3°. Существует вырожденное решение, квадратичное по x:

$$w(x,t) = f_2(t)x^2 + f_1(t)x + f_0(t).$$

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + b\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr) + c.$

1°. Решение типа бегущей волны:

$$w(x,t) = u(\xi), \qquad \xi = kx + \lambda t,$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $u = u(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$ak^n u_\xi^{(n)} + bk^2(uu'_\xi)'_\xi - \lambda^2 u''_{\xi\xi} + c = 0.$$

2°. Точное решение:

$$w = U(z) + 4bC_1^2 t^2 + 4bC_1C_2 t, \qquad z = x + bC_1 t^2 + bC_2 t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aU_z^{(n)} + b(UU'_z)'_z - b^2C_2^2 U''_{zz} - 2bC_1 U'_z = 8bC_1^2 - c.$$

3°. Существует вырожденное решение, квадратичное по x:

$$w(x,t) = f_2(t)x^2 + f_1(t)x + f_0(t).$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(t)\sum\limits_{i,j=0}^{i,j<n} b_{ij}\dfrac{\partial^i w}{\partial x^i}\dfrac{\partial^j w}{\partial x^j} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} g_k(t)\dfrac{\partial^k w}{\partial x^k} + h(t).$

Здесь принято обозначение: $\dfrac{\partial^0 w}{\partial x^0} \equiv w$.

1°. В общем случае уравнение имеет решения с обобщенным разделением переменных вида
$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp(\lambda x),$$
где λ — корни алгебраического уравнения: $\sum\limits_{i,j=0}^{i,j<n} b_{ij}\lambda^{i+j} = 0$.

2°. Пусть n — четное число и в первой сумме все коэффициенты $b_{ij} = 0$, когда сумма их индексов $i+j$ — нечетное число. В этом случае исходное уравнение имеет также решения с обобщенным разделением переменных вида
$$w(x,t) = \varphi_1(t) + \psi_1(t)\bigl[A\operatorname{ch}(\lambda x) + B\operatorname{sh}(\lambda x)\bigr],$$
$$w(x,t) = \varphi_2(t) + \psi_2(t)\bigl[A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)\bigr],$$
где A, B — произвольные постоянные, параметр λ определяется путем решения алгебраических уравнений, а функции $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, $\psi_2(t)$ находятся из соответствующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + F\left(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \ldots,\ \dfrac{\partial^{n-1} w}{\partial x^{n-1}}\right) + g(t).$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:
$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}At^2 + Bt + C + \int_0^t (t-\tau)g(\tau)\,d\tau + \varphi(x).$$
Здесь A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением
$$a\varphi_x^{(n)} + F\bigl(x, \varphi_x', \ldots, \varphi_x^{(n-1)}\bigr) - A = 0,$$
порядок которого можно понизить с помощью подстановки $U(x) = \varphi_x'$.

2°. Замена
$$w = u(x,t) + \int_0^t (t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$
приводит к более простому уравнению
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial^n u}{\partial x^n} + F\left(x,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \ldots,\ \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}\right).$$

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + F\left(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \ldots,\ \dfrac{\partial^{n-1} w}{\partial x^{n-1}}\right) + bw + g(t).$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:
$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(x).$$
Здесь функции $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями
$$\varphi_{tt}'' - b\varphi - g(t) = 0,$$
$$a\psi_x^{(n)} + F\bigl(x, \psi_x', \ldots, \psi_x^{(n-1)}\bigr) + b\psi = 0.$$
Решение первого уравнения для $\varphi(t)$ имеет вид
$$\varphi(t) = C_1\operatorname{ch}(kt) + C_2\operatorname{sh}(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t g(\tau)\operatorname{sh}\bigl[k(t-\tau)\bigr]\,d\tau \quad \text{при} \quad b = k^2 > 0,$$
$$\varphi(t) = C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t g(\tau)\sin\bigl[k(t-\tau)\bigr]\,d\tau \quad \text{при} \quad b = -k^2 < 0,$$
где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Замена $w = u(x,t) + \varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ приведена в п. 1°, приводит к более простому уравнению
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial^n u}{\partial x^n} + F\left(x,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \ldots,\ \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}\right) + bu.$$

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + wF\left(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \ldots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^{n-1} w}{\partial x^{n-1}}\right).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x + C_2, t),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = e^{\lambda x}\varphi(t),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi(t)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\varphi''_{tt} = \bigl[a\lambda^n + F(t, \lambda, \ldots, \lambda^{n-1})\bigr]\varphi.$$

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}} + wF\left(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^{2n-2} w}{\partial x^{2n-2}}\right).$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x + C_2, t),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \bigl[A\,\mathrm{ch}(\lambda x) + B\,\mathrm{sh}(\lambda x)\bigr]\varphi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(t)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\varphi''_{tt} = \Phi(t)\varphi, \qquad \Phi(t) = a\lambda^{2n} + F\bigl(t, \lambda^2, \ldots, \lambda^{2n-2}\bigr).$$

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \bigl[A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)\bigr]\varphi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(t)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\varphi''_{tt} = \Phi(t)\varphi, \qquad \Phi(t) = (-1)^n a\lambda^{2n} + F\bigl(t, -\lambda^2, \ldots, (-1)^{n-1}\lambda^{2n-2}\bigr).$$

11.3.4. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x,t,w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x)w + \sum\limits_{k=0}^{n-1} b_k x^k.$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}t^2\sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k + t\sum_{k=0}^{n-1} A_k x^k + \sum_{k=0}^{n-1} B_k x^k - \frac{1}{a(n-1)!}\int_0^x (x-\xi)^{n-1} f(\xi)\,d\xi,$$

где A_0, A_1, ..., A_{n-1} и B_0, B_1, ..., B_{n-1} — произвольные постоянные.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(t)w + g(t).$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \varphi(t)\bigl(A_n x^n + \cdots + A_1 x\bigr) + \psi(t),$$

где A_1, ..., A_n — произвольные постоянные, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''_{tt} = A_n a n!\,\varphi^2 + f(t)\varphi,$$
$$\psi''_{tt} = A_n a n!\,\varphi\psi + f(t)\psi + g(t).$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + bw^2 + f(t)w + g(t).$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \varphi(t)\Theta(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (C — произвольная постоянная)

$$\varphi''_{tt} = C\varphi^2 + b\varphi\psi + f(t)\varphi,$$
$$\psi''_{tt} = C\varphi\psi + b\psi^2 + f(t)\psi + g(t),$$

а функция $\Theta(x)$ удовлетворяет линейному обыкновенному дифференциальному уравнению n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$a\Theta_x^{(n)} + b\Theta = C.$$

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}} - ak^{2n}w^2 + f(x)w + b_1\operatorname{sh}(kx) + b_2\operatorname{ch}(kx).$

Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной t:

$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}(t+C)^2\bigl[b_1\operatorname{sh}(kx) + b_2\operatorname{ch}(kx)\bigr] + \varphi(x).$$

Здесь C — произвольная постоянная, а функция $\varphi(x)$ определяется из линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$a\varphi_x^{(2n)} - ak^{2n}\varphi + f(x) = 0.$$

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x)w\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t)w + h(t).$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,t) = \varphi(t)\Theta(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\Theta(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} = C\varphi^2 + g(t)\varphi,$$
$$\psi''_{tt} = \bigl[C\varphi + g(t)\bigr]\psi + h(t),$$
$$a\Theta_x^{(n)} + f(x)\Theta'_x = C,$$

C — произвольная постоянная.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x)w\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x)w^2 + h(t)w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$a\varphi_x^{(n)} + f(x)\varphi'_x + g(x)\varphi - C = 0,$$
$$\psi''_{tt} - C\psi^2 - h(t)\psi = 0,$$

C — произвольная постоянная.

11.3.5. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F\Bigl(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Bigr)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] - a^2\dfrac{f'(w)}{f^3(w)} + b.$

Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$\int f(w)\,dw = at - \frac{b}{n!}x^n + C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1x + C_0,$$

где C_0, C_1, …, C_{n-1} — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 675).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F\left(\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right)$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-2n} w(C_1^2 x + C_2, C_1^n t + C_3) + \sum_{k=0}^{n-1} (A_k t + B_k) x^k,$$

где C_1, C_2, C_3, A_k, B_k — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных в виде многочлена n-й степени по переменной x:

$$w(x,t) = \frac{1}{n!}(C_1 t + C_2) x^n + \sum_{k=0}^{n-1} (A_k t + B_k) x^k + \int_0^t (t-\xi) F(C_1\xi + C_2)\, d\xi,$$

где C_1, C_2, A_k, B_k — произвольные постоянные.

3°. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной t:

$$w(x,t) = \frac{1}{2} t^2 \sum_{k=0}^{n-1} A_k x^k + t \sum_{k=0}^{n-1} B_k x^k + \sum_{k=0}^{n-1} C_k x^k + \int_0^x \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} \Phi\left(\sum_{k=0}^{n-1} A_k \xi^k\right) d\xi,$$

где A_k, B_k, C_k — произвольные постоянные, а $\Phi(u)$ — функция обратная к $F(u)$.

4°. Точное решение:

$$w(x,t) = \frac{1}{2} A_1 t^2 + \frac{1}{n!} A_2 x^n + \sum_{m=0}^{n-1} (B_m t + C_m) x^m + \varphi(\zeta), \qquad \zeta = kx + \lambda t,$$

где A_1, A_2, B_m, C_m, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(\zeta)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$A_1 + \lambda^2 \varphi''_{\zeta\zeta} = F\bigl(A_2 + k^n \varphi^{(n)}_\zeta\bigr).$$

5°. Автомодельное решение:

$$w = t^2 U(z), \qquad z = x t^{-2/n},$$

где функция $U = U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2U + \frac{2(2-3n)}{n^2} z U'_z + \frac{4}{n^2} z^2 U''_{zz} = F(U^{(n)}_z).$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ldots, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right)$.

1°. Существует вырожденное решение, линейное по x:

$$w = (C_1 t + C_2)x + C_3 t + C_4 + \int_0^t (t-\tau) F(C_1\tau + C_2, 0, \ldots, 0)\, d\tau.$$

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w(x,t) = u(\xi), \qquad \xi = kx + \lambda t,$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $u = u(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(ak^2 u - \lambda^2) u''_{\xi\xi} + F(k u'_\xi, k^2 u''_{\xi\xi}, \ldots, k^n u^{(n)}_\xi) = 0.$$

3°. Точное решение:

$$w = U(z) + 4aC_1^2 t^2 + 4aC_1C_2 t, \qquad z = x + aC_1 t^2 + aC_2 t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(aU - a^2C_2^2) U''_{zz} - 2aC_1 U'_z + F(U'_z, U''_{zz}, \ldots, U^{(n)}_z) = 8aC_1^2.$$

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 676).

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (aw + bx)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ldots, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right).$

Замена $w = u - (b/a)x$ приводит к уравнению вида 11.3.5.3:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{b}{a}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right).$$

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F\left(x, t, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ldots, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right) + aw.$

Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(x,t) + C_1 \operatorname{ch}(kt) + C_2 \operatorname{sh}(kt) \quad \text{при } a = k^2 > 0,$$
$$w_2 = w(x,t) + C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt) \quad \text{при } a = -k^2 < 0,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

11.4. Другие уравнения

11.4.1. Уравнения, содержащие смешаные производные

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(t)\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1(x,t) = w\bigl(x + \varphi(t), t\bigr) + \varphi'_t(t),$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w = \varphi(t)e^{\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\frac{\varphi'_t(t)}{\varphi(t)} - \lambda^{n-2} f(t),$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция, λ — произвольная постоянная.

Замечание. При $n = 3$ это уравнение встречается в гидродинамике [см. уравнение (2) в 9.3.3.1 и уравнение (4) при $f_1(t) = 0$ в 10.3.3.1].

2. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)\dfrac{\partial^n w}{\partial y^n}.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1(x,y) = C_1^{n-2} w(x, C_1 y + \varphi(x)) + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а $\varphi(x)$ — произвольная функция, также будет решением этого уравнения.

2°. Вырожденное решение:

$$w(x,y) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \bigl[y + \varphi(x)\bigr]^k,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, C_k — произвольные постоянные.

3°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y) = \varphi(x)e^{\lambda y} - \lambda^{n-2}\int f(x)\,dx + C,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция; C, λ — произвольные постоянные.

4°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y) = \varphi(y)\int f(x)\,dx + \psi(y),$$

где функции $\varphi = \varphi(y)$ и $\psi = \psi(y)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(\varphi'_y)^2 - \varphi\varphi''_{yy} = \varphi_y^{(n)},$$
$$\varphi'_y\psi'_y - \varphi\psi''_{yy} = \psi_y^{(n)}.$$

5°. Обобщенно-автомодельное решение:

$$w(x,y) = \varphi(x)U(z), \quad z = \psi(x)y$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(x)$, $U = U(z)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(\varphi\psi)'_x = C_1 f(x)\psi^{n-1},$$
$$\varphi'_x = C_2 f(x)\psi^{n-2},$$
$$C_1(U'_z)^2 - C_2 U U''_{zz} = U_z^{(n)}.$$

6°. См. также уравнение 11.4.1.3 при $g(x) = 0$.

Замечание. При $n = 3$ это уравнение встречается в гидродинамике [см. уравнение 9.3.1.1 при $f(x) = \mathrm{const}$].

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, с. 375).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial y^{2n}} + g(x).$

Частный случай уравнения 11.4.1.5.

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y) = \varphi(x)e^{\lambda y} - \frac{1}{2\lambda^2\varphi(x)}\left[\int g(x)\,dx + C_1\right]e^{-\lambda y} - \lambda^{2n-2}\int f(x)\,dx + C_2,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, C_1, C_2, λ — произвольные постоянные.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)^{k-1}\dfrac{\partial^n w}{\partial y^n}.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1(x,y) = C_1^{2k+n-4} w\big(x, C_1^{2-k}y + \varphi(x)\big) + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, $\varphi(x)$ — произвольная функция, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w = U(z), \qquad z = y\Big[\int f(x)\,dx + C\Big]^{\frac{1}{4-2k-n}} + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, а функция $U = U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(U'_z)^2 = (4 - 2k - n)(U''_{zz})^{k-1}U_z^{(n)}.$$

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \Big[(2-k)\int f(x)\,dx + C\Big]^{\frac{1}{2-k}}\theta(y),$$

где функция $\theta(y)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\theta'_y)^2 - \theta\theta''_{yy} = (\theta''_{yy})^{k-1}\theta_y^{(n)}.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F\left(x, w, \dfrac{\partial w}{\partial y}, \dots, \dfrac{\partial^n w}{\partial y^n}\right).$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1(x,y) = w\big(x, y + \varphi(x)\big),$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, также будет решением этого уравнения.

2°. Пусть правая часть уравнения не зависит явно от x. Точное решение:

$$w = w(z), \quad z = y + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, а функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $F\big(w, w'_z, \dots, w_z^{(n)}\big) = 0$.

3°. Пусть правая часть уравнения не зависит явно от x и w. Точное решение:

$$w = Cx + g(z), \quad z = y + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, C — произвольная постоянная, а функция $g(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $F\big(g'_z, \ldots, g_z^{(n)}\big) + Cg''_{zz} = 0$.

4°. Преобразование Мизеса

$$\xi = x, \quad \eta = w, \quad u(\xi, \eta) = \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \text{где} \quad w = w(x, y),$$

на единицу понижает порядок рассматриваемого уравнения. Формулы для вычисления производных:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = u\frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial w}{\partial y}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = u\frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = u\frac{\partial}{\partial \eta}\left(u\frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y} = u\frac{\partial}{\partial \eta}.$$

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 376).

6. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = a(t)w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F\left(t, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n}\right).$

1°. Пусть $w(x, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + \varphi(t), t) + \frac{\varphi'_t(t)}{a(t)},$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция, также будет решением этого уравнения.

2°. Вырожденное решение, линейное по x:

$$w(x, t) = \varphi(t)x + \psi(t),$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, $\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка $\varphi'_t = F(t, \varphi, 0, \ldots, 0)$.

3°. При $a = \mathrm{const}$ и $F = F(w_x, w_{xx}, \ldots, w_x^{(n)})$, уравнение имеет решение типа бегущей волны

$$w = U(z), \quad z = kx + \lambda t,$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k\lambda U''_{zz} = ak^2 UU''_{zz} + F\big(kU'_z, k^2U''_{zz}, \ldots, k^nU_z^{(n)}\big).$$

7. $\displaystyle \frac{\partial^{n+1} w}{\partial x^n \partial y} = ae^{\lambda w}.$

Обобщенное уравнение Лиувилля.

1°. Пусть $w(x, y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w\big(C_1x + C_2,\, C_3y + C_4\big) + \frac{1}{\lambda}\ln(C_1^nC_3),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w = F(\xi), \quad \xi = k_1x + k_2y,$$

где k_1, k_2 — произвольные постоянные, а функция $F(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $k_1^nk_2F_\xi^{(n+1)} = ae^{\lambda F}$.

3°. Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$w(x, y) = -\frac{n+1}{\lambda}\ln z, \quad z = \varphi(y)x + \frac{a\lambda(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\varphi(y)\int\frac{dy}{[\varphi(y)]^{n+1}},$$

где $\varphi(y)$ — произвольная функция.

4°. Точное решение:

$$w = U(\eta) + \frac{n-m}{m\lambda}\ln y, \quad \eta = xy^{1/m},$$

где m — произвольная постоянная, а функция $U(\eta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\eta U_\eta^{(n+1)} + nU_\eta^{(n)} = ame^{\lambda U}$. Значению $m = n$ соответствует автомодельное решение.

8. $\dfrac{\partial^{n+1} w}{\partial x^n \partial y} = f\left(x, \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) e^{\lambda w}$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w\bigl(x, \varphi(y)\bigr) + \frac{1}{\lambda} \ln \varphi'_y(y),$$

где $\varphi(y)$ — произвольная функция, также будет решением этого уравнения.

2°. При $f(x, w_x) = f(w_x)$ существует решение типа бегущей волны

$$w = w(z), \quad z = k_1 x + k_2 y,$$

где k_1, k_2 — произвольные постоянные, а функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $k_1^n k_2 w_\xi^{(n+1)} = f(k_1 w'_z) e^{\lambda w}$.

9. $\dfrac{\partial^{k+1} w}{\partial x^k \partial t} = a(t) w \dfrac{\partial^{k+1} w}{\partial x^{k+1}} + F\left(t, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ldots, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right)$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + \varphi(t), t) + \frac{\varphi'_t(t)}{a(t)},$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция, также будет решением этого уравнения при $k = 1, 2, \ldots$

2°. При $a = \mathrm{const}$ и $F = F(w_x, w_{xx}, \ldots, w_x^{(n)})$, уравнение имеет решение типа бегущей волны

$$w = U(z), \quad z = \beta x + \lambda t,$$

где β, λ — произвольные постоянные, а функция $U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\lambda \beta^k U_z^{(k+1)} = a\beta^{k+1} U U_z^{(k+1)} + F\bigl(\beta U'_z, \beta^2 U''_{zz}, \ldots, \beta^n U_z^{(n)}\bigr).$$

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = F\left(t, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ldots, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right) + g(t) \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$.

1°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = u(z,t), \quad z = x + C_1 y + C_1^2 \int g(t)\,dt + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $u(z,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} = F\left(t, u, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial z^n}\right).$$

2°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = U(\xi,t), \quad \xi = x + \varphi(t)(y + C_1)^2, \quad \varphi(t) = -\left[4 \int g(t)\,dt + C_2\right]^{-1},$$

где функция $U(\xi,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial t} = F\left(t, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}, \ldots, \frac{\partial^n U}{\partial \xi^n}\right) + 2g(t)\varphi(t) \frac{\partial U}{\partial \xi}.$$

11.4.2. Уравнения, содержащие $\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}$ и $\dfrac{\partial^m w}{\partial y^m}$

1. $a \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + b \dfrac{\partial^n w}{\partial y^n} = (ay^n + bx^n) f(w)$.

Точное решение:

$$w = w(z), \quad z = xy,$$

где функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w_z^{(n)} = f(w).$$

Замечание. В исходном уравнении вместо постоянных a и b могут стоять произвольные функции $a = a(x, y, w, w_x, w_y, \ldots)$ и $b = b(x, y, w, w_x, w_y, \ldots)$.

2. $\boldsymbol{F\Big(x,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n};\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial y},\ \dots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^m w}{\partial y^m}\Big)=0}.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y)=Ae^{\lambda y}\varphi(x),$$

где A, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка

$$F\big(x,\varphi'_x/\varphi,\dots,\varphi_x^{(n)}/\varphi;\lambda,\dots,\lambda^m\big)=0.$$

3. $\boldsymbol{F\Big(x,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n};\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ \dots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^{2m} w}{\partial y^{2m}}\Big)=0}.$

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y)=\big[A\,\mathrm{ch}(\lambda y)+B\,\mathrm{sh}(\lambda y)\big]\varphi(x),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка

$$F\big(x,\varphi'_x/\varphi,\dots,\varphi_x^{(n)}/\varphi;\lambda^2,\dots,\lambda^{2m}\big)=0.$$

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y)=\big[A\cos(\lambda y)+B\sin(\lambda y)\big]\varphi(x),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка

$$F\big(x,\varphi'_x/\varphi,\dots,\varphi_x^{(n)}/\varphi;-\lambda^2,\dots,(-1)^m\lambda^{2m}\big)=0.$$

4. $\boldsymbol{F_1\Big(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dots,\ \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big)+F_2\Big(y,\ \dfrac{\partial w}{\partial y},\ \dots,\ \dfrac{\partial^m w}{\partial y^m}\Big)=kw}.$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y)=\varphi(x)+\psi(y).$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$F_1\big(x,\varphi'_x,\dots,\varphi_x^{(n)}\big)-k\varphi=C,$$
$$F_2\big(y,\psi'_y,\dots,\psi_y^{(m)}\big)-k\psi=-C,$$

где C — произвольная постоянная.

5. $\boldsymbol{F_1\Big(x,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big)+w^kF_2\Big(y,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial y},\ \dots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^m w}{\partial y^m}\Big)=0}.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y)=\varphi(x)\psi(y).$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi^{-k}F_1\big(x,\varphi'_x/\varphi,\dots,\varphi_x^{(n)}/\varphi\big)=C,$$
$$\psi^kF_2\big(y,\psi'_y/\psi,\dots,\psi_y^{(m)}/\psi\big)=-C,$$

где C — произвольная постоянная.

6. $\boldsymbol{F_1\Big(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dots,\ \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big)+e^{\lambda w}F_2\Big(y,\ \dfrac{\partial w}{\partial y},\ \dots,\ \dfrac{\partial^m w}{\partial y^m}\Big)=0}.$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y)=\varphi(x)+\psi(y).$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$e^{-\lambda\varphi}F_1\big(x,\varphi'_x,\dots,\varphi_x^{(n)}\big)=C,$$
$$e^{\lambda\psi}F_2\big(y,\psi'_y,\dots,\psi_y^{(m)}\big)=-C,$$

где C — произвольная постоянная.

7. $\boldsymbol{F_1\left(x,\ \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x},\dots,\ \frac{1}{w}\frac{\partial^n w}{\partial x^n}\right)+F_2\left(y,\ \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial y},\dots,\ \frac{1}{w}\frac{\partial^m w}{\partial y^m}\right)=k\ln w}.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y)=\varphi(x)\psi(y).$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$F_1\bigl(x,\varphi'_x/\varphi,\dots,\varphi^{(n)}_x/\varphi\bigr)-k\ln\varphi=C,$$
$$F_2\bigl(y,\psi'_y/\psi,\dots,\psi^{(m)}_y/\psi\bigr)-k\ln\psi=-C,$$

где C — произвольная постоянная.

8. $\boldsymbol{F\left(ax+by,\ w,\ \frac{\partial w}{\partial x},\dots,\ \frac{\partial^n w}{\partial x^n},\ \frac{\partial w}{\partial y},\dots,\ \frac{\partial^m w}{\partial y^m}\right)=0}.$

Точное решение:

$$w=w(\xi),\quad \xi=ax+by,$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(\xi,\ w,\ aw'_\xi,\dots,a^n w^{(n)}_\xi,\ bw'_\xi,\dots,b^m w^{(m)}_\xi\bigr)=0.$$

9. $\boldsymbol{F\left(ax+by,\ \frac{\partial w}{\partial x},\dots,\ \frac{\partial^n w}{\partial x^n},\ \frac{\partial w}{\partial y},\dots,\ \frac{\partial^m w}{\partial y^m}\right)=0}.$

Точное решение:

$$w=\varphi(\xi)+Cx,\quad \xi=ax+by,$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(\xi,\ a\varphi'_\xi+C,\ a^2\varphi''_{\xi\xi},\dots,a^n\varphi^{(n)}_\xi,\ b\varphi'_\xi,\dots,b^m\varphi^{(m)}_\xi\bigr)=0.$$

10. $\boldsymbol{\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left\{\bigl[a_1x+b_1y+f(w)\bigr]\frac{\partial^m w}{\partial x^m}\right\}+\frac{\partial^n}{\partial y^n}\left\{\bigl[a_2x+b_2y+g(w)\bigr]\frac{\partial^m w}{\partial y^m}\right\}=0}.$

Решение типа бегущей волны:

$$w=w(z),\qquad z=Ax+By,$$

где постоянные A и B определяются путем решения алгебраической системы уравнений

$$a_1A^{n+m}+a_2B^{n+m}=A,$$
$$b_1A^{n+m}+b_2B^{n+m}=B.$$

Искомая функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением m-го порядка

$$\bigl[z+A^{n+m}f(w)+B^{n+m}g(w)\bigr]w^{(m)}_z=C_0+C_1z+\dots+C_{n-1}z^{n-1},$$

где C_0, C_1, …, C_{n-1} — произвольные постоянные.

11. $\boldsymbol{(a_1x+b_1y)\frac{\partial^n w}{\partial x^n}+(a_2x+b_2y)\frac{\partial^n w}{\partial y^n}=F\left(w,\ \frac{\partial w}{\partial x},\dots,\ \frac{\partial^m w}{\partial x^m},\ \frac{\partial w}{\partial y},\dots,\ \frac{\partial^k w}{\partial y^k}\right)}.$

Решение типа бегущей волны:

$$w=w(z),\qquad z=Ax+By,$$

где постоянные A и B определяются путем решения алгебраической системы уравнений

$$a_1A^n+a_2B^n=A,$$
$$b_1A^n+b_2B^n=B.$$

Искомая функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением m-го порядка

$$zw^{(n)}_z=F\bigl(w,\ Aw'_z,\dots,A^m w^{(m)}_z,\ Bw'_z,\dots,B^k w^{(k)}_z\bigr).$$

Замечание. Аналогичным образом строится решение, если правая часть уравнения зависит также от смешанных производных.