



ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	13
Некоторые обозначения и замечания	14
1. Линейные уравнения первого рода с переменным пределом интегрирования ...	15
1.1. Уравнения, ядра которых содержат степенные функции	15
1.1-1. Ядра уравнений линейны по аргументам x, t	15
1.1-2. Ядра уравнений квадратичны по аргументам x, t	16
1.1-3. Ядра уравнений в виде кубических полиномов по аргументам x, t	16
1.1-4. Ядра уравнений в виде полиномов более высокой степени	18
1.1-5. Ядра уравнений, содержащие рациональные функции	18
1.1-6. Ядра уравнений, содержащие квадратные корни	20
1.1-7. Ядра уравнений, содержащие произвольные степени	22
1.2. Уравнения, ядра которых содержат экспоненциальные функции	25
1.2-1. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные функции	25
1.2-2. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и степенные функции	28
1.3. Уравнения, ядра которых содержат гиперболические функции	31
1.3-1. Ядра уравнений, содержащие гиперболический косинус	31
1.3-2. Ядра уравнений, содержащие гиперболический синус	36
1.3-3. Ядра уравнений, содержащие гиперболический тангенс	42
1.3-4. Ядра уравнений, содержащие гиперболический котангенс	44
1.3-5. Ядра уравнений, содержащие комбинации гиперболических функций	45
1.4. Уравнения, ядра которых содержат логарифмические функции	47
1.4-1. Ядра уравнений, содержащие логарифмические функции	47
1.4-2. Ядра уравнений, содержащие степенные и логарифмические функции	49
1.5. Уравнения, ядра которых содержат тригонометрические функции	50
1.5-1. Ядра уравнений, содержащие косинус	50
1.5-2. Ядра уравнений, содержащие синус	55
1.5-3. Ядра уравнений, содержащие тангенс	61
1.5-4. Ядра уравнений, содержащие котангенс	63
1.5-5. Ядра уравнений, содержащие комбинации тригонометрических функций	64
1.6. Уравнения, ядра которых содержат обратные тригонометрические функции	67
1.6-1. Ядра уравнений, содержащие арккосинус	67
1.6-2. Ядра уравнений, содержащие арксинус	68
1.6-3. Ядра уравнений, содержащие арктангенс	69
1.6-4. Ядра уравнений, содержащие арккотангенс	71
1.7. Уравнения, ядра которых содержат комбинации элементарных функций	72
1.7-1. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и гиперболические функции	72
1.7-2. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и логарифмические функции	76
1.7-3. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и тригонометрические функции	77
1.7-4. Ядра уравнений, содержащие гиперболические и логарифмические функции	81
1.7-5. Ядра уравнений, содержащие гиперболические и тригонометрические функции	82
1.7-6. Ядра уравнений, содержащие логарифмические и тригонометрические функции	83
1.8. Уравнения, ядра которых содержат специальные функции	83
1.8-1. Ядра уравнений, содержащие функции Бесселя	83
1.8-2. Ядра уравнений, содержащие модифицированные функции Бесселя	89
1.8-3. Ядра уравнений, содержащие присоединенные функции Лежандра	95
1.8-4. Ядра уравнений, содержащие гипергеометрические функции	95
1.9. Уравнения, ядра которых содержат произвольные функции	96
1.9-1. Уравнения с вырожденным ядром $K(x, t) = g_1(x)h_1(t) + g_2(x)h_2(t)$	96
1.9-2. Уравнения с разностным ядром: $K(x, t) = K(x - t)$	98
1.9-3. Другие уравнения	104
1.10. Некоторые формулы и преобразования	106

2. Линейные уравнения второго рода с переменным пределом интегрирования . . .	108
2.1. Уравнения, ядра которых содержат степенные функции	108
2.1-1. Ядра уравнений линейны по аргументам x, t	108
2.1-2. Ядра уравнений квадратичны по аргументам x, t	109
2.1-3. Ядра уравнений в виде кубических полиномов по аргументам x, t	112
2.1-4. Ядра уравнений в виде полиномов с более высокой степенью	113
2.1-5. Ядра уравнений, содержащие рациональные функции	115
2.1-6. Ядра уравнений, содержащие квадратные корни и дробные степени	117
2.1-7. Ядра уравнений, содержащие произвольные степени	118
2.2. Уравнения, ядра которых содержат экспоненциальные функции	122
2.2-1. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные функции	122
2.2-2. Ядра уравнений, содержащие степенные и экспоненциальные функции	128
2.3. Уравнения, ядра которых содержат гиперболические функции	131
2.3-1. Ядра уравнений, содержащие гиперболический косинус	131
2.3-2. Ядра уравнений, содержащие гиперболический синус	133
2.3-3. Ядра уравнений, содержащие гиперболический тангенс	137
2.3-4. Ядра уравнений, содержащие гиперболический котангенс	138
2.3-5. Ядра уравнений, содержащие комбинации гиперболических функций	139
2.4. Уравнения, ядра которых содержат логарифмические функции	139
2.4-1. Ядра уравнений, содержащие логарифмические функции	139
2.4-2. Ядра уравнений, содержащие степенные и логарифмические функции	141
2.5. Уравнения, ядра которых содержат тригонометрические функции	141
2.5-1. Ядра уравнений, содержащие косинус	141
2.5-2. Ядра уравнений, содержащие синус	144
2.5-3. Ядра уравнений, содержащие тангенс	148
2.5-4. Ядра уравнений, содержащие котангенс	149
2.5-5. Ядра уравнений, содержащие комбинации тригонометрических функций	150
2.6. Уравнения, ядра которых содержат обратные тригонометрические функции	150
2.6-1. Ядра уравнений, содержащие арккосинус	150
2.6-2. Ядра уравнений, содержащие арксинус	151
2.6-3. Ядра уравнений, содержащие арктангенс	151
2.6-4. Ядра уравнений, содержащие арккотангенс	152
2.7. Уравнения, ядра которых содержат комбинации элементарных функций	153
2.7-1. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и гиперболические функции	153
2.7-2. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и логарифмические функции	153
2.7-3. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и тригонометрические функции	154
2.7-4. Ядра уравнений, содержащие гиперболические и логарифмические функции	157
2.7-5. Ядра уравнений, содержащие гиперболические и тригонометрические функции	158
2.7-6. Ядра уравнений, содержащие логарифмические и тригонометрические функции	159
2.8. Уравнения, ядра которых содержат специальные функции	159
2.8-1. Ядра уравнений, содержащие функции Бесселя	159
2.8-2. Ядра уравнений, содержащие модифицированные функции Бесселя	161
2.9. Уравнения, ядра которых содержат произвольные функции	162
2.9-1. Уравнения с ядром вида $K(x, t) = g_1(x)h_1(t) + \dots + g_n(x)h_n(t)$	162
2.9-2. Уравнения с разностным ядром: $K(x, t) = K(x - t)$	172
2.9-3. Другие уравнения	180
2.10. Некоторые формулы	183
3. Линейные уравнения первого рода с постоянными пределами интегрирования	184
3.1. Уравнения, ядра которых содержат степенные функции	184
3.1-1. Ядра уравнений линейны по аргументам x, t	184
3.1-2. Ядра уравнений квадратичны по аргументам x, t	186
3.1-3. Ядра уравнений, содержащие целые степени аргументов x, t	186
3.1-4. Ядро уравнения, содержащее рациональную функцию	187
3.1-5. Ядра уравнений, содержащие квадратные корни	188
3.1-6. Ядра уравнений, содержащие произвольные степени	189
3.1-7. Уравнения, содержащие неизвестную функцию сложного аргумента	192
3.1-8. Сингулярные уравнения	193
3.2. Уравнения, ядра которых содержат экспоненциальные функции	194
3.2-1. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные функции	194
3.2-2. Ядра уравнений, содержащие степенные и экспоненциальные функции	197

3.3. Уравнения, ядра которых содержат гиперболические функции	198
3.3-1. Ядра уравнений, содержащие гиперболический косинус	198
3.3-2. Ядра уравнений, содержащие гиперболический синус	198
3.3-3. Ядра уравнений, содержащие гиперболический тангенс	201
3.3-4. Ядра уравнений, содержащие гиперболический котангенс	201
3.4. Уравнения, ядра которых содержат логарифмические функции	202
3.4-1. Ядра уравнений, содержащие логарифмические функции	202
3.4-2. Ядра уравнений, содержащие степенные и логарифмические функции	203
3.4-3. Уравнение, содержащее неизвестную функцию сложного аргумента	204
3.5. Уравнения, ядра которых содержат тригонометрические функции	204
3.5-1. Ядра уравнений, содержащие косинус	204
3.5-2. Ядра уравнений, содержащие синус	205
3.5-3. Ядра уравнений, содержащие тангенс	207
3.5-4. Ядра уравнений, содержащие котангенс	208
3.5-5. Ядра уравнений, содержащие комбинации тригонометрических функций	208
3.5-6. Уравнения, содержащие неизвестную функцию сложного аргумента	209
3.5-7. Сингулярное уравнение	209
3.6. Уравнения, ядра которых содержат комбинации элементарных функций	210
3.6-1. Ядра уравнений, содержащие гиперболические и логарифмические функции	210
3.6-2. Ядра уравнений, содержащие логарифмические и тригонометрические функции	211
3.7. Уравнения, ядра которых содержат специальные функции	211
3.7-1. Ядра уравнений, содержащие функции Бесселя	211
3.7-2. Ядра уравнений, содержащие модифицированные функции Бесселя	212
3.7-3. Другие ядра	212
3.8. Уравнения, ядра которых содержат произвольные функции	213
3.8-1. Уравнения с вырожденным ядром	213
3.8-2. Уравнения, содержащие знак модуля	213
3.8-3. Уравнения с разностным ядром: $K(x, t) = K(x - t)$	218
3.8-4. Другие уравнения вида $\int_a^b K(x, t)y(t) dt = F(x)$	219
3.8-5. Уравнения вида $\int_a^b K(x, t)y(\dots) dt = F(x)$	220
4. Линейные уравнения второго рода с постоянными пределами интегрирования	227
4.1. Уравнения, ядра которых содержат степенные функции	227
4.1-1. Ядра уравнений линейны по аргументам x, t	227
4.1-2. Ядра уравнений квадратичны по аргументам x, t	229
4.1-3. Ядра уравнений в виде кубических полиномов по аргументам x, t	232
4.1-4. Ядра уравнений в виде полиномов более высокой степени	235
4.1-5. Ядра уравнений, содержащие рациональные функции	238
4.1-6. Ядра уравнений, содержащие произвольные степени	240
4.1-7. Сингулярные уравнения	242
4.2. Уравнения, ядра которых содержат экспоненциальные функции	242
4.2-1. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные функции	242
4.2-2. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и степенные функции	247
4.3. Уравнения, ядра которых содержат гиперболические функции	249
4.3-1. Ядра уравнений, содержащие гиперболический косинус	249
4.3-2. Ядра уравнений, содержащие гиперболический синус	250
4.3-3. Ядра уравнений, содержащие гиперболический тангенс	253
4.3-4. Ядра уравнений, содержащие гиперболический котангенс	253
4.3-5. Ядра уравнений, содержащие комбинации гиперболических функций	254
4.4. Уравнения, ядра которых содержат логарифмические функции	255
4.4-1. Ядра уравнений, содержащие логарифмические функции	255
4.4-2. Ядра уравнений, содержащие степенные и логарифмические функции	255
4.5. Уравнения, ядра которых содержат тригонометрические функции	256
4.5-1. Ядра уравнений, содержащие косинус	256
4.5-2. Ядра уравнений, содержащие синус	258
4.5-3. Ядра уравнений, содержащие тангенс	261
4.5-4. Ядра уравнений, содержащие котангенс	262
4.5-5. Ядра уравнений, содержащие комбинации тригонометрических функций	263
4.5-6. Сингулярное уравнение	263
4.6. Уравнения, ядра которых содержат обратные тригонометрические функции	263
4.6-1. Ядра уравнений, содержащие арккосинус	263
4.6-2. Ядра уравнений, содержащие арксинус	264
4.6-3. Ядра уравнений, содержащие арктангенс	265
4.6-4. Ядра уравнений, содержащие арккотангенс	266

4.7. Уравнения, ядра которых содержат комбинации элементарных функций	267
4.7-1. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и гиперболические функции	267
4.7-2. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и логарифмические функции	267
4.7-3. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и тригонометрические функции	268
4.7-4. Ядра уравнений, содержащие гиперболические и логарифмические функции	269
4.7-5. Ядра уравнений, содержащие гиперболические и тригонометрические функции	270
4.7-6. Ядра уравнений, содержащие логарифмические и тригонометрические функции	271
4.8. Уравнения, ядра которых содержат специальные функции	271
4.8-1. Ядра уравнений, содержащие функции Бесселя	271
4.8-2. Ядра уравнений, содержащие модифицированные функции Бесселя	273
4.9. Уравнения, ядра которых содержат произвольные функции	274
4.9-1. Уравнения с ядром вида $K(x, t) = g_1(x)h_1(t) + \dots + g_n(x)h_n(t)$	274
4.9-2. Уравнения с разностным ядром: $K(x, t) = K(x - t)$	287
4.9-3. Другие уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x, t)y(t) dt = F(x)$	289
4.9-4. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x, t)y(\dots) dt = F(x)$	293
4.10. Некоторые формулы и преобразования	301
5. Нелинейные уравнения с переменным пределом интегрирования	302
5.1. Уравнения с квадратичной нелинейностью, содержащие произвольные параметры	302
5.1-1. Уравнения вида $\int_0^x y(t)y(x-t) dt = F(x)$	302
5.1-2. Уравнения вида $\int_0^x K(x, t)y(t)y(x-t) dt = F(x)$	304
5.1-3. Уравнения вида $\int_0^x G(\dots) dt = F(x)$	305
5.1-4. Уравнения вида $y(x) + \int_a^x K(x, t)y^2(t) dt = F(x)$	305
5.1-5. Уравнения вида $y(x) + \int_a^x K(x, t)y(t)y(x-t) dt = F(x)$	307
5.2. Уравнения с квадратичной нелинейностью, содержащие произвольные функции	308
5.2-1. Уравнения вида $\int_a^x G(\dots) dt = F(x)$	308
5.2-2. Уравнения вида $y(x) + \int_a^x K(x, t)y^2(t) dt = F(x)$	309
5.2-3. Уравнения вида $y(x) + \int_a^x G(\dots) dt = F(x)$	310
5.3. Уравнения со степенной нелинейностью	310
5.3-1. Уравнения, содержащие произвольные параметры	310
5.3-2. Уравнения, содержащие произвольные функции	312
5.4. Уравнения с экспоненциальной нелинейностью	313
5.4-1. Уравнения, содержащие произвольные параметры	313
5.4-2. Уравнения, содержащие произвольные функции	315
5.5. Уравнения с гиперболическими нелинейностями	315
5.5-1. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\text{ch}[\beta y(t)]$	315
5.5-2. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\text{sh}[\beta y(t)]$	316
5.5-3. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\text{th}[\beta y(t)]$	317
5.5-4. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\text{ctg}[\beta y(t)]$	318
5.6. Уравнения с логарифмической нелинейностью	319
5.6-1. Подынтегральные выражения, содержащие степенные функции	319
5.6-2. Подынтегральные выражения, содержащие экспоненциальные функции	320
5.6-3. Другие подынтегральные выражения	320
5.7. Уравнения с тригонометрическими нелинейностями	321
5.7-1. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\cos[\beta y(t)]$	321
5.7-2. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\sin[\beta y(t)]$	322
5.7-3. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\text{tg}[\beta y(t)]$	323
5.7-4. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\text{ctg}[\beta y(t)]$	324
5.8. Уравнения с нелинейностями общего вида	325
5.8-1. Уравнения вида $\int_a^x G(\dots) dt = F(x)$	325
5.8-2. Уравнения вида $y(x) + \int_a^x K(x, t)G(y(t)) dt = F(x)$	325
5.8-3. Уравнения вида $y(x) + \int_a^x K(x, t)G(t, y(t)) dt = F(x)$	328
5.8-4. Другие уравнения	330

6. Нелинейные уравнения с постоянными пределами интегрирования	331
6.1. Уравнения с квадратичной нелинейностью, содержащие произвольные параметры	331
6.1-1. Уравнения вида $\int_a^b K(t)y(x)y(t) dt = F(x)$	331
6.1-2. Уравнения вида $\int_a^b G(\dots) dt = F(x)$	332
6.1-3. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x,t)y^2(t) dt = F(x)$	334
6.1-4. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x,t)y(x)y(t) dt = F(x)$	335
6.1-5. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b G(\dots) dt = F(x)$	335
6.2. Уравнения с квадратичной нелинейностью, содержащие произвольные функции	337
6.2-1. Уравнения вида $\int_a^b G(\dots) dt = F(x)$	337
6.2-2. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x,t)y^2(t) dt = F(x)$	342
6.2-3. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b \sum K_{nm}(x,t)y^n(x)y^m(t) dt = F(x)$	343
6.2-4. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b G(\dots) dt = F(x)$	344
6.3. Уравнения со степенной нелинейностью	347
6.3-1. Уравнения вида $\int_a^b G(\dots) dt = F(x)$	347
6.3-2. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x,t)y^\beta(t) dt = F(x)$	348
6.3-3. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b G(\dots) dt = F(x)$	349
6.4. Уравнения с экспоненциальными нелинейностями	350
6.4-1. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\exp[\beta y(t)]$	350
6.4-2. Другие подынтегральные выражения	351
6.5. Уравнения с гиперболическими нелинейностями	351
6.5-1. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\operatorname{ch}[\beta y(t)]$	351
6.5-2. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\operatorname{sh}[\beta y(t)]$	352
6.5-3. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\operatorname{th}[\beta y(t)]$	352
6.5-4. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\operatorname{cth}[\beta y(t)]$	353
6.5-5. Другие подынтегральные выражения	354
6.6. Уравнения с логарифмическими нелинейностями	355
6.6-1. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\ln[\beta y(t)]$	355
6.6-2. Другие подынтегральные выражения	355
6.7. Уравнения с тригонометрическими нелинейностями	356
6.7-1. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\cos[\beta y(t)]$	356
6.7-2. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\sin[\beta y(t)]$	356
6.7-3. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\operatorname{tg}[\beta y(t)]$	357
6.7-4. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\operatorname{ctg}[\beta y(t)]$	358
6.7-5. Другие подынтегральные выражения	359
6.8. Уравнения с нелинейностями общего вида	359
6.8-1. Уравнения вида $\int_a^b G(\dots) dt = F(x)$	359
6.8-2. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x,t)G(y(t)) dt = F(x)$	362
6.8-3. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x,t)G(t,y(t)) dt = F(x)$	364
6.8-4. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b G(x,t,y(t)) dt = F(x)$	367
6.8-5. Уравнения вида $F(x,y(x)) + \int_a^b G(x,t,y(x),y(t)) dt = 0$	368
6.8-6. Другие уравнения	368
7. Основные определения и формулы. Интегральные преобразования	378
7.1. Некоторые определения, замечания и формулы	378
7.1-1. Некоторые определения	378
7.1-2. Структура решений линейных интегральных уравнений	379
7.1-3. Интегральные преобразования	379
7.1-4. Вычеты. Формулы для вычислений	381
7.1-5. Лемма Жордана	381
7.2. Преобразование Лапласа	381
7.2-1. Определение. Формула обращения	381
7.2-2. Обращение рациональных функций	382
7.2-3. Представление оригиналов в виде ряда	382
7.2-4. Теорема о свертке для преобразования Лапласа	383
7.2-5. Предельные теоремы	383
7.2-6. Основные свойства преобразования Лапласа	383
7.2-7. Формула Поста–Уиддера	384

7.3. Преобразование Меллина	384
7.3-1. Определение. Формула обращения	384
7.3-2. Основные свойства преобразования Меллина	385
7.3-3. Связь преобразований Меллина, Лапласа и Фурье	385
7.4. Преобразование Фурье	385
7.4-1. Определение. Формула обращения	385
7.4-2. Несимметричная форма преобразования	386
7.4-3. Альтернативное преобразование Фурье	386
7.4-4. Теорема о свертке для преобразования Фурье	386
7.5. Синус- и косинус-преобразования Фурье	387
7.5-1. Косинус-преобразование Фурье	387
7.5-2. Синус-преобразование Фурье	387
7.6. Другие интегральные преобразования	388
7.6-1. Преобразование Ханкеля	388
7.6-2. Преобразование Мейера	388
7.6-3. Преобразование Конторовича–Лебедева	388
7.6-4. Y -преобразование и другие преобразования	389
8. Методы решения линейных уравнений вида $\int_a^x K(x, t)y(t) dt = f(x)$	391
8.1. Уравнения Вольтерра первого рода	391
8.1-1. Структура уравнений. Классы функций и ядер	391
8.1-2. Существование и единственность решения	392
8.2. Уравнения с вырожденным ядром: $K(x, t) = g_1(x)h_1(t) + \dots + g_n(x)h_n(t)$	392
8.2-1. Уравнения с ядром $K(x, t) = g_1(x)h_1(t) + g_2(x)h_2(t)$	392
8.2-2. Уравнения с вырожденным ядром общего вида	393
8.3. Сведение уравнений Вольтерра первого рода к уравнениям Вольтерра второго рода	393
8.3-1. Первый способ	393
8.3-2. Второй способ	394
8.4. Уравнения с разностным ядром: $K(x, t) = K(x - t)$	394
8.4-1. Метод решения, основанный на преобразовании Лапласа	394
8.4-2. Случай рационального образа решения	395
8.4-3. Представление решения в виде композиции	395
8.4-4. Использование вспомогательного уравнения	396
8.4-5. Сведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям	396
8.4-6. Связь уравнений Вольтерра и Винера–Хопфа	397
8.5. Метод дробного дифференцирования	397
8.5-1. Определение дробных интегралов	397
8.5-2. Определение дробных производных	398
8.5-3. Основные свойства	399
8.5-4. Решение обобщенного уравнения Абеля	399
8.6. Уравнения с ядрами, имеющими слабую особенность	400
8.6-1. Метод преобразования ядра	400
8.6-2. Ядро с логарифмической особенностью	401
8.7. Метод квадратур	402
8.7-1. Квадратурные формулы	402
8.7-2. Общая схема метода	402
8.7-3. Алгоритм на основе формулы трапеций	403
8.7-4. Алгоритм для уравнения с вырожденным ядром	404
8.8. Уравнения с бесконечным пределом интегрирования	404
8.8-1. Уравнение с переменным нижним пределом интегрирования	404
8.8-2. Приведение к уравнению Винера–Хопфа первого рода	405
9. Методы решения линейных уравнений вида $y(x) - \int_a^x K(x, t)y(t) dt = f(x)$	406
9.1. Интегральные уравнения Вольтерра второго рода	406
9.1-1. Предварительные замечания. Уравнения для резольвенты	406
9.1-2. Связь между решениями интегральных уравнений	406
9.2. Уравнения с вырожденным ядром: $K(x, t) = g_1(x)h_1(t) + \dots + g_n(x)h_n(t)$	407
9.2-1. Уравнения с ядром $K(x, t) = \varphi(x) + \psi(x)(x - t)$	407
9.2-2. Уравнения с ядром $K(x, t) = \varphi(t) + \psi(t)(t - x)$	408
9.2-3. Уравнения с ядром $K(x, t) = \sum_{m=1}^n \varphi_m(x)(x - t)^{m-1}$	408
9.2-4. Уравнения с ядром $K(x, t) = \sum_{m=1}^n \varphi_m(t)(t - x)^{m-1}$	409
9.2-5. Уравнения с вырожденным ядром общего вида	409

9.3. Уравнения с разностным ядром: $K(x, t) = K(x - t)$	410
9.3-1. Метод решения, основанный на преобразовании Лапласа	410
9.3-2. Метод, основанный на решении вспомогательного уравнения	412
9.3-3. Сведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям	412
9.3-4. Приведение к уравнению Винера–Хопфа второго рода	413
9.3-5. Метод дробного интегрирования для уравнения Абеля	413
9.3-6. Системы интегральных уравнений Вольтерра	414
9.4. Операторные методы решения линейных интегральных уравнений	414
9.4-1. Использование решения «укороченного» уравнения	414
9.4-2. Использование вспомогательного уравнения второго рода	416
9.4-3. Метод решения «квадратных» операторных уравнений	417
9.4-4. Решение операторных уравнений полиномиального вида	418
9.4-5. Некоторые обобщения	418
9.5. Построение решений уравнений со специальной правой частью	419
9.5-1. Общая схема	419
9.5-2. Порождающая функция экспоненциального вида	419
9.5-3. Порождающая функция степенного вида	421
9.5-4. Порождающая функция, содержащая синусы или косинусы	422
9.6. Метод модельных решений	423
9.6-1. Предварительные замечания	423
9.6-2. Описание метода	424
9.6-3. Модельное решение для экспоненциальной правой части	424
9.6-4. Модельное решение для степенной правой части	425
9.6-5. Модельное решение для синусоидальной правой части	426
9.6-6. Модельное решение для косинусоидальной правой части	426
9.6-7. Некоторые обобщения	426
9.7. Метод дифференцирования интегральных уравнений	427
9.7-1. Ядро содержит сумму экспонент	427
9.7-2. Ядро содержит сумму гиперболических функций	428
9.7-3. Ядро содержит сумму тригонометрических функций	429
9.7-4. Ядро содержит комбинации различных функций	430
9.8. Сведение уравнений Вольтерра второго рода к уравнениям Вольтерра первого рода	430
9.8-1. Первый способ	430
9.8-2. Второй способ	430
9.9. Метод последовательных приближений	431
9.9-1. Общая схема	431
9.9-2. Формула для резольвенты	432
9.10. Метод квадратур	432
9.10-1. Общая схема метода	432
9.10-2. Применение формулы трапеций	433
9.10-3. Случай вырожденного ядра	433
9.11. Уравнения с бесконечным пределом интегрирования	433
9.11-1. Случай переменного нижнего предела интегрирования	433
9.11-2. Приведение к уравнению Винера–Хопфа второго рода	435
10. Методы решения линейных уравнений вида $\int_a^b K(x, t)y(t) dt = f(x)$	436
10.1. Предварительные замечания	436
10.1-1. Интегральные уравнения Фредгольма первого рода	436
10.1-2. Интегральные уравнения первого рода со слабой особенностью	436
10.1-3. Интегральные уравнения типа свертки	436
10.1-4. Парные интегральные уравнения первого рода	437
10.2. Метод Крейна	438
10.2-1. Основное и вспомогательное уравнения	438
10.2-2. Решение основного уравнения	438
10.3. Метод интегральных преобразований	439
10.3-1. Уравнение с разностным ядром на всей оси	439
10.3-2. Уравнения с ядром $K(x, t) = K(x/t)$ на полуоси	439
10.3-3. Уравнение с ядром $K(x, t) = K(xt)$ и его обобщения	439
10.4. Задача Римана для действительной оси	440
10.4-1. Связь интеграла Фурье с интегралом типа Коши	440
10.4-2. Односторонние интегралы Фурье	441
10.4-3. Теорема об аналитическом продолжении и теорема Лиувилля	443
10.4-4. Краевая задача Римана	443
10.4-5. Задача Римана с рациональными коэффициентами	448
10.4-6. Исключительные случаи. Однородная задача	449
10.4-7. Исключительные случаи. Неоднородная задача	451

10.5. Метод Карлемана для уравнений типа свертки первого рода	453
10.5-1. Уравнение Винера–Хопфа первого рода	453
10.5-2. Интегральные уравнения с двумя ядрами первого рода	454
10.6. Парные интегральные уравнения первого рода	456
10.6-1. Метод Карлемана для уравнения с разностными ядрами	456
10.6-2. Точные решения некоторых парных уравнений первого рода	457
10.6-3. Приведение парных уравнений к уравнению Фредгольма	459
10.7. Асимптотические методы решения уравнений с логарифмической особенностью	461
10.7-1. Предварительные замечания	461
10.7-2. Решение при больших значениях характерного параметра	462
10.7-3. Решение при малых значениях характерного параметра	463
10.7-4. Интегральные уравнения теории упругости	464
10.8. Методы регуляризации	464
10.8-1. Метод регуляризации Лаврентьева	464
10.8-2. Метод регуляризации Тихонова	465
11. Методы решения линейных уравнений вида $y(x) - \int_a^b K(x, t)y(t) dt = f(x)$	466
11.1. Предварительные замечания	466
11.1-1. Уравнения Фредгольма и уравнения со слабой особенностью	466
11.1-2. Структура решений	466
11.1-3. Интегральные уравнения типа свертки второго рода	467
11.1-4. Парные интегральные уравнения второго рода	467
11.2. Уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром	468
11.2-1. Простейшее вырожденное ядро	468
11.2-2. Вырожденное ядро в общем случае	468
11.3. Решение в виде ряда по степеням параметра. Метод последовательных приближений	470
11.3-1. Итерированные ядра	470
11.3-2. Метод последовательных приближений	471
11.3-3. Построение резольвенты	471
11.3-4. Ортогональные ядра	472
11.4. Метод определителей Фредгольма	473
11.4-1. Формула для резольвенты	473
11.4-2. Рекуррентные соотношения	474
11.5. Теоремы и альтернатива Фредгольма	475
11.5-1. Теоремы Фредгольма	475
11.5-2. Альтернатива Фредгольма	475
11.6. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода с симметричными ядрами	475
11.6-1. Характеристические числа и собственные функции	475
11.6-2. Билинейный ряд	477
11.6-3. Теорема Гильберта–Шмидта	477
11.6-4. Билинейные ряды итерированных ядер	478
11.6-5. Решение неоднородного уравнения	478
11.6-6. Альтернатива Фредгольма для симметричных уравнений	479
11.6-7. Резольвента симметричного ядра	479
11.6-8. Экстремальные свойства характеристических чисел	480
11.6-9. Интегральные уравнения, приводимые к симметричным	480
11.6-10. Кососимметричное интегральное уравнение	480
11.7. Операторный метод решения интегральных уравнений второго рода	481
11.7-1. Простейшая схема	481
11.7-2. Решение уравнений второго рода на полуоси	481
11.8. Метод интегральных преобразований и метод модельных решений	482
11.8-1. Уравнение с разностным ядром на всей оси	482
11.8-2. Уравнение с ядром $K(x, t) = t^{-1}Q(x/t)$ на полуоси	483
11.8-3. Уравнение с ядром $K(x, t) = t^\beta Q(xt)$ на полуоси	484
11.8-4. Метод модельных решений для уравнений на всей оси	485
11.9. Метод Карлемана для интегральных уравнений типа свертки второго рода	485
11.9-1. Уравнение Винера–Хопфа второго рода	485
11.9-2. Интегральное уравнение второго рода с двумя ядрами	489
11.9-3. Уравнения типа свертки с переменным пределом интегрирования	492
11.9-4. Парное уравнение типа свертки второго рода	494
11.10. Метод Винера–Хопфа	495
11.10-1. Некоторые замечания	495
11.10-2. Однородное уравнение Винера–Хопфа второго рода	497
11.10-3. Общая схема метода. Проблема факторизации	499
11.10-4. Неоднородное уравнение Винера–Хопфа второго рода	501
11.10-5. Исключительный случай уравнения Винера–Хопфа второго рода	501

11.11. Метод Крейна для уравнения Винера–Хопфа	502
11.11-1. Некоторые замечания. Проблема факторизации	502
11.11-2. Решение уравнения Винера–Хопфа второго рода	504
11.11-3. Формула Хопфа–Фока	505
11.12. Методы решения уравнений с разностным ядром на конечном отрезке	506
11.12-1. Метод Крейна	506
11.12-2. Ядра с рациональными преобразованиями Фурье	507
11.12-3. Сведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям	507
11.13. Метод замены ядра вырожденным	509
11.13-1. Аппроксимация ядра	509
11.13-2. Приближенное решение	510
11.14. Метод Бейтмена	511
11.14-1. Общая схема метода	511
11.14-2. Некоторые частные случаи	511
11.15. Метод коллокации	513
11.15-1. Общие замечания	513
11.15-2. Приближенное решение	514
11.15-3. Собственные функции уравнения	515
11.16. Метод наименьших квадратов	515
11.16-1. Описание метода	515
11.16-2. Построение собственных функций	516
11.17. Метод Бубнова–Галеркина	517
11.17-1. Описание метода	517
11.17-2. Характеристические числа уравнения	518
11.18. Метод квадратур	519
11.18-1. Общая схема для уравнений Фредгольма второго рода	519
11.18-2. Построение собственных функций	520
11.18-3. Особенности применения квадратурных формул	520
11.19. Системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода	521
11.19-1. Некоторые замечания	521
11.19-2. Метод преобразования системы уравнений в одно уравнение	521
11.20. Метод регуляризации для некоторых уравнений второго рода	522
11.20-1. Основное уравнение и теоремы Нетера	522
11.20-2. Регулярирующие операторы	523
11.20-3. Метод регуляризации	523
12. Методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода	525
12.1. Предварительные замечания	525
12.1-1. Интегральные уравнения первого рода с ядром Коши	525
12.1-2. Интегральные уравнения первого рода с ядром Гильберта	525
12.2. Интеграл типа Коши	526
12.2-1. Определение интеграла типа Коши	526
12.2-2. Условие Гёльдера	526
12.2-3. Главное значение сингулярного интеграла	527
12.2-4. Многозначные функции	528
12.2-5. Главное значение сингулярного криволинейного интеграла	529
12.2-6. Формула перестановки Пуанкаре–Бертрана	530
12.3. Краевая задача Римана	531
12.3-1. Теорема об аналитическом продолжении и теорема Лиувилля	531
12.3-2. Интерполяционный полином Эрмита	532
12.3-3. Понятие индекса	532
12.3-4. Постановка задачи Римана	534
12.3-5. Решение однородной задачи	536
12.3-6. Решение неоднородной задачи	536
12.3-7. Задача Римана с рациональными коэффициентами	538
12.3-8. Задача Римана для действительной оси	540
12.3-9. Исключительные случаи задачи Римана	542
12.3-10. Задача Римана для многосвязной области	545
12.3-11. Случаи разрывных коэффициентов и разомкнутых контуров	548
12.3-12. Краевая задача Гильберта	548
12.4. Сингулярные интегральные уравнения первого рода	548
12.4-1. Простейшее уравнение с ядром Коши	548
12.4-2. Уравнение с ядром Коши на действительной оси	549
12.4-3. Уравнение первого рода на конечном отрезке	549
12.4-4. Общее уравнение первого рода с ядром Коши	550
12.4-5. Уравнения первого рода с ядром Гильберта	551

12.5. Метод Мульгоппа–Каландия	552
12.5-1. Решение, не ограниченное на концах отрезка	552
12.5-2. Решение, ограниченное на одном конце отрезка	554
12.5-3. Решение, ограниченное на обоих концах отрезка	554
13. Методы решения полных сингулярных интегральных уравнений	556
13.1. Некоторые замечания	556
13.1-1. Интегральные уравнения с ядром Коши	556
13.1-2. Интегральные уравнения с ядром Гильберта	557
13.1-3. Об уравнениях Фредгольма второго рода на контуре	558
13.2. Метод Карлемана для характеристических уравнений	559
13.2-1. Характеристическое уравнение с ядром Коши	559
13.2-2. Уравнение, союзное с характеристическим	562
13.2-3. Характеристическое уравнение на действительной оси	563
13.2-4. Исключительный случай характеристического уравнения	563
13.2-5. Характеристическое уравнение с ядром Гильберта	565
13.2-6. Уравнение Трикоми	566
13.3. Полные сингулярные интегральные уравнения, разрешаемые в замкнутой форме	566
13.3-1. Замкнутое решение при постоянных коэффициентах	566
13.3-2. Замкнутое решение в общем случае	567
13.4. Метод регуляризации для полных сингулярных интегральных уравнений	568
13.4-1. Некоторые свойства сингулярных операторов	568
13.4-2. Регулярирующий оператор	570
13.4-3. Способы регуляризации слева и справа	571
13.4-4. Проблема равносильной регуляризации	571
13.4-5. Теоремы Нётера	572
13.4-6. Способ регуляризации Карлемана–Векуа	573
13.4-7. Регуляризация в исключительных случаях	574
13.4-8. Полное уравнение с ядром Гильберта	574
14. Методы решения нелинейных интегральных уравнений	577
14.1. Некоторые определения и замечания	577
14.1-1. Нелинейные интегральные уравнения Вольтерра	577
14.1-2. Нелинейные уравнения с постоянными пределами интегрирования	578
14.2. Нелинейные интегральные уравнения Вольтерра	579
14.2-1. Метод интегральных преобразований	579
14.2-2. Метод дифференцирования интегральных уравнений	579
14.2-3. Метод последовательных приближений	580
14.2-4. Метод Ньютона–Канторовича	582
14.2-5. Метод коллокации	583
14.2-6. Метод квадратур	584
14.3. Уравнения с постоянными пределами интегрирования	585
14.3-1. Нелинейные уравнения с вырожденными ядрами	585
14.3-2. Метод интегральных преобразований	587
14.3-3. Метод дифференцирования интегральных уравнений	587
14.3-4. Метод последовательных приближений	588
14.3-5. Метод Ньютона–Канторовича	589
14.3-6. Метод квадратур	591
14.3-7. Метод регуляризации Тихонова	591
15. Интегральные операторы	593
15.1. Линейные операторы в нормированных пространствах	593
15.1-1. Интегральные уравнения и интегральные операторы	593
15.1-2. Нормированные и евклидовы пространства	593
15.1-3. Линейные операторы в нормированных пространствах	594
15.1-4. Резольвента, спектр и корневые подпространства	595
15.1-5. Компактные линейные операторы и их свойства	596
15.2. Линейные операторы в евклидовых пространствах	597
15.2-1. Самосопряженные операторы	597
15.2-2. Самосопряженные компактные операторы	598
15.3. Интегральные операторы. Условия непрерывности и компактности	599
15.3-1. Условия непрерывности интегральных операторов	599
15.3-2. Условия компактности интегральных операторов	600
15.4. Сингулярные интегральные операторы	602
15.4-1. Сингулярные операторы Гильберта и Коши	602
15.4-2. Пространства $ВМО$ и $ВМО$	603
15.4-3. Условия ограниченности и компактности сингулярных операторов	603
Список литературы	605