Предисловие

Нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными второго и более высоких порядков (нелинейные уравнения математической физики) часто встречаются в различных областях математики, физики, механики, химии, биологии и в многочисленных приложениях. Общее решение нелинейных уравнений математической физики удается получить только в исключительных случаях. Поэтому обычно приходится ограничиться поиском и анализом частных решений, которые принято называть *точными решениями*.

Точные решения дифференциальных уравнений математической физики всегда играли и продолжают играть огромную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Точные решения нелинейных уравнений наглядно демонстрируют и позволяют понять механизмы таких сложных нелинейных эффектов, как пространственная локализация процессов переноса, множественность или отсутствие стационарных состояний при определенных условиях, существование режимов с обострением и др. Простые решения широко используются для иллюстрации теоретического материала и некоторых приложений в учебных курсах университетов и технических вузов (по теории тепло- и массопереноса, гидродинамике, газовой динамике, теории волн, нелинейной оптике и др.).

Точные решения типа бегущей волны и автомодельные решения часто представляют собой асимптотики существенно более широких классов решений, соответствующих другим начальным и граничным условиям. Указанное свойство позволяет делать выводы общего характера и прогнозировать динамику различных явлений и процессов.

Даже те частные точные решения дифференциальных уравнений, которые не имеют ясного физического смысла, могут быть использованы в качестве основы для «тестовых» задач при проверке корректности и оценке точности различных численных, асимптотических и приближенных аналитических методов. Кроме того, допускающие точные решения модельные уравнения и задачи служат основой для разработки новых численных, асимптотических и приближенных методов, которые, в свою очередь, позволяют исследовать уже более сложные задачи, не имеющие точного аналитического решения. Точные методы и решения необходимы также для разработки и совершенствования соответствующих разделов компьютерных программ, предназначенных для аналитических вычислений (системы MATHEMATICA, MAPLE, CONVODE и др.)

Важно отметить, что многие уравнения прикладной и теоретической физики, химии и биологии содержат эмпирические параметры или эмпирические функции. Точные решения позволяют планировать эксперимент для определения этих параметров или функций путем искусственного создания подходящих (граничных и начальных) условий.

Под точными решениями нелинейных уравнений математической физики понимаются следующие решения:

1. Решения, которые выражаются через элементарные функции.
2. Решения, которые выражаются в виде квадратур.*
3. Решения, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (системами обыкновенных дифференциальных уравнений).
4. Решения, которые выражаются через решения линейных уравнений с частными производными (линейных интегральных уравнений).

Под точными методами решения нелинейных уравнений математической физики понимаются методы, позволяющие получать точные решения.

В книге описаны основные (как классические, так и новые) точные методы решения нелинейных уравнений математической физики. Эти методы перечислены в сводной таблице.

ТАБЛИЦА

Основные точные методы решения нелинейных уравнений математической физики

№	Название метода	Характерные особенности
1	Классический метод поиска симметрий (метод группового анализа)	Основан на поиске преобразований, которые оставляют инвариантным вид уравнений. Позволяет получать инвариантные решения
2	Неклассический метод поиска симметрий	Важная модификация метода группового анализа (но более сложная для практического применения). Позволяет описать более широкий класс решений
3	Прямой метод Кларксона — Крускала	Задается общая структура решения, в которое входят произвольные функции. Эти функции неравноправны, для их определения используют специальные приемы
4	Метод дифференциальных связей	Основан на совместном исследовании данных уравнений и вспомогательных (более простых) уравнений, называемых дифференциальными связями
5	Метод обобщенного разделения переменных	Задается общий вид решения, характерный для линейных уравнений. Для определения искомых функций используют разные методы
6	Метод функционального разделения переменных	Задается общий вид решения с функциональным произволом. Для определения искомых функций используют методы дифференцирования и расщепления
7	Метод обратной задачи рассеяния	Основан на специальном представлении уравнения (с помощью пары линейных операторов) или на условии совместности двух линейных уравнений
8	Тест Пенлеве для нелинейных уравнений математической физики	Основан на поиске решений в виде разложений, имеющих особенность типа подвижного полюса. Положение полюса задается произвольной функцией

* Интегрирование дифференциальных уравнений в замкнутой форме — это представление решений дифференциальных уравнений аналитическими формулами, при записи которых используются указанный априори набор допустимых функций и перечисленный заранее набор математических операций. Решение выражается в виде квадратур, если в качестве допустимых функций используются элементарные функции и функции, входящие в уравнение, а под допустимыми операциями понимается конечное множество арифметических операций, операций суперпозиции (образования сложной функции) и операций взятия неопределенного интеграла.

Замечание 1. Наиболее популярными методами являются методы группового анализа и обратной задачи рассеяния (данные основаны на поиске ключевых слов в Интернете).

Замечание 2. В теории тепло- и массопереноса и гидродинамике* эффективно работают только первые шесть методов, указанных в таблице.

Замечание 3. Иногда объединяют метод группового анализа и неклассический метод поиска симметрий, а также методы обобщенного и функционального разделения переменных.

Замечание 4. Метод Монжа, метод Хироты и другие точные методы, имеющие существенно более узкую область применимости, в книге не рассматриваются.

Изложение методов сопровождается многочисленными конкретными примерами и упражнениями, необходимыми для лучшего усвоения материала и получения практических навыков решения дифференциальных уравнений. Помимо нелинейных уравнений второго и более высоких порядков, для иллюстрации широкой области применимости описанных методов в качестве примеров и упражнений иногда используются также некоторые нелинейные уравнения первого порядка и линейные уравнения второго и более высоких порядков.

При отборе практического материала (примеров и упражнений) авторы отдавали наибольшее предпочтение следующим двум важным типам уравнений:

• уравнениям, которые встречаются в различных приложениях (в теории тепло- и массопереноса, теории волн, гидродинамике, газовой динамике, теории горения, нелинейной оптике, химической технологии, биологии и др.);

• уравнениям общего вида, которые зависят от произвольных функций (точные решения таких уравнений представляют особый интерес для тестирования численных и приближенных методов).

Для максимального расширения круга потенциальных читателей с разной математической подготовкой авторы по возможности старались избегать использования специальной терминологии. Поэтому некоторые результаты описаны схематически и упрощенно, чего вполне достаточно для их применения в большинстве приложений. Многие разделы можно читать независимо друг от друга, что облегчает работу с материалом.

Для удобства читателей в книгу включены также четыре вспомогательных главы: по уравнениям Пенлеве, по методам решения квазилинейных и нелинейных уравнений с частными производными первого порядка, по методам решения функциональных уравнений.

Книга представляет собой расширенный курс лекций по методам решения нелинейных уравнений математической физики и механики, читаемый студентам кафедры «Прикладная математика» Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана.

Авторы надеются, что книга будет полезной для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, инженеров и студентов, специализирующихся в области прикладной математики, механики, физики, теории управления и химической технологии. Основной материал книги и упражнения могут

* Здесь имеется в виду поиск точных решений уравнений Навье — Стокса и уравнений гидродинамического пограничного слоя.

быть использованы для чтения спецкурсов и проведения практических занятий по нелинейным уравнениям математической физики для студентов и аспирантов физико-математических специальностей университетов и технических вузов. Отдельные разделы книги могут быть включены в основные курсы по уравнениям математической физики.

Авторы