



## Оглавление

Предисловие .....	9
Некоторые обозначения и замечания .....	13
<b>1. Классификация полulinейных уравнений с частными производными второго порядка .....</b>	<b>15</b>
1.1. Типы уравнений. Уравнения характеристик .....	15
1.2. Канонический вид уравнений параболического типа ( $b^2 - ac = 0$ ) ...	15
1.3. Канонический вид уравнений гиперболического типа ( $b^2 - ac > 0$ ) ..	16
1.4. Канонический вид уравнений эллиптического типа ( $b^2 - ac < 0$ ) .....	16
<b>2. Преобразования уравнений математической физики .....</b>	<b>18</b>
2.1. Точечные преобразования .....	18
2.2. Преобразование годографа .....	20
2.2.1. Случай, когда одна из независимых переменных принимается за искомую величину .....	20
2.2.2. Использование эквивалентной системы уравнений .....	20
2.3. Контактные преобразования. Преобразования Лежандра и Эйлера ...	23
2.3.1. Общий вид контактных преобразований .....	23
2.3.2. Преобразование Лежандра .....	24
2.3.3+. Преобразование Эйлера .....	25
2.4. Преобразования Беклунда .....	27
2.4.1. Преобразования Беклунда для уравнений второго порядка .....	27
2.4.2. Преобразования Беклунда, основанные на законах сохранения .....	29
2.5. Дифференциальные подстановки .....	31
<b>3. Решения типа бегущей волны и автомодельные решения. Метод подобия</b>	<b>34</b>
3.1. Предварительные замечания .....	34
3.2. Решения типа бегущей волны .....	34
3.2.1. Общий вид решений типа бегущей волны .....	34
3.2.2. Инвариантность уравнений относительно преобразований сдвига ...	35
3.2.3. Функциональное уравнение, задающее решения типа бегущей волны	36
3.3. Автомодельные решения. Метод подобия .....	37
3.3.1. Общий вид автомодельных решений. Метод подобия .....	37
3.3.2. Примеры автомодельных решений уравнений математической физики и механики .....	38
3.3.3. Более общий подход, основанный на решении функционального уравнения .....	41
3.3.4. Некоторые замечания .....	42
3.4. Уравнения, инвариантные относительно комбинаций преобразований сдвига и растяжения, и их решения .....	44
3.4.1. Экспоненциально-автомодельные (предельные) решения .....	44
3.4.2. Инвариантные решения .....	45
3.5. Обобщенно-автомодельные решения .....	47

<b>4. Метод обобщенного разделения переменных</b> .....	<b>49</b>
4.1. Введение .....	49
4.1.1. Решения с мультипликативным и аддитивным разделением переменных	49
4.1.2. Простейшие случаи разделения переменных в нелинейных уравнениях	49
4.1.3. Примеры нетривиального разделения переменных в нелинейных уравнениях .....	51
4.2. Структура решений с обобщенным разделением переменных .....	53
4.2.1. Общий вид решений. Рассматриваемые классы нелинейных уравнений	53
4.2.2. Общий вид функционально-дифференциальных уравнений .....	54
4.3. Упрощенная схема построения точных решений, основанная на априорном задании одной системы координатных функций .....	54
4.3.1. Описание упрощенной схемы построения точных решений .....	54
4.3.2. Примеры построения решений нелинейных уравнений старших порядков .....	55
4.4. Решение функционально-дифференциальных уравнений методом дифференцирования .....	57
4.4.1. Описание метода дифференцирования .....	57
4.4.2. Примеры построения решений с обобщенным разделением переменных	58
4.5. Решение функционально-дифференциальных уравнений методом расщепления .....	62
4.5.1. Предварительные замечания. Описание метода расщепления .....	62
4.5.2. Решения простейших функциональных уравнений и их применение .	63
4.6. Метод Титова — Галактионова .....	68
4.6.1. Описание метода. Подпространства, инвариантные относительно нелинейного оператора .....	68
4.6.2. Некоторые обобщения .....	70
<b>5. Метод функционального разделения переменных</b> .....	<b>73</b>
5.1. Структура решений с функциональным разделением переменных . . .	73
5.2. Решения с функциональным разделением переменных специального вида .....	73
5.2.1. Решения типа обобщенной бегущей волны. Примеры .....	73
5.2.2. Решение путем сведения к уравнениям с квадратичной нелинейностью	78
5.3. Метод дифференцирования .....	80
5.3.1. Основные идеи метода. Редукция к уравнению стандартного вида . . .	80
5.3.2. Примеры построения решений с функциональным разделением переменных .....	80
5.4. Метод расщепления. Редукция к функциональному уравнению с двумя переменными .....	85
5.4.1. Метод расщепления. Редукция к функциональному уравнению стандартного вида .....	85
5.4.2. Функциональные уравнения с тремя аргументами специального вида	86
5.5. Решения некоторых нелинейных функциональных уравнений и их приложения в математической физике .....	87
5.5.1. Функциональное уравнение $f(x) + g(y) = Q(z)$ , где $z = \varphi(x) + \psi(y)$	87
5.5.2. Функциональное уравнение $f(t) + g(x) + h(x)Q(z) + R(z) = 0$ , где $z = \varphi(x) + \psi(t)$ .....	87
5.5.3. Функциональное уравнение $f(t) + g(x)Q(z) + h(x)R(z) = 0$ , где $z = \varphi(x) + \psi(t)$ .....	90
5.5.4. Функциональное уравнение $f(x) + g(y) + h(x)P(z) + s(y)Q(z) + R(z) = 0$ , где $z = \varphi(x) + \psi(y)$ .....	91

<b>6. Прямой метод Кларксона — Крускала</b> .....	<b>94</b>
6.1. Поиск точных решений специального вида .....	94
6.1.1. Упрощенная схема. Примеры построения точных решений .....	94
6.1.2. Процедура построения точных решений специального вида .....	96
6.2. Поиск точных решений общего вида .....	97
6.2.1. Общий вид решений .....	97
6.2.2. Примеры построения точных решений методом Кларксона — Крускала .....	98
6.3. Некоторые модификации и обобщения .....	99
6.3.1. Комбинация методов Кларксона — Крускала и обобщенного разделения переменных .....	99
6.3.2. Построение точных решений уравнений с тремя и более независимыми переменными .....	101
<b>7. Классический метод исследования симметрий дифференциальных уравнений</b> .....	<b>103</b>
7.1. Однопараметрические преобразования и их локальные свойства .....	103
7.1.1. Однопараметрические преобразования. Инфинитезимальный оператор .....	103
7.1.2. Инвариант оператора. Преобразования на плоскости .....	104
7.1.3. Формулы для вычисления производных. Координаты первого и второго продолжений .....	105
7.2. Симметрии нелинейных уравнений второго порядка. Условие инвариантности .....	107
7.2.1. Условие инвариантности. Процедура расщепления по производным .....	107
7.2.2. Примеры поиска симметрий нелинейных уравнений математической физики .....	108
7.3. Использование симметрий уравнения для поиска точных решений. Инвариантные решения .....	112
7.3.1. Использование симметрий уравнения для построения однопараметрических решений .....	112
7.3.2. Процедура построения инвариантных решений .....	113
7.3.3. Примеры построения инвариантных решений нелинейных уравнений .....	114
7.3.4. Решения, порождаемые линейными комбинациями допускаемых операторов .....	117
7.4. Некоторые обобщения. Уравнения старших порядков .....	119
7.4.1. Однопараметрические группы Ли точечных преобразований. Генератор группы .....	119
7.4.2. Инварианты группы. Локальные преобразования производных .....	120
7.4.3. Условие инвариантности. Процедура расщепления. Инвариантные решения .....	121
7.5. Симметрии систем уравнений математической физики .....	122
7.5.1. Основные соотношения, используемые при анализе симметрий систем уравнений .....	122
7.5.2. Симметрии уравнений стационарного гидродинамического пограничного слоя .....	123
<b>8. Неклассический метод исследования симметрий дифференциальных уравнений*</b> .....	<b>129</b>
8.1. Описание метода. Условие инвариантной поверхности .....	129
8.2. Конкретные примеры: уравнение Фитц-Хью — Нагумо и нелинейное волновое уравнение .....	130
<b>9. Метод дифференциальных связей</b> .....	<b>136</b>
9.1. Описание метода .....	136
9.1.1. Предварительные замечания. Простейший пример .....	136
9.1.2. Общее описание метода дифференциальных связей .....	137

9.2.	Дифференциальные связи первого порядка	140
9.2.1.	Эволюционные уравнения второго порядка	140
9.2.2.	Гиперболические уравнения второго порядка	144
9.2.3.	Уравнения второго порядка общего вида	146
9.3.	Дифференциальные связи второго и старших порядков	147
9.3.1.	Дифференциальные связи второго порядка для эволюционных уравнений	147
9.3.2.	Примеры использования дифференциальных связей для построения точных решений	147
9.4.	Использование нескольких дифференциальных связей	149
9.5.	Связь между методом дифференциальных связей и другими методами	152
9.5.1.	Обобщенное и функциональное разделение переменных и дифференциальные связи	152
9.5.2.	Прямой метод Кларксона — Крускала и метод дифференциальных связей	153
9.5.3.	Методы группового анализа и метод дифференциальных связей	153
<b>10.</b>	<b>Тест Пенлеве для нелинейных уравнений математической физики</b>	<b>156</b>
10.1.	Подвижные особенности решений обыкновенных дифференциальных уравнений	156
10.1.1.	Примеры решений, имеющих подвижные особенности	156
10.1.2.	Результаты классификации нелинейных уравнений первого и второго порядков	156
10.1.3.	Уравнения Пенлеве	157
10.1.4.	Тест Пенлеве для обыкновенных дифференциальных уравнений	158
10.1.5.	Некоторые замечания о тесте Пенлеве. Индексы Фукса. Примеры	159
10.1.6.	Тест Пенлеве для систем обыкновенных дифференциальных уравнений	161
10.2.	Решения уравнений с частными производными, имеющие подвижный полюс. Описание метода	162
10.2.1.	Простейшая схема анализа нелинейных уравнений в частных производных	163
10.2.2.	Общая схема анализа нелинейных уравнений в частных производных	163
10.2.3.	Основные этапы исследования нелинейных уравнений на тест Пенлеве	164
10.2.4.	Некоторые замечания. Усеченные разложения	164
10.3.	Примеры применения теста Пенлеве и усеченных разложений для анализа нелинейных уравнений математической физики	166
10.3.1.	Уравнения, удовлетворяющие тесту Пенлеве	166
10.3.2.	Анализ нелинейных систем уравнений математической физики на тест Пенлеве	169
10.4.	Построение решений нелинейных уравнений, не удовлетворяющих тесту Пенлеве, с помощью усеченных разложений	171
<b>11.</b>	<b>Методы обратной задачи рассеяния (теория солитонов)</b>	<b>174</b>
11.1.	Метод, основанный на использовании пар Лакса	174
11.1.1.	Описание метода. Условие совместности. Пары Лакса	174
11.1.2.	Примеры пар Лакса для нелинейных уравнений математической физики	175
11.2.	Метод, использующий условие совместности систем линейных уравнений	176
11.2.1.	Общая схема. Условие совместности. Линейные системы с двумя уравнениями	176
11.2.2.	Решение определяющих уравнений в виде полиномов по спектральному параметру. Примеры	178
11.3.	Метод, основанный на использовании линейных интегральных уравнений	181
11.3.1.	Описание метода	181
11.3.2.	Конкретные примеры	182

11.4. Решение задачи Коши методом обратной задачи . . . . .	185
11.4.1. Предварительные замечания. Прямая и обратная задачи рассеяния . . .	185
11.4.2. Решение задачи Коши для нелинейных уравнений методом обратной задачи . . . . .	187
11.4.2. $N$ -солитонное решение уравнения Кортевега—де Фриза . . . . .	189
<b>12. Законы сохранения и интегралы движения . . . . .</b>	<b>192</b>
12.1. Основные определения и примеры . . . . .	192
12.1.1. Общий вид законов сохранения . . . . .	192
12.1.2. Интегралы движения . . . . .	192
12.1.3. Законы сохранения некоторых нелинейных уравнений математической физики . . . . .	193
12.2. Уравнения, допускающие вариационную формулировку. Нётеровы симметрии . . . . .	194
12.2.1. Лагранжиан, уравнение Эйлера—Лагранжа. Нётеровы симметрии . . .	194
12.2.2. Примеры построения законов сохранения с помощью нётеровых симметрий . . . . .	196
<b>13. Уравнения Пенлеве . . . . .</b>	<b>199</b>
13.1. Первое уравнение Пенлеве . . . . .	199
13.2. Второе уравнение Пенлеве . . . . .	200
13.3. Третье уравнение Пенлеве . . . . .	201
13.4. Четвертое уравнение Пенлеве . . . . .	202
13.5. Пятое уравнение Пенлеве . . . . .	203
13.6. Шестое уравнение Пенлеве . . . . .	203
<b>14. Квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка</b>	<b>205</b>
14.1. Характеристическая система. Общее решение . . . . .	205
14.1.1. Уравнения с двумя независимыми переменными . . . . .	205
14.1.2. Использование двухпараметрических частных решений . . . . .	206
14.1.3. Уравнения с произвольным числом независимых переменных . . . . .	206
14.2. Задача Коши. Теорема существования и единственности . . . . .	206
14.2.1. Две формулировки задачи Коши . . . . .	206
14.2.2. Процедура решения задачи Коши . . . . .	207
14.2.3. Теорема существования и единственности . . . . .	207
14.3. Качественные особенности и разрывные решения квазилинейных уравнений . . . . .	209
14.3.1. Модельное уравнение газовой динамики . . . . .	209
14.3.2. Решение задачи Коши . . . . .	209
14.3.3. Ударные волны. Условия на разрыве . . . . .	211
14.3.4. Использование интегральных равенств для определения обобщенных решений . . . . .	214
14.3.5. Законы сохранения. Вязкие решения . . . . .	215
14.3.6. Формула Хопфа для обобщенного решения . . . . .	217
14.3.7. Задача о распаде произвольного разрыва . . . . .	218
14.3.8. Задача о распространении сигнала . . . . .	219
14.4. Обобщенные решения квазилинейных уравнений . . . . .	220
14.4.1. Предварительные замечания . . . . .	220
14.4.2. Обобщенное решение. Условия на разрыве и условия устойчивости . .	221
14.4.3. Законы сохранения. Вязкие решения . . . . .	223
14.4.4. Конструктивный метод построения обобщенных устойчивых решений .	223
<b>15. Нелинейные уравнения общего вида с частными производными первого порядка</b>	<b>225</b>
15.1. Методы решения . . . . .	225
15.1.1. Полный, общий и особый интегралы . . . . .	225
15.1.2. Метод Лагранжа—Шарпи . . . . .	226
15.1.3. Построение полного интеграла с помощью двух первых интегралов . .	227
15.1.4. Случай, когда уравнение не зависит явно от $w$ . . . . .	228
15.1.5. Уравнение Гамильтона—Якоби . . . . .	229

15.2. Задача Коши. Теорема существования и единственности	229
15.2.1. Постановка задачи и процедура построения решения	229
15.2.2. Теорема существования и единственности	230
15.2.3. Задачи Коши для уравнения Гамильтона—Якоби	230
15.2.4. Примеры решения задачи Коши	231
15.3. Обобщенные вязкие решения и их приложения	232
15.3.1. Предварительные замечания	232
15.3.2. Вязкие решения, основанные на использовании параболического уравнения	232
15.3.3. Обобщенные решения, основанные на пробных функциях и неравенствах	233
15.3.4. Локальная структура обобщенных вязких решений	234
15.3.5. Обобщение классического метода характеристик	235
15.3.6. Примеры вязких (негладких) решений	236
<b>16. Решение некоторых функциональных уравнений</b>	<b>238</b>
16.1. Метод дифференцирования по параметру	238
16.1.1. Рассматриваемые классы уравнений. Описание метода	238
16.1.2. Решение конкретных функциональных уравнений методом дифференцирования по параметру	239
16.2. Метод дифференцирования по независимым переменным	240
16.2.1. Предварительные замечания	240
16.2.2. Решение конкретных функциональных уравнений методом дифференцирования по независимым переменным	240
<b>Список литературы</b>	<b>242</b>