



ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	9
Некоторые обозначения и замечания	10
1. Уравнения параболического типа с одной пространственной переменной	11
1.1. Уравнения со степенными нелинейностями	11
1.1.1. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)$	11
1.1.2. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w)$	15
1.1.3. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w) \frac{\partial w}{\partial x} + g(x, t, w)$	15
1.1.4. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + f(x, t, w)$	18
1.1.5. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	19
1.1.6. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = aw^k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	20
1.1.7. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(w^m \frac{\partial w}{\partial x} \right)$	22
1.1.8. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[f(w) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + g(w)$	27
1.1.9. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[f(w) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	32
1.1.10. Другие уравнения	35
1.2. Уравнения с экспоненциальными нелинейностями	39
1.2.1. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)$	39
1.2.2. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\lambda w} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + f(x, t, w)$	40
1.2.3. Другие уравнения	43
1.3. Уравнения с гиперболическими нелинейностями	44
1.3.1. Уравнения, содержащие гиперболический косинус	44
1.3.2. Уравнения, содержащие гиперболический синус	44
1.3.3. Уравнения, содержащие гиперболический тангенс	45
1.3.4. Уравнения, содержащие гиперболический котангенс	45
1.4. Уравнения с логарифмическими нелинейностями	46
1.4.1. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w)$	46
1.4.2. Другие уравнения	47
1.5. Уравнения с тригонометрическими нелинейностями	48
1.5.1. Уравнения, содержащие косинус	48
1.5.2. Уравнения, содержащие синус	48
1.5.3. Уравнения, содержащие тангенс	49
1.5.4. Уравнения, содержащие котангенс	49
1.6. Уравнения, содержащие произвольные функции	50
1.6.1. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w)$	50
1.6.2. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w) \frac{\partial w}{\partial x} + g(x, t, w)$	53
1.6.3. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + f(x, t, w)$	56
1.6.4. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + f(x, t, w) \frac{\partial w}{\partial x} + g(x, t, w)$	58
1.6.5. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + g(x, t, w) \frac{\partial w}{\partial x} + h(x, t, w)$..	59

1.6.6. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	63
1.6.7. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = f(x, t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	63
1.6.8. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = aw \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w) \frac{\partial w}{\partial x} + g(x, t, w)$	65
1.6.9. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = (aw + b) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w) (\frac{\partial w}{\partial x})^2 + g(x, t, w) \frac{\partial w}{\partial x} + h(x, t, w)$	68
1.6.10. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = aw^m \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	71
1.6.11. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} (w^m \frac{\partial w}{\partial x}) + f(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	72
1.6.12. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} (e^{\lambda w} \frac{\partial w}{\partial x}) + f(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	74
1.6.13. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} [f(w) \frac{\partial w}{\partial x}] + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	75
1.6.14. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = f(x, t, w) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$	79
1.6.15. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = f(x, t, w) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	80
1.6.16. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = f(x, w, \frac{\partial w}{\partial x}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(w, \frac{\partial w}{\partial x})$	85
1.6.17. Нелинейные уравнения теплового (диффузионного) пограничного слоя	87
1.7. Нелинейное уравнение Шредингера и родственные уравнения	88
1.7.1. Уравнения вида $i \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)w = 0$, содержащие произвольные параметры	88
1.7.2. Уравнения вида $i \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{x^n} \frac{\partial}{\partial x} (x^n \frac{\partial w}{\partial x}) + f(w)w = 0$, содержащие произвольные параметры	90
1.7.3. Уравнения с кубической нелинейностью, содержащие произвольные функции	91
1.7.4. Уравнения общего вида, содержащие произвольные функции	93
2. Уравнения параболического типа с двумя и более пространственными переменными	98
2.1. Уравнения с двумя пространственными переменными	98
2.1.1. Уравнения, содержащие произвольные параметры	98
2.1.2. Уравнения, содержащие произвольные функции	107
2.2. Уравнения с тремя и более пространственными переменными	113
2.2.1. Уравнения, зависящие от трех пространственных переменных	113
2.2.2. Уравнения, зависящие от n пространственных переменных	119
3. Уравнения гиперболического типа с одной пространственной переменной	121
3.1. Уравнения со степенными нелинейностями	121
3.1.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w)$	121
3.1.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	124
3.1.3. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	126
3.1.4. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(w) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	129
3.1.5. Другие уравнения	133
3.2. Уравнения с экспоненциальными нелинейностями	135
3.2.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w)$	135
3.2.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	138
3.2.3. Другие уравнения	140
3.3. Другие уравнения, содержащие произвольные параметры	142
3.3.1. Уравнения с гиперболическими нелинейностями	142
3.3.2. Уравнения с логарифмическими нелинейностями	143
3.3.3. Уравнения с тригонометрическими нелинейностями	144
3.3.4. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [f(w) \frac{\partial w}{\partial x}]$	146
3.3.5. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + f(w) \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [g(w) \frac{\partial w}{\partial x}]$	147

3.4. Уравнения, содержащие произвольные функции	149
3.4.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w)$	149
3.4.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	154
3.4.3. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	158
3.4.4. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(w) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	162
3.4.5. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, w) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	168
3.4.6. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(t, w) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	170
3.4.7. Другие уравнения	171
3.5. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + f(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}) = 0$	174
3.5.1. Уравнения, содержащие произвольные параметры	174
3.5.2. Уравнения, содержащие произвольные функции	176
4. Уравнения гиперболического типа с двумя пространственными переменными	179
4.1. Уравнения, содержащие произвольные параметры	179
4.1.1. Уравнения с квадратичной и степенной нелинейностью	179
4.1.2. Уравнения с экспоненциальной нелинейностью	184
4.2. Уравнения, содержащие произвольные функции	186
4.2.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [f(w) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(w) \frac{\partial w}{\partial y}]$	186
4.2.2. Другие уравнения	187
5. Уравнения эллиптического типа с двумя независимыми переменными	190
5.1. Уравнения со степенными нелинейностями	190
5.1.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x, y, w)$	190
5.1.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y})$	191
5.1.3. Уравнения вида $\frac{\partial}{\partial x} (f_1 \frac{\partial w}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (f_2 \frac{\partial w}{\partial y}) = g(w)$	192
5.1.4. Другие уравнения, содержащие произвольные параметры	198
5.2. Уравнения с экспоненциальными нелинейностями	201
5.2.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x, y, w)$	201
5.2.2. Уравнения вида $\frac{\partial}{\partial x} (f_1 \frac{\partial w}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (f_2 \frac{\partial w}{\partial y}) = g(w)$	202
5.2.3. Другие уравнения, содержащие произвольные параметры	204
5.3. Уравнения, содержащие другие нелинейности	206
5.3.1. Уравнения с гиперболическими нелинейностями	206
5.3.2. Уравнения с логарифмическими нелинейностями	207
5.3.3. Уравнения с тригонометрическими нелинейностями	210
5.4. Уравнения, содержащие произвольные функции	211
5.4.1. Уравнения вида $\Delta w = f(x, y, w)$	211
5.4.2. Уравнения вида $a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y})$	216
5.4.3. Уравнения вида $\frac{\partial}{\partial x} [f(x) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(y) \frac{\partial w}{\partial y}] = h(w)$	219
5.4.4. Уравнения вида $\frac{\partial}{\partial x} [f(x, y, w) \frac{\partial w}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [g(x, y, w) \frac{\partial w}{\partial y}] = h(x, y, w)$	221
5.4.5. Другие уравнения	226
6. Уравнения эллиптического типа с тремя и более независимыми переменными	231
6.1. Уравнения с тремя независимыми переменными	231
6.1.1. Уравнения, содержащие произвольные параметры	231
6.1.2. Трехмерные уравнения, содержащие произвольные функции	232

6.2. Уравнения с произвольным числом независимых переменных	234
6.2.1. Уравнения линейные относительно старших производных	234
6.2.2. Уравнения нелинейные относительно старших производных	236
7. Уравнения смешанного типа	238
7.1. Уравнения линейные относительно смешанной производной	238
7.1.1. Уравнение Хохлова — Заболоцкой	238
7.1.2. Уравнение нестационарного трансзвукового газового потока	242
7.1.3. Другие уравнения	244
7.2. Уравнения квадратичные относительно старших производных	246
7.2.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x, y)$	246
7.2.2. Уравнение Монжа — Ампера $(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F(x, y)$	247
7.2.3. Уравнения вида $(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})^2 = f(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g(x, y)$	255
7.2.4. Другие уравнения	259
7.3. Уравнение Беллмана и родственные уравнения	259
7.3.1. Уравнения с квадратичной нелинейностью	259
7.3.2. Уравнения со степенной нелинейностью	261
8. Уравнения второго порядка общего вида	264
8.1. Эволюционные уравнения	264
8.1.1. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = F(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2})$	264
8.1.2. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = F(x, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2})$	268
8.1.3. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = F(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2})$	271
8.1.4. Уравнения вида $F(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) = 0$	276
8.2. Уравнения, содержащие вторые производные обеих переменных	278
8.2.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2})$	278
8.2.2. Уравнения нелинейные относительно старших производных	279
9. Уравнения третьего порядка	282
9.1. Уравнение Кортевега — де Фриза и родственные уравнения	282
9.1.1. Уравнение Кортевега — де Фриза $\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 6w \frac{\partial w}{\partial x} = 0$	282
9.1.2. Цилиндрическое, сферическое и модифицированное уравнения Кортевега — де Фриза	285
9.1.3. Обобщенное уравнение Кортевега — де Фриза $\frac{\partial w}{\partial t} + \alpha \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + f(w) \frac{\partial w}{\partial x} = 0$	287
9.1.4. Уравнения, приводимые к уравнению Кортевега — де Фриза	288
9.1.5. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + f(t, w, \frac{\partial w}{\partial x}) = 0$	289
9.2. Уравнения гидродинамического пограничного слоя	291
9.2.1. Уравнения стационарного пограничного слоя ньютоновской жидкости	291
9.2.2. Уравнения стационарного пограничного слоя неньютоновских жидкостей	297
9.2.3. Уравнения нестационарного пограничного слоя ньютоновской жидкости	301
9.2.4. Уравнения нестационарного пограничного слоя неньютоновских жидкостей	311
9.3. Уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера)	314
9.3.1. Стационарные уравнения	314
9.3.2. Нестационарные уравнения	318
9.4. Другие нелинейные уравнения третьего порядка	323
9.4.1. Уравнения, содержащие вторые и третьи производные по t	323
9.4.2. Уравнения, содержащие смешанные производные	323

10. Уравнения четвертого порядка	327
10.1. Уравнения, содержащие вторую производную по t	327
10.1.1. Уравнение Буссинеска и его модификации	327
10.1.2. Другие уравнения с квадратичной нелинейностью	332
10.2. Уравнения гидродинамики (уравнения Навье — Стокса)	333
10.2.1. Стационарные уравнения	333
10.2.2. Нестационарные уравнения	340
10.3. Другие уравнения	348
11. Уравнения старших порядков	350
11.1. Эволюционные уравнения, линейные относительно старшей производной	350
11.1.1. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x, t, w)$	350
11.1.2. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	351
11.1.3. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n-1} w}{\partial x^{n-1}})$	355
11.1.4. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = aw \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x, t, w) \frac{\partial w}{\partial x} + g(x, t, w)$	356
11.1.5. Другие уравнения	357
11.2. Эволюционные уравнения общего вида	359
11.2.1. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = F(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n})$	359
11.2.2. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = F(x, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n})$	362
11.2.3. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = F(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n})$	364
11.3. Уравнения, содержащие вторую производную $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$	369
11.3.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x, t, w)$	369
11.3.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x})$	369
11.3.3. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n-1} w}{\partial x^{n-1}})$	372
11.3.4. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x, t, w) \frac{\partial w}{\partial x} + g(x, t, w)$	373
11.4. Другие уравнения	375
11.4.1. Уравнения гидродинамического типа	375
11.4.2. Уравнения общего вида, содержащие $\frac{\partial^n w}{\partial x^n}$ и $\frac{\partial^m w}{\partial y^m}$	376
Приложения	379
А. Методы обобщенного и функционального разделения переменных	379
А.1. Введение	379
А.1.1. Предварительные замечания	379
А.1.2. Простейшие случаи разделения переменных в нелинейных уравнениях	380
А.1.3. Примеры нетривиального разделения переменных в нелинейных уравнениях	381
А.2. Методы обобщенного разделения переменных	383
А.2.1. Структура решений с обобщенным разделением переменных	383
А.2.2. Решение функционально-дифференциальных уравнений методом дифференцирования	383
А.2.3. Решение функционально-дифференциальных уравнений методом расщепления	387
А.2.4. Упрощенная схема построения точных решений уравнений с квадратичной нелинейностью	390
А.3. Методы функционального разделения переменных	392
А.3.1. Структура решений с функциональным разделением переменных	392
А.3.2. Решения с функциональным разделением переменных частного вида	393
А.3.3. Метод дифференцирования	397
А.3.4. Метод расщепления. Редукция к функциональному уравнению с двумя переменными	401
А.3.5. Некоторые функциональные уравнения и их решения. Точные решения нелинейных уравнений теплопроводности и теории волн	402

В. Преобразования уравнений математической физики	408
В.1. Точечные преобразования	408
В.2. Преобразование годографа	409
В.3. Преобразование Лежандра	411
В.4. Контактные преобразования	411
В.5. Преобразования Беклунда. Дифференциальные подстановки	413
С. Тест Фукса — Ковалевской — Пенлеве для нелинейных уравнений математической физики	416
С.1. Подвижные особенности решений обыкновенных дифференциальных уравнений ..	416
С.2. Решения уравнений с частными производными, имеющие подвижный полюс. Описание метода	417
С.3. Примеры применения теста Фукса — Ковалевской — Пенлеве	419
Список литературы	423