



ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	8
Некоторые обозначения и замечания	9
Введение. Некоторые определения, уравнения, методы и решения	10
0.1. Уравнения первого порядка	10
0.1.1. Общие понятия. Задача Коши. Теоремы существования и единственности ..	10
0.1.2. Уравнения, разрешенные относительно производной. Простейшие методы интегрирования	11
0.1.3. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель	13
0.1.4. Уравнение Риккати	14
0.1.5. Уравнения, не разрешенные относительно производной	16
0.1.6. Приближенные аналитические методы решения уравнений	18
0.1.7. Численное интегрирование дифференциальных уравнений	19
0.2. Линейные уравнения второго порядка	20
0.2.1. Формулы для общего решения. Некоторые преобразования	20
0.2.2. Представление решений в виде ряда по независимой переменной	22
0.2.3. Асимптотические решения	23
0.2.4. Краевые задачи	26
0.2.5. Задачи на собственные значения	28
0.3. Нелинейные уравнения второго порядка	31
0.3.1. Вид общего решения. Задача Коши.	31
0.3.2. Уравнения, допускающие понижение порядка	31
0.3.3. Методы регулярных разложений по независимой переменной и малому параметру	33
0.3.4. Методы возмущений, используемые в механике и физике	35
0.3.5. Метод Галеркина и его модификации (проекционные методы)	41
0.3.6. Метод последовательных приближений и численные методы	43
0.4. Линейные уравнения произвольного порядка	44
0.4.1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами	44
0.4.2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами	45
0.4.3. Асимптотические решения линейных уравнений	47
0.5. Нелинейные уравнения произвольного порядка	48
0.5.1. Вид общего решения. Задача Коши.	48
0.5.2. Уравнения, допускающие понижение порядка	48
1. Уравнения первого порядка	50
1.1. Простейшие уравнения, содержащие произвольные функции, интегрируемые в замкнутой форме	50
1.1.1. Уравнения вида $y'_x = f(x)$	50
1.1.2. Уравнения вида $y'_x = f(y)$	50
1.1.3. Уравнение с разделяющимися переменными $y'_x = f(x)g(y)$	50
1.1.4. Линейное уравнение $g(x)y'_x = f_1(x)y + f_0(x)$	50
1.1.5. Уравнение Бернулли $g(x)y'_x = f_1(x)y + f_n(x)y^n$	50
1.1.6. Однородное уравнение $y'_x = f(y/x)$	50
1.2. Уравнение Риккати $g(x)y'_x = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x)$	51
1.2.1. Представление общего решения с помощью частного	51
1.2.2. Уравнения, содержащие степенные функции	51
1.2.3. Уравнения, содержащие экспоненциальные функции	56

1.2.4. Уравнения, содержащие гиперболические функции	59
1.2.5. Уравнения, содержащие логарифмические функции	60
1.2.6. Уравнения, содержащие тригонометрические функции	61
1.2.7. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции	64
1.2.8. Уравнения, содержащие произвольные функции	66
1.2.9. Некоторые преобразования	69
1.3. Уравнения Абеля второго рода	70
1.3.1. Уравнения вида $yy'_x - y = f(x)$	70
1.3.2. Уравнения вида $yy'_x = f(x)y + 1$	82
1.3.3. Уравнения вида $yy'_x = f_1(x)y + f_0(x)$	83
1.3.4. Уравнения вида $[g_1(x)y + g_0(x)]y'_x = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x)$	93
1.3.5. Некоторые уравнения первого и второго порядков, приводимые к уравнениям Абеля второго рода	97
1.4. Уравнения, содержащие полиномиальные функции y	98
1.4.1. Уравнения Абеля первого рода $y'_x = f_3(x)y^3 + f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x)$	98
1.4.2. Уравнения вида $(A_{22}y^2 + A_{12}xy + A_{11}x^2 + A_0)y'_x = B_{22}y^2 + B_{12}xy + B_{11}x^2 + B_0$	102
1.4.3. Уравнения вида $(A_{22}y^2 + A_{12}xy + A_{11}x^2 + A_2y + A_1x)y'_x = B_{22}y^2 + B_{12}xy + B_{11}x^2 + B_2y + B_1x$	104
1.4.4. Уравнения вида $(A_{22}y^2 + A_{12}xy + A_{11}x^2 + A_2y + A_1x + A_0)y'_x = B_{22}y^2 + B_{12}xy + B_{11}x^2 + B_2y + B_1x + B_0$	111
1.4.5. Уравнения вида $(A_3y^3 + A_2xy^2 + A_1x^2y + A_0x^3 + a_1y + a_0x)y'_x = B_3y^3 + B_2xy^2 + B_1x^2y + B_0x^3 + b_1y + b_0x$	114
1.5. Уравнения вида $f(x, y)y'_x = g(x, y)$, содержащие произвольные параметры	118
1.5.1. Уравнения, содержащие степенные функции	118
1.5.2. Уравнения, содержащие экспоненциальные функции	121
1.5.3. Уравнения, содержащие гиперболические функции	124
1.5.4. Уравнения, содержащие логарифмические функции	126
1.5.5. Уравнения, содержащие тригонометрические функции	127
1.5.6. Уравнения, содержащие комбинации экспоненциальных, логарифмических и тригонометрических функций	128
1.6. Уравнения вида $f(x, y, y'_x) = 0$, содержащие произвольные параметры	130
1.6.1. Уравнения второй степени относительно y'_x	130
1.6.2. Уравнения третьей степени относительно y'_x	135
1.6.3. Уравнения вида $(y'_x)^k = f(y) + g(x)$	136
1.6.4. Другие уравнения	144
1.7. Уравнения вида $f(x, y)y'_x = g(x, y)$, содержащие произвольные функции	146
1.7.1. Уравнения, содержащие степенные функции	146
1.7.2. Уравнения, содержащие экспоненциальные и гиперболические функции	147
1.7.3. Уравнения, содержащие логарифмические функции	149
1.7.4. Уравнения, содержащие тригонометрические функции	150
1.7.5. Уравнения, содержащие комбинации экспоненциальных, логарифмических и тригонометрических функций	151
1.8. Уравнения вида $f(x, y, y'_x) = 0$, содержащие произвольные функции	152
1.8.1. Отдельные уравнения	152
1.8.2. Некоторые преобразования	154
2. Уравнения второго порядка	156
2.1. Линейные уравнения второго порядка	156
2.1.1. Представление общего решения с помощью частного	156
2.1.2. Уравнения, содержащие степенные функции	156
2.1.3. Уравнения, содержащие экспоненциальные функции	184
2.1.4. Уравнения, содержащие гиперболические функции	189
2.1.5. Уравнения, содержащие логарифмические функции	193
2.1.6. Уравнения, содержащие тригонометрические функции	195
2.1.7. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции	206
2.1.8. Уравнения, содержащие комбинации экспоненциальных, логарифмических, тригонометрических и других функций	211

2.1.9. Уравнения, содержащие произвольные функции	218
2.1.10. Некоторые преобразования	224
2.2. Автономные уравнения $y''_{xx} = F(y, y')$	226
2.2.1. Уравнения вида $y''_{xx} - y'_x = f(y)$	227
2.2.2. Уравнения вида $y''_{xx} + f(y)y'_x + y = 0$	230
2.2.3. Уравнения Льенарда $y''_{xx} + f(y)y'_x + g(y) = 0$	232
2.2.4. Уравнения Рэля $y''_{xx} + f(y'_x) + g(y) = 0$	234
2.3. Уравнение Эмдена — Фаулера $y''_{xx} = Ax^n y^m$	236
2.3.1. Точные решения	236
2.3.2. Первые интегралы (законы сохранения)	241
2.3.3. Некоторые формулы и преобразования	243
2.4. Уравнения вида $y''_{xx} = A_1 x^{n_1} y^{m_1} + A_2 x^{n_2} y^{m_2}$	243
2.4.1. Классификационная таблица	243
2.4.2. Точные решения	246
2.5. Обобщенное уравнение Эмдена — Фаулера $y''_{xx} = Ax^n y^m (y'_x)^l$	263
2.5.1. Классификационная таблица	263
2.5.2. Точные решения	266
2.5.3. Некоторые формулы и преобразования	279
2.6. Уравнения вида $y''_{xx} = A_1 x^{n_1} y^{m_1} (y'_x)^{l_1} + A_2 x^{n_2} y^{m_2} (y'_x)^{l_2}$	281
2.6.1. Модифицированное уравнение Эмдена — Фаулера $y''_{xx} = A_1 x^{-1} y'_x + A_2 x^n y^m$	281
2.6.2. Уравнения вида $y''_{xx} = (A_1 x^{n_1} y^{m_1} + A_2 x^{n_2} y^{m_2})(y'_x)^l$	290
2.6.3. Уравнения вида $y''_{xx} = \sigma A x^n y^m (y'_x)^l + A x^{n-1} y^{m+1} (y'_x)^{l-1}$	314
2.6.4. Другие уравнения ($l_1 \neq l_2$)	327
2.7. Уравнения вида $y''_{xx} = f(x)g(y)h(y'_x)$	331
2.7.1. Уравнения вида $y''_{xx} = f(x)g(y)$	331
2.7.2. Уравнения, содержащие степенные функции ($h \neq \text{const}$)	333
2.7.3. Уравнения, содержащие экспоненциальные функции ($h \neq \text{const}$)	337
2.7.4. Уравнения, содержащие гиперболические функции ($h \neq \text{const}$)	340
2.7.5. Уравнения, содержащие тригонометрические функции ($h \neq \text{const}$)	341
2.7.6. Некоторые преобразования	341
2.8. Нелинейные уравнения, содержащие произвольные параметры	342
2.8.1. Уравнения, содержащие степенные функции	342
2.8.2. Уравнения Пенлеве	347
2.8.3. Уравнения, содержащие экспоненциальные функции	352
2.8.4. Уравнения, содержащие гиперболические функции	357
2.8.5. Уравнения, содержащие логарифмические функции	359
2.8.6. Уравнения, содержащие тригонометрические функции	361
2.8.7. Уравнения, содержащие комбинации экспоненциальных, логарифмических и тригонометрических функций	364
2.9. Уравнения, содержащие произвольные функции	366
2.9.1. Уравнения вида $F(x, y)y''_{xx} + G(x, y) = 0$	366
2.9.2. Уравнения вида $F(x, y)y''_{xx} + G(x, y)y'_x + H(x, y) = 0$	371
2.9.3. Уравнения вида $F(x, y)y''_{xx} + \sum_{m=0}^M G_m(x, y)(y'_x)^m = 0$ ($M = 2, 3, 4$)	374
2.9.4. Уравнения вида $F(x, y, y'_x)y''_{xx} + G(x, y, y'_x) = 0$	376
2.9.5. Уравнения вида $F(x, y, y'_x, y''_{xx}) = 0$	382
2.9.6. Уравнения общего вида, допускающие понижение порядка	383
2.9.7. Некоторые преобразования	385
3. Уравнения третьего порядка	388
3.1. Линейные уравнения	388
3.1.1. Предварительные замечания	388
3.1.2. Уравнения, содержащие степенные функции	388
3.1.3. Уравнения, содержащие экспоненциальные функции	403
3.1.4. Уравнения, содержащие гиперболические функции	407
3.1.5. Уравнения, содержащие логарифмические функции	414

3.1.6. Уравнения, содержащие тригонометрические функции	417
3.1.7. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции	427
3.1.8. Уравнения, содержащие комбинации экспоненциальных, логарифмических, тригонометрических и других функций	431
3.1.9. Уравнения, содержащие произвольные функции	437
3.2. Уравнения вида $y'''_{xxx} = Ax^\alpha y^\beta (y'_x)^\gamma (y''_{xx})^\delta$	445
3.2.1. Классификационная таблица	445
3.2.2. Уравнения вида $y'''_{xxx} = Ay^\beta$	451
3.2.3. Уравнения вида $y'''_{xxx} = Ax^\alpha y^\beta$	452
3.2.4. Уравнения при $ \gamma + \delta \neq 0$	453
3.2.5. Некоторые преобразования	475
3.3. Уравнения вида $y'''_{xxx} = f(y)g(y'_x)h(y''_{xx})$	476
3.3.1. Уравнения, содержащие степенные функции	476
3.3.2. Уравнения, содержащие экспоненциальные функции	478
3.3.3. Другие уравнения	481
3.4. Нелинейные уравнения с произвольными параметрами	483
3.4.1. Уравнения, содержащие степенные функции	483
3.4.2. Уравнения, содержащие экспоненциальные функции	487
3.4.3. Уравнения, содержащие гиперболические функции	489
3.4.4. Уравнения, содержащие логарифмические функции	491
3.4.5. Уравнения, содержащие тригонометрические функции	493
3.5. Нелинейные уравнения, содержащие произвольные функции	495
3.5.1. Уравнения вида $F(x, y)y'''_{xxx} + G(x, y) = 0$	495
3.5.2. Уравнения вида $F(x, y, y'_x)y'''_{xxx} + G(x, y, y'_x) = 0$	496
3.5.3. Уравнения вида $F(x, y, y'_x)y'''_{xxx} + G(x, y, y'_x)y''_{xx} + H(x, y, y'_x) = 0$	500
3.5.4. Уравнения вида $F(x, y, y'_x)y'''_{xxx} + \sum G_\alpha(x, y, y'_x)(y''_{xx})^\alpha = 0$	503
3.5.5. Уравнения вида $F(x, y, y'_x, y''_{xx})y'''_{xxx} + G(x, y, y'_x, y''_{xx}) = 0$	505
4. Уравнения четвертого порядка	507
4.1. Линейные уравнения	507
4.1.1. Предварительные замечания	507
4.1.2. Уравнения, содержащие степенные функции	507
4.1.3. Уравнения, содержащие экспоненциальные, гиперболические и логарифмические функции	513
4.1.4. Уравнения, содержащие тригонометрические функции	515
4.1.5. Уравнения, содержащие произвольные функции	516
4.2. Нелинейные уравнения	519
4.2.1. Уравнения, содержащие степенные функции	519
4.2.2. Уравнения, содержащие экспоненциальные, логарифмические и тригонометрические функции	521
4.2.3. Уравнения, содержащие произвольные функции	522
5. Уравнения более высоких порядков	527
5.1. Линейные уравнения	527
5.1.1. Предварительные замечания	527
5.1.2. Уравнения, содержащие степенные функции	527
5.1.3. Уравнения, содержащие экспоненциальные функции	532
5.1.4. Уравнения, содержащие тригонометрические функции	533
5.1.5. Уравнения, содержащие произвольные функции	534
5.2. Нелинейные уравнения	537
5.2.1. Уравнения, содержащие степенные функции	537
5.2.2. Уравнения, содержащие экспоненциальные функции	541
5.2.3. Уравнения, содержащие гиперболические функции	541
5.2.4. Уравнения, содержащие логарифмические функции	543
5.2.5. Уравнения, содержащие тригонометрические функции	544
5.2.6. Уравнения, содержащие произвольные функции	545

Приложения	553
П.1. Элементарные функции и их свойства	553
П.1.1. Тригонометрические функции	553
П.1.2. Гиперболические функции	555
П.1.3. Обратные тригонометрические функции	557
П.1.4. Обратные гиперболические функции	558
П.2. Специальные функции	559
П.2.1. Некоторые символы и коэффициенты	559
П.2.2. Интеграл вероятностей и интегральная показательная функция	560
П.2.3. Интегральный синус и интегральный косинус. Интегралы Френеля	561
П.2.4. Гамма-функция. Бета-функция	562
П.2.5. Неполные гамма-функции	563
П.2.6. Функции Бесселя	564
П.2.7. Модифицированные функции Бесселя	567
П.2.8. Вырожденные гипергеометрические функции	568
П.2.9. Гипергеометрические функции	570
П.2.10. Функции Лежандра	571
П.2.11. Ортогональные многочлены	572
Список литературы	575