Препринт статьи. ИНЖЕНЕРНЫЙ ЖУРНАЛ: НАУКА И ИННОВАЦИИ, № 4(16), 2013

(Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана).

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ И НЕЛИНЕЙНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А. Д. П о л я н и н

Аннотация

Рассматривается широкий класс нелинейных реакционно-диффузионных систем уравнений с запаздыванием. Получены многопараметрические точные решения с обобщенным разделением переменных, содержащие произвольное число произвольных постоянных. Приведено решение, описывающие нелинейное взаимодействие стоячей волны с бегущей волной. Определена область неустойчивости решений системы с запаздыванием.

Ключевые слова: точные решения, реакционно-диффузионные системы, нелинейные уравнения с запаздыванием, глобальная неустойчивость, обобщенное разделение переменных

1. Введение. Дифференциальные уравнения и системы уравнений в частных производных с запаздывающим аргументом возникают в различных приложениях, таких как биология, биохимия, химия, биофизика, физическая химия, медицина, экология, теория климатических моделей, теория управления, экономика и многих других (см., например, работы [1–11] и ссылки в них). Отметим также, что подобные уравнения встречаются в математической теории искусственных нейронных сетей, результаты которой используются для обработки сигналов и изображений и проблем распознавания образов [12–21].

В данной статье в основном рассматривается класс нелинейных реакционно-диффузионных систем уравнений с запаздыванием следующего вида (о других нелинейных системах с запаздыванием см. разд. 6 и 7):

$$u_t = k_1 u_{xx} + bu + F(u - a\bar{u}, w, \bar{w}), \tag{1}$$

$$w_t = k_2 w_{xx} + G(u - a\bar{u}, w, \bar{w}), \tag{2}$$

где $u = u(x,t)$, $w = w(x,t)$, $\bar{u} = u(x, t-\tau)$, $\bar{w} = w(x, t-\tau)$; $F(\dots)$, $G(\dots)$ — произвольные функции трех аргументов; τ — время запаздывания ($\tau > 0$).

В общем случае система (1)–(2) (при $\tau \neq 0$) допускает простые точные решения типа бегущей волны $u = u(z)$, $w = w(z)$, где $z = \alpha x + \beta t$ (такие решения для различных реакционно-диффузионных уравнений и систем с запаздыванием рассматривались, например, в [2–7]. Список известных точных решений другого вида даже для одного нелинейного реакционно-диффузионного уравнения

$$w_t = k w_{xx} + G(w, \bar{w}), \tag{3}$$

(это частный случай уравнения (2), в котором кинетическая функция G не зависит от первого аргумента) весьма невелик. Полный групповой анализ нелинейного дифференциально-разностного уравнения (3) выполнен в [6]. В результате были найдены четыре уравнения вида (3), допускающих инвариантные решения; два из этих уравнений малоинтересны поскольку имеют вырожденные решения (линейные по x).

Вопросам устойчивости (обычно в линейном приближении) стационарных решений, решений типа бегущей волны, и некоторых других решений различных реакционно-диффузионных уравнений и систем с запаздыванием посвящены многочисленные работы, см. например, [2, 7–10, 12–21].

Далее термин точные решения нелинейных дифференциально-разностных уравнений с частными производными (в том числе и систем вида (1)–(2))

применяется в следующих случаях:

(i) когда решение может быть выражено через элементарные функции или быть представлено в замкнутой форме (выражается через неопределенные или определенные интегралы),

(ii) может выражаться через решения обыкновенных дифференциальных или обыкновенных дифференциально-разностных уравнений (или систем таких уравнений),

(iii) может выражаться через решения линейных уравнений в частных производных.

Допустимы также комбинации решений из пп. (i)–(iii).

Данное определение обобщает определение точных решений, которое использовалось в [22, 23] для нелинейных уравнений в частных производных.

Замечание 1. Точные решения уравнения теплопроводности с нелинейным источником без запаздывания (при $\tau = 0$), которое является частным случаем уравнения (3) при $G(w, \bar{w}) = G(w)$, приведены, например, в [22, 24–26]. Наиболее полный обзор точных решений этого уравнения дан в [23]; там же описано много точных решений с обобщенным и функциональным разделением переменных нелинейных систем реакционно-диффузионных уравнений без запаздывания.

Замечание 2. Методы решения и различные приложения линейных и нелинейных обыкновенных дифференциально-разностных уравнений, которые существенно проще нелинейных дифференциально-разностных уравнений в частных производных, описаны, например, в [27–30].

Замечание 3. О численном решении нелинейных реакционно-диффузионных систем с запаздыванием и возникающих при этом трудностях см. [31].

2. Описание метода определения области неустойчивости. Изложим общую идею используемого ниже метода. Пусть вектор-функция $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ описывается некоторой нелинейной системы уравнений в частных производных (которая может быть как с запаздыванием, так и без запаздывания) и $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)$ — частное решение этой системы. Пусть удалось найти точное решение этой же системы в виде суммы

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t, \varepsilon),$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ — некоторая достаточно гладкая по всем аргументам функция, ограниченная всюду при конечных t и зависящая от параметра ε, который не входит в рассматриваемую систему уравнений. Если функция $\mathbf{v}$ удовлетворяет двум условиям

$$\begin{aligned} &|\mathbf{v}(\mathbf{x}, s, \varepsilon)| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0 \qquad (0 \le s \le \tau), \\ &|\mathbf{v}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)| \to \infty \quad \text{при} \quad t \to \infty, \end{aligned} \tag{4}$$

то решение $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)$ является неустойчивым.

Действительно, в силу первого условия (4) и непрерывности $\mathbf{v}$ по параметру ε, для любого достаточно малого δ можно выбрать такое значение ε, что сначала (при $0 \le t \le \tau$) выполняется неравенство

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0| \le \delta,$$

а при $t \to \infty$ величина $|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0|$ становится неограниченной. Другими словами, два решения системы $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{u}$ сколь угодно мало различающиеся сначала неограниченно "разбегаются"при больших временах.

3. Область нелинейной неустойчивости системы (1)–(2). Применим описанный выше метод для анализа нелинейной неустойчивости реакционно-диффузионной системы с запаздыванием (1)–(2).

Теорема 1. *Пусть*

$$u_0 = u_0(x,t), \qquad w_0 = w_0(x,t) \tag{5}$$

— произвольное частное решение рассматриваемой системы. Тогда система (1)–(2) при $a > 0$ имеет также решение

$$u = u_0(x,t) + e^{ct} v(x,t), \quad w = w_0(x,t), \quad c = \frac{1}{\tau} \ln a, \quad a > 0, \tag{6}$$

где $v = v(x,t)$ — любое τ-периодическое решение линейного уравнения теплопроводности с источником

$$v_t = k_1 v_{xx} + (b-c)v, \qquad v(x,t) = v(x,t-\tau). \tag{7}$$

Доказательство теоремы проводится подстановкой (6) в систему (1)–(2) с учетом того, что (5) является решением данной системы, а функция v удовлетворяет (7).

Воспользуемся теоремой 1 для получения условий неустойчивости реакционно-диффузионной системы (1)–(2). Для этого возьмем стационарное пространственно-периодическое решение задачи (7):

$$v = \varepsilon \sin(\sigma x + \mu), \quad \sigma = \sqrt{(b-c)/k_1}, \quad b \geq c, \tag{8}$$

где ε и μ — произвольные постоянные.

Из анализа формул (6) и (8) следует, что при выполнении условий

$$a > 1, \qquad b\tau - \ln a \geq 0 \tag{9}$$

(второе условие эквивалентно неравенству $b \geq c$) любое решение системы (1)–(2) будет неустойчивым.

Условия (9) удобно представить в более наглядном виде

$$a > 1, \quad b > 0, \quad \tau \geq \tau_0, \quad \tau_0 = (\ln a)/b. \tag{10}$$

Физический смысл условий (10) состоит в том, что в области параметров $a > 1, b > 0$ неустойчивость возникает за счет запаздывания, которое должно быть достаточно большим $\tau \geq \tau_0$.

Поскольку вид кинетических функций F и G не влияет на условия неустойчивости (10) реакционно-диффузионной системы (1)–(2) будем называть эти условия *глобальными условиями неустойчивости.*

Замечание 4. Хотя мы получили глобальные условия неустойчивости (10) решений нелинейной системы (1)–(2) во всей области изменения пространственной переменной $-\infty < x < +\infty$, они остаются справедливыми также для ограниченных решений соответствующих нелинейных нестационарных краевых задач с граничными условиями первого, второго и третьего рода в полуплоскости $0 \leq x < \infty$ (или $-\infty < x \leq 0$). Для доказательства этого в частном решении (8) параметр μ выбирается так, чтобы удовлетворить соответствующему однородному граничному условию. В частности, для граничных условий первого и второго рода в (8) надо соответственно положить $\mu = 0$ и $\mu = \pi/2$.

Замечание 5. Важно подчеркнуть, что здесь речь идет о нелинейной неустойчивости, причем все полученные выше результаты являются точными (а не линеаризованными, как это имеет место в теории линейной устойчивости; здесь не использованы также различные допущения, разложения и аппроксимации, характерные для большинства нелинейных теорий).

4. Точные решения нелинейной системы (1)–(2) при $a>0$. Для построения точных решений системы (1)–(2) при $a > 0$ используем формулу (6) и уравнение (7), которые фигурируют в формулировке теоремы 1.

В общем случае для произвольных кинетических функций $F(\zeta, w, \bar{w})$ и $G(\zeta, w, \bar{w})$ в качестве частного решения (5) системы (1)–(2) можно взять решение одного из следующих трех видов:

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad u_0=\varphi(t),\quad w_0=\psi(t)\quad \text{(пространственно-однородное решение);}\\
&\text{(b)}\quad u_0=\varphi(x),\quad w_0=\psi(x)\quad \text{(стационарное решение);}\\
&\text{(c)}\quad u_0=\varphi(z),\quad w_0=\psi(z),\quad z=\alpha x+\beta t\quad \text{(бегущая волна),}
\end{aligned}\tag{11}$$

где α и β — произвольные постоянные (последнее решение включает в себя первые два как частные случаи). Решения (11) описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Например, для решения типа бегущей волны (11)–(c) имеем систему

$$\begin{aligned}
&\beta\varphi'(z)=k_1\alpha^2\varphi''(z)+b\varphi(z)+F\bigl(\varphi(z)-a\varphi(z-z_0),\psi(z),\psi(z-z_0)\bigr),\\
&\beta\psi'(z)=k_2\alpha^2\psi''(z)+G\bigl(\varphi(z)-a\varphi(z-z_0),\psi(z),\psi(z-z_0)\bigr),\\
&\qquad z_0=\beta\tau.
\end{aligned}\tag{12}$$

Общее τ-периодическое решение уравнения (7) можно представить в виде

$$v=\theta_1(x,t;b-c),\tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
\theta_1(x,t;b)=\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-\lambda_n x)\bigl[A_n\cos(\beta_n t-\gamma_n x)+B_n\sin(\beta_n t-\gamma_n x)\bigr]+\\
+\sum_{n=1}^{\infty}\exp(\lambda_n x)\bigl[C_n\cos(\beta_n t+\gamma_n x)+D_n\sin(\beta_n t+\gamma_n x)\bigr],
\end{aligned}\tag{14}$$

$$\beta_n=\frac{2\pi n}{\tau},\quad \lambda_n=\left(\frac{\sqrt{b^2+\beta_n^2}-b}{2k_1}\right)^{1/2},\quad \gamma_n=\left(\frac{\sqrt{b^2+\beta_n^2}+b}{2k_1}\right)^{1/2},\tag{15}$$

A_n, B_n, C_n, D_n — произвольные постоянные, для которых ряды в (13)–(15) и производные $(\theta_1)_t$ и $(\theta_1)_{xx}$ сходятся (сходимость, например, заведомо можно обеспечить, если положить $A_n=B_n=C_n=D_n=0$ при $n>N$, где N — произвольное натуральное число).

Выделим следующие частные случаи:

(i) τ-периодические по времени t решения уравнения (7), затухающие при $x \to \infty$, даются формулами (13)–(15) при $A_0 = B_0 = 0$, $C_n = D_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$;

(ii) τ-периодические по времени t решения уравнения (7), ограниченные при $x \to \infty$, даются формулами (13)–(15) при $C_n = D_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$;

(iii) стационарное решение дается формулами (13)–(15) при $\beta_0 = \lambda_0 = 0$, $A_n = B_n = C_n = D_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$

Формулы (6), (11), (13)–(15) и обыкновенные дифференциально-разностные уравнения (12) описывают многопараметрические точные решения широкого класса нелинейных реакционно-диффузионных систем уравнений с запаздыванием вида (1)–(2) при $a > 0$, которые представляют собой суперпозицию бегущих волн и решений с обобщенным разделением переменных. В качестве конкретного примера приведем любопытное точное решение системы (1)–(2), являющееся следствием формулы (6) и стационарного решения уравнения (7), когда частное решение (5) выбирается в виде бегущей волны (11)–(c):

$$\begin{gathered} u = \varphi(z) + e^{ct}[A\sin(\sigma x) + B\cos(\sigma x)], \qquad w = \psi(z), \\ z = \alpha x + \beta t, \quad c = (\ln a)/\tau, \quad \sigma = \sqrt{(b-c)/k_1}\,, \end{gathered} \tag{16}$$

где A, B, α, β — произвольные постоянные, а функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ описываются нелинейной системой обыкновенных дифференциально-разностных уравнений (12). При $a = 1$, что соответствует $c = 0$, решение (16) можно трактовать как нелинейную суперпозицию бегущей волны с периодической стоячей волной.

5. Точные решения нелинейной системы (1)–(2) при $a<0$.

Теорема 2. *Пусть (5) — произвольное частное решение реакционно-диффузионной системы с запаздыванием (1)–(2) при $a < 0$. Тогда эта система* *имеет также решение*

$$u = u_0(x,t) + e^{ct}v(x,t), \qquad w = w_0(x,t), \qquad c = \frac{1}{\tau}\ln|a|, \qquad a < 0, \tag{17}$$

где $v = v(x,t)$ *— любое* τ*-апериодическое решение линейного уравнения теплопроводности с источником*

$$v_t = k_1 v_{xx} + (b-c)v, \qquad v(x,t) = -v(x, t-\tau). \tag{18}$$

Доказательство теоремы проводится подстановкой (17) в систему (1)–(2) с учетом того, что (5) является решением данной системы, а функция v удовлетворяет (18).

Для построения точных решений системы (1)–(2) при $a < 0$ используем формулу (17) и уравнение (18).

В общем случае для произвольных кинетических функций $F(\zeta, w, \bar{w})$ и $G(\zeta, w, \bar{w})$ в качестве частного решения (5) системы (1)–(2), как и ранее, можно взять пространственно-однородное решение (11)–(a), стационарное решение (11)–(b), или решение типа бегущей волны (11)–(c). В частности, решение типа бегущей волны (11)–(c) описывается системой обыкновенных дифференциально-разностных уравнений (12).

Общее τ-апериодическое решение уравнения (18) можно представить в виде

$$v = \theta_2(x, t; b-c), \tag{19}$$

где

$$\begin{aligned}\theta_2(x,t;b) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_n x)\bigl[A_n\cos(\beta_n t - \gamma_n x) + B_n \sin(\beta_n t - \gamma_n x)\bigr] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \exp(\lambda_n x)\bigl[C_n\cos(\beta_n t + \gamma_n x) + D_n \sin(\beta_n t + \gamma_n x)\bigr],\end{aligned} \tag{20}$$

$$\beta_n = \frac{\pi(2n-1)}{\tau}, \quad \lambda_n = \left(\frac{\sqrt{b^2+\beta_n^2} - b}{2k}\right)^{1/2}, \quad \gamma_n = \left(\frac{\sqrt{b^2+\beta_n^2} + b}{2k}\right)^{1/2}, \tag{21}$$

A_n, B_n, C_n, D_n — произвольные постоянные, для которых ряды в (19)–(21) и производные $(\theta_2)_t$ и $(\theta_2)_{xx}$ сходятся. Затухающие при $x \to \infty$ решения задачи (18) (τ-апериодические по времени t) даются формулами (19)–(21) при $C_n = D_n = 0$, $n = 1,\, 2,\, \dots$

Формулы (17), (11), (19)–(21) и обыкновенные дифференциально-разностные уравнения (12) описывают многопараметрические точные решения широкого класса нелинейных реакционно-диффузионных систем уравнений с запаздыванием вида (1)–(2) при $a < 0$, которые представляют собой суперпозицию бегущих волн и решений с обобщенным разделением переменных.

6. Многокомпонентные нелинейные системы с запаздыванием. Рассмотрим многокомпонентную нелинейную систему реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием следующего вида:

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx} + bu + F(x,t,u - a\bar{u}, w_1, \bar{w}_1, \dots, w_m, \bar{w}_m),\\ (w_n)_t &= k_n(w_n)_{xx} + G_n(x,t,u - a\bar{u}, w_1, \bar{w}_1, \dots, w_m, \bar{w}_m),\\ n &= 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{22}$$

где $u = u(x,t)$, $\bar{u} = u(x,t-\tau)$, $w_n = w_n(x,t)$, $\bar{w}_n = w_n(x,t-\tau_n)$; $F(\dots)$, $G_n(\dots)$ — произвольные функции своих аргументов; τ, τ_n — времена запаздывания.

Система (22) обобщает систему (1)–(2) по сразу трем направлениям:

1) число уравнений системы может быть произвольным;

2) кинетические функции F, G_n дополнительно могут явно зависеть от независимых переменных x и t;

3) времена запаздывания могут быть разными ($\tau \neq \tau_n$, $\tau_i \neq \tau_j$).

Ниже приведена сводка основных результатов для системы (22).

Теорема 3. *Пусть*

$$u_0 = u_0(x,t), \qquad w_{n0} = w_{n0}(x,t), \qquad n = 1, \dots, m, \tag{23}$$

— произвольное решение рассматриваемой системы. Тогда система (22) при $a > 0$ имеет также решение

$$u = u_0(x,t) + e^{ct}v(x,t), \quad w_{n0} = w_{n0}(x,t), \quad c = \frac{1}{\tau}\ln a, \quad a > 0, \tag{24}$$

где $v = v(x,t)$ — любое τ-периодическое решение линейного уравнения теплопроводности с источником (7).

Следствие теоремы 3 с использованием частного решения (8):

При выполнении условий (10) любое решение системы (22) будет неустойчивым (глобальные условия неустойчивости).

Теорема 4. *Пусть (23) — произвольное решение реакционно-диффузионной системы с запаздыванием (22). Тогда при $a < 0$ эта система имеет также решение*

$$u = u_0(x,t) + e^{ct}v(x,t), \quad w_{n0} = w_{n0}(x,t), \quad c = \frac{1}{\tau}\ln|a|, \quad a < 0, \tag{25}$$

где $v = v(x,t)$ — любое τ-апериодическое решение линейного уравнения теплопроводности с источником (18).

Для построения точных решений системы (22) используются формулы (24) (при $a > 0$) и (25) (при $a < 0$), где функция v определяется по формулам (13)–(15) (при $a > 0$) и (19)–(21) (при $a < 0$). Если кинетические функции F, G_n не зависят явно от x и t, то в качестве частного решения (23) системы (22) можно взять решение одного из следующих трех видов:

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad u_0 = \varphi(t), \ \ w_{n0} = \psi_n(t) \quad \text{(пространственно-однородное решение);} \\ &\text{(b)} \quad u_0 = \varphi(x), \ \ w_{n0} = \psi_n(x) \quad \text{(стационарное решение);} \\ &\text{(c)} \quad u_0 = \varphi(z), \ \ w_{n0} = \psi_n(z), \ \ z = \alpha x + \beta t \quad \text{(бегущая волна).} \end{aligned} \tag{26}$$

Если кинетические функции F, G_n зависят явно от t (но не зависят явно от x), то в качестве частного решения (23) системы (22) можно взять решение вида (26)–(a); если кинетические функции F, G_n зависят явно от x (но не зависят явно от t), то в качестве частного решения (23) системы (22) можно взять решение вида (26)–(b).

7. Другие реакционно-диффузионные системы уравнений. Рассмотрим некоторые другие нелинейные реакционно-диффузионные системы уравнений с запаздыванием, допускающие точные решения. Для краткости будем приводить только системы уравнений и указывать вид точных решений (возникающие при этом системы обыкновенных дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений, как правило, будут опускаться).

Система 1. Рассмотрим нелинейную систему уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned} u_t &= k_1 u_{xx} + uF(\bar{u}/u, \bar{w}/w), \\ w_t &= k_2 w_{xx} + wG(\bar{u}/u, \bar{w}/w), \end{aligned} \tag{27}$$

в которую входят две произвольные функции двух аргументов.

1.1. Система (27) допускает четыре точных решения с разделяющимися переменными:

$$\begin{aligned} &u = [A_1\cos(\alpha x) + A_2\sin(\alpha x)]\varphi(t), && w = [B_1\cos(\beta x) + B_2\sin(\beta x)]\psi(t); \\ &u = [A_1\exp(-\alpha x) + A_2\exp(\alpha x)]\varphi(t), && w = [B_1\exp(-\beta x) + B_2\exp(\beta x)]\psi(t); \\ &u = [A_1\cos(\alpha x) + A_2\sin(\alpha x)]\varphi(t), && w = [B_1\exp(-\beta x) + B_2\exp(\beta x)]\psi(t); \\ &u = [A_1\exp(-\alpha x) + A_2\exp(\alpha x)]\varphi(t), && w = [B_1\cos(\beta x) + B_2\sin(\beta x)]\psi(t); \end{aligned} \tag{28}$$

где A_1, A_2, B_1, B_2, α, β — произвольные постоянные, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются соответствующей системой нелинейных дифференциально-разностных уравнений. Для иллюстрации приведем только систему, соответствующую первому решению (28):

$$\varphi'(t) = -k_1\alpha^2\varphi(t) + \varphi(t)F(\varphi(t-\tau)/\varphi(t), \psi(t-\tau)/\psi(t)),$$
$$\psi'(t) = -k_2\beta^2\psi(t) + \psi(t)G(\varphi(t-\tau)/\varphi(t), \psi(t-\tau)/\psi(t)).$$

Замечание 6. Решения вида (28) допускает более общая система (27), у которой функции F и G дополнительно явно зависят также от третьего аргумента t.

Замечание 7. Решения вида (28) допускает более общая система (27) с двумя различными запаздываниями, которые могут зависеть от времени: $u = u(x,t)$, $\bar{u} = u(x, t-\tau_1)$, $w = w(x,t)$, $\bar{w} = w(x, t-\tau_2)$, $\tau_1 = \tau_1(t)$, $\tau_2 = \tau_2(t)$.

1.2. Нелинейная система с запаздыванием (27) допускает также решение в виде произведения бегущих волн

$$u = \exp(\alpha_1 x + \beta_1 t)\varphi(z), \quad w = \exp(\alpha_2 x + \beta_2 t)\psi(z), \qquad z = \lambda x + \gamma t, \tag{29}$$

где α_1, α_2, β_1, β_2, γ, λ — произвольные постоянные, а функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ описываются соответствующей системой нелинейных дифференциально-разностных уравнений.

1.3. Система (27) допускает решения

$$\begin{aligned} u &= \exp(\lambda_1 t)\Big\{\theta_1(x) + \sum_{n=1}^{N}[\varphi_{1n}(x)\cos(\alpha_n t) + \psi_{1n}(x)\sin(\alpha_n t)]\Big\}, \\ w &= \exp(\lambda_2 t)\Big\{\theta_2(x) + \sum_{n=1}^{N}[\varphi_{2n}(x)\cos(\alpha_n t) + \psi_{2n}(x)\sin(\alpha_n t)]\Big\}, \\ \alpha_n &= 2\pi n/\tau, \end{aligned} \tag{30}$$

где λ_1 и λ_2 — произвольные постоянные, N — любое натуральное число (при сходимости соответствующих рядов допускается также $N = \infty$), а функции $\theta_1(x)$, $\varphi_{1n}(x)$, $\psi_{1n}(x)$, $\theta_2(x)$, $\varphi_{2n}(x)$, $\psi_{2n}(x)$ описываются соответствующими системами линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

1.4. Система (27) допускает решения

$$
\begin{aligned}
u &= \exp(\lambda_1 t)\sum_{n=1}^{N}[\varphi_{1n}(x)\cos(\beta_n t) + \psi_{1n}(x)\sin(\beta_n t)],\\
w &= \exp(\lambda_2 t)\sum_{n=1}^{N}[\varphi_{2n}(x)\cos(\beta_n t) + \psi_{2n}(x)\sin(\beta_n t)],\\
\beta_n &= \pi(2n+1)/\tau,
\end{aligned}
\tag{31}
$$

где λ_1 и λ_2 — произвольные постоянные, а функции $\varphi_{1n}(x)$, $\psi_{1n}(x)$, $\varphi_{2n}(x)$, $\psi_{2n}(x)$ описываются соответствующими системами линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

1.5. Система (27) допускает также два решения, представляющих комбинацию решений вида (30) и (31). Первое из этих решений имеет вид

$$
\begin{aligned}
u &= \exp(\lambda_1 t)\Big\{\theta(x) + \sum_{n=1}^{N}[\varphi_{1n}(x)\cos(\alpha_n t) + \psi_{1n}(x)\sin(\alpha_n t)]\Big\}, \quad \alpha_n = \frac{2\pi n}{\tau},\\
w &= \exp(\lambda_2 t)\sum_{n=1}^{N}[\varphi_{2n}(x)\cos(\beta_n t) + \psi_{2n}(x)\sin(\beta_n t)], \quad \beta_n = \frac{\pi(2n+1)}{\tau}.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Второе решение определяется формулами (32), в которых в левых частях надо поменять местами u и w (оставив правые части на месте).

Система 2. Можно рассмотреть более общую, чем (27), систему уравнений

$$
\begin{aligned}
u_t &= k_1 u_{xx} + uF(w/u, \bar{u}/u, \bar{w}/w),\\
w_t &= k_2 w_{xx} + wG(w/u, \bar{u}/u, \bar{w}/w),
\end{aligned}
\tag{33}
$$

в которую входят две произвольные функции трех аргументов.

2.1. Система (33) допускает два точных решения с разделяющимися переменными:

$$
\begin{aligned}
u &= [A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)]\varphi(t), \qquad w = [A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)]\psi(t);\\
u &= [A\exp(-\beta x) + B\exp(\beta x)]\varphi(t), \quad w = [A\exp(-\beta x) + B\exp(\beta x)]\psi(t);
\end{aligned}
\tag{34}
$$

где A, B, β — произвольные постоянные, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются соответствующей системой нелинейных дифференциально-разностных уравнений. Отметим, что в (33) кинетические функции F и G могут дополнительно явно зависеть также от четвертого аргумента t.

Замечание 8. Решения вида (34) допускает более общая система (33) с двумя различными запаздываниями, которые могут зависеть от времени: $u = u(x, t)$, $\bar{u} = u(x, t-\tau_1)$, $w = w(x, t)$, $\bar{w} = w(x, t-\tau_2)$, $\tau_1 = \tau_1(t)$, $\tau_2 = \tau_2(t)$.

2.2. Система (33) допускает также решение в виде произведения бегущих волн

$$u = \exp(\alpha x + \beta t)\varphi(z), \quad w = \exp(\alpha x + \beta t)\psi(z), \qquad z = \lambda x + \gamma t, \tag{35}$$

где α, β, γ, λ — произвольные постоянные, а функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ описываются соответствующей системой нелинейных дифференциально-разностных уравнений.

Система 3. Другим возможным обобщением системы (27) является система уравнений

$$\begin{aligned} u_t &= k_1 u_{xx} + a_1 u \ln u + uF(\bar{u}/u, \bar{w}/w), \\ w_t &= k_2 w_{xx} + a_2 w \ln w + wG(\bar{u}/u, \bar{w}/w), \end{aligned} \tag{36}$$

которая имеет решение в виде произведения функций разных аргументов

$$u = \varphi_1(x)\psi_1(t), \qquad w = \varphi_2(x)\psi_2(t).$$

Функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ описываются двумя независимыми обыкновенными дифференциальными уравнениями и системой обыкновенных дифференциально-разностных уравнений

$$\begin{aligned} &k_1\varphi_1'' = b_1\varphi_1 - a_1\varphi_1 \ln\varphi_1, \qquad k_2\varphi_2'' = b_2\varphi_2 - a_2\varphi_2 \ln\varphi_2; \\ &\psi_1'(t) = b_1\psi_1(t) + \psi_1(t)F(\psi_1(t-\tau)/\psi_1(t), \psi_2(t-\tau)/\psi_2(t)) + a_1\psi_1(t)\ln\psi_1(t), \\ &\psi_2'(t) = b_2\psi_2(t) + \psi_2(t)G(\psi_1(t-\tau)/\psi_1(t), \psi_2(t-\tau)/\psi_2(t)) + a_2\psi_2(t)\ln\psi_2(t), \end{aligned}$$

где b_1 и b_2 — произвольные постоянные.

Система 4. Рассмотрим теперь нелинейную систему

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx} + u^3 F(w/u, \bar{u}/u, \bar{w}/w), \\ w_t &= kw_{xx} + w^3 G(w/u, \bar{u}/u, \bar{w}/w), \end{aligned} \tag{37}$$

в которую входят две произвольные функции трех аргументов. Эта система допускает решение вида

$$u = xU(z), \quad w = xW(z), \quad z = t + \frac{1}{6k}x^2,$$

где функции $U(z)$ и $W(z)$ описываются системой обыкновенных дифференциально-разностных уравнений

$$\begin{aligned} U''(z) + 9kU^3(z)F(W(z)/U(z), U(z-\tau)/U(z), W(z-\tau)/W(z)) = 0, \\ W''(z) + 9kW^3(z)G(W(z)/U(z), U(z-\tau)/U(z), W(z-\tau)/W(z)) = 0. \end{aligned}$$

8. Краткие выводы. В статье исследован широкий класс нелинейных реакционно-диффузионных систем уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned} u_t &= k_1 u_{xx} + bu + F(u - a\bar{u}, w, \bar{w}), \\ w_t &= k_2 w_{xx} + G(u - a\bar{u}, w, \bar{w}), \end{aligned}$$

где $u = u(x,t)$, $w = w(x,t)$, $\bar{u} = u(x, t-\tau)$, $\bar{w} = w(x, t-\tau)$; F и G — произвольные функции трех аргументов; τ — время запаздывания. Доказано, что при выполнении неравенств (глобальные условия неустойчивости)

$$a > 1, \quad b > 0, \quad \tau \geq \tau_0, \quad \tau_0 = (\ln a)/b$$

любое решение рассматриваемой системы будет неустойчивым для любых кинетических функций $F(\zeta, w, \bar{w})$ и $G(\zeta, w, \bar{w})$. Важно подчеркнуть, что для доказательства неустойчивости решений в статье применен новый точный метод (не использующий никаких допущений и приближений), который может быть полезен для анализа других нелинейных биологических, химических, биофизических и экологических моделей с запаздыванием.

Описаны многопараметрические точные решения с обобщенным разделением переменных, содержащие произвольное число произвольных постоянных. Приведено точное решение, представляющие собой нелинейную суперпозицию бегущей волны с периодической стоячей волной. Рассматриваются также другие системы с запаздыванием, включая более сложные многокомпонентные нелинейные системы реакционно-диффузионных уравнений. Полученные результаты могут быть использованы для решения некоторых задач и тестирования приближенных аналитических и численных методов решения подобных и более сложных нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием.

Список литературы

[1] Wu J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. - New York: Springer-Verlag, 1996.

[2] Smith H. L., Zhao X.-Q. Global asymptotic stability of travelling waves in delayed reaction–diffusion equations // SIAM J. Math. Anal. - 2000. - V. 31. - P. 514–534.

[3] Wu J., Zou X. Traveling wave fronts of reaction-diffusion systems with delay. // J. Dynamics and Differential Equations. - 2001. - V. 13, No. 3. - P. 651–687.

[4] Huang J., Zou X. Traveling wavefronts in diffusive and cooperative Lotka–Volterra system with delays // J. Math. Anal. Appl. - 2002. - V. 271. - P. 455–466.

[5] Faria T., Trofimchuk S. Nonmonotone travelling waves in a single species reaction–diffusion equation with delay // J. Differential Equations. - 2006. - V. 228. P. 357–376.

[6] Trofimchuk E., Tkachenko V., Trofimchuk S. Slowly oscillating wave solutions of a single species reaction–diffusion equation with delay // J. Differential Equations. - 2008. - V. 245. - P. 2307–2332.

[7] Mei M., So J., Li M., Shen S. Asymptotic stability of travelling waves for Nicholson's blowflies equation with diffusion // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. - 2004. - V. 134. - P. 579–594.

[8] Gourley S. A., Kuan Y. Wavefronts and global stability in time-delayed population model with stage structure // Proc. Roy. Soc. London A. - 2003. - V. 459. - P. 1563–1579.

[9] Pao C. Global asymptotic stability of Lotka–Volterra competition systems with diffusion and time delays // Nonlinear Anal.: Real World Appl. - 2004. - V. 5, No. 1. - P. 91–104.

[10] Liz E., Pinto M., Tkachenko V., Trofimchuk S. A global stability criterion for a family of delayed population models // Quart. Appl. Math. - 2005. - V. 63. - P. 56–70.

[11] Meleshko S. V., Moyo S. On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay // J. Math. Anal. Appl. - 2008. - V. 338. - P. 448–466.

[12] Arik S. Global asymptotic stability of a larger class of neural networks with constant time delay // Physics Letters A. - 2003. - V. 311. - P. 504–511.

[13] Cao J. New results concerning exponential stability and periodic solutions of delayed cellular neural networks // Physics Letters A. - 2003. - V. 307. - P. 136–147.

[14] Cao J., Liang J., Lam J. Exponential stability of high-order bidirectional associative memory neural networks with time delays // Physica D. - 2004. - V. 199, No. 3–4. - P. 425–436.

[15] Lu H. T., Chung F. L., He Z. Y. Some sufficient conditions for global exponential stability of delayed Hopfield neural networks. // Neural Networks. - 2004. - V. 17. - P. 537–444.

[16] Cao J. D., Ho D. W. C. A general framework for global asymptotic stability analysis of delayed neural networks based on LMI approach // Chaos, Solitons & Fractals. - 2005. - V. 24. - P. 1317–1329.

[17] Liao X. X., Wang J., Zeng Z. Global asymptotic stability and global exponential stability of delayed cellular neural networks // IEEE Trans. Circ. Syst II. - 2005. - V. 52, No. 7. - P. 403–409.

[18] Song O. K., Cao J. D. Global exponential stability and existence of periodic solutions in BAM networks with delays and reaction diffusion terms // Chaos, Solitons & Fractals. - 2005. - V. 23, No. 2. - P. 421–430.

[19] Zhao H. Exponential stability and periodic oscillatory of bidirectional associative memory neural network involving delays // Neurocomputing. - 2006. - V. 69. - P. 424–448.

[20] Wang L., Gao Y. Global exponential robust stability of reaction–diffusion interval neural networks with time-varying delays // Physics Letters A. - 2006. - V. 350. - P. 342–348.

[21] Lu J. G. Global exponential stability and periodicity of reaction–diffusion delayed recurrent neural networks with Dirichlet boundary conditions // Chaos, Solitons & Fractals. - 2008. - V. 35. - P. 116–125.

[22] Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. - М.: Физматлит, 2005. - 256 с.

[23] A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, Second Edition. - Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2012. - 1912 p.

[24] Дородницын В. А. Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. - 1982. - Т. 22, № 6. - С. 1393–1400.

[25] Ibragimov N. H. (Editor). CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, V. 1, Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws. - Boca Raton: CRC Press, 1994.

[26] Galaktionov V. A., Svirshchevskii S. R. Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. - Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2006. - 498 p.

[27] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. - М.: Мир, 1967. - 548 с.

[28] Hale J. Functional Differential Equations. - New York: Springer-Verlag, 1977.

[29] Kuang Y. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. Boston: Academic Press, 1993.

[30] Smith H. L. An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences, New York: Springer-Verlag, 2010.

[31] Брацун Д. А., Захаров А. П. К вопросу о численном расчете пространственно-распределенных динамических систем с запаздыванием по времени // Вестник Пермского универ. Сер.: Математика. Механика. Информатика. - 2012. - Вып. 4(12). - С. 32–41.