Это препринт статьи, которая будет опубликована в журнале ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2014, Т. 3, № 2 (Изд-во МАИК "НАУКА/ИНТЕРПЕРИОДИКА", http://www.maik.ru).

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А. Д. Полянин[a,b], В. Г. Сорокин[b]

[a]*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

[b]*МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва*

Поступила в редакцию 11.12.2013 г.

Аннотация

Получены новые точные решения нелинейных реакционно-диффузионных уравнений гиперболического типа с запаздыванием

$$\varepsilon u_{tt} + \sigma u_t = a u_{xx} + F(u, w),$$

где $u = u(x,t)$, $w = u(x, t-\tau)$, τ — время запаздывания. Все рассмотренные уравнения содержат одну или две произвольные функции одного аргумента. Найдены периодические решения по времени и по пространственной переменной, решения, описывающие нелинейное взаимодействие стоячей волны с бегущей волной и др. Описаны также некоторые точные решения более сложных нелинейных уравнений, в которых запаздывание произвольным образом зависит от времени $\tau = \tau(t)$. Приведенные решения содержат свободные параметры (в ряде случаев число таких параметров может быть любым) и могут быть использованы для решения некоторых задач и тестирования приближенных аналитических и численных методов решения аналогичных и более сложных нелинейных дифференциально-разностных уравнений.

Ключевые слова: реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием, нелинейные уравнения гиперболического типа, точные решения, периодические решения, дифференциально-разностные уравнения, обобщенное разделение переменных

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом возникают в различных приложениях, таких как биология, биофизика, биохимия, химия, медицина, теория управления, теория климатических моделей и многих других (см., например, работы [1–8] и ссылки в них). Отметим также, что подобные уравнения встречаются в математической теории искусственных нейронных сетей, результаты которой используются для обработки сигналов и изображений и проблем распознавания образов [9, 10].

В данной статье рассматривается нелинейное реакционно-диффузионное уравнение гиперболического типа с запаздыванием следующего вида:

$$\varepsilon u_{tt} + \sigma u_t = a u_{xx} + F(u, w), \qquad w = u(x, t - \tau), \tag{1}$$

где τ — время запаздывания; $a > 0$, $\varepsilon \geq 0$, $\sigma \geq 0$ ($\varepsilon + \sigma \neq 0$).

Нелинейное уравнение с запаздыванием (1) включает в себя несколько более простых уравнений, которые приведены табл. 1. В последнем столбце таблицы указаны литературные источники, в которых имеются точные решения соответствующих уравнений при некоторых специальных видах кинетической функции $F(u, w)$.

Важно отметить, что наличие гиперболического члена при $\varepsilon \neq 0$, $\sigma = 1$ приводит к конечной скорости распространения возмущений массы и тепла [21] (при $\varepsilon = 0$ скорость распространения возмущений бесконечна). В частности, характерная скорость распространения возмущений концентрации определяется по формуле $V_D = (a/\varepsilon)^{1/2}$, где $a = D$ — коэффициент диффузии.

Далее термин точные решения нелинейных дифференциально-разностных уравнений с частными производными (в том числе и уравнений вида (1)) применяется в случаях, когда решение:

(i) может быть выражено через элементарные функции или может быть представлено в замкнутой форме (выражается через неопределенные или

Таблица 1: Частные случаи нелинейного уравнения с запаздыванием (1) и его точные решения.

N	Параметры уравнения и кинетическая функция	Название уравнения	Публикации, в которых приведены точные решения
1	$\varepsilon = 0$, $\sigma = 1$; $F(u, w) = f(u)$ (нет запаздывания)	уравнение теплопроводности с нелинейным источником	[11–16]
2	$\varepsilon = 1$, $\sigma = 0$; $F(u, w) = f(u)$ (нет запаздывания)	нелинейное уравнение Клейна–Гордона	[14, 16–18]
3	$\varepsilon \neq 0$, $\sigma = 1$; $F(u, w) = 0$	линейное гиперболическое уравнение теплопроводности	[19, 20], см. также обзор [21]
4	$\varepsilon = 0$, $\sigma = 1$; $F(u, w)$ — любая	реакционно-диффузионное уравнение с запаздыванием	[7, 8, 21, 22]
5	$\varepsilon = 1$, $\sigma = 0$; $F(u, w)$ — любая	нелинейное уравнение Клейна–Гордона с запаздыванием	нет публикаций
6	$\varepsilon \neq 0$, $\sigma = 1$; $F(u, w)$ — любая	реакционно-диффузионное уравнение гиперболического типа с запаздыванием	нет публикаций

определенные интегралы);

(ii) может выражаться через решения обыкновенных дифференциальных или обыкновенных дифференциально-разностных уравнений (или систем таких уравнений);

(iii) может выражаться через решения линейных уравнений в частных производных.

Допустимы также комбинации решений из пп. (i)–(iii).

Данное определение обобщает определение точных решений, которое использовалось в [14, 16] для нелинейных уравнений в частных производных.

Замечание 1. Методы решения и различные приложения линейных и нелинейных обыкновенных дифференциально-разностных уравнений, которые существенно проще нелинейных дифференциально-разностных уравнений с частными производными, описаны, например, в [5, 23].

Замечание 2. Осцилляционные свойства некоторых нелинейных гиперболических уравнений с запаздыванием изучались, например, в [24–27].

Замечание 3. О численном решении нелинейных реакционно-диффузионных систем с запаздыванием и возникающих при этом трудностях см. [6].

Замечание 4. В общем случае уравнение (1) допускает очевидные точные решения типа бегущей волны

$$u = U(z), \quad z = kx + \lambda t,$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$(ak^2 - \varepsilon\lambda^2)U''(z) - \sigma\lambda U'(z) + F(U(z), U(z-\delta)) = 0, \qquad \delta = \lambda\tau.$$

Здесь и далее штрихи обозначают производные по соответствующей переменной.

В следующих разделах будут приведены более сложные точные решения уравнения (1); все эти решения являются новыми.

УРАВНЕНИЯ СОДЕРЖАТ ОДНУ ПРОИЗВОЛЬНУЮ ФУНКЦИЮ, ЗАВИСЯЩУЮ ОТ ОТНОШЕНИЯ W/U

Уравнение 1. Рассмотрим уравнение (1) с кинетической функцией

$$F(u, w) = uf(w/u), \tag{2}$$

где $f(z)$ — произвольная функция.

1.1. Уравнение (1)–(2) допускает решение с разделяющимися переменными в виде произведения функций разных аргументов

$$u = [C_1\cos(\lambda x) + C_2\sin(\lambda x)]\psi(t), \tag{3}$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\varepsilon\psi''(t) + \sigma\psi'(t) = -a\lambda^2\psi(t) + \psi(t)f\big(\psi(t-\tau)/\psi(t)\big). \tag{4}$$

1.2. Уравнение (1)–(2) допускает другое решение с разделяющимися переменными

$$u = [C_1 \exp(-\lambda x) + C_2 \exp(\lambda x)]\psi(t), \tag{5}$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\varepsilon\psi''(t) + \sigma\psi'(t) = a\lambda^2\psi(t) + \psi(t) f\bigl(\psi(t-\tau)/\psi(t)\bigr). \tag{6}$$

1.3. Уравнение (1)–(2) допускает также решение

$$u = \exp(\alpha x + \beta t)\theta(z), \qquad z = \lambda x + \gamma t, \tag{7}$$

где α, β, γ, λ — произвольные постоянные, а функция $\theta(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\begin{aligned}(a\lambda^2 - \varepsilon\gamma^2)\theta''(z) + (2a\alpha\lambda - 2\varepsilon\beta\gamma - \sigma\gamma)\theta'(z) +&\\ + (a\alpha^2 - \varepsilon\beta^2 - \sigma\beta)\theta(z) + \theta(z) f\bigl(e^{-\beta\tau}\theta(z-\delta)/\theta(z)\bigr) = 0,& \quad \delta = \gamma\tau.\end{aligned}$$

Решение (7) можно трактовать как нелинейную суперпозицию двух различных бегущих волн.

1.4. Пусть функция

$$v = V_1(x, t; \sigma, b) \tag{8}$$

является любым τ-периодическим решением линейного гиперболического уравнения[1]

$$\varepsilon v_{tt} + \sigma v_t = a v_{xx} + bv, \qquad v(x,t) = v(x, t-\tau). \tag{9}$$

Тогда уравнение (1)–(2) допускает решение с обобщенным разделением переменных

$$u = e^{ct} V_1(x, t; \sigma + 2\varepsilon c, b), \qquad b = f(e^{-c\tau}) - \varepsilon c^2 - \sigma c, \tag{10}$$

[1]Здесь и далее, для краткости, зависимость решений (8) и (13) от параметров ε и a, входящих в уравнения (9) и (14), явно не указывается.

где c — произвольная постоянная.

Общее решение задачи (9) имеет вид

$$V_1(x,t;\sigma,b) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\lambda_n x)\bigl[A_n \cos(\beta_n t - \gamma_n x) + B_n \sin(\beta_n t - \gamma_n x)\bigr] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \exp(\lambda_n x)\bigl[C_n \cos(\beta_n t + \gamma_n x) + D_n \sin(\beta_n t + \gamma_n x)\bigr], \qquad (11)$$

$$\beta_n = \frac{2\pi n}{\tau}, \quad \gamma_n = \left[\frac{\sqrt{(\varepsilon\beta_n^2 + b)^2 + \sigma^2\beta_n^2} + \varepsilon\beta_n^2 + b}{2a}\right]^{1/2}, \quad \lambda_n = \frac{\sigma\beta_n}{2a\gamma_n}, \quad (12)$$

где A_n, B_n, C_n, D_n — произвольные постоянные, для которых ряды (11)–(12) и производные $(V_1)_{tt}$, $(V_1)_t$ и $(V_1)_{xx}$ сходятся (сходимость заведомо можно обеспечить, если положить $A_n = B_n = C_n = D_n = 0$ при $n > N$, где N — любое целое положительное число).

Выделим следующие частные случаи:

(i) τ-периодические по времени t решения задачи (9), затухающие при $x \to \infty$, даются формулами (11)–(12) при $A_0 = B_0 = 0$, $C_n = D_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$;

(ii) τ-периодические по времени t решения задачи (9), ограниченные при $x \to \infty$, даются формулами (11)–(12) при $C_n = D_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$;

(iii) стационарное решение дается формулами (11)–(12) при $A_n = B_n = C_n = D_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$

1.5. Пусть функция

$$v = V_2(x,t;\sigma,b) \qquad (13)$$

является любым τ-апериодическим решением линейного гиперболического уравнения

$$\varepsilon v_{tt} + \sigma v_t = a v_{xx} + bv, \qquad v(x,t) = -v(x,t-\tau). \qquad (14)$$

Тогда уравнение (1)–(2) допускает решение с обобщенным разделением переменных

$$u = e^{ct} V_2(x,t;\sigma + 2\varepsilon c, b), \qquad b = f(-e^{-c\tau}) - \varepsilon c^2 - \sigma c, \qquad (15)$$

где c — произвольная постоянная.

Общее решение задачи (14) имеет вид

$$V_2(x,t;\sigma,b) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_n x)\bigl[A_n\cos(\beta_n t-\gamma_n x)+B_n\sin(\beta_n t-\gamma_n x)\bigr]+ \\ +\sum_{n=1}^{\infty} \exp(\lambda_n x)\bigl[C_n\cos(\beta_n t+\gamma_n x)+D_n\sin(\beta_n t+\gamma_n x)\bigr], \qquad (16)$$

$$\beta_n = \frac{\pi(2n-1)}{\tau}, \quad \gamma_n = \left[\frac{\sqrt{(\varepsilon\beta_n^2+b)^2+\sigma^2\beta_n^2}+\varepsilon\beta_n^2+b}{2a}\right]^{1/2}, \quad \lambda_n = \frac{\sigma\beta_n}{2a\gamma_n}, \quad (17)$$

где A_n, B_n, C_n, D_n — произвольные постоянные. Затухающие при $x\to\infty$ решения (τ-апериодические по времени t) даются формулами (16)–(17) при $C_n = D_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$

Замечание 5. Решения (11)–(12) и (16)–(17) очень похожи по внешнему виду. Однако в первом решении первая сумма начинается с $n = 0$, а во втором решении — с $n = 1$; отличаются также значения β_n.

Уравнение 2. При

$$F(u,w) = ku\ln u + uf(w/u), \qquad (18)$$

уравнение (1),(18) допускает решение с разделяющимися переменными

$$u = \varphi(x)\psi(t), \qquad (19)$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ описываются обыкновенным дифференциальным уравнением и обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$a\varphi''(x) = b\varphi(x) - k\varphi(x)\ln\varphi(x), \qquad (20)$$

$$\varepsilon\psi''(t) + \sigma\psi'(t) = b\psi(t) + k\psi(t)\ln\psi(t) + \psi(t)f(\psi(t-\tau)/\psi(t)), \qquad (21)$$

b — произвольная постоянная.

УРАВНЕНИЯ СОДЕРЖАТ ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ РАЗНОСТИ $U - W$

Уравнение 3. Рассмотрим уравнение (1) с кинетической функцией

$$F(u, w) = bu + f(u - w), \tag{22}$$

где $f(z)$ — произвольная функция.

3.1. Уравнение (1), (22) допускает решение с разделяющимися переменными в виде суммы функций разных аргументов

$$u = \varphi(x) + \psi(t), \tag{23}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x), & \lambda = \sqrt{b/a} \quad \text{при} \quad b > 0; \\ C_1 \exp(-\lambda x) + C_2 \exp(\lambda x), & \lambda = \sqrt{-b/a} \quad \text{при} \quad b < 0, \end{cases} \tag{24}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\varepsilon\psi''(t) + \sigma\psi'(t) = b\psi(t) + f(\psi(t) - \psi(t - \tau)). \tag{25}$$

3.2. Уравнение (1), (22) при $b = 0$ допускает квадратичное по x решение с разделяющимися переменными

$$u = C_1 x^2 + C_2 x + \psi(t), \tag{26}$$

где функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\varepsilon\psi''(t) + \sigma\psi'(t) = 2C_1 a + f(\psi(t) - \psi(t - \tau)). \tag{27}$$

3.3. Решение уравнения (1), (22), обобщающее решение (23), в виде суммы функций разных аргументов:

$$u = \varphi(x) + \theta(z), \quad z = \beta x + \gamma t, \tag{28}$$

где β, γ — произвольные постоянные, функция $\varphi(x)$ определяется по формулам (24), а функция $\theta(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$(\varepsilon\gamma^2 - a\beta^2)\theta''(z) + \sigma\gamma\theta'(z) = b\theta(z) + f(\theta(z) - \theta(z-\delta)), \quad \delta = \gamma\tau. \tag{29}$$

Решение (28) при $b > 0$ может трактоваться как нелинейное взаимодействие периодической стоящей волны с бегущей волной.

3.4. Решение уравнения (1), (22) при $b = 0$, обобщающее решение (26):

$$u = C_1 x^2 + C_2 x + \theta(z), \quad z = \beta x + \gamma t, \tag{30}$$

где C_1, C_2, β, γ — произвольные постоянные, а функция $\theta(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$(\varepsilon\gamma^2 - a\beta^2)\theta''(z) + \sigma\gamma\theta'(z) = 2C_1 a + f(\theta(z) - \theta(z-\delta)), \quad \delta = \gamma\tau.$$

3.5. Уравнение (1), (22) допускает вырожденное решение с обобщенным разделением переменных

$$u = t\varphi(x) + \psi(x), \tag{31}$$

где функция $\varphi(x)$ определяется по формулам (24), а функция $\psi(x)$ описывается линейным неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$a\psi''(x) + b\psi(x) + f(\tau\varphi(x)) - \sigma\varphi(x) = 0.$$

Более сложные решения уравнения (1), (22) можно получить, используя следующую лемму и приведенные выше решения (23), (26), (28), (39), (31).

Лемма 1 (о нелинейной суперпозиции решений). Пусть $u_0(x,t)$ — некоторое решение нелинейного уравнения (1), (22), а функция $v = V_1(x,t;\sigma,b)$ является любым τ-периодическим решением линейного гиперболического уравнения (9). Тогда сумма

$$u = u_0(x,t) + V_1(x,t;\sigma,b) \tag{32}$$

также является решением уравнения (1), (22). Общий вид функции $V_1(x,t;\sigma,b)$ определяется формулами (11)–(12).

Замечание 6. В формуле (32) в качестве частного решения $u_0(x,t)$ нелинейного уравнения (1), (22) можно использовать, например, решение типа бегущей волны $u_0 = u_0(\alpha x + \beta t)$.

Уравнение 4. Рассмотрим уравнение (1) с кинетической функцией

$$F(u,w) = uf(u-w) + wg(u-w) + h(u-w), \tag{33}$$

где $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ — произвольные функции.

4.1. Пусть $v = V_1(x,t;\sigma,b)$ — любое τ-периодическое решение линейного гиперболического уравнения (9). Тогда уравнение (1), (33) допускает решение

$$u = \xi_0 + V_1(x,t;\sigma,f(0)+g(0)), \quad \xi_0 = -\frac{h(0)}{f(0)+g(0)}. \tag{34}$$

Общий вид функции $V_1(x,t;\sigma,b)$ определяется формулами (11)–(12).

4.2. Уравнение (1), (33) допускает решение с обобщенным разделением переменных

$$u = \sum_{n=1}^{N}[\varphi_n(x)\cos(\beta_n t) + \psi_n(x)\sin(\beta_n t)] + t\theta(x) + \xi(x), \quad \beta_n = \frac{2\pi n}{\tau}, \tag{35}$$

где N — любое натуральное число, а функции $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$, $\theta(x)$, $\xi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned}
a\varphi_n'' + [f(\tau\theta) + g(\tau\theta)]\varphi_n + \varepsilon\beta_n^2\varphi_n - \sigma\beta_n\psi_n &= 0,\\
a\psi_n'' + [f(\tau\theta) + g(\tau\theta)]\psi_n + \varepsilon\beta_n^2\psi_n + \sigma\beta_n\phi_n &= 0,\\
a\theta'' + [f(\tau\theta) + g(\tau\theta)]\theta &= 0,\\
a\xi'' + [f(\tau\theta) + g(\tau\theta)]\xi - [\sigma + \tau g(\tau\theta)]\theta + h(\tau\theta) &= 0.
\end{aligned}$$

Третье нелинейное уравнение этой системы допускает тривиальное решение $\theta = 0$; в этом случае остальные уравнения становятся линейными уравнениями с постоянными коэффициентами.

Замечание 7. Одну из двух функций f или g в (33) (а также в (40) и (47)) без ограничения общности можно положить равной нулю.

УРАВНЕНИЯ СОДЕРЖАТ ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ U И W

Уравнение 5. Рассмотрим уравнение (1) с кинетической функцией

$$F(u,w) = bu + f(u - kw), \qquad k > 0. \tag{36}$$

Лемма 2 (обобщает лемму 1). Пусть $u_0(x,t)$ — некоторое решение нелинейного уравнения (1), (36), а функция $v = V_1(x,t;\sigma,b)$ является любым τ-периодическим решением линейного гиперболического уравнения (9). Тогда сумма

$$u = u_0(x,t) + e^{ct}V_1(x,t;\sigma + 2\varepsilon c, b - \varepsilon c^2 - \sigma c), \qquad c = \frac{1}{\tau}\ln k, \tag{37}$$

также является решением уравнения (1), (36). Формулы (11)–(12) определяют общий вид функции $V_1(x,t;\sigma,b)$.

Формула (37) позволяет получить широкий класс точных решений нелинейного уравнения (1), (36).

Простейшими частными решениями уравнения (1), (36) являются постоянные решения $u_0 = \text{const}$, которые находятся из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$bu_0 + f((1-k)u_0) = 0. \tag{38}$$

В специальном случае $k = 1$ имеем $u_0 = -f(0)/b$.

В общем случае для уравнения (1), (36) с произвольной функцией $f(z)$ в формуле (37) можно брать частные решения $u_0(x,t)$ следующих видов:

$$u_0 = \psi(t) \qquad \text{(пространственно-однородное решение);} \tag{39a}$$

$$u_0 = \varphi(x) \qquad \text{(стационарное решение);} \tag{39b}$$

$$u_0 = \theta(z), \quad z = \beta x + \gamma t \quad \text{(решение типа бегущей волны),} \tag{39c}$$

где β, γ — произвольные постоянные; последнее решение обобщает первые два решения. Например, решение типа бегущей волны $u_0(x,t) = \theta(z)$, где $z = \beta x + \gamma t$, описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$(\varepsilon\gamma^2 - a\beta^2)\theta''(z) + \sigma\gamma\theta'(z) = b\theta(z) + f(\theta(z) - k\theta(z-\delta)), \qquad \delta = \gamma\tau.$$

Уравнение 6. Рассмотрим уравнение (1) с кинетической функцией

$$F(u,w) = uf(u-kw) + wg(u-kw) + h(u-kw), \qquad k > 0. \tag{40}$$

6.1. Пусть ξ_0 — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\xi_0[f(\xi_0) + g(\xi_0)] + (1-k)h(\xi_0) = 0. \tag{41}$$

Тогда уравнение (1), (40) допускает точное решение

$$\begin{gathered} u = \frac{\xi_0}{1-k} + e^{ct}V_1(x,t;2\varepsilon c + \sigma, b), \qquad c = \frac{1}{\tau}\ln k, \\ b = f(\xi_0) + \frac{1}{k}g(\xi_0) - \varepsilon c^2 - \sigma c, \end{gathered} \tag{42}$$

где $v = V_1(x,t;\sigma,b)$ — любое τ-периодическое решение линейного гиперболического уравнения (9). В общем случае функция $V_1(x,t;\sigma,b)$ определяется формулами (11)–(12). Различные корни уравнения (41) порождают различные решения уравнения (1), (40) вида (42).

6.2. Уравнение (1), (40) допускает также решение

$$\begin{gathered} u = e^{ct}\Big\{\theta(x) + \sum_{n=1}^{N}[\varphi_n(x)\cos(\beta_n t) + \psi_n(x)\sin(\beta_n t)]\Big\} + \xi(x), \\ c = \frac{1}{\tau}\ln k, \quad \beta_n = \frac{2\pi n}{\tau}. \end{gathered} \tag{43}$$

Здесь N — любое натуральное число, а функции $\theta(x)$, $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$, $\xi(x)$

описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
a\varphi_n'' + \Big[f(\eta) + \frac{1}{k}g(\eta) + \varepsilon(\beta_n^2 - c^2) - \sigma c\Big]\varphi_n - (2\varepsilon c + \sigma)\beta_n\psi_n = 0,\\
a\psi_n'' + \Big[f(\eta) + \frac{1}{k}g(\eta) + \varepsilon(\beta_n^2 - c^2) - \sigma c\Big]\psi_n + (2\varepsilon c + \sigma)\beta_n\varphi_n = 0,\\
a\theta'' + \Big[f(\eta) + \frac{1}{k}g(\eta) - \varepsilon c^2 - \sigma c\Big]\theta = 0,\\
a\xi'' + [f(\eta) + g(\eta)]\xi + h(\eta) = 0,
\end{aligned}
$$

где $\eta = (1-k)\xi$. Последнее уравнение является независимым.

Уравнение 7. Рассмотрим уравнение (1) с кинетической функцией

$$F(u,w) = bu + f(u+kw), \qquad k > 0. \tag{44}$$

Лемма 3. Пусть $u_0(x,t)$ — некоторое решение нелинейного уравнения (1), (44), а функция $v = V_2(x,t;\sigma,b)$ является любым τ-апериодическим решением линейного гиперболического уравнения (14). Тогда сумма

$$u = u_0(x,t) + e^{ct}V_2(x,t;\sigma + 2\varepsilon c, b - \varepsilon c^2 - \sigma c), \quad c = \frac{1}{\tau}\ln k, \tag{45}$$

также является решением уравнения (1), (44). Формулы (16)–(17) определяют общий вид функции $V_2(x,t;\sigma,b)$.

Формула (45) позволяет получить широкий класс точных решений нелинейного уравнения (1), (44).

Простейшими частными решениями уравнения (1), (44) являются постоянные решения $u_0 = \mathrm{const}$, которые находятся из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$bu_0 + f((1+k)u_0) = 0. \tag{46}$$

В общем случае для уравнения (1), (44) с произвольной функцией $f(z)$ в формуле (45) можно использовать указанные ранее частные решения вида (39a)–(39c). В частности, взяв решение типа бегущей волны $u_0(x,t) = \theta(z)$, где $z=\beta x+\gamma t$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$(\varepsilon\gamma^2-a\beta^2)\theta''(z)+\sigma\gamma\theta'(z)=b\theta(z)+f(\theta(z)+k\theta(z-\delta)),\qquad \delta=\gamma\tau.$$

Уравнение 8. Рассмотрим уравнение (1) с кинетической функцией

$$F(u,w)=uf(u+kw)+wg(u+kw)+h(u+kw),\qquad k>0. \tag{47}$$

8.1. Пусть ξ_0 — корень алгебраического (транцендентного) уравнения

$$\xi_0[f(\xi_0)+g(\xi_0)]+(1+k)h(\xi_0)=0. \tag{48}$$

Тогда уравнение (1), (47) допускает точное решение

$$\begin{gathered} u=\frac{\xi_0}{1+k}+e^{ct}V_2(x,t;2\varepsilon c+\sigma,b),\qquad c=\frac{1}{\tau}\ln k,\\ b=f(\xi_0)-\frac{1}{k}g(\xi_0)-\varepsilon c^2-\sigma c, \end{gathered} \tag{49}$$

где $v=V_2(x,t;\sigma,b)$ — любое τ-апериодическое решение линейного гиперболического уравнения (14). В общем случае функция $V_1(x,t;\sigma,b)$ определяется формулами (16)–(17). Различные корни уравнения (48) порождают различные решения уравнения (1), (47) вида (49).

8.2. Уравнение (1), (47) также допускает решение

$$\begin{gathered} u=e^{ct}\sum_{n=1}^{N}[\varphi_n(x)\cos(\beta_n t)+\psi_n(x)\sin(\beta_n t)]+\xi(x),\\ c=\frac{1}{\tau}\ln k,\quad \beta_n=\frac{\pi(2n-1)}{\tau}. \end{gathered} \tag{50}$$

Здесь N — любое натуральное число, а функции $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$, $\xi(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} a\varphi_n''+\Big[f(\eta)-\frac{1}{k}g(\eta)+\varepsilon(\beta^2-c^2)-\sigma c\Big]\varphi_n-(2\varepsilon c+\sigma)\beta_n\psi_n&=0,\\ a\psi_n''+\Big[f(\eta)-\frac{1}{k}g(\eta)+\varepsilon(\beta^2-c^2)-\sigma c\Big]\psi_n+(2\varepsilon c+\sigma)\beta_n\varphi_n&=0,\\ a\xi''+[f(\eta)+g(\eta)]\xi+h(\eta)&=0, \end{aligned}$$

где $\eta = (1+k)\xi$. Последнее уравнение является независимым.

УРАВНЕНИЕ СОДЕРЖИТ ДВЕ ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ СУММЫ КВАДРАТОВ U И W

Уравнение 9. Рассмотрим уравнение (1) с кинетической функцией

$$F(u,w) = uf(u^2+w^2) + wg(u^2+w^2), \tag{51}$$

которая содержит две произвольные функции с нелинейным (квадратичным) аргументом $z = u^2 + w^2$.

Уравнение (1), (51) допускает точные решения с обобщенным разделением переменных

$$\begin{aligned} &u = \varphi_n(x)\cos(\lambda_n t) + \psi_n(x)\sin(\lambda_n t),\\ &\lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2\tau}, \quad n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots, \end{aligned} \tag{52}$$

где функции $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$ описываются нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} a\varphi_n'' + \varphi_n\, f(\varphi_n^2+\psi_n^2) + (-1)^{n+1}\psi_n\, g(\varphi_n^2+\psi_n^2) + \varepsilon\lambda_n^2\varphi_n - \sigma\lambda_n\psi_n = 0,\\ a\psi_n'' + \psi_n\, f(\varphi_n^2+\psi_n^2) + (-1)^{n}\varphi_n\, g(\varphi_n^2+\psi_n^2) + \varepsilon\lambda_n^2\psi_n + \sigma\lambda_n\varphi_n = 0. \end{aligned}$$

РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ОБЩЕГО ВИДА

Рассмотрим некоторые более сложные нелинейные реакционно-диффузионные уравнения гиперболического типа с переменным запаздыванием общего вида

$$\varepsilon u_{tt} + \sigma u_t = au_{xx} + F(u,w), \qquad w = u(x, t-\tau(t)), \tag{53}$$

где время релаксации τ считается заданной (достаточно произвольно) функцией t. При $\varepsilon = 0$ параболические уравнения такого типа рассматривались, например, в [8, 21].

Уравнение 10. Уравнение (53) с кинетической функцией (2) допускает периодическое по x решение вида (3), где функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциально-функциональным уравнением

$$\varepsilon\psi''(t) + \sigma\psi'(t) = -a\lambda^2\psi(t) + \psi(t)f\big(\psi(t-\tau(t))/\psi(t)\big).$$

Уравнение (53) с кинетической функцией (2) допускает также решение вида (5), где функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциально-функциональным уравнением

$$\varepsilon\psi''(t) + \sigma\psi'(t) = a\lambda^2\psi(t) + \psi(t)f\big(\psi(t-\tau(t))/\psi(t)\big).$$

Уравнение 11. Уравнение (53) с кинетической функцией (18) допускает решение вида (19), где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (20), а функция $\psi(t)$ — обыкновенным дифференциально-функциональным уравнением

$$\varepsilon\psi''(t) + \sigma\psi'(t) = b\psi(t) + k\psi(t)\ln\psi(t) + \psi(t)f(\psi(t-\tau(t))/\psi(t)).$$

Уравнение 12. Уравнение (53) с кинетической функцией (22) допускает решение вида (23)–(24), где функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциально-функциональным уравнением

$$\varepsilon\psi''(t) + \sigma\psi'(t) = b\psi(t) + f(\psi(t) - \psi(t-\tau(t))).$$

КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Получены новые точные решения нелинейных реакционно-диффузионных уравнений гиперболического типа с запаздыванием (1), которые содержат одну или две произвольные функции одного аргумента. Найдены периодические решения по времени и по пространственной переменной, решения, описывающие нелинейное взаимодействие стоячей волны с бегущей волной, решения с обобщенным разделением переменных и др. Описаны также некоторые точные решения более сложных нелинейных уравнений, в которых запаздывание произвольным образом зависит от времени $\tau = \tau(t)$.

Приведенные решения содержат свободные параметры (в ряде случаев число таких параметров может быть любым) и могут быть использованы для решения некоторых задач и тестирования приближенных аналитических и численных методов решения аналогичных и более сложных нелинейных дифференциально-разностных уравнений.

Список литературы

[1] J. Wu, Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. New York: Springer, 1996.

[2] J. Wu, X. Zou. Traveling wave fronts of reaction-diffusion systems with delay // J. Dynamics & Dif. Equations. 2001. V. 13. № 3. P. 651–687.

[3] J. Huang, X. Zou. Traveling wavefronts in diffusive and cooperative Lotka–Volterra system with delays // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 271. P. 455–466.

[4] T. Faria, S. Trofimchuk. Nonmonotone travelling waves in a single species reaction–diffusion equation with delay // J. Dif. Equations. 2006. V. 228. P. 357–376.

[5] H. L. Smith. An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences. New York: Springer, 2010.

[6] Д. А. Брацун, А. П. Захаров. К вопросу о численном расчете пространственно-распределенных динамических систем с запаздыванием по времени // Вестник Пермского универ. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2012. Вып. 4. № 12. С. 32–41.

[7] А. Д. Полянин, А. И. Журов. Метод функциональных связей: Точные решения нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запазды-

ванием. Вестник Национального исследовательского ядерного университета “МИФИ” // 2013. Т. 2. № 4. С. 425–431.

[8] A. D. Polyanin, A. I. Zhurov. Exact separable solutions of delay reaction–diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2014. V. 19. P. 409–416.

[9] L. Wang, Y. Gao. Global exponential robust stability of reaction–diffusion interval neural networks with time-varying delays // Physics Letters A. 2006. V. 350. P. 342–348.

[10] J. G. Lu. Global exponential stability and periodicity of reaction–diffusion delayed recurrent neural networks with Dirichlet boundary conditions // Chaos, Solitons and Fractals. 2008. V. 35. P. 116–125.

[11] В. А. Дородницын. Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1982. Т. 22. № 6. С. 1393–1400.

[12] Н. А. Кудряшов. О точных решениях уравнений семейства Фишера. Теор. и мат. физика // 1993. Т. 94. № 2. С. 211–218.

[13] N. H. Ibragimov (Editor). CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, V. 1, Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws. Boca Raton: CRC Press, 1994.

[14] А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.

[15] V. A. Galaktionov, S. R. Svirshchevskii. Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2006.

[16] A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2012.

[17] R. Z. Zhdanov, Separation of variables in the non-linear wave equation, J. Phys. A, 1994, Vol. 27, pp. L291–L297.

[18] V. K. Andreev, O. V. Kaptsov, V. V. Pukhnachov, A. A. Rodionov. Applications of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics. Kluwer, Dordrecht, 1998.

[19] Wang L. Solution structure of hyperbolic heat-conduction equation // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2000. V. 43. P. 365–373.

[20] Шашков А. Г., Бубнов. В.А., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности: системно-структурный подход. М.: Едиториал УРСС, 2004.

[21] A. D. Polyanin, A. I. Zhurov. Exact solutions of linear and nonlinear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time. Int. J. Non-Linear Mechanics // 2013. V. 54. P. 115–126.

[22] S. V. Meleshko, S. Moyo. On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 338. P. 448–466.

[23] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

[24] B. T. Cui, Y. H. Yu, S. Z. Lin. Oscillations of solutions of delay hyperbolic differential equations // Acta Math. Appl. Sinica. 1996. V. 19. P. 80–88.

[25] J. Wang, F. Meng, S. Liu. Interval oscillation criteria for second order partial differential equations with delays // J. Comp. & Appl. Math. 2008. V. 212. No. 2. P. 397–405.

[26] S. Cui, Z. Xu. Interval oscillation theorems for second order nonlinear partial delay differential equations // Dif. Equations & Appl. 2009. V. 1. No. 3. P. 379–391.

[27] L. Luo, Y. Wang. Oscillation for nonlinear hyperbolic equations with influence of impulse and delay // Int. J. Nonlinear Science. 2012. V.14. No. 1. P. 60–64.