Это препринт статьи, опубликованной в журнале ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА “МИФИ”, 2013, Т. 2, № 4, с. 425–431 (Изд-во МАИК “НАУКА/ИНТЕРПЕРИОДИКА”, http://www.maik.ru).

МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ: ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А. Д. Полянин, А. И. Журов

Аннотация

Описан новый метод построения точных решений нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием

$$u_t = ku_{xx} + F(u, w),$$

где $u = u(x,t)$, $w = u(x, t - \tau)$, τ — время запаздывания. Метод основан на поиске решений в виде суммы $u = \sum_{n=1}^{N} \xi_n(x)\eta_n(t)$, где функции $\xi_n(x)$ и $\eta_n(t)$ определяются, исходя из дополнительных функциональных связей (которые представляют собой разностные или функциональные уравнения) и исходного уравнения с запаздыванием. Все рассмотренные уравнения содержат одну или две произвольные функции одного аргумента. Описан ряд новых точных решений с обобщенным разделением переменных и получены некоторые более сложные решения, представляющие собой линейную комбинацию решений с обобщенным разделением переменных и решений типа бегущей волны. Приведенные решения содержат содержат свободные параметры (в ряде случаев число таких параметров может быть любым) и могут быть использованы для решения некоторых задач и тестирования приближенных аналитических и численных методов решения аналогичных и более сложных нелинейных дифференциально-разностных уравнений.

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения в частных производных с запаздывающим аргументом возникают в различных приложениях, таких как биология, биофизика, биохимия, химия, медицина, теория управления, теория климатических моделей и многих других (см., например, работы [1, 2, 3, 4, 5, 6]

[1–6] и ссылки в них). Отметим также, что подобные уравнения встречаются в математической теории искусственных нейронных сетей, результаты которой используются для обработки сигналов и изображений и проблем распознавания образов [7, 8].

В данной статье рассматривается нелинейное реакционно-диффузионное уравнение с запаздыванием следующего вида [1, 2, 6]:

$$u_t = k u_{xx} + F(u, w), \qquad w = u(x, t - \tau). \tag{1}$$

Точные решения уравнения теплопроводности с нелинейным источником, которое является частным случаем уравнения (1) без запаздывания при $F(u, w) = f(u)$, приведены, например, в [9–13] (наиболее полный обзор точных решений этого нелинейного уравнения дан в [14]).

Список известных точных решений нелинейного уравнения с запаздыванием (1) весьма невелик. В общем случае уравнение (1) допускает очевидные точные решения типа бегущей волны $u = u(\alpha x + \beta t)$. Анализу подобных решений посвящены, например, работы [2–5]. Полный групповой анализ нелинейного дифференциально-разностного уравнения (1) выполнен в [6]. В результате были найдены всего четыре уравнения вида (1), допускающих инвариантные решения; два из этих уравнений имеют вырожденные решения (линейные по x).

Далее термин точные решения нелинейных дифференциально-разностных уравнений с частными производными (в том числе и уравнений вида (1)) применяется в следующих случаях:

(i) когда решение может быть выражено через элементарные функции или быть представлено в замкнутой форме (выражается через неопределенные или определенные интегралы),

(ii) может выражаться через решения обыкновенных дифференциальных или обыкновенных дифференциально-разностных уравнений (или систем таких уравнений),

(iii) может выражаться через решения линейных уравнений в частных производных.

Допустимы также комбинации решений из пп. (i)–(iii).

Данное определение обобщает определение точных решений, которое использовалось в [12, 14] для нелинейных уравнений в частных производных.

Замечание 1. Методы решения и различные приложения линейных и нелинейных обыкновенных дифференциально-разностных уравнений, которые существенно проще нелинейных дифференциально-разностных уравнений с частными производными, описаны, например, в [15–17].

ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ МЕТОДА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ

Рассмотрим класс нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием следующего вида:

$$\begin{gathered} u_t = ku_{xx} + uf(z) + wg(z) + h(z), \\ w = u(x, t-\tau), \qquad z = z(u, w), \end{gathered} \tag{2}$$

где $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ — произвольные функции, а $z = z(u, w)$ — некоторая заданная функция. Кроме того, по ходу дела иногда будем рассматривать также более общие уравнения, когда функции f, g, h дополнительно явно зависят также от независимых переменных x или t.

Будем искать решения с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \sum_{n=1}^{N} \Phi_n(x)\Psi_n(t), \tag{3}$$

где функции $\Phi_n(x)$ и $\Psi_n(t)$ подлежат определению в ходе дальнейшего анализа.

Замечание 2. Для нелинейных уравнений в частных производных различные модификации метода обобщенного разделения переменных, основанные на поиске решений вида (3), подробно описаны, например, в [12–14]. Там же рассмотрено очень много уравнений, допускающих решения с обобщенным разделением переменных.

Для нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием типа (2), которые содержат произвольные функции, прямое применение метода обобщенного разделения переменных не проходит.

Используемый в данной статье новый метод основан на поиске решений с обобщенным разделением переменных вида (3) с привлечением одной из двух дополнительных *функциональных связей* следующих видов:

$$z(u,w) = p(x), \qquad w = u(x, t-\tau); \tag{4}$$

$$z(u,w) = q(t), \qquad w = u(x, t-\tau), \tag{5}$$

которые представляют собой разностные уравнения по переменной t, где переменная x играет роль свободного параметра. Функция $z = z(u,w)$ является аргументом произвольных функций, входящих в уравнение (2). Функции $p(x)$ и $q(t)$ зависят от x и t неявно (выражаются соответственно через функции $\Phi_n(x)$ и $\Psi_n(t)$) и определяются в результате исследования уравнений (4) или (5) с учетом (3). Важно отметить, что нет необходимости получать общие решения уравнений (4) и (5), достаточно иметь частные решения.

Решение разностного уравнения (4) (или (5)) с учетом (3) определяет допустимый вид точного решения, окончательный вид которого определяется далее подстановкой полученного решения в рассматриваемое уравнение (2).

Связи (4) и (5) далее будем называть соответственно *функциональными связями первого и второго рода.*

Замечание 3. Термин "функциональная связь"здесь введен по аналогии с термином *дифференциальная связь*, который используется в методе дифференциальных связей (предложен Н. Н. Яненко, 1964), применяемым для поиска точных решений нелинейных уравнений с частными производными (изложение этого метода и примеры его применения можно найти, например, в [12, 14]).

Далее приведены примеры использования описанного метода для построения точных решений с обобщенным разделением переменных некоторых уравнений вида (2).

УРАВНЕНИЕ СОДЕРЖИТ ОДНУ ПРОИЗВОЛЬНУЮ ФУНКЦИЮ, ЗАВИСЯЩУЮ ОТ ОТНОШЕНИЯ W/U

Уравнение 1. Рассмотрим уравнение

$$u_t = ku_{xx} + uf(w/u), \tag{6}$$

которое является частным случаем уравнения (2) при $g = h = 0$ и $z = w/u$.

1.1. Функциональная связь второго рода (5) в данном случае имеет вид

$$w/u = q(t), \qquad w = u(x, t-\tau). \tag{7}$$

Очевидно, что разностному уравнению (7) можно удовлетворить, если взять решение с простым разделением переменных

$$u = \varphi(x)\psi(t), \tag{8}$$

которое дает $q(t) = \psi(t-\tau)/\psi(t)$. Подставив (8) в (6) и разделяя переменные, получим уравнения для определения функций $\varphi(x)$ и $\psi(t)$:

$$\varphi'' = a\varphi, \tag{9}$$

$$\psi'(t) = ak\psi(t) + \psi(t)f(\psi(t-\tau)/\psi(t)), \tag{10}$$

где a — произвольная постоянная.

Общее решение уравнения (9) имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} C_1\cos\bigl(\sqrt{|a|}\,x\bigr) + C_2\sin\bigl(\sqrt{|a|}\,x\bigr) & \text{при } \ a < 0; \\ C_1\exp\bigl(-\sqrt{a}\,x\bigr) + C_2\exp\bigl(\sqrt{a}\,x\bigr) & \text{при } \ a > 0; \\ C_1x + C_2 & \text{при } \ a = 0, \end{cases} \tag{11}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

1.2. Функциональная связь первого рода (4) для уравнения (6) в простейшем случае $p(x) = p_0 = \text{const}$ записывается так:

$$w/u = p_0, \qquad w = u(x, t-\tau). \tag{12}$$

Решение разностного уравнения (12) при $p_0 > 0$ ищем в виде

$$u = e^{ct} v(x,t), \qquad v(x,t) = v(x,t-\tau), \tag{13}$$

где c — произвольная постоянная, а $v(x,t)$ — τ-периодическая функция. В данном случае $w/u = p_0 = e^{-c\tau}$.

Подставив (13) в уравнение (6), получим линейную задачу для определения функции v:

$$v_t = kv_{xx} + bv, \qquad v(x,t) = v(x,t-\tau), \tag{14}$$

где $b = f(e^{-c\tau}) - c$.

Общее решение задачи (14), которое для удобства обозначим $v = V_1(x,t;b)$, имеет вид

$$V_1(x,t;b) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\lambda_n x)\bigl[A_n \cos(\beta_n t - \gamma_n x) + B_n \sin(\beta_n t - \gamma_n x)\bigr] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \exp(\lambda_n x)\bigl[C_n \cos(\beta_n t + \gamma_n x) + D_n \sin(\beta_n t + \gamma_n x)\bigr], \tag{15}$$

$$\beta_n = \frac{2\pi n}{\tau}, \quad \lambda_n = \left(\frac{\sqrt{b^2+\beta_n^2} - b}{2k}\right)^{1/2}, \quad \gamma_n = \left(\frac{\sqrt{b^2+\beta_n^2} + b}{2k}\right)^{1/2}, \tag{16}$$

где A_n, B_n, C_n, D_n — произвольные постоянные, для которых ряды (15)–(16) и производные $(V_1)_t$ и $(V_1)_{xx}$ сходятся (сходимость, например, заведомо можно обеспечить, если положить $A_n = B_n = C_n = D_n = 0$ при $n > N$, где N — произвольное натуральное число).

Выделим следующие частные случаи:

(i) τ-периодические по времени t решения задачи (14), затухающие при $x \to \infty$, даются формулами (15)–(16) при $A_0 = B_0 = 0$, $C_n = D_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$;

(ii) τ-периодические по времени t решения задачи (14), ограниченные при $x \to \infty$, даются формулами (15)–(16) при $C_n = D_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$;

(iii) стационарное решение дается формулами (15)–(16) при $A_n = B_n = C_n = D_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$

Подводя итоги, имеем точное решение уравнения (6):

$$u = e^{ct} V_1(x,t;b), \qquad b = f(e^{-c\tau}) - c, \tag{17}$$

где c — произвольная постоянная, а τ-периодическая функция $V_1(x,t;b)$ определяется формулами (15)–(16).

1.3. Решение разностного уравнения (12) при $p_0 < 0$ ищем в виде

$$u = e^{ct} v(x,t), \qquad v(x,t) = -v(x,t-\tau), \tag{18}$$

где c — произвольная постоянная, а $v(x,t)$ — τ-апериодическая функция. В данном случае $w/u = p_0 = -e^{-c\tau}$.

Подставив (18) в уравнение (6), получим линейную задачу для определения функции v:

$$v_t = k v_{xx} + bv, \qquad v(x,t) = -v(x,t-\tau), \tag{19}$$

где $b = f(-e^{-c\tau}) - c$.

Общее решение задачи (19), которое для удобства обозначим $v = V_2(x,t;b)$, имеет вид

$$\begin{aligned} V_2(x,t;b) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_n x)\bigl[A_n \cos(\beta_n t - \gamma_n x) + B_n \sin(\beta_n t - \gamma_n x)\bigr] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \exp(\lambda_n x)\bigl[C_n \cos(\beta_n t + \gamma_n x) + D_n \sin(\beta_n t + \gamma_n x)\bigr], \end{aligned} \tag{20}$$

$$\beta_n = \frac{\pi(2n-1)}{\tau}, \quad \lambda_n = \left(\frac{\sqrt{b^2+\beta_n^2} - b}{2k}\right)^{1/2}, \quad \gamma_n = \left(\frac{\sqrt{b^2+\beta_n^2} + b}{2k}\right)^{1/2}, \tag{21}$$

где A_n, B_n, C_n, D_n — произвольные постоянные, для которых ряды (20)–(21) и производные $(V_2)_t$ и $(V_2)_{xx}$ сходятся. Затухающие при $x \to \infty$ решения задачи (19) (τ-апериодические по времени t) даются формулами (20)–(21) при $C_n = D_n = 0$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$

Подводя итоги, имеем точное решение уравнения (6):

$$u = e^{ct} V_2(x,t;b), \qquad b = f(-e^{-c\tau}) - c, \tag{22}$$

где c — произвольная постоянная, а τ-апериодическая функция $V_2(x,t;b)$ определяется формулами (20)–(21).

Замечание 4. Решения (15)–(16) и (20)–(21) очень похожи по внешнему виду. Однако в первом решении первая сумма начинается с $n=0$, а во втором решении — с $n=1$; отличаются также значения β_n.

УРАВНЕНИЯ СОДЕРЖАТ ОДНУ ПРОИЗВОЛЬНУЮ ФУНКЦИЮ, ЗАВИСЯЩУЮ ОТ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ U И W

Уравнение 2. Рассмотрим уравнение

$$u_t = ku_{xx} + bu + f(u-w), \tag{23}$$

которое является частным случаем уравнения (2) при $f(z)=b$, $g=0$, $z=u-w$ (для наглядности функция h переобозначена на f).

2.1. Функциональная связь второго рода (5) в данном случае имеет вид

$$u - w = q(t), \qquad w = u(x, t-\tau). \tag{24}$$

Очевидно, что разностному уравнению (24) можно удовлетворить, если взять решение с аддитивным разделением переменных

$$u = \varphi(x) + \psi(t), \tag{25}$$

которое дает $q(t) = \psi(t) - \psi(t-\tau)$. Подставив (25) в (23) и разделяя переменные, получим уравнения для определения функций $\varphi(x)$ и $\psi(t)$:

$$k\varphi''_{xx} + b\varphi = a, \tag{26}$$

$$\psi'_t(t) = b\psi(t) + a + f(\psi(t) - \psi(t-\tau)), \tag{27}$$

где a — произвольная постоянная.

Общее решение уравнения (26) при $b \neq 0$, $a = 0$ имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} C_1\cos(\alpha x) + C_2\sin(\alpha x), & \alpha = \sqrt{b/k} \quad \text{при} \ \ b > 0; \\ C_1\exp(-\alpha x) + C_2\exp(\alpha x), & \alpha = \sqrt{-b/k} \quad \text{при} \ \ b < 0, \end{cases} \tag{28}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Решение (25) при $b > 0$ является периодическим по пространственной переменной x.

Общее решение уравнения (26) при $b = 0$, $a \neq 0$ имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{a}{2k}\,x^2 + C_1 x + C_2. \tag{29}$$

2.1. Функциональная связь первого рода (4) для уравнения (23) имеет вид

$$u - w = p(x), \qquad\qquad w = u(x, t - \tau). \tag{30}$$

Разностному уравнению (24) можно, например, удовлетворить, если взять решение с обобщенным разделением переменных

$$u = t\varphi(x) + \psi(x), \tag{31}$$

которое дает $p(x) = \tau\varphi(x)$.

Подставив (31) в (23), получим обыкновенные дифференциальные уравнения для функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

$$k\varphi''_{xx} + b\varphi = 0, \tag{32}$$

$$k\psi''_{xx} + b\psi + f(\tau\varphi) - \varphi = 0. \tag{33}$$

Уравнение (32) совпадает с уравнением (26) при $a = 0$, его решение дается формулами (28). Линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (33) легко интегрируется.

Более сложные точные решения уравнения (23) (содержащие любое число произвольных параметров) можно получить, используя приведенные выше решения (25) и (31) и следующую теорему.

Теорема 1 (о нелинейной суперпозиции решений). Пусть $u_0(x,t)$ — некоторое решение нелинейного уравнения (23), а функция $v = V_1(x,t;b)$ является любым τ-периодическим решением линейного уравнения теплопроводности с источником (14). Тогда сумма

$$u = u_0(x,t) + V_1(x,t;b), \tag{34}$$

также является решением уравнения (23). Общий вид функции $V_1(x,t;b)$ определяется формулами (15)–(16).

Замечание 5. В формуле (34) в качестве частного решения $u_0(x,t)$ нелинейного уравнения (23) можно использовать, например, решение типа бегущей волны $u_0 = u_0(\alpha x + \beta t)$.

Уравнение 3. Рассмотрим уравнение

$$u_t = ku_{xx} + bu + f(u - aw), \qquad a > 0, \tag{35}$$

которое является частным случаем уравнения (2) при $f(z) = b$, $g = 0$, $z = u - aw$ (для наглядности функция h переобозначена на f).

3.1. Функциональная связь первого рода (4) для уравнения (23) имеет вид

$$u - aw = p(x), \qquad w = u(x, t - \tau). \tag{36}$$

Разностному уравнению (36) можно, например, удовлетворить, если взять решение с обобщенным разделением переменных

$$u = e^{ct}\varphi(x) + \psi(x), \qquad c = \frac{1}{\tau}\ln a, \tag{37}$$

которое дает $p(x) = (1 - a)\psi(x)$.

Подставив (37) в (35), получим обыкновенные дифференциальные уравнения для функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

$$k\varphi'' + (b - c)\varphi = 0, \tag{38}$$

$$k\psi'' + b\psi + f(\eta) = 0, \qquad \eta = (1 - a)\psi. \tag{39}$$

Уравнение (38) с точностью до элементарных переобозначений совпадает с уравнением (26) при $a = 0$; его решение дается формулами (28), в которых b надо заменить на $b - c$. Линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (39) легко интегрируется.

3.2. Более сложные точные решения уравнения (23) (содержащие любое число произвольных параметров) можно получить, используя приведенное выше решение (37)–(39) и следующую теорему.

Теорема 2 (обобщает теорему 1). Пусть $u_0(x,t)$ — некоторое решение нелинейного уравнения (35), а функция $v = V_1(x,t;b)$ является любым τ-периодическим решением линейного уравнения теплопроводности с источником (14). Тогда сумма

$$u = u_0(x,t) + e^{ct} V_1(x,t;b-c), \qquad c = \frac{1}{\tau}\ln a. \tag{40}$$

также является решением уравнения (35). Общий вид функции $V_1(x,t;b)$ определяется формулами (15)–(16).

Формула (40) позволяет получить широкий класс точных решений нелинейного уравнения (35). В качестве частных решений $u_0(x,t)$ помимо (37) можно взять решения вида $u_0 = u_0(x)$ и $u_0 = u_0(t)$, а также более общее решение типа бегущей волны $u_0 = \theta(\alpha x + \beta t)$, где α, β — произвольные постоянные, а функция $\theta(y)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциально-разностному уравнению

$$k\alpha^2\theta''(y) - \beta\theta'(y) + b\theta(y) + f\bigl(\theta(y) - a\theta(y-\sigma)\bigr) = 0, \qquad y = \alpha x + \beta t, \ \ \sigma = \beta\tau.$$

Уравнение 4. Рассмотрим уравнение

$$u_t = k u_{xx} + bu + f(u + aw), \qquad a > 0, \tag{41}$$

которое является частным случаем уравнения (2) при $f(z) = b$, $g = 0$, $z = u + aw$ (для наглядности функция h переобозначена на f).

Теорема 3. Пусть $u_0(x,t)$ — некоторое решение нелинейного уравнения (41), а функция $v = V_2(x,t;b)$ является любым τ-апериодическим решением линейного уравнения теплопроводности с источником (19). Тогда сумма

$$u = u_0(x,t) + e^{ct} V_2(x,t;b-c), \qquad c = \frac{1}{\tau}\ln a \tag{42}$$

также является решением уравнения (41). Общий вид функции $V_2(x,t;b)$ определяется формулами (20)–(21).

Формула (42) позволяет получить широкий класс точных решений нелинейного уравнения (41). В качестве частных решений $u_0(x,t)$ можно взять решения вида $u_0 = u_0(x)$ и $u_0 = u_0(t)$, а также более общее решение типа бегущей волны $u_0 = \theta(\alpha x + \beta t)$, где α, β — произвольные постоянные, а функция $\theta(y)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциально-разностному уравнению

$$k\alpha^2\theta''(y) - \beta\theta'(y) + b\theta(y) + f\bigl(\theta(y) + a\theta(y-\sigma)\bigr) = 0, \qquad y = \alpha x + \beta t, \;\; \sigma = \beta\tau.$$

УРАВНЕНИЯ СОДЕРЖАТ ДВЕ ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ U И W

Уравнение 5. Рассмотрим теперь более сложное уравнение

$$u_t = ku_{xx} + uf(u-w) + wg(u-w) + h(u-w), \tag{43}$$

где $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ — произвольные функции (в данном случае одну из двух функций f или g можно без ограничения общности положить равной нулю).

5.1. Дифференциальная связь первого рода (4) для уравнения (43) имеет вид (30). Линейному разностному уравнению (30) можно удовлетворить, если как и ранее, взять решение с обобщенным разделением переменных вида (31). В результате можно получить уравнения для функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ (они не выписываются поскольку ниже излагается существенно более общий результат).

5.2. Линейному разностному уравнению (30) можно удовлетворить, если положить

$$u = \sum_{n=1}^{N}[\varphi_n(x)\cos(\beta_n t) + \psi_n(x)\sin(\beta_n t)] + t\theta(x) + \xi(x), \quad \beta_n = \frac{2\pi n}{\tau}, \tag{44}$$

где N — любое натуральное число. В правой части уравнения (30) в этом случае имеем $p(x) = \tau\varphi(x)$.

Подставим (44) в уравнение (43) и после элементарных преобразований приходим к равенству

$$\sum_{n=1}^{N}[A_n\cos(\beta_n t)+B_n\sin(\beta_n t)]+Ct+D=0, \qquad (45)$$

в котором функциональные коэффициенты A_n, B_n, C, D зависят от $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$, $\theta(x)$, $\xi(x)$ и их производных и не зависят от времени t. Приравнивая в (45) к нулю все функциональные коэффициенты $A_n=B_n=C=D=0$, получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения для определения искомых функций:

$$\begin{aligned}
k\varphi_n''+\varphi_n[f(\tau\theta)+g(\tau\theta)]-\beta_n\psi_n&=0,\\
k\psi_n''+\psi_n[f(\tau\theta)+g(\tau\theta)]+\beta_n\varphi_n&=0,\\
k\theta''+\theta[f(\tau\theta)+g(\tau\theta)]&=0,\\
k\xi''+\xi f(\tau\theta)+(\xi-\tau\theta)g(\tau\theta)+h(\tau\theta)-\theta&=0.
\end{aligned}$$

Отметим, что третье нелинейное уравнение допускает тривиальное решение $\theta=0$; в этом случае остальные уравнения становятся линейными уравнениями с постоянными коэффициентами.

Уравнение 6. Рассмотрим уравнение

$$u_t=ku_{xx}+uf(u-aw)+wg(u-aw)+h(u-aw), \qquad (46)$$

где $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ — произвольные функции, которое является обобщением уравнения (35).

6.1. Дифференциальная связь первого рода (4) для уравнения (46) имеет вид (36). Линейному разностному уравнению (36) можно удовлетворить, если как и ранее, взять решение с обобщенным разделением переменных вида (37). В результате можно получить уравнения для функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ (они не выписываются поскольку ниже излагается существенно более общий результат).

6.2. Линейному разностному уравнению (30) можно удовлетворить, если положить

$$u = e^{ct}\Big\{\theta(x) + \sum_{n=1}^{N}[\varphi_n(x)\cos(\beta_n t) + \psi_n(x)\sin(\beta_n t)]\Big\} + \xi(x), \quad c = \frac{1}{\tau}\ln a, \quad \beta_n = \frac{2\pi n}{\tau} \tag{47}$$

где N — любое натуральное число. В правой части уравнения (36) в этом случае имеем $p(x) = (1-a)\xi(x)$.

Подставим (47) в уравнение (46). Рассуждая аналогично тому как это делалось для уравнения (43), получим следующие уравнения для определения функций $\theta(x)$, $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$, $\xi(x)$:

$$\begin{aligned}
&k\theta'' + \theta\Big[f(\eta) + \frac{1}{a}g(\eta) - c\Big] = 0, \quad \eta = (1-a)\xi,\\
&k\varphi_n'' + \varphi_n\Big[f(\eta) + \frac{1}{a}g(\eta) - c\Big] - \beta_n\psi_n = 0,\\
&k\psi_n'' + \psi_n\Big[f(\eta) + \frac{1}{a}g(\eta) - c\Big] + \beta_n\varphi_n = 0,\\
&k\xi'' + \xi[f(\eta) + g(\eta)] + h(\eta) = 0.
\end{aligned}$$

Уравнение 7. Рассмотрим теперь уравнение

$$u_t = ku_{xx} + uf(u + aw) + wg(u + aw) + h(u + aw), \qquad a > 0, \tag{48}$$

где $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ — произвольные функции, которое является обобщением уравнения (41).

Дифференциальная связь первого рода (4) для уравнения (48) имеет вид

$$u + aw = p(x), \qquad w = u(x, t-\tau). \tag{49}$$

Линейному разностному уравнению (49) можно удовлетворить, если положить

$$u = e^{ct}\sum_{n=1}^{N}[\varphi_n(x)\cos(\beta_n t) + \psi_n(x)\sin(\beta_n t)] + \xi(x), \quad c = \frac{1}{\tau}\ln a, \quad \beta_n = \frac{\pi(2n+1)}{\tau}, \tag{50}$$

где N — любое натуральное число. В правой части уравнения (49) в этом случае имеем $p(x) = (1 + a)\xi(x)$.

Подставим (50) в уравнение (48). Рассуждая аналогично тому как это делалось для уравнения (43), получим следующие уравнения для определения функций $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$, $\xi(x)$:

$$k\varphi_n'' + \varphi_n\Big[f(\eta) - \frac{1}{a}g(\eta) - c\Big] - \beta_n\psi_n = 0,$$
$$k\psi_n'' + \psi_n\Big[f(\eta) - \frac{1}{a}g(\eta) - c\Big] + \beta_n\varphi_n = 0,$$
$$k\xi'' + \xi[f(\eta) + g(\eta)] + h(\eta) = 0, \qquad \eta = (1 + a)\xi,$$

последнее из которых является независимым.

УРАВНЕНИЕ СОДЕРЖИТ ДВЕ ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ СУММЫ КВАДРАТОВ U И W

Уравнение 8. Рассмотрим теперь уравнение

$$u_t = ku_{xx} + uf(u^2 + w^2) + wg(u^2 + w^2) \tag{51}$$

с нелинейным (квадратичным) аргументом $z = u^2 + w^2$.

Difference constraint (4) для уравнения (51) имеет вид

$$u^2 + w^2 = p(x), \qquad w = u(x, t - \tau). \tag{52}$$

Нелинейному разностному уравнению (49) можно удовлетворить, если положить

$$u = \varphi_n(x)\cos(\lambda_n t) + \psi_n(x)\sin(\lambda_n t), \quad \lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2\tau}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{53}$$

Нетрудно проверить, что

$$w = (-1)^n\varphi_n(x)\sin(\lambda_n t) + (-1)^{n+1}\psi_n(x)\cos(\lambda_n t)$$

and

$$u^2 + w^2 = \varphi_n^2(x) + \psi_n^2(x) = p(x).$$

Подставим (53) в уравнение (51). Расщепляя далее полученное выражение по $\cos(\lambda_n t)$ и $\sin(\lambda_n t)$, получим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$:

$$k\varphi_n'' + \varphi_n f(\varphi_n^2 + \psi_n^2) + (-1)^{n+1}\psi_n g(\varphi_n^2 + \psi_n^2) - \lambda_n \psi_n = 0,$$
$$k\psi_n'' + \psi_n f(\varphi_n^2 + \psi_n^2) + (-1)^{n}\varphi_n g(\varphi_n^2 + \psi_n^2) + \lambda_n \varphi_n = 0.$$

КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Описан новый метод – метод функциональных связей – для построения точных решений нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием вида

$$u_t = ku_{xx} + F(u, w),$$

где $u = u(x, t)$, $w = u(x, t - \tau)$, τ — время запаздывания. Метод основан на поиске решений с обобщенным разделением переменных в виде

$$u = \sum_{n=1}^{N} \xi_n(x)\eta_n(t),$$

где функции $\xi_n(x)$ и $\eta_n(t)$ определяются, исходя из дополнительных функциональных связей (которые представляют собой разностные уравнения) и рассматриваемого нелинейного уравнения с запаздыванием.

Все рассмотренные уравнения содержат одну или две произвольные функции одного аргумента. Описан ряд новых точных решений с обобщенным разделением переменных и получены некоторые более сложные решения, представляющие собой линейную комбинацию решений с обобщенным разделением переменных и решений типа бегущей волны.

Все решения содержат содержат свободные параметры (в ряде случаев число таких параметров может быть любым) и могут быть использованы для решения некоторых задач и тестирования приближенных аналитических и численных методов решения аналогичных и более сложных нелинейных дифференциально-разностных уравнений (включая уравнения старших порядков и системы уравнений с запаздыванием).

Список литературы

[1] J. Wu, Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1996.

[2] J. Wu, X. Zou. Traveling wave fronts of reaction-diffusion systems with delay. J. Dynamics and Differential Equations, 2001, Vol. 13, No. 3, pp. 651–687.

[3] J. Huang, X. Zou. Traveling wavefronts in diffusive and cooperative Lotka–Volterra system with delays. J. Math. Anal. Appl., 2002, Vol. 271, pp. 455–466.

[4] T. Faria, S. Trofimchuk. Nonmonotone travelling waves in a single species reaction–diffusion equation with delay. J. Differential Equations, 2006, Vol. 228, 357–376.

[5] E. Trofimchuk, V. Tkachenko, S. Trofimchuk. Slowly oscillating wave solutions of a single species reaction–diffusion equation with delay. J. Differential Equations, 2008, Vol. 245, pp. 2307–2332.

[6] S. V. Meleshko, S. Moyo. On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay. J. Math. Anal. Appl., 2008, Vol. 338, pp. 448–466.

[7] L. Wang, Y. Gao. Global exponential robust stability of reaction–diffusion interval neural networks with time-varying delays. Physics Letters A, 2006, Vol. 350, pp. 342–348.

[8] J. G. Lu. Global exponential stability and periodicity of reaction–diffusion delayed recurrent neural networks with Dirichlet boundary conditions. Chaos, Solitons and Fractals, 2008, Vol. 35, pp. 116–125.

[9] В. А. Дородницын. Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. - 1982. - Т. 22, № 6. - С. 1393–1400.

[10] Н. А. Кудряшов. О точных решениях уравнений семейства Фишера. Теор. и мат. физика, 1993, Т. 94, № 2. С. 211–218.

[11] N. H. Ibragimov (Editor). CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 1, Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws. CRC Press, Boca Raton, 1994.

[12] А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. - М.: Физматлит, 2005. - 256 с.

[13] V. A. Galaktionov, S. R. Svirshchevskii. Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2006.

[14] A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, Second Edition. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2012.

[15] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. - М.: Мир, 1967.

[16] V. Kolmanovskii, A. Myshkis. Applied Theory of Functional Differential Equations. Kluwer, Dordrecht, 1992.

[17] H. L. Smith, An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences, Springer, 2010.