ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2007, том 417, № 1, с. 1–7

МЕХАНИКА

УДК 624.07+517.9

ТЕОРИЯ СВОБОДНЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТВЕРДОГО СТЕРЖНЯ, ОСНОВАННАЯ НА МОДЕЛИ РЭЛЕЯ

© 2007 г. И. А. Федотов, А. Д. Полянин, М. Ю. Шаталов

Представлено академиком В.Ф. Журавлевым 27.02.2007 г.

Поступило 27.02.2007 г.

Рассматриваются одномерные продольные колебания твердого стержня с неоднородным поперечным сечением, который закреплен на концах при помощи сосредоточенных масс и пружин. Эффекты инерции поперечного сечения учитываются на основе теории Рэлея. Уравнение движения и граничные условия выводятся из вариационного принципа Гамильтона. Составлено характеристическое уравнение и вычислены собственные значения для гармонических колебаний стержня. Показано, что собственные значения ограничены сверху. Обсуждаются два типа ортогональности собственных функций, соответствующих собственным значениям. Построена функция Грина для задачи о вынужденных колебаниях стержня, которые описываются линейным уравнением с частными производными четвертого порядка, содержащим смешанные производные. Получены точные решения задач о колебаниях стержня с постоянным и коническим сечением.

Твердые изотропные волноводы часто используются для генерации, передачи и усиления механических колебаний, например, в акустических преобразователях. Теоретическое исследование акустических, механических и электромагнитных волноводов обычно базируется на использовании волновых уравнений второго порядка. Этот подход является обоснованным для описания эффектов распространения волн в относительно тонких и длинных твердых стержнях. Как было показано Рэлеем [1], ошибка, обусловленная пренебрежением эффектами поперечного движения стержня, пропорциональна квадрату отношения радиуса характеристического сечения стержня к его длине. Для более точного анализа продольных колебаний относительно толстого и короткого стержня необходимо принять во внимание эффекты деформации стержня в поперечном направлении. Используемый авторами подход к анализу колебаний толстого и короткого стержня основан на теории продольных колебаний стержня, в которая учитываем эффекты поперечного движения стержня (соответствующая математическая модель именуется стержнем Рэлея). Уравнение движения и граничные условия одномерных продольных колебаний стержня Рэлея с переменным сечением, концы которого закреплены при помощи сосредоточенных масс и пружин, выводятся из вариационного принципа Гамильтона. В результате приходим к линейному уравнению с частными производными четвертого порядка с переменными коэффициентами, которое содержит смешанные производные. Ранее для решения данного уравнения использовались приближенные аналитические методы: метод Галеркина [2] и метод, основанный на разложении решения в степенной ряд по коэффициенту Пуассона [3]. Частоты собственных колебаний цилиндрического стержня при жестком защемлении концов определены в [4, с. 159–160]. В данной работе использован метод разделения переменных, основанный на точных решениях уравнений движения стержня Рэлея и позволяющий построить функцию Грина. Аналогичный подход для анализа продольных колебаний ступенчатых твердых волноводов, описываемых волновыми уравнениями второго порядка, применялся в работах [5, 6].

1. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ СТЕРЖНЯ РЭЛЕЯ

Рассмотрим продольные вибрации толстого короткого стержня, представляющего собой тело вращения относительно оси x. Длина этого стержня предполагается сопоставимой с его максимальным радиусом. Предположим, что вибрации возбуждаются распределенной силой (рис. 1). Считаем, что левый и правый концы стержня прикреплены к неподвижному основанию при помощи сосредоточенных масс M_1 и M_2 и пружин, с жесткостями K_1 и K_2. Обозначим продольные смещения стержня $u = u(x, t)$. В работах [1, 2] показано, что в этом случае классическая модель

Технологический университет Цване,
Претория, Южная Африка
Институт проблем механики
Российской Академии наук, Москва

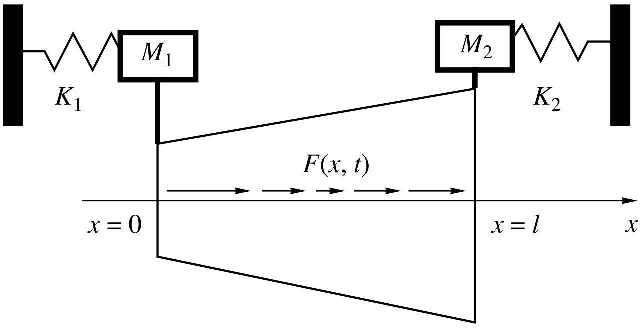

Рис. 1.

стержней, которая основана на волновом уравнении второго порядка, является неполной и необходимо принять во внимание эффекты динамики поперечного движения.

Рэлей [1] показал, что в широком частотном диапазоне эффекты поперечного движения имеют порядок величины $\left(\frac{r}{l}\right)^2$, где r максимальный радиус стержня, l длина стержня, и классическая модель вибрирующих стержней может быть существенно улучшена, если принять во внимание эффекты поперечной инерции.

Лагранжиан модели стержня Рэлея, учитывающий наличие сосредоточенных масс и пружин, имеет вид [2]:

$$L = L(u, \dot{u}, u', \dot{u}', u(0), u(l), \dot{u}(0), \dot{u}(l)) = \\ = \int_0^l \Lambda(u, \dot{u}, u', \dot{u}')dx + \Delta L(u(0), u(l), \dot{u}(0), \dot{u}(l)). \quad (1)$$

Здесь точка соответствует производной по t, штрих производной по x и приняты следующие обозначения:

$$\Lambda = \Lambda(u, \dot{u}, u', \dot{u}') = \frac{1}{2}\{\rho(x)[A(x)\dot{u}^2 + \\ + \nu^2(x)I_p(x)(\dot{u}')^2] - A(x)E(x)(u')^2\} + F(x, t)u, \\ \Delta = \Delta L(u(0), u(l), \dot{u}(0), \dot{u}(l)) = \frac{1}{2}[M_1\dot{u}^2(0) + \\ + M_2\dot{u}^2(l) - K_1u^2(0) - K_2u^2(l)], \quad (2)$$

где $A(x)$ – площадь поперечного сечения стержня, $I_p(x) = \int_A (y^2 + z^2)dA$ – полярный момент инерции стержня, $\rho(x)$ – массовая плотность, $E(x)$ модуль Юнга, $\nu(x)$ – коэффициент Пуассона.

Применяя принцип Гамильтона к лагранжиану (1), получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{u}}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial u'}\right) - \frac{\partial^2}{\partial t\partial x}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{u}'}\right) - \frac{\partial\Lambda}{\partial u} = 0 \quad (3)$$

и граничные условия

$$\left[-\frac{\partial\Lambda}{\partial u'} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{u}'}\right)\right]_{x=0} + \frac{\partial\Delta L}{\partial u(0)} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Delta L}{\partial\dot{u}(0)}\right) = 0 \text{ при } \\ x = 0, \\ \left[-\frac{\partial\Lambda}{\partial u'} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{u}'}\right)\right]_{x=l} - \frac{\partial\Delta L}{\partial u(l)} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Delta L}{\partial\dot{u}(l)}\right) = 0 \text{ при } \\ x = l. \quad (4)$$

Подставляя выражение для Λ (2) в (3), находим явный вид уравнения движения стержня [2]:

$$\rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[A(x)E(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\ \left. + \rho(x)\nu^2(x)I_p(x)\frac{\partial^3 u}{\partial^2 t\partial x}\right] = F(x, t). \quad (5)$$

Уравнение (5) и граничные условия (4) будем рассматривать с начальными условиями общего вида

$$u|_{t=0} = g(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = h(x). \quad (6)$$

З а м е ч а н и е. Принцип Гамильтона приводит к граничным условиям, которые представляют собой равенство нулю произведения двух сомножителей (на каждом из концов). Приравнивая одну пару сомножителей нулю, получим динамические граничные условия (4); приравнивая другую пару сомножителей нулю, получим геометрические условия (защемление концов):

$$u = 0 \text{ при } x = 0, \quad u = 0 \text{ при } x = l. \quad (7)$$

Возможны также комбинации динамических и геометрических условий на разных концах. О решении задачи (5)–(7) см. раздел 5.

2. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ РЭЛЕЯ. ЗАДАЧА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ И ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Для свободных гармонических колебаний стержня, что соответствует

$$F(x, t) = 0, \quad u(x, t) = \varphi(x)e^{i\omega t} \; (i^2 = -1),$$

уравнение (5) и граничные условия (4) принимают вид

$$[p(x,\omega)\varphi'_x]'_x + \omega^2 q(x)\varphi = 0, \quad (8)$$

$$p(0,\omega)\varphi'_x - (K_1 - \omega^2 M_1)\varphi = 0 \text{ при } x = 0, \quad (9)$$

$$p(l,\omega)\varphi'_x + (K_2 - \omega^2 M_2)\varphi = 0 \text{ при } x = l, \quad (10)$$

где

$$\begin{gathered} p(x,\omega) = A(x)E(x) - \omega^2\rho(x)\nu^2(x)I_p(x), \\ q(x) = A(x)\rho(x) \geq q_0 > 0. \end{gathered} \quad (11)$$

Граничные условия (9), (10) представляют собой баланс упругих сил деформации стержня Рэлея (члены, пропорциональные φ'_x), сил упругой деформации пружин (члены, пропорциональные $K_n\varphi$) и инерционных сил, действующих на стержень со стороны движущихся с ускорением сосредоточенных масс (члены, пропорциональные $M_n\varphi$).

Однородное уравнение (8) и граничные условия (9), (10) определяют неклассическую задачу Штурма–Лиувилля на собственные значения (здесь в отличие от классической задачи [4, 7] спектральный параметр ω сложным образом входит не только в уравнение, но и в граничные условия).

Общее решение уравнения (8) можно записать так:

$$\varphi(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x), \quad (12)$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ линейно-независимые решения уравнения (8), C_1, C_2. Подставляя (12) в граничные условия (9), (10), имеем

$$\begin{gathered} a_{11}C_1 + a_{12}C_2 = 0, \\ a_{21}C_1 + a_{22}C_2 = 0, \end{gathered} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= p(0,\omega)\varphi'_1(0) - (K_1 - \omega^2 M_1)\varphi_1(0), \\ a_{12} &= p(0,\omega)\varphi'_2(0) - (K_1 - \omega^2 M_1)\varphi_2(0), \\ a_{21} &= p(l,\omega)\varphi'_1(l) + (K_2 - \omega^2 M_2)\varphi_1(l), \\ a_{22} &= p(l,\omega)\varphi'_2(l) + (K_2 - \omega^2 M_2)\varphi_2(l). \end{aligned} \quad (14)$$

Условием существования нетривиального решения линейной алгебраической системы (13) для коэффициентов C_1 и C_2 является равенство нулю определителя этой системы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (15)$$

Подставив коэффициенты (14) в (15), получим характеристическое (дисперсионное) уравнение для определения частотного параметра $\omega = \omega_n$.

Собственные функции $\varphi_n(x)$, соответствующие собственным значениям ω_n, определяются выражением (12), где постоянные C_1 и C_2 удовлетворяют линейной системе (13) при условии (15).

В общем случае собственные значения ω_n задачи Штурма–Лиувилля (8)–(11) расположены на интервале

$$0 \leq |\omega_n| < \omega_\infty = \inf_{0 \leq x \leq l} \sqrt{\frac{A(x)E(x)}{\rho(x)\nu^2(x)I_p(x)}}, \quad (16)$$

что обеспечивает положительность коэффициента $p(x, \omega_n) > 0$ уравнения (8).

Пример 1 (стержень с постоянным сечением). Рассмотрим свободные колебания стержня постоянного сечения. Материальные характеристики стержня ρ, E, ν, а также площадь поперечного сечения A и момент инерции I_p считаются постоянными. Общее решение уравнения (8) в этом случае определяется формулой (12), где

$$\begin{gathered} \varphi_1(x) = \cos(\lambda x), \quad \varphi_2(x) = \sin(\lambda x), \\ \lambda = \omega\sqrt{\frac{A\rho}{AE - \omega^2\rho\nu^2 I_p}}. \end{gathered} \quad (17)$$

Частоты колебаний ограничены: $|\omega| < \bar{\omega} = \sqrt{\dfrac{AE}{\rho\nu^2 I_p}}$. Если $\nu = 0$ или $\dfrac{I_p}{A} \ll 1$, то рэлеевская модель эквивалентна обычной модели колебаний стержня, описываемой волновым уравнением второго порядка с $\lambda = \dfrac{\omega}{c}$, где $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ фазовая скорость распространения возмущений в стержне.

Для простоты далее ограничимся анализом частного случая $M_1 = M_2 = 0$. Соответствующее дисперсионное уравнение (15) принимает вид

$$\begin{gathered} (p^2\lambda^2 - K_1K_2)\sin(\lambda l) - (K_1 + K_2)p\lambda\cos(\lambda l) = 0, \\ p = AE - \omega^2\rho\nu^2 I_p, \end{gathered} \quad (18)$$

где λ определено в (17).

Рассмотрим медный стержень (состав 80% Cu, 20% Zn) кругового сечения радиуса $r = 75$ мм длиной $l = 250$ мм, имеющий физические параметры

$$\begin{gathered} \rho = 8.5 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4, \quad E = 10^{11} \text{ Н/м}^2, \\ \nu = 0.34, \quad K_1 = 10^7 \text{ Н/м}, \quad K_2 = 10^{10} \text{ Н/м}. \end{gathered} \quad (19)$$

Для этого стержня первые пять нормированных собственных значений $\Omega_n = \dfrac{\omega_n}{2\pi \cdot 10^3}$, полученные путем численного решения трансцендентного уравнения (18), равны (размерность Гц, указаны первые четыре знака):

$$\Omega_1 = 2.118, \quad \Omega_2 = 7.498, \quad \Omega_3 = 12.92,$$
$$\Omega_4 = 17.28, \quad \Omega_5 = 20.51 \ (\nu = 0.34);$$
$$\Omega_1 = 2.120, \quad \Omega_2 = 7.694, \quad \Omega_3 = 14.19,$$
$$\Omega_4 = 20.90, \quad \Omega_5 = 27.68 \ (\nu = 0).$$

Для сопоставления во второй строке приведены первые пять собственных значений соответствующей задачи о продольных колебаниях, основанной на волновом уравнении второго порядка. Видно, что учет эффекта поперечной инерции стержня приводит к уменьшению собственных значений модели Рэлея по сравнению с соответствующими собственными значениями классической модели. Важной отличительной чертой модели Рэлея является ограниченность спектра собственных значений (для рассматриваемого стержня предельная точка сгущения частот Ω_∞ = 30.275 Гц).

Пример 2 (конический стержень). Рассмотрим конический стержень с круглым сечением. Считаем, что его физические параметры ρ, E, ν постоянны. Площадь поперечного сечения конуса и момент инерции относительно оси определяются по формулам

$$A(x) = \pi(x - x_p)^2, \quad I_p(x) = \frac{1}{2}\pi(x - x_p)^4,$$

где x_p координата вершины конуса ($x_p < 0$). Для решения уравнения (8) введем новые переменные

$$z = \mu(x - x_p), \quad Y = z\varphi, \quad \mu = \omega\nu\sqrt{\frac{\rho}{2E}}.$$

В результате получим уравнение Лежандра [7]:

$$(z^2 - 1)Y''_{zz} + 2zY'_z - \sigma(\sigma + 1)Y = 0,$$
$$\sigma = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{2}{\nu^2}}.$$

Поэтому общее решение уравнения (8) определяется по формуле (12), где

$$\varphi_1(x) = \frac{P_\sigma(\mu(x - x_p))}{x - x_p}, \quad \varphi_2(x) = \frac{Q_\sigma(\mu(x - x_p))}{x - x_p}.$$

Здесь $P_\sigma(z)$ и $Q_\sigma(z)$ соответственно функции Лежандра первого и второго рода. Используя формулы для площади поперечного сечения конуса и момента инерции, а также учитывая ограниченность спектра в модели стержня Рэлея (16), имеем

$$\mu^2(l - x_p)^2 = \frac{\rho\nu^2\omega^2\frac{1}{2}\pi(l - x_p)^4}{E\pi(l - x_p)^2} = \frac{\rho\nu^2\omega^2 I_p(l)}{EA(l)} < 1.$$

Поэтому выполняются неравенства $0 < \mu(x - x_p) \le \le \mu(l - x_p) < 1$.

3. ДВА ТИПА ОРТОГОНАЛЬНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть ω_m и ω_n два различных собственных значения задачи Штурма–Лиувилля (8)–(11), а $\varphi_m(x)$ и $\varphi_n(x)$ соответствующие им собственные функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{gathered}[p(x, \omega_m)\varphi'_m]' + \omega_m^2 q(x)\varphi_m = 0, \\ [p(x, \omega_m)\varphi'_n]' + \omega_n^2 q(x)\varphi_n = 0,\end{gathered} \tag{20}$$

где штрихами обозначены производные по x. Обе собственные функции удовлетворяют также граничным условиям третьего рода (9), (10).

Умножим первое уравнение (20) на $-\varphi_n(x)$, второе на $\varphi_m(x)$ и сложим. Интегрируя полученное выражение в пределах от 0 до l (отдельные члены интегрируются по частям), а также используя граничные условия (9), (10), после сокращения на $(\omega_n^2 - \omega_m^2)$ имеем массовую ортогональность собственных функций:

$$\begin{gathered}\int_0^l \rho(x)[A(x)\varphi_m(x)\varphi_n(x) + \nu^2(x)I_p(x)\varphi'_m(x)\varphi'_n(x)]dx + \\ + M_1\varphi_m(0)\varphi_n(0) + M_2\varphi_m(l)\varphi_n(l) = 0, \quad m \ne n.\end{gathered} \tag{21}$$

Соответствующим образом введем квадрат массовой нормы собственной функции по формуле (по определению)

$$\begin{gathered}\|\varphi_n\|_\rho^2 = \int_0^l \rho(x)[A(x)\varphi_n^2(x) + \nu^2(x)I_p(x)\varphi_n'^2(x)]dx + \\ + M_1\varphi_n^2(0) + M_2\varphi_n^2(l) > 0.\end{gathered} \tag{22}$$

Умножим теперь первое уравнение (2) на $-\omega_n^2\varphi_n(x)$, второе уравнение на $\omega_m^2\varphi_m(x)$ и сложим. Интегрируя полученное выражение в пределах от 0 до l (отдельные члены интегрируются по частям), а также используя граничные условия (9), (10), после сокращения на $(\omega_n^2 - \omega_m^2)$ имеем жесткостную ортогональность собственных функций:

$$\begin{gathered}\int_0^l A(x)E(x)\varphi'_m(x)\varphi'_n(x)dx + K_1\varphi_m(0)\varphi_n(0) + \\ + K_2\varphi_m(l)\varphi_n(l) = 0, \quad m \ne n.\end{gathered} \tag{23}$$

Введем квадрат жесткостной нормы собственной функции по формуле (по определению)

$$\|\varphi_n\|_E^2 = \int_0^l A(x)E(x)[\varphi_n'(x)]^2 dx + K_1\varphi_n^2(0) + K_2\varphi_n^2(l) > 0. \quad (24)$$

4. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ СТЕРЖНЯ РЭЛЕЯ

Рассмотрим неоднородное уравнение (5) с начальными и граничными условиями (6) и (4). Решение этой задачи ищем в виде ряда

$$u = u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\varphi_n(x), \quad (25)$$

где $u_n(t)$ неизвестные функции времени, а $\varphi_n(x)$ собственные функции задачи Штурма–Лиувилля (8)–(11).

Подставив (25) в (1) и используя условия ортогональности (21), (23), приходим к следующему выражению для лагранжиана:

$$\begin{aligned} L = L(u_n, \dot{u}_n) = \frac{1}{2}\int_0^l \Bigg[& A\rho\sum_{n=1}^{\infty}\dot{u}_n^2\varphi_n^2 + \rho\nu^2 I_p\sum_{n=1}^{\infty}\dot{u}_n^2\varphi_n'^2 - \\ & - AE\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2\varphi_n'^2 + F\sum_{n=1}^{\infty}u_n\varphi_n\Bigg]dx + \\ & + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\dot{u}_n^2[M_1\varphi_n^2(0) + M_2\varphi_n^2(l)] - \\ & - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2[K_1\varphi_n^2(0) + K_2\varphi_n^2(l)], \end{aligned} \quad (26)$$

где для краткости опущены аргументы всех функций. Из уравнений Эйлера–Лагранжа [8]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_n}\right) - \frac{\partial L}{\partial u_n} = 0 \quad (27)$$

с учетом представления (26) и условий ортогональности (21)–(24) получим уравнение для n-й моды:

$$\ddot{u}_n + \omega_n^2 u_n = f_n(t). \quad (28)$$

Здесь две точки означают двойное дифференцирование по времени t и использованы обозначения

$$f_n(t) = \frac{1}{\|\varphi_n\|_\rho^2}\int_0^l F(x, t)\varphi_n(x)dx, \quad \omega_n^2 = \frac{\|\varphi_n\|_E^2}{\|\varphi_n\|_\rho^2}. \quad (29)$$

Общее решение уравнения (28) и его первая производная имеют вид

$$\begin{aligned} u_n &= a_n\cos(\omega_n t) + b_n\sin(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n}\int_0^t f_n(\tau)\sin[\omega_n(t-\tau)]d\tau, \\ \dot{u}_n &= \omega_n[-a_n\sin(\omega_n t) + b_n\cos(\omega_n t)] + \int_0^t f_n(\tau)\cos[\omega_n(t-\tau)]d\tau. \end{aligned} \quad (30)$$

Для определения постоянных a_n, b_n надо разложить функции, задающие начальные условия (6), в ряды по собственным функциям:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0)\varphi_n(x), \\ \dot{u}(x, 0) &= h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{u}_n(0)\varphi_n(x). \end{aligned} \quad (31)$$

Используя эти разложения и условия ортогональности (21), (22), представим $u_n(0)$ и $\dot{u}_n(0)$ в виде

$$\begin{aligned} u_n(0) = \frac{1}{\|\varphi_n\|_\rho^2}\Bigg\{ & \int_0^l \rho(x)[A(x)g(x)\varphi_n(x) + \nu^2(x)I_p(x)g'(x)\varphi_n'(x)]dx + \\ & + M_1 g(0)\varphi_n(0) + M_2 g(l)\varphi_n(l)\Bigg\}, \\ \dot{u}_n(0) = \frac{1}{\|\varphi_n\|_\rho^2}\Bigg\{ & \int_0^l \rho(x)[A(x)g(x)\varphi_n(x) + \nu^2(x)I_p(x)h'(x)\varphi_n'(x)]dx + \\ & + M_1 h(0)\varphi_n(0) + M_2 h(l)\varphi_n(l)\Bigg\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Используя (31) и условия ортогональности (23), (24), можно получить альтернативное представление для этих величин:

$$u_n(0) = \frac{1}{\|\varphi_n\|_E^2}\left\{\int_0^l A(x)E(x)g'(x)\varphi_n'(x)dx + \right.$$

$$\left. + K_1 g(0)\varphi_n(0) + K_2 g(l)\varphi_n(l)\right\},$$

$$\dot{u}_n(0) = \frac{1}{\|\varphi_n\|_E^2}\left\{\int_0^l A(x)E(x)h'(x)\varphi_n'(x)dx + \right. \tag{33}$$

$$\left. + K_1 h(0)\varphi_n(0) + K_2 h(l)\varphi_n(l)\right\}.$$

Таким образом, решение уравнения (28) имеет вид

$$u_n(t) = u_n(0)\cos(\omega_n t) + \frac{\dot{u}_n(0)}{\omega_n}\sin(\omega_n t) +$$

$$+ \frac{1}{\omega_n}\int_0^t f_n(\tau)\sin[\omega_n(t-\tau)]d\tau, \tag{34}$$

где $u_n(0)$ и $\dot{u}_n(0)$ вычисляются с помощью формул (32) или (33).

Подставим (32) и (29) в (34), а затем (34) в (25). В результате после несложных преобразований получим решение задачи о продольных колебаний стержня Рэлея

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l \rho(y)\left[A(y)g(y)G_\rho(x, y, t) + \right.$$

$$\left. + \nu^2(y)I_p(y)g'(y)\frac{\partial G_\rho(x, y, t)}{\partial y}\right]dy +$$

$$+ \int_0^l \rho(y)\left[A(y)h(y)G_\rho(x, y, t) + \right.$$

$$\left. + \nu^2(y)I_p(y)h'(y)\frac{\partial G_\rho(x, y, t)}{\partial y}\right]dy + \tag{35}$$

$$+ \int_0^t\int_0^l F(y, \tau)G_\rho(x, y, t-\tau)dyd\tau +$$

$$+ M_1\left[g(0)\frac{\partial G_\rho(x, 0, t)}{\partial t} + h(0)G_\rho(x, 0, t)\right] +$$

$$+ M_2\left[g(l)\frac{\partial G_\rho(x, l, t)}{\partial t} + h(l)G_\rho(x, l, t)\right],$$

где $G_\rho(x, y, t)$ массовая функция Грина:

$$G_\rho(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n\|\varphi_n\|_\rho^2}\varphi_n(x)\varphi_n(y)\sin(\omega_n t). \tag{36}$$

Альтернативное представление решения может быть получено подстановкой (33) и (29) в (34) и далее в (25):

$$u(x, t) = \int_0^l A(y)E(y)\left[g'(y)\frac{\partial^2 G_E(x, y, t)}{\partial t\partial y} + \right.$$

$$\left. + h'(y)\frac{\partial G_E(x, y, t)}{\partial y}\right]dy -$$

$$- \int_0^t\int_0^l F(y, \tau)\frac{\partial^2 G_E(x, y, t, -\tau)}{\partial t^2}dyd\tau + \tag{37}$$

$$+ K_1\left[g(0)\frac{\partial G_E(x, 0, t)}{\partial t} + h(0)G_E(x, 0, t)\right] +$$

$$+ K_2\left[g(l)\frac{\partial G_E(x, l, t)}{\partial t} + h(l)G_E(x, l, t)\right],$$

где $G_E(x, y, t)$ – “жесткостная” функция Грина:

$$G_E(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n\|\varphi_n\|_E^2}\varphi_n(x)\varphi_n(y)\sin(\omega_n t). \tag{38}$$

Формулы (35), (36) и (37), (38) позволяют получать решение уравнения (5) с общими начальными условиями (6) и граничными условиями (4), описывающее вынужденные колебания стержня Рэлея. Для свободных колебаний в указанных формулах надо положить $F(x, t) = 0$.

5. КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ РЭЛЕЯ, ЗАЩЕМЛЕННОГО НА КОНЦАХ

Задача о вынужденных колебаниях стержня Рэлея, защемленного на концах, описывается уравнением (5), начальными условиями (6) и граничными условиями (7). Решение этой задачи определяется по формулам (35), (36) или (37), (38), в которых следует положить $M_1 = M_2 = K_1 = K_2 = 0$. Соответствующие собственные функции $\varphi_n(x)$ и собственные значения ω_n находятся путем решения задачи Штурма–Лиувилля для уравнения (8) с граничными условиями первого рода $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стретт Дж.В.* (лорд Рэлей). Теория звука. М.: ГИТТЛ, 1955. Т. 1. С. 273–274.

2. *Rao J.S.* Advanced Theory of Vibration. N.Y.: Wiley, 1992. P. 158–184.
3. *Chehil D.S., Heaps H.S.* // J. Acoust. Soc. Amer. 1968. V. 43. № 3. P. 540–544.
4. *Akulenko L.D., Nesterov S.V.* High Precision Methods in Eigenvalue Problems and their Applications. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2004.
5. *Fedotov I., Marais J., Shatalov M.* // Electron. Trans. Numer. Anal. 2006. V. 24. P. 66–73.
6. *Fedotov I., Joubert S., Marais J., Shatalov M.* A Unified Approach to Vibration Analysis of Stepped Structures. IV Europ. Congr. Computational Methods in Appl. Math. ECCOMAS-04. Jyvaskyla, 2004.
7. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 2001.
8. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.