Обобщение инфинитезимального оператора в групповом анализе ОДУ

Л.В. Линчук

(Санкт-Петербург, СПбГПУ; lidiya_linchuk@mail.ru)

Хорошо известно, что основой классического группового анализа послужило понятие локальной непрерывной однопараметрической группы точечных преобразований на плоскости. Однако эффективный алгоритм поиска таких групп был построен только после перехода к бесконечно-малым преобразованиям и введения линейного инфинитезимального оператора. Оказывается, что если не требуется "размножения" частного решения уравнения по группе, то мы можем не искать конечную группу, ограничиваясь поиском допускаемого оператора. Для точечных операторов

$$X = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y \tag{1}$$

их координаты могут быть найдены в явном виде и, как правило, уравнение для определения инварианта интегрируется. В свою очередь, знание инварианта позволяет привести исходное уравнение к автономному виду или записать его в инвариантах (и то, и другое приводит к понижению порядка исходного уравнения).

Дальнейшее развитие группового анализа привело к появлению обратных задач, т.е. к поиску классов уравнений, обладающих заданной симметрией. Если симметрию задать набором инвариантов, то можно описать весь класс уравнений, факторизующихся через эти инварианты. Естественно, возникает вопрос, какой оператор соответствует этим инвариантам. В результате оказывается, что класс допускаемых операторов должен быть существенно расширен, например, для уравнений второго порядка – до экспоненциальных нелокальных операторов (ЭНО) вида

$$X = \exp\left(\int \zeta(x,y,y')\,dx\right)\left[\xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y\right]. \tag{2}$$

Выражение $\exp\left(\int \zeta(x,y,y')\,dx\right)$, вообще говоря, содержит производные сколь угодно высокого порядка.

В общем случае при определении координаты канонического оператора мы сталкиваемся с решением уравнения в "полных производных", например, для уравнения второго порядка $F(x,y,y',y'')=0$

$$\Phi\frac{\partial F}{\partial y} + D_x\Phi\frac{\partial F}{\partial y'} + D_x^2\Phi\frac{\partial F}{\partial y''}\bigg|_{[F]} = 0 \tag{3}$$

(операторы $\Phi\partial_y$, определяемые решениями таких уравнений, получили название формальных).

Заметим, что при поиске операторов классический алгоритм предполагает явное аналитическое представление структуры координат операторов – через элементарные функции. Проводя аналогию со структурой точных решений обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), можно считать, что локальные операторы представимы через элементарные функции, а нелокальные – через "квадратуры" от них. Продолжая эту аналогию, можно расширить набор "допустимых" функций, включив в него всевозможные решения линейных уравнений с переменными коэффициентами, в качестве некоторых специальных функций. Тогда возникает возможность использования произвольных формальных операторов.

Как известно, решения большинства линейных ОДУ ищутся в виде разложения, например, в обобщенные степенные ряды. В групповом анализе также неоднократно предпринимались попытки расширения набора "допустимых" функций путем определения координат операторов в виде некоторых разложений в ряд (например, по производным). Однако сколько-нибудь удовлетворительного алгоритма для решения этой задачи так и не было найдено.

Но если для приложений ОДУ нам, как правило, требуется явное представление решения, то для факторизации ОДУ в групповом анализе нам требуется не знание самого оператора в явном виде, а знание его инвариантов. Рассмотрим процедуру факторизации некоторого конкретного исходного ОДУ

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{4}$$

с помощью формального оператора

$$X = \Phi \partial_y. \tag{5}$$

Для этого мы должны найти формальный оператор (5), допускаемый уравнением (4), решив определяющее уравнение

$$\Phi \frac{\partial F}{\partial y} + D_x \Phi \frac{\partial F}{\partial y'} + \dots + D_x^{n-1} \Phi \frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}} - D_x^n \Phi \bigg|_{[y^{(n)}=F]} = 0. \tag{6}$$

Если нам удалось найти Φ в явном аналитическом виде, мы переходим к вычислению инвариантов допускаемого оператора (5). Инварианты удовлетворяют уравнению

$$\Phi \frac{\partial J}{\partial y} + D_x \Phi \frac{\partial J}{\partial y'} + \dots + D_x^{n-1} \Phi \frac{\partial J}{\partial y^{(n-1)}} \bigg|_{[y^{(n)}=F]} = 0. \tag{7}$$

Выберем из найденного множества решений уравнения (7) решение $J = J(x, y, y', \dots, y^{(k)})$, $(k < n)$, старшая производная в котором имеет наименьший порядок (этот инвариант называется младшим). Тогда исходное уравнение (4) можно записать в виде факторсистемы

$$\begin{cases} u = J(x, y, y', \dots, y^{(k)}), \\ u^{(n-k)} = G(x, u, u', \dots, u^{(n-k-1)}). \end{cases} \tag{8}$$

Заметим, что уравнения (6) и (7) имеют схожую структуру, а именно, в них линейно входит функция Φ и ее полные производные, с той лишь разницей, что в уравнении (6) функция Φ является искомой, а в уравнении (7) считается известной. Если поделить эти уравнения почленно на Φ, получим выражения, в которые функция Φ входит лишь в виде отношений

$$\frac{D_x \Phi}{\Phi}, \frac{D_x^2 \Phi}{\Phi}, \dots, \frac{D_x^n \Phi}{\Phi}.$$

Следовательно, для поиска факторсистемы нам достаточно знать эти отношения, а не искать собственно функцию Φ. Более того, достаточно знать лишь первое отношение, так как остальные могут быть получены из него простым дифференцированием.

Если, например, отношение $D_x\Phi/\Phi = \zeta(x, y, y')$, то мы получаем определение ЭНО в каноническом виде

$$X = \exp\left(\int \zeta(x, y, y')\, dx \right) \partial_y.$$

В данном случае мы восстанавливаем явный вид функции Φ (квадратурой), хотя для факторизации, как мы показали, это не принципиально, и вид оператора не имеет значения ни для прямой, ни для обратной задачи, а ключевую роль играет выражение $D_x\Phi = \zeta(x, y, y')\Phi$, которое можно назвать **правилом дифференцирования** функции Φ.

Идея задания координаты канонического оператора в неявном виде через правило дифференцирования этой координаты лежит в основе предлагаемого метода.

Для изложения этого метода нам потребуется понятие нелокальной переменной. Изначально под нелокальной переменой понималось выражение вида

$$\exp\left(\int \zeta(x, y, y', \dots, y^{(m)})\, dx \right),$$

которое является элементом координат ЭНО (2). При поиске оператора это выражение рассматривалось как независимая переменная наряду с $x, y, y', \ldots$, так как в общем случае это выражение зависит от производных сколь угодно высокого порядка вплоть до бесконечного. По этой переменной определяющее уравнение можно было расщепить до системы и тем самым упростить задачу поиска допускаемого оператора. В дальнейшем стали появляться другие формы нелокальных переменных, как правило, также содержащих полный интеграл. Мы будем понимать под нелокальной переменной любое выражение, отличное от $x, y, y', \ldots$, по которому выполняется расщепление в определяющем уравнении.

Введём в рассмотрение оператор вида

$$X = \Phi\partial_y, \quad \text{где} \quad \Phi = \sum_{i=1}^{k} \xi_i(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) A_i, \tag{9}$$

где A_i $(i = 1, \ldots, k)$ – нелокальные переменные, правила дифферндирования которых задаются линейными выражениями

$$D(A_i) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) A_j. \tag{10}$$

По сути, эти правила дифференцирования задают правило дифференцирования координаты оператора Φ. Соотношения (10) теоретически позволяют восстановить нелокальные переменные A_i, а следовательно, функцию Φ, что необходимо для реализации классического подхода группового анализа. Для наших целей решение этой задачи будет излишним.

Предположим, что необходимо найти оператор (9), допускаемый заданным ОДУ n-го порядка (4). Для этого мы можем составить определяющее уравнение по формуле (6), которое в силу линейности, а также в силу линейности правил дифференцирования (10) будет имет вид

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) A_i = 0.$$

Так как нелокальные переменные являются независимыми, то мы можем расщепить это уравнение до системы

$$\begin{cases} \beta_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_k(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0, \end{cases}$$

Эти уравнения уже не содержат нелокальных переменных, а поэтому из них могут быть найдены функции ξ_{ij} и $\alpha_i(x, y, y', \ldots, y^{(p)})$, задающие оператор (9). Если найденный оператор имеет нетривиальный инвариант порядка ниже n, то можно построить факторсистему исходного ОДУ. Этот инвариант может быть найден из соотношения (7), которое по аналогии с определяющим уравнением имеет линейную структуру, а следовательно, будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\gamma_{i0}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \frac{\partial J}{\partial y} + \ldots + \gamma_{i(n-1)}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \frac{\partial J}{\partial y^{(n-1)}} \right) A_i = 0.$$

Расщепив это уравнение по нелокальным переменным, мы получаем систему для поиска инвариантов

$$\begin{cases} \gamma_{10}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \dfrac{\partial J}{\partial y} + \ldots + \gamma_{1(n-1)}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \dfrac{\partial J}{\partial y^{(n-1)}} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{k0}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \dfrac{\partial J}{\partial y} + \ldots + \gamma_{k(n-1)}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \dfrac{\partial J}{\partial y^{(n-1)}} = 0 \end{cases}$$

Если эта система имеет только тривиальное решение, то найденный оператор оказывается пустым с точки зрения факторизации, в противном случае можно построить факторсистему (8).

Естественно, сразу же возникает вопрос, сколько нелокальных переменных нужно брать для задания оператора (8) и каков порядок производных p должен быть в соотношениях (9) и (10), чтобы этой формы оператора было достаточно для построения всех факторсистем заданного ОДУ, а алгоритм не был технически громоздким. Практические исследования показали, что число нелокальных перменных и порядок производных p должен быть меньше порядка уравнения n, для которого ищется допускаемый оператор. Более того, координату оператора Φ можно считать равной одной из нелокальных переменных.

Так, для ОДУ 2-го порядка целесообразно вводить только одну нелокальную переменную и ограничиться рассмотрением операторов вида

$$X = A\partial_y, \quad \text{где} \quad D_x A = \alpha(x, y, y')A.$$

Пример 1. Решим прямую задачу для ОДУ 2-го порядка

$$y'' = (xy^{-3} + x^{-1})y'$$

в классе операторов

$$X = A\partial_y,$$

где правило дифференцирования нелокальной переменной A:

$$D_x A = \alpha(x, y)A.$$

Соответствующее определяющее уравнение имеет вид

$$A\left[(\alpha'_y + 3xy^{-4})y' + \alpha'_x + \alpha^2 - (xy^{-3} + x^{-1})\alpha\right] = 0.$$

Расщепив по переменной y' выражение в квадратных скобках, получаем систему

$$\begin{cases} \alpha'_y + 3xy^{-4} = 0, \\ \alpha'_x + \alpha^2 - (xy^{-3} + x^{-1})\alpha = 0, \end{cases}$$

решением которой будет

$$\alpha = xy^{-3}.$$

Используя полученный результат, найдем дифференциальный инвариант допускаемого оператора $J = J(x, y, y')$ из уравнения:

$$J_y + xy^{-3}J_{y'} = 0.$$

Его решение

$$J = y' + \frac{x}{2y^2}.$$

Отсюда вытекает, что исходное уравнение факторизуется следующим образом:

$$\begin{cases} u = y' + \dfrac{x}{2y^2}, \\ xu' - u = 0. \end{cases}$$

Если для ОДУ 2-го порядка мы по сути ищем допускаемые операторы в классе ЭНО, то для ОДУ более высоких порядков получаются операторы, координата которых не может быть восстановлена в явном виде, а следовательно, оператор не принадлежит к рассматриваемым до сих пор классам.

Рассмотрим ОДУ 3-го порядка

$$y''' = F(x, y, y', y'').$$

Это уравнение может быть факторизовано двумя способами (при условии сохраниния в качестве независимой переменной x):

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} u = J(x, y, y') \\ u'' = G(x, u, u'), \end{cases} \qquad (\mathrm{II}) \begin{cases} u = J(x, y, y', y'') \\ u' = G(x, u). \end{cases}$$

Оказывается, что все факторсистемы вида (I) и только они могут быть найдены с помощью операторов вида

$$X = A\partial_y, \quad D_x A = \alpha(x, y, y')A.$$

Это опять по сути ЭНО. В этом случае инвариант $J(x, y, y')$ удовлетворяет уравнению

$$J_y + \alpha J_{y'} = 0.$$

А все факторсистемы вида (II) и только они могут быть найдены с помощью операторов вида

$$X = A\partial_y, \qquad D_x A = B, \quad D_x B = \alpha(x, y, y', y'')A + \beta(x, y, y', y'')B.$$

Инварианты $J = J(x, y, y', y'')$ этого оператора удовлетворяют системе

$$\begin{cases} J_y + \alpha J_{y''} = 0, \\ J_{y'} + \beta J_{y''} = 0. \end{cases}$$

Чтобы эта система имела решение, отличное от тривиального (а только в этом случае оператор не будет “пустым”) необходимо добавить условие

$$\beta_y - \alpha_{y'} + \alpha\beta_{y''} - \beta\alpha_{y''} = 0.$$

Если бы мы задались целью восстановить нелокальную переменную A и выяснить, к какому классу принадлежит рассматриваемый оператор, то нам пришлось бы решить линейное уравнение 2-го порядка в полных производных

$$D_x^2 A = \alpha(x, y, y', y'')A + \beta(x, y, y', y'')D_x A.$$

Но в общем случае мы такие уравнения решать не умеем.

Пример 2. Решим прямую задачу для ОДУ 3-го порядка

$$y''' + (y'')^2 + a(x, y)y'' + b(x, y)y' + c(x, y) = 0$$

в классе операторов

$$X = A\partial_y, \qquad DA = B, \quad DB = \alpha(x, y)A + [\beta(x, y)y'' + \gamma(x, y)y' + \delta(x, y)]B$$

Определяющее уравнение для заданного оператора и уравнения вместе с условием наличия нетривиального инварианта после расщепления по нелокальным переменным A, B и дифференциальным переменным y', y'' имеет вид:

$$\begin{cases} \beta^2 + \beta = 0, \\ \beta'_y = 0, \\ \gamma'_y = 0, \\ \gamma'_y + \gamma^2 = 0, \\ \delta'_y + \alpha\beta = 0, \\ c'_y + \alpha'_x + \alpha(a + \delta) = 0, \\ b'_y + \alpha'_y + \gamma\alpha = 0, \\ a'_y + \alpha(\beta + 2) = 0, \\ \delta'_x + \delta^2 + \delta a + \alpha - \beta c + b = 0, \\ \gamma'_x + \delta'_y + \gamma(2\delta + a) - \beta b = 0, \\ \beta'_x + 2\delta(1 + \beta) + \gamma = 0, \\ \beta'_y + 2\gamma(1 + \beta) = 0. \end{cases}$$

Эта система определяет следующие соотношения между координатами уравнения и неизвестными функциями в правилах дифференцирования

$$
\begin{aligned}
&\text{(I)} \quad \delta=\beta=\gamma=0,\ \alpha=-\frac{1}{2}a'_y,\ b=\frac{1}{2}a'_y,\ c=\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a'_x+h(x);\\
&\text{(II)} \quad c=a'_x-h'(x)+ah(x)-h(x)^2,\ b=a'_y,\ \alpha=-a'_y,\ g=-a+h(x),\ \beta=-1,\ \gamma=0.
\end{aligned}
$$

Случаю (I) соответствует уравнению

$$
y'''+(y'')^2+ay''+\frac{1}{2}a'_y y'+\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a'_x+h(x)=0,
$$

которое допускает оператор

$$
X=A\partial_y, \qquad DA=B, \quad DB=-\frac{1}{2}a'_y A,
$$

инварианты которого порождают факторсистему этого уравнения

$$
\begin{cases}
u=y''+\dfrac{1}{2}a,\\
u'+u^2+h(x)=0.
\end{cases}
$$

Случай (II) определяет уравнение

$$
y'''+(y'')^2+ay''+a'_y y'+a'_x-h'_x+ah(x)-h(x)^2=0,
$$

которое допускает оператор

$$
X=A\partial_y, \qquad DA=B, \quad DB=-a'_y A+(h(x)-y''-a)B,
$$

инварианты которого порождают факторсистему этого уравнения

$$
\begin{cases}
u=e^{y'}(y''+a-h(x)),\\
u'+h(x)u=0.
\end{cases}
$$

Таким образом, очевидно, что разработанный алгоритм не превосходит по сложности классический. Вместе с тем его возможности оказываются значительно более широкими, так как, например, факторизация уравнения примера 2 классическим алгоритмом вообще получено быть не может. Здесь координата формального канонического оператора удовлетворяет линейному уравнению в полных производных, решение которого в общем случае невозможно представить в квадратурах. Поэтому настоящий алгоритм реализует расширение набора "допустимых" функций для представления оператора и к тому же не требует исходных предположений относительно его формы.