СИММЕТРИИ В УРАВНЕНИЯХ НАВЬЕ–СТОКСА

В.В. Пухначев
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН
E-mail: pukhnachev@gmail.com

УДК 532.516

Статья содержит обзор более 150 работ, посвященных точным решениям уравнений Навье–Стокса. Более трети из них опубликовано в последние 15 лет. В отличие от прежних обзоров, изложение ведется на основе группового анализа дифференциальных уравнений. Обсуждается асимптотический характер решений Джеффри–Гамеля и даются их обобщения. Изучаются групповые свойства задач со свободной границей и приводятся примеры их точных решений — как стационарных, так и нестационарных. Среди них выделяется задача о вращающемся кольце как модель для обоснования приближенных теорий. Описывается алгоритм построения частично инвариантных решений уравнений Навье–Стокса. Выясняется теоретико-групповая природа известных решений Кармана, Бюргерса и Аристова, и указываются их обобщения. С использованием нелокальных преобразований выявляется скрытая симметрия уравнений Навье–Стокса. Исследуются дискретные симметрии указанных уравнений и их приложения. Формулируются новые законы сохранения в движениях вязкой жидкости, заполняющей все пространство.

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемый обзор содержит результаты исследования уравнений Навье–Стокса

$$\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\rho^{-1} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{2}$$

описывающих движение вязкой несжимаемой жидкости в потенциальном поле внешних массовых сил, методами группового анализа дифференциальных уравнений.

В уравнениях (1), (2) $\mathbf{v}(x, t)$ обозначает скорость жидкости в исходной инерциальной системе координат, $p(x, t)$ — модифицированное давление, связанное с истинным давлением p_i соотношением $p = p_i - \rho G$, где $G(x, t)$ — потенциал внешних сил (функция, считающаяся известной), $\rho > 0$ — плотность жидкости. Величина ρ предполагается постоянной, также как и кинематический коэффициент вязкости $\nu > 0$. Через ∇ обозначен градиент по переменным x_1, x_2, x_3, так что $\nabla\mathbf{v}$ — это тензор с элементами $(\nabla\mathbf{v})_{jk} = \partial v_k/\partial x_j$ $(j, k = 1, 2, 3)$, а $\nabla \cdot \mathbf{v}$ — дивергенция вектора $\mathbf{v}$.

Уравнения (1), (2) были выведены А. Навье (1822), исходившим из молекулярно-кинетических представлений о движении жидкостей. В работе Дж.Г. Стокса (1845) понятие вязкой жидкости (как несжимаемой, так и сжимаемой) было сформулировано с помощью постулатов, которые отражают естественные свойства симметрии пространства—времени и движущейся в нем жидкости. Поэтому не удивительно, что уравнения (1), (2) обладают богатыми групповыми свойствами. Эти свойства имеют многообразные проявления, но наиболее важное из них — возможность построения точных решений указанной системы уравнений.

Следует сказать, что между появлением уравнений Навье—Стокса и публикацией первых результатов о разрешимости краевых и начально-краевых задач для этих уравнений прошло более ста лет. Еще позже появились методы и средства численного решения этих задач. Поэтому на начальном этапе развития теории роль точных решений уравнений Навье—Стокса была особенно велика. Но и сегодня их значение не исчерпано, тем более что само понятие точного решения существенно расширилось с развитием аналитических и численных методов исследования дифференциальных уравнений. Точные решения незаменимы при тестировании численных методов, анализе сингулярностей в решениях уравнений Навье—Стокса. На них апробируются подходы к обоснованию приближенных моделей в динамике вязкой жидкости. Наконец, они имеют и прикладное значение — достаточно вспомнить формулу Пуазейля, вискозиметр Куэтта или теорию дискового электрода Левича.

Большинство точных решений уравнений Навье—Стокса обладает свойством инвариантности относительно той или иной группы, допускаемой системой (1), (2). На интуитивном уровне соображения симметрии использовались для получения точных решений уравнений математической физики достаточно давно, однако строгое оформление концепция инвариантного решения получила в работах С. Ли, опубликованных в последней трети 19-го столетия. Систематическое изучение свойств симметрии систем дифференциальных уравнений началось во второй половине 20-го века в трудах Л.В. Овсянникова и его учеников [1—3]. Им же в 1964 г. было введено важное понятие частично инвариантного решения систем дифференциальных уравнений, позволившее существенно расширить множество их точных решений. Применение методов группового анализа оказалось особенно плодотворным при исследовании фундаментальных уравнений механики и физики сплошной среды, поскольку свойства симметрии уже закладывались в процессе вывода этих уравнений.

1. ГРУППА, ДОПУСКАЕМАЯ УРАВНЕНИЯМИ НАВЬЕ–СТОКСА

Наиболее широкая группа G_∞, допускаемая системой (1), (2), была вычислена В.О. Бытевым [4]. Соответствующая ей алгебра Ли L_∞ порождена следующими инфинитезимальными операторами:

$$Z = \sum_{i=1}^{3}\left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial}{\partial v_i} \right) + 2t\frac{\partial}{\partial t} - 2p\frac{\partial}{\partial p},$$

$$X_{jk} = x_j \frac{\partial}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial v_k} - v_k \frac{\partial}{\partial v_j} \qquad (j, k = 1, 2, 3;\ j < k),$$

$$\Psi_i = \psi_i(t)\frac{\partial}{\partial x_i} + \dot{\psi}_i(t)\frac{\partial}{\partial v_i} - \rho\ddot{\psi}_i(t)x_i\frac{\partial}{\partial p} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{3}$$

$$\Phi = \varphi(t)\frac{\partial}{\partial p}, \quad X_0 = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Здесь ψ_i, φ — произвольные (класса C^∞) функции времени, точка обозначает дифференцирование по t. Таким образом, допускаемая системой (1), (2) группа оказывается бесконечномерной.

Наличие в алгебре L_∞ оператора растяжения Z означает масштабную инвариантность уравнений (1), (2). Это свойство лежит в основе физического моделирования течений вязкой жидкости. Совокупность операторов X_{jk} порождает группу согласованных вращений в пространстве координат и в пространстве скоростей, допускаемую системой (1), (2), что отражает отсутствие выделенных направлений в указанных пространствах. Отметим, что существование осесимметричных решений уравнений Навье—Стокса напрямую связано с присутствием в алгебре L_∞ операторов вращения, так же как и существование стационарных решений этих уравнений — с наличием в L_∞ оператора переноса по времени X_0.

Операторы Φ, Ψ_i специфичны для уравнений динамики несжимаемой жидкости. Первый из них реализует возможность прибавления к давлению произвольной функции времени без изменения уравнений движения. Оператору Ψ_i (i = 1, 2, 3) соответствует преобразование перехода в новую систему координат, движущуюся относительно исходной вдоль оси x_i со скоростью $\dot{\psi}_i(t)$. При этом в i-том уравнении импульса появляется дополнительный член $\ddot{\psi}_i$ (ускорение силы инерции), который компенсируется прибавлением к давлению функции $\rho x_i \ddot{\psi}_i$.

Свойство инвариантности относительно операторов Ψ_i было обнаружено А.А. Бучневым [5] при исследовании уравнений Эйлера идеальной несжимаемой жидкости.

Полагая в (3) последовательно $\Psi_i = 1$ и $\Psi_i = t$, мы получаем операторы

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y_i = t\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial v_i}, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{4}$$

Совокупность операторов X_0, X_i, Y_i, X_{jk} образует 10-параметрическую алгебру Ли L_{10}. Соответствующая ей группа Ли G_{10} называется группой Галилея. Наличие в алгебре L_{10} операторов переноса по пространственным координатам x_i — следствие однородности пространства. Присутствие в ней операторов галилеева переноса Y_i отражает факт независимости законов движения жидкости от выбора инерциальной системы координат. Присоединяя к операторам L_{10} оператор растяжения Z, получаем 11-параметрическую алгебру Ли L_{11}. Соответствующую ей группу Ли G_{11} назовем расширенной группой Галилея. Группы G_{10} и G_{11} играют важную роль при исследовании инвариантных и частично инвариантных решений задач со свободной границей для уравнений Навье—Стокса.

2. ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА И НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Любое преобразование группы G_∞ переводит каждое решение системы (1), (2) снова в решение той же системы. Если система (1), (2) допускает группу G_∞, то она допускает и любую подгруппу $H \subset G_\infty$. Инвариантным H—решением системы (1), (2) называется решение $\mathbf{v}(x, t)$, $p(x, t)$, которое переходит в себя под действием любого преобразования группы H. Инвариантное решение определяется из системы, содержащей меньшее число независимых переменных, чем исходная. Это число r называется рангом инвариантного решения. Для системы (1), (2) $r \leqslant 3$. Если $r = 1$, то редуцированная система состоит из обыкновенных дифференциальных уравнений.

Алгоритм построения инвариантных решений систем дифференциальных уравнений к настоящему времени хорошо разработан [1, 2, 6]. Он включает в себя несколько этапов и базируется на основных понятиях группового анализа, таких как базис инвариантов группы, фактор-система, оптимальная система подалгебр допускаемой алгебры Ли. В данном обзоре мы не имеем возможности дать строгие определения этих понятий, но постараемся проиллюстрировать процедуру построения инвариантных решений уравнений Навье—Стокса на ряде содержательных примеров.

Следует отметить, что классический групповой анализ исследует свойства инвариантности систем дифференциальных уравнений безотносительно начальных и краевых условий, которые ставятся для этих уравнений. Поэтому обычно дело обстоит так: сначала строится инвариантное решение (например, уравнений гидродинамики), а затем выясняется, к каким начальным и (или) краевым условиям его можно приспособить. Возможен и другой путь — целенаправленное построение инвариантных решений начально-краевых задач. Для уравнений газовой динамики такая работа была проделана В.М. Меньщиковым [7, 8]. Автор обзора выполнил систематический анализ инвариантных решений задач со свободной границей для уравнений Навье—Стокса [9].

Точные решения уравнений Навье—Стокса традиционно занимают заметное место в монографиях и учебниках по гидродинамике [10—13]. Им посвящено несколько обзоров [14—17], последний из которых датирован 1991-м годом. С тех пор благодаря применению современных методов группового анализа и вовлечения в игру новых объектов, таких как частично инвариантные и дифференциально инвариантные решения, удалось существенно пополнить копилку решений системы (1), (2), а также систематизировать уже известные решения.

3. ИНВАРИАНТНОСТЬ УСЛОВИЙ НА СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕ

Пусть $F(x,\ t) = 0$ — уравнение свободной границы Γ_t. Условия на свободной границе имеют вид

$$F_t + \mathbf{v}\cdot\nabla F = 0 \quad \text{при} \quad F = 0\,, \tag{5}$$

$$-p_i\mathbf{n} + 2\rho\nu D\cdot\mathbf{n} = -2\sigma K\mathbf{n} \quad \text{при} \quad F = 0\,. \tag{6}$$

Здесь p_i — гидродинамическое давление, D — тензор скоростей деформаций, $2D_{ij} = \partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i$ $(i,\ j = 1,\ 2,\ 3)$, $\sigma \geqslant 0$ — коэффициент поверхностного натяжения, K — средняя кривизна поверхности Γ_t, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к этой поверхности. Далее предполагается, что $\sigma = \mathrm{const}$ (это предположение справедливо для изотермических движений при отсутствии поверхностно-активных веществ). Также для простоты пренебрегаем внешними силами, тогда p_i совпадает с функцией p, входящей в уравнение импульса (1).

Условие (5), называемое кинематическим, означает, что свободная граница является материальной поверхностью. Согласно динамическому условию (6), касательные напряжения на свободной границе отсутствуют, а нормальное напряжение равно капиллярному давлению. Нас интересуют свойства инвариантности условий (5), (6) относительно преобразований, сохраняющих уравнения Навье—Стокса (1), (2).

Рассмотрим эвклидово пространство $\mathbb{R}^8$, координаты точек которого суть x_1, x_2, x_3, t, v_1, v_2, v_3, p. В этом пространстве действует группа Галилея

G_{10} с базисными операторами X_0, X_i, Y_i, X_{ij} (i, j = 1, 2, 3; $i < j$), определенными формулами (3), (4). Группа G_{10} допускается системой (1), (2). Рассмотрим некоторую k—параметрическую подгруппу H группы G_{10}. Пусть $l \leqslant k$ — максимальное число линейно не связанных операторов подгруппы H. Заметим, что $l < k$ лишь в том случае, когда $k \geqslant 3$ и H содержит группу вращений $\langle X_{12}, X_{13}, X_{23}\rangle$. Нас будут интересовать лишь интразитивные подгруппы группы G_{10}; в этом случае $l < 8$.

Пусть I_α ($\alpha = 1, ..., 8 - l$) — полный набор функционально независимых инвариантов H. Обозначим через m ранг матрицы $(\partial I_\alpha/\partial v_\beta)$, где $\beta = 1, ..., 4$ и положено $v_4 = p$. Ясно, что $m \leqslant \min(4, 8 - l)$; будем рассматривать лишь такие группы H, в которых $m < 8 - l$. Тогда существует $n = 8 - l - m$ инвариантов H, не содержащих $\mathbf{v}$, p — искомых функций в системе (1), (2). Без потери общности можно считать, что эти инварианты суть $I_{m+1}, ..., I_{m+n}$. Пусть уравнение $F(x, t) = 0$ определяет неособое инвариантное многообразие группы H. Это означает, что F может быть записано в виде

$$F = Q[I_{m+1}(x,t),...,I_{m+n}(x,t)]$$

с некоторой функцией Q.

Теорема 1. Если свободная граница $F(x, t) = 0$ является неособым инвариантным многообразием подгруппы $H \subset G_{10}$, то условия (5), (6), выполненные на этой поверхности, также инвариантны относительно H.

Доказательство этой теоремы приведено в книге [6]. Там же показано, что при $\sigma \neq 0$ в условии теоремы 1 нельзя заменить группу G_{10} более широкой подгруппой бесконечномерной группы G_∞, допускаемой системой (1), (2). Такое расширение возможно, если $\sigma = 0$. В этом случае утверждение теоремы остается в силе, если заменить G_{10} на расширенную группу Галилея G_{11}, добавив к генераторам группы G_{10} оператор растяжения Z [9].

Примеры приложения теоремы 1 и ее аналога для случая $\sigma = 0$ приведены в [6, 9, 18, 19]. Рассмотрим один из них. Пусть группа H порождена операторами X_3, $Y_2 + \omega X_1$ ($\omega = \mathrm{const} > 0$). Здесь $k = l = 2$, полный набор функционально независимых инвариантов H есть $I_1 = v_1 - \omega x_2$, $I_2 = v_2$, $I_3 = v_3$, $I_4 = p$, $I_5 = x_1 - \omega t x_2$, $I_6 = t$; ранг матрицы $\partial I_\alpha/\partial v_\beta)$ равен 4, так что необходимое условие существования инвариантного решения выполнено; число независимых переменных в редуцированной системе (ранг инвариантного решения) $n = 8 - l - m = 2$. Назначая $I_1, ..., I_4$ функциями инвариантов I_5, I_6, мы получаем следующее представление инвариантного решения:

$$v_1 = (\omega\nu)^{1/2}u(\zeta,\tau) + \omega x_2\,, \quad v_2 = (\omega\nu)^{1/2}v(\zeta,\tau)\,,$$
$$v_3 = (\omega\nu)^{1/2}w(\zeta,\tau)\,, \quad p = \rho\omega\nu q(\zeta,\tau)\,,$$

где $\zeta = (\omega\nu)^{1/2}(x_1 - \omega t x_2)$, $\tau = \omega t$. Функции u, v, w, q удовлетворяют системе уравнений

$$u_\tau + (u - \tau v)u_\zeta + v = -q_\zeta + (\tau^2 + 1)u_{\zeta\zeta}\,,$$
$$v_\tau + (u - \tau v)v_\zeta = \tau q_\zeta + (\tau^2 + 1)v_{\zeta\zeta}\,,$$
$$w_\tau + (u - \tau v)w_\zeta = (\tau^2 + 1)w_{\zeta\zeta}\,,\ \ (u - \tau v)_\zeta = 0\,,$$

связывающей только инварианты группы H. Отметим, что все переменные в системе (7) безразмерны.

Общий вид инвариантного многообразия группы H в пространстве x, t есть $Q(\zeta, \tau) = 0$, поэтому мы вправе искать решение системы (1), (2) в области Ω_t, ограниченной свободными поверхностями $\zeta = b_i(\tau)$, $i = 1, 2$. При этом, вследствие теоремы 1, условия на свободной границе (5), (6) переписываются в терминах инвариантов H:

$$\begin{gathered} u - \tau v = db_i / d\tau\,,\ \ v_\zeta = (\tau^2 - 1)(\tau^2 + 1)^{-2}\,,\ \ w_\zeta = 0\,, \\ q = -2\tau(\tau^2 + 1)^{-1} \ \text{ при }\ \zeta = b_i(\tau)\,,\ \ i = 1,2\,,\ \ \tau > 0\,. \end{gathered} \tag{8}$$

Постановка задачи замыкается начальными условиями, которые также формулируются в инвариантном виде:

$$\begin{gathered} u(\zeta,0) = 0\,,\ \ v(\zeta,0) = v_0(\zeta)\,,\ \ w(\zeta,0) = 0\,,\ \ 0 \leqslant \zeta \leqslant h; \\ b_1(0) = 0\,,\ \ b_2(0) = h\,. \end{gathered} \tag{9}$$

Окончательная формулировка инвариантной задачи со свободной границей такова: найти функции $b_1(\tau)$, $b_2(\tau)$ и решение системы (7) в области $b_1(\tau) < \zeta < b_2(\tau)$, $\tau > 0$ так, чтобы удовлетворялись краевые условия (8) и начальные условия (9).

Задача (7)—(9) допускает точную линеаризацию и последующее решение методом разделения переменных [18]. В этом решении $b_1 = -c\tau^2$, $b_2 = -c\tau^2 + h$, $u = \tau(v - 2c)$, где $2c$ — среднее значение функции v_0 на интервале $(0, h)$, $w = 0$. Мы не приводим выражения для v и q ввиду их громоздкости, а укажем лишь асимптотику v при $\tau \to \infty$

$$v = 2c + \tau^{-2}(\zeta - h/2) + O(\tau^{-4})$$

равномерно по ζ для $\zeta \in [-c\tau^2, -c\tau^2 + h]$.

Физическая интерпретация построенного решения такова. В момент $t = 0$ жидкость заполняет слой $0 < x_1 < (\nu/\omega)^{1/2}$ и имеет распределение скоростей $v_1 = \omega x_2$, $v_2 = v_0[(\omega/\nu)^{1/2}x_1]$, $v_3 = 0$, а далее движется по инерции, так что границы слоя

$$x_1 - \omega t x_2 = (\nu/\omega)^{1/2} b_i(\omega t)\,,\ \ i = 1,2\,,$$

остаются свободными при всех $t > 0$. С течением времени слой поворачивается вокруг оси x_3 (предельный при $t \to \infty$ угол поворота равен $-\pi/2$) и одновременно движется вдоль оси x_2 с асимптотической скоростью $c(\nu\omega)^{1/2}$.

4. ПЛОСКИЕ ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

В дальнейшем нам потребуются уравнения Навье—Стокса в цилиндрической системе координат $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, $\theta = \operatorname{arctg}(x_2/x_1)$, $z = x_3$. Если обозначить через v_r, v_θ, v_z соответствующие компоненты вектора скорости, то система (1), (2) в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\Delta v_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2}\right), \qquad (10)$$

$$\frac{dv_\theta}{dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left(\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2}\right),$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta v_z\,,$$

$$\frac{\partial v_r}{dr} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0\,.$$

Здесь

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

Приведем еще выражения элементов тензора скоростей деформаций D в цилиндрических координатах:

$$D_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad D_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r},$$

$$D_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad D_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right), \qquad (11)$$

$$D_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right), \quad D_{zr} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right).$$

Всюду в этом разделе рассматриваются плоские движения. Им соответствуют решения системы (10), в которых $v_z = 0$, а функции v_r, v_θ, p не зависят от z. Плоский аналог системы (10) допускает группу вращений с оператором $\partial/\partial\theta$. Соответствующее ей инвариантное решение имеет вид

$$v_r = \frac{\varphi(t)}{r}, \quad v_\theta = v(r,t), \quad p = \rho\left[\int\limits_{r_0}^{r} \frac{v^2(s,t)}{s}\,ds - \frac{d\varphi}{dt}\ln\frac{r}{r_0} - \frac{\varphi^2}{2r^2}\right] + p_0(t), \tag{12}$$

где φ, p_0 — произвольные функции t, $r_0 > 0$ — произвольная постоянная. Функция v удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\varphi(t)}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\right) = \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right). \tag{13}$$

Если $\varphi = \mathrm{const}$, уравнение (13) допускает группу растяжений с оператором $r\partial/\partial r + 2t\partial/\partial t$, что позволяет строить автомодельные решения (13). Одно из них, отвечающее значению $\varphi = 0$, описывает процесс процесс диффузии вихря в вязкой жидкости (Озеен, 1911):

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right)\right].$$

Дифференцируя это решение по t, мы снова получим решение уравнения (13) с $\varphi = 0$,

$$v = \frac{Lr}{4\pi\rho\nu t^2}\exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right),$$

где обозначено $L = -\rho\Gamma/2$ (Тэйлор, 1908). Последнее решение соответствует движению, вызванному внесением в жидкость при $t = 0$ момента импульса L, сконцентрированного в начале координат.

Случай $\varphi \neq \mathrm{const}$, позволяет рассмотреть движения, в которых в начале координат действует источник с интенсивностью $\varphi(t)/2\pi$. Сингулярности в решении уравнения (13) можно избежать, если рассматривать область плоскости x_1, x_2, внешнюю по отношению к окружности $r = a$. На этой окружности задаются значения компонент скорости $v_r = a^{-1}\varphi(t)$, $v = a\omega(t)$, а в начальный момент — распределение окружной скорости $v(r,\ 0) = v_0(r)$, $r \geqslant a$. Решение такой начально-краевой задачи для уравнения (13) описывает движение жидкости вне пористого цилиндра, вращающегося вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega(t)$, которая как и интенсивность вдува или отсоса жидкости через поверхность цилиндра $\varphi(t)$ могут быть заданы произвольно.

Предположим, что φ и ω постоянны. Тогда уравнение (13) имеет семейство стационарных решений

$$v = \omega a\left[(1 - C)\frac{a}{r} + C\left(\frac{a}{r}\right)^{\mathrm{Re}+1}\right],$$

где C — произвольная постоянная, $\mathrm{Re} = \varphi/\nu$ — аналог числа Рейнольдса [20]. Если $\mathrm{Re} < -1$ (т.е. интенсивность отсоса жидкости через пористую границу вращающегося цилиндра достаточно велика), то $v \to 0$ при $r \to \infty$, и мы имеем пример неединственности стационарного решения внешней плоской задачи для системы (1), (2) в классе функций $\mathbf{v}$, исчезающих на бесконечности. При $\mathrm{Re} = 0$ поле скоростей $v_r = 0$, $v_\theta = \omega a^2 r^{-1}$ оказывается потенциальным и при этом удовлетворяет условию прилипания на поверхности цилиндра, что является большой редкостью в динамике вязкой жидкости.

Пусть теперь $\varphi = 0$, а жидкость заполняет пространство между двумя цилиндрическими поверхностями $r = r_1$ и $r = r_2$, вращающимися с постоянными угловыми скоростями ω_1 и ω_2 соответственно. Тогда $v = Ar + Br^{-1}$, где

$$A = \frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad B = \frac{(\omega_2 - \omega_1) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Это решение, полученное Куэттом (1890), было положено в основу созданного им прибора для измерения вязкости. Идея вискозиметра Куэтта базируется на простом соотношении между величиной момента сил M, приложенных к поверхности вращающегося цилиндра на единицу его длины, и коэффициентом вязкости ν : $M = -4\pi\rho\nu B$, где B — коэффициент при r^{-1} в формуле для v.

Как показал Дж.И. Тэйлор [21], в определенных условиях (например, при $\omega_2 = 0$ и достаточно больших значениях ω_1) течение Куэтта теряет устойчивость, и на смену ему приходит трехмерное вращательно-симметричное течение, периодическое по осевой координате z (т.н. вихри Тэйлора). Проблема Куэтта—Тэйлора явилась тем оселком, на котором оттачивались методы теории гидродинамической устойчивости (см. монографию [22] и цитированную в ней литературу).

5. ЗАДАЧА О ВРАЩАЮЩЕМСЯ КОЛЬЦЕ

В предыдущем разделе рассматривались плоские вращательно-симметричные движения жидкости, заполняющей все пространство или его часть, ограниченную заданными цилиндрическими поверхностями.

Ситуация существенно меняется, если граница области течения является свободной. В этом случае функция $\varphi(t)$ в представлении (12) уже не может быть задана произвольно, и задача становится нелинейной.

Так возникает задача о вращающемся кольце, физическая постановка которой состоит в следующем. В момент времени $t = 0$ жидкость заполняет кольцо $r_{10} < r < r_{20}$ и имеет распределение скоростей $v_r = \varphi_0 r^{-1}$, $v_\theta = v_0(r)$. Здесь $r_{10} > 0$, r_{20}, φ_0 — постоянные, а $v_0(r)$ — произвольная функция. Вследствие вращательной симметрии движения такая зависимость v_r от r является единственной кинематически возможной. Требуется найти движение, в котором границы кольца $r = r_1(t)$, $r = r_2(t)$ являются свободными при $t > 0$.

Математическая постановка задачи состоит в отыскании функций φ, r_1, r_2 переменной t и решения $v(r, t)$ уравнения (13) в области $r_1 < r < r_2$, $t > 0$ при дополнительных соотношениях

$$\frac{dr_i}{dt} = \frac{\varphi}{r_i}, \quad i = 1, 2, \quad t > 0, \tag{14}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} \ln\frac{r_2}{r_1} + \left(2\nu\varphi - \frac{1}{2}\varphi^2\right)\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right) + \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \int\limits_{r_1}^{r_2} v^2(r, t)\,\frac{dr}{r}, \quad t > 0, \tag{15}$$

$$r_i = r_{i0}, \quad \varphi = \varphi_0 \quad \text{при} \quad t = 0, \tag{16}$$

$$v = v_0(r) \quad \text{при} \quad r_{10} \leqslant r \leqslant r_{20}, \quad t = 0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = 0 \quad \text{при} \quad r = r_i(t), \quad t > 0. \tag{18}$$

Равенства (14) — следствия кинематического условия на границе (5) и определения функции v_r (12). Равенство (18) выражает факт отсутствия касательных напряжений на свободной границе; оно следует из условия (6) и выражения для $D_{r\theta}$ (11). Уравнение (15) получается в результате исключения давления p, определенного формулой (12), из соотношений

$$-p + 2\rho\nu\frac{\partial v_r}{\partial r} = (-1)^{i-1}\frac{\sigma}{r} \qquad r = r_i(t), \quad t > 0.$$

Последние соотношения вытекают из (6), (11).

Важным свойством задачи (13)—(18) является наличие законов сохранения

$$r_2^2(t) - r_1^2(t) = r_{20}^2 - r_{10}^2 = S/\pi, \quad t > 0,$$

$$\int\limits_{r_1(t)}^{r_2(t)} r^2 v(r, t)\,dr = \int\limits_{r_{10}}^{r_{20}} r^2 v_0(r)\,dr = L/2\pi\rho, \quad t > 0. \tag{19}$$

Здесь S — площадь кольца, L — момент импульса. Соотношение (19) позволяет не только снизить число искомых функций в исследуемой задаче, но и редуцировать ее к задаче в фиксированной области путем введения новой пространственной переменной $\xi = r^2 - r_1^2(t)$ (аналог массовой лагранжевой координаты, широко используемой в одномерных задачах газовой динамики).

В случае $\sigma > 0$ задача (13)—(18) исследовалась О.М. Лаврентьевой [23], см. также [6]. Ею доказана однозначная разрешимость задачи и исследованы качественные свойства решения. Введем в рассмотрение безразмерный параметр

$$\alpha = \frac{4\pi^{1/2}L^2}{\rho\sigma S^{5/2}},$$

характеризующий отношение центробежных и капиллярных сил в рассматриваемом движении. Вследствие (19) величина α не зависит от времени и определяется начальными данными (16), (17). Оказывается, что при $\alpha > \alpha^* \approx 5{,}89$ задача (13)—(18) имеет два стационарных решения, описывающих вращение кольца как твердого тела с постоянной угловой скоростью $\omega = 2L / \rho S(r_{20}^2 + r_{10}^2)$. Если $\alpha < \alpha^*$, стационарных решений задачи не существует.

В процессе движения кинетическая энергия жидкости диссипируется, а момент импульса сохраняется. Естественно ожидать, что в пределе $t \to \infty$ движение стабилизируется к состоянию твердотельного вращения. Но при определенных условиями (16), (17) величинах L, S, таких что $\alpha < \alpha^*$, этим состоянием может быть только вращение круга. В работе [23] эти соображения облечены в строгую математическую форму. Установлено, что при $t \to \infty$ происходит стабилизация либо к вращению кольца как твердого тела, либо к твердотельному вращению круга. В последнем случае топология области течения меняется со временем: существует такое t^*, что при $t \nearrow t^*$ внутренний радиус кольца $r_1 \to 0$. Этот процесс носит необратимый характер.

Если поверхностное натяжение отсутствует, то величина $r_1 \geqslant \mathrm{const} > 0$ при всех $t > 0$ [24]. При $L > 0$, в зависимости от начальных данных, возможны два режима расширения кольца: в одном из них $r_1 \leqslant C_1 t^{1/2}$ при $t \to \infty$ (типично вязкий режим), а в другом $r_1 \geqslant C_2 t$, что характерно для вращающегося кольца идеальной жидкости [25] (здесь C_1, C_2 — положительные постоянные). Это роднит данную задачу с известной задачей Е.И. Забабахина о заполнении пузырька в вязкой жидкости [26].

Задача (13)—(18) содержит много параметров; этим можно воспользоваться для построения ее приближенного решения в случае малости некоторых из них. Обозначим $V = \max|v_0(r)|$, $r_{10} \leqslant r \leqslant r_{20}$, и предположим, что параметр $\varepsilon = (\nu/r_{10}V)^{1/2}$ достаточно мал. В пределе $\nu \to 0$ мы получим задачу о движении вращающегося кольца идеальной жидкости, которая решается в квадратурах [25]. Поскольку в этом решении, вообще говоря, не выполняется условие (18), то при малых ν вблизи свободных границ кольца возникают пограничные слои с толщиной порядка $(\nu t)^{1/2}$. Схема построения формальной асимптотики решений двумерных уравнений Навье—Стокса, содержащей нестационарные пограничные слои вблизи свободной поверхности, разработана в [27]. На ее основе построена асимптотика решения задачи (13)—(18) при $\nu \to 0$, справедливая на любом конечном интервале времени [28], (см. также [6]). Там же дана оценка близости асимптотического решения задачи к ее точному решению.

Пусть теперь $\sigma > 0$ и параметр $\delta = \sigma r_{10}/\rho\nu^2$ является малым. В этом случае оказывается эффективным квазистационарное приближение к решению задачи (13)—(18). Уравнения квазистационарного приближения в задаче о движении изолированного жидкого объема выведены в работе [29]. В.А. Солонниковым [30] получена оценка разности точного решения указанной задачи и главного члена ее квазистационарной асимптотики. Построение полного асимптотического разложения решения задачи (13)—(18) при $\delta \to 0$ и его обоснование выполнено в работе [31]. Примечательно, что главный член асимптотики функции $r_1(t)$ дается квадратурой, а функция $v(r,\ t)$ на временах порядка δ и больших хорошо приближается следующей: $v = 2Lr/\rho S(S + 2\pi^{-1}r_1^2)$, что соответствует квазитвердому вращению кольца с мгновенной угловой скоростью, определяемой при заданном $r_1(t)$ с помощью законов сохранения (19). Отметим еще, что в ситуации, когда кольцо превращается в круг в момент времени t^*, квазистационарная асимптотика остается справедливой вплоть до этого момента.

6. ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЕВСКОГО ТИПА

Рассмотрим подгруппу $H \subset G_\infty$, порожденную оператором $X_3 - \Phi \equiv \partial/\partial x_3 - \varphi(t)\partial/\partial p$. Полный набор инвариантов H дается формулами: $I_1 = x_1,\ I_2 = x_2,\ I_3 = t,\ I_4 = v_1,\ I_5 = v_2,\ I_6 = v_3,\ I_7 = p + \varphi(t)x_3$. В соответствии с этим, инвариантное H — решение имеет вид

$$v_i = v_i(x_1, x_2, t),\ \ i = 1, 2, 3;\ \ p = -\varphi(t)x_3 + q(x_1, x_2, t), \tag{20}$$

а система (1), (2) редуцируется к виду

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u}\cdot\nabla_2\mathbf{u} = -\rho^{-1}\nabla_2 q + \nu\Delta_2\mathbf{u},\ \ \nabla_2\mathbf{u} = 0, \tag{21}$$

$$w_t + \mathbf{u}\cdot\nabla_2 w = \rho^{-1}\varphi(t) + \nu\Delta_2 w, \tag{22}$$

где $\mathbf{u} = (v_1,\ v_2)$, $w = v_3$; ∇_2 и Δ_2 обозначают вектор градиента и лаплассиан по переменным $x_1,\ x_2$. Система (21) описывает плоские движения жидкости. Если ее решение $\mathbf{u}$, q известно, то функция w определяется из линейного уравнения (22).

Система (21) допускает тривиальное решение $\mathbf{u} = 0$, $q = \mathrm{const}$. В этом случае уравнение (22) упрощается до следующего:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) = \frac{1}{\rho}\varphi(t). \qquad (23)$$

Уравнение (23) — это обычное уравнение теплопроводности, где роль коэффициента температуропроводности играет коэффициент вязкости ν, а функция $\varphi(t)$ в представлении (20) пропорциональна плотности внешних источников тепла. Сформулируем начально-краевую задачу для этого уравнения:

$$w = w_0(x_1, x_2), \ \ (x_1, x_2) \in \Omega, \ \ t = 0, \qquad (24)$$

$$w = 0, \ \ (x_1, x_2) \in \Sigma, \ \ t \geqslant 0, \qquad (25)$$

где Ω — ограниченная область плоскости x_1, x_2 с границей Σ. Ее решение описывает движение жидкости в цилиндре $(x_1, x_2) \in \Omega$, $x_3 \in \mathbb{R}$, возникающее из начального состояния под действием заданного градиента давления $\nabla p = (0, 0, -\varphi(t))$. На границе цилиндра выполнено условие прилипания $\mathbf{v} = 0$. Объемный расход жидкости через поперечное сечение дается формулой

$$Q(t) = \int_\Omega w(x_1, x_2, t)\,dx_1 dx_2\,. \qquad (26)$$

Задача (23)—(25) является стандартной в теории параболических уравнений. Вместе с тем, не меньший физический интерес представляет обратная задача: найти функцию $\varphi(t)$ (т.е. градиент давления) и решение уравнения (23), удовлетворяющее условиям (24), (25) и дополнительному условию (26), где $Q(t)$ (расход) — заданная функция времени. Однозначная разрешимость этой задачи при соответствующих условиях гладкости и согласования на входные данные доказана в работе [32]. Если функция Q с экспоненциальной скоростью стремится к пределу при $t \to \infty$, то с той же скоростью решение w, φ обратной задачи сходится к стационарному пределу [33].

Пусть $\varphi(t) = \mathrm{const} = A \neq 0$. Решение задачи Дирихле (25) для уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = -\frac{A}{\rho\nu}, \ \ (x_1, x_2) \in \Omega \qquad (27)$$

определяет классическое течение Пуазейля [10, 11]. Наиболее простое и важное решение этой задачи соответствует случаю, когда Ω — круг $(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} = r < a$, и имеет вид $w = A(a^2 - r^2)/4\rho\nu$, а связь между расходом Q и градиентом давления здесь дается формулой $Q = \pi A a^4/8\rho\nu$. Если предположить, что при поддержании постоянного перепада давления δp между входным и выходным сечениями круглой трубы длины $l \gg a$ реализуется течение, близкое к течению Пуазейля, то приближенно $A = \delta p/l$, и связь между расходом и перепадом давления принимает вид

$$Q = \frac{\pi \delta p a^4}{8\rho\nu l}. \tag{28}$$

Зависимость (28) впервые была обнаружена экспериментально Г. Гагеном (1839) и независимо Пуазейлем (1840). Формула (28), устанавливающая постоянство отношения Q/a^4 при изменении параметров течения, дает убедительное подтверждение факту отсутствия скольжения на стенке трубы. Эта формула получила подтверждение в последующих экспериментах при условии, что число Рейнольдса $\mathrm{Re} = Q/\pi a\nu$ не превосходит некоторого значения Re^* порядка 10^4 (оно зависит от условий эксперимента). При превышении числом Рейнольдса критического значения стационарное течение жидкости в трубе не реализуется.

Стационарные течения пуазейлевского типа возникают и в ситуации, когда часть границы области течения является свободной. Простейшее из них — течение Нуссельта в слое жидкости по наклонной плоскости. Обозначим через α угол наклона плоскости к горизонту и через g — ускорение силы тяжести. Направим ось x_1 вдоль плоскости, а ось x_2 — по нормали к ней. Решение Нуссельта (1916) описывает плоское течение с прямолинейной плоской границей и полем скоростей и давлений вида

$$v_1 = \frac{g \sin\alpha}{2\nu}(2x_2 h - h^2), \quad v_2 = 0, \quad p = p_0 + \rho g \cos\alpha(h - x_2) \tag{29}$$

(здесь p_0 — атмосферное давление). Решению (29) соответствует расход жидкости на единицу ширины слоя $Q = gh^3\sin\alpha/3\nu$ и число Рейнольдса $\mathrm{Re} = Q/\nu$.

Как показал П.Л. Капица [34], стационарное течение (29) вдоль вертикальной стенки является неустойчивым. В его экспериментах неустойчивость наблюдалась при весьма малых числах Рейнольдса. На смену режиму (29) приходит волновой режим движения, в котором функции $\mathbf{v}$, p и толщина слоя h зависят от переменных $x_1 - ct$ и x_2, причем зависимость от первой из них близка к периодической, а скорость бегущей волны c — к утроенной средней скорости v_1. Капица предложил также первую приближенную модель описания волновых движений в тонких слоях жидкости. Существование бегущих волн в слое на вертикальной стенке при сколь угодно малых числах Рейнольдса Re установлено в работе [35], в которой данная задача рассматривалась в точной постановке как задача с неизвестной границей для полных уравнений Навье-Стокса. Заметим, что сам факт существования бегущих волн в задаче Капицы имеет теоретико-групповую природу: он связан с инвариантностью уравнений (1), (2) и условий (5), (6) относительно преобразования Галилея. Т.Б. Бенджамин [36] показал, что решение (29) неустойчиво по отношению к длинноволновым возмущениям, если $\mathrm{Re} > 5\mathrm{ctg}\alpha/6$. К настоящему времени теория волновых движений жидких пленок представляет самостоятельный раздел гидродинамики, имеющий многочисленные приложения (см. монографию [37] и имеющиеся в ней ссылки).

Еще один содержательный пример течения пуазейлевского типа представляет стационарное движение жидкости в виде ручейка на нижней части поверхности наклонного цилиндра [38]. Обозначим через a радиус цилиндра, через α угол наклона его образующих к горизонту и поместим начала координат в центр кругового поперечного сечения цилиндра. Декартовы координаты в этом сечении обозначим x_1, x_2, так что ось x_1 горизонтальна, а ось x_2 направлена по нормали к поверхности цилиндра. Искомое решение имеет вид $v_1 = v_2 = 0$, $v_3 = w(x_1, x_2)$, $p = p(x_2)$, где функция w удовлетворяет уравнению (27), в котором $A = \rho g\sin\alpha$, а функция p — уравнению $dp/dx_2 = \rho g\cos\alpha$.

Обозначим сечение области течения плоскостью $x_3 = 0$ через Ω. Граница области Ω состоит из двух частей: твердой поверхности Σ, на которой выполнено условие прилипания (25), и свободной границы Γ, на которой ставятся условие отсутствия касательного напряжения

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0\,, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma \tag{30}$$

и условие равенства нормального напряжения капиллярному давлению. Поскольку в рассматриваемом решении $v_1 = v_2 = 0$, а $p = \rho g x_2 \cos\alpha + \mathrm{const}$, то последнее условие записывается в виде

$$\sigma K + g\rho x_2 \cos\alpha = \sigma K_0\,. \tag{31}$$

Здесь K — кривизна кривой Γ, K_0 — ее значение в нижней точке ручейка, где $x_2 = 0$. Соотношение (31) — это дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $x_2 = f(x_1)$, задающей свободную границу Γ. Его решение однозначно определяется условием симметрии $f'(0) = 0$ и заданием параметров K_0 и H, где H — полный перепад высот в ручейке.

Таким образом, изучаемая задача сведена к определению формы свободной поверхности Γ из уравнения капиллярной гидростатики (31) и последующего решения смешанной краевой задачи (25), (30) для уравнения Пуассона (27). В работе [38] найдено полное семейство кривых, описывающих форму свободной поверхности ручейка, и численно решена задача (25), (27), (30) определения поля скорости в ручейковом течении. Интересным является эффект очень слабой зависимости ширины ручейка от геометрических и режимных параметров. Результаты расчетов высоты и ширина ручейка сопоставлялись с данными экспериментов [39] и обнаружили хорошее соответствие с этими данными.

Отметим, что все рассмотренные в этом разделе решения объединяет одно свойство: траектории жидких частиц в них являются прямыми линиями, параллельными оси x_3. Однако ими не исчерпывается весь класс инвариантных H—решений системы (1), (2). Более сложные картины течений получаются, если рассмотреть нетривиальные решения системы (21). Например, на этом пути может быть получено решение следующей задачи. Жидкость заполняет пространство между двумя цилиндрическими твердыми поверхностями. Оси цилиндров параллельны оси x_3, но не обязаны совпадать. Внешний цилиндр неподвижен, а внутренний вращается вокруг оси с заданной угловой скоростью. Кроме того, задана продольная составляющая градиента давления $\partial p/\partial x_3 = -\varphi(t)$.

Мы приходим к обобщению классической задачи о подшипнике на случай, когда жидкость в зазоре между цилиндрами прокачивается вдоль осей цилиндров заданным перепадом давления.

7. РЕШЕНИЕ ДЖЕФФРИ—ГАМЕЛЯ И ЕГО ОБОБЩЕНИЯ

В этом разделе рассматриваются стационарные автомодельные решения двумерной системы (1), (2). Класс таких решений был открыт и первоначально исследован Дж.Б. Джеффри [40] и Г. Гамелем [41]. Этот класс оказался настолько содержательным, что исследование решений Джеффри—Гамеля и их обобщений продолжается до сих пор (см. статьи [42, 43] и имеющиеся там ссылки).

Итак, рассматривается плоское стационарное течение в секторе $|\theta| < \beta$, ограниченном двумя твердыми непроницаемыми линиями $\theta = \pm\beta$. В начале координат помещен источник или сток жидкости заданной мощности Q. Область течения, условие прилипания $\mathbf{v} = 0$ при $\theta = \pm\beta$, $r > 0$ и дополнительное условие расхода

$$\int_{-\beta}^{\beta} r v_r \, d\theta = Q$$

инвариантны относительно преобразования растяжения с оператором Z (3). Это позволяет искать решение системы (10) с $w_z = 0$ в виде

$$v_r = \frac{\nu}{r} f(\theta), \quad v_\theta = \frac{\nu}{r} g(\theta), \quad p = \frac{\rho\nu^2}{r^2} h(\theta). \qquad (32)$$

При этом условие расхода переписывается как

$$\int_{-\beta}^{\beta} f(\theta)d\theta = \mathrm{Re}\,, \tag{33}$$

где $\mathrm{Re} = Q/\nu$ — число Рейнольдса, а уравнение неразрывности в системе (10) вместе с условием прилипания приводит к следствию $g = 0$. Таким образом, рассматриваемое течение является чисто радиальным.

Подстановка (32) во второе уравнение системы (10) приводит к интегралу

$$2f - h = C\,, \tag{34}$$

где $C = const$. Используя (34) и подставляя выражения (32) при $g = 0$ в первое уравнение (10), мы получаем:

$$f'' + 4f + f^2 = C\,,\ \ |\,\theta\,| < \beta \tag{35}$$

Условия прилипания означают, что

$$f(\beta) = f(-\beta) = 0\,. \tag{36}$$

Задача Джеффри—Гамеля состоит в отыскании постоянной C и решения уравнения (35), удовлетворяющего условиям (33), (36). При этом параметры $\beta \in (0,\ \pi]$ и $\mathrm{Re} \in \mathbb{R}$ считаются заданными. Параметр Re может принимать как положительные, так и отрицательные значения. В первом случае решение задачи Джеффри—Гамеля описывает течение в диффузоре, а во втором — течение в конфузоре. Качественное поведение решений различно для течений диффузорного и конфузорного типов; оно также существенно зависит от величины угла β.

Теорема существования и единственности решения задачи (33), (35), (36) при малых $|\mathrm{Re}|$ и $\beta \neq \beta^*$, где $\beta^* \approx 2{,}25$ — корень уравнения $\mathrm{tg}\beta = \beta$, доказана в работе [44]. Случай $\beta = \beta^*$ соответствует наличию нетривиальных решений линеаризованной однородной задачи ($C = 0$, $\mathrm{Re} = 0$). Оказывается, что единственность решения задачи Джеффри—Гамеля может нарушиться для больших значений $|\mathrm{Re}|$.

Рассмотрим сначала случай течения в конфузоре ($\mathrm{Re} < 0$). Этот случай наиболее исследован в теоретическом плане. Кроме того, изучение сходящихся течений в плоском конфузоре важно для технологических приложений, например, для производства пластмасс и металлических листов. Предположим сначала, что $\beta < \pi/2$. Если $\mathrm{Re} < 0$ и $|\mathrm{Re}|$ достаточно велик, задача Джеффри—Гамеля имеет решение, в котором вне пограничных слоев, примыкающих к стенкам конфузора $\theta = \pm\beta$, течение близко к потенциальному с $f = \mathrm{const}$, а внутри этих зон решение асимптотически приближается к автомодельному решению уравнений пограничного слоя Прандтля [10]. Данная задача представляет редкий (и, возможно, первый) пример ситуации, где не только доказана асимптотическая близость решений уравнений Навье—Стокса и Прандтля при больших числах Рейнольдса, но и даны эффективные оценки разности двух решений при $|\mathrm{Re}| \to \infty$ [45]. Отметим, что функция f здесь принимает только отрицательные значения в интервале $(-\beta, \beta)$ и является четной функцией θ.

Ситуация качественно меняется, когда $\beta > \pi/2$, т.е. угол раствора конфузора больше развернутого. В работе [42] численно аналитическим методом установлено наличие немонотонных "трехмодовых" решений задачи (33), (35), (36) при достаточно больших значениях $|\mathrm{Re}|$. В этих решениях функция $f(\theta)$ четна и отрицательна вблизи границ интервала $(-\beta, \beta)$, а в окрестности линии симметрии $\theta = 0$ она становится положительной.

Еще более неожиданным свойством задачи Джеффри—Гамеля при $\mathrm{Re} < 0$ является наличие у нее несимметричных решений. Ранее [10, 11] считалось, что существование таких решений — это привилегия диффузорных течений с большими значениями параметра $\beta\mathrm{Re}$. В работе [46] численно-аналитическим методом построены несимметричные многомодовые (с числом n перемен знака функции f внутри интервала $(-\beta, \beta)$, равным 3 и 5), а также симметричные многомодовые с $n = 2$ и 4 решения задачи (33), (35), (36). Оказалась, что это свойство проявляется и при малых значениях угла β, что часто встречается в приложениях; при этом величина $\beta\mathrm{Re}$ должна быть не слишком малой.

Рассмотрим теперь течение в диффузоре ($\mathrm{Re} > 0$). Здесь неединственность решения задачи (33), (35), (36) была обнаружена давно [47] (см. также [10, 11]), но полный анализ ситуации выполнен лишь сейчас [43, 48]. Для неограниченного интервала значений $\mathrm{Re} > 0$ установлено существование счетного множества примыкающих друг к другу интервалов, в каждом из которых происходит сложная бифуркация течений. Возрастание $\mathrm{Re} \to \infty$ и соответствующее увеличение номера интервала приводит к неограниченному возрастанию его длины и количества мод допустимых решений. Первый интервал $0 < \mathrm{Re} < \mathrm{Re}_1(\beta)$ соответствует чисто расходящемуся течению ($f > 0$ для всех θ, $|\theta| < \beta$). При $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_1$ в области течения возникают зоны противотока. Зависимость Re_1 от β вычислена в [48]. Оказалось, что $\beta\mathrm{Re}_1 \to 3\pi$ при $\beta \to 0$. Функция $\beta\mathrm{Re}_1(\beta)$ монотонно убывает и обращается в нуль при $\beta = \pi/2$ (т.е. когда область течения становится полуплоскостью).

Результаты работ [43, 48] способствуют пониманию механизма потери устойчивости диффузорных течений при увеличении числа Рейнольдса. Они также представляют интерес для геофизических и технических приложений. Эти результаты, как и результаты работ [42, 46], получены с помощью оригинального итерационного метода ускоренной сходимости [49] для решения одномерных вариационных задач с ограничениями изопериметрического типа. Метод был апробирован на классическом варианте задачи Джеффри—Гамеля (конфузорное одномодовое течение с $\beta < \pi/2$) и показал высокую эффективность [50].

Уместно поставить вопросы о физической реализуемости и асимптотическом характере течения Джеффри—Гамеля. С этой целью рассмотрим тензор скоростей деформации D, соответствующий вектору скорости (32), и заметим, что объемная плотность диссипации кинетической энергии в единицу времени при движении вязкой несжимаемой жидкости есть $2\rho\nu D : D$. Подсчитаем скорость диссипации энергии $I_{a,\,b}$ в криволинейном четырехугольнике, ограниченном отрезками лучей $\theta = \pm\beta$ и дугами окружностей $r = a$, $r = b > a$. В соответствии с (11), (32) будем иметь

$$I_{a,b} = 2\rho\nu^3\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\int\limits_{-\beta}^{\beta}\left(f^2 + \frac{1}{4}f'^2\right)d\theta\,.$$

Видно, что $I_{a,\,b} \to \infty$ при $a \to 0$; с другой стороны, если $a > 0$ фиксировано, а $b \to \infty$, то величина $I_{a,\,b}$ стремится к конечному пределу. Таким образом, продолжение решения Джеффри—Гамеля вплоть до $r = 0$ приводит к расходимости интеграла диссипации энергии. Вместе с тем, можно ожидать, что это решение хорошо описывает асимптотику течения жидкости в областях с секториальными выходами на бесконечность. Этот вопрос рассмотрен в работах [44, 51].

Пусть область течения $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ представима в виде

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_m\,,$$

где Ω_0 ограничена, а Ω_i $(i = 1,\ \ldots,\ m)$ — неограниченные области. Предположим, что граница Ω состоит из нескольких гладких кривых и неограниченных прямых линий и что Ω_i суть подобласти бесконечных секторов S_i с углами раствора θ_i. В области Ω рассматривается стационарная краевая задача для двумерных уравнений Навье—Стокса с условиями прилипания на границе этой области

$$\mathbf{v} = 0\,, \quad x \in \partial\Omega \tag{37}$$

и дополнительными условиями расходов

$$\int\limits_{\Sigma_i} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}\,d\Sigma = F_i\,, \quad i = 1,\ldots,m\,, \tag{38}$$

где Σ_i — поперечные сечения Ω_i, а F_i — заданные числа, сумма которых равна нулю.

Теорема 2 [44]. Предположим, что углы раствора θ_i области Ω_i удовлетворяют условию $\theta_i < \pi$, и что расходы F_i достаточно малы,

$$\nu^{-1}\sum_{i=1}^{m}|F_i| \leqslant \varepsilon \ll 1.$$

Тогда задача (1), (37), (38) имеет обобщенное решение, которое непрерывно по Гельдеру в Ω с некоторым показателем $\alpha \in (0, 1)$ и для больших $|x|$, $x \to \Omega_i$, $i = 1, \ldots, m$, удовлетворяет неравенству

$$|\mathbf{v}(x) - \mathbf{V}_i(x)| + |x||p(x) - P_i(x) - \bar{p}_i| \leqslant C|x|^{-1-\beta_i}\sum_{i=1}^{m}|F_i|,$$

где C, $\beta_i > 0$ и $\bar{p}_i$ — постоянные, а $(\mathbf{V}_i(x), P_i(x))$ — скорость и давление, соответствующие течению Джеффри—Гамеля в секторе S_i с углом раствора θ_i и расходом F_i.

Вопрос о том, можно ли в формулировке теоремы 2 снять условие малости расходов, остается открытым. Этот вопрос труден хотя бы потому, что при больших значениях величины $|F_i|/\nu$ решение задачи Джеффри—Гамеля может оказаться неединственным.

Выше уже отмечалось, что решение Джеффри—Гамеля является инвариантным решением двумерной системы уравнений Навье—Стокса относительно преобразования растяжения. Будучи стационарным, оно также инвариантно относительно переноса по времени. Откажемся теперь от условия стационарности решения, но сохраним его автомодельность. В этом случае представление инвариантного решения имеет вид

$$v_r = \frac{\nu}{r}\tilde{f}(\theta,\xi), \quad v_\theta = \frac{\nu}{r}\tilde{g}(\theta,\xi), \quad p = \frac{\rho\nu^2}{r^2}\tilde{h}(\theta,\xi),$$

где $\xi = r/\sqrt{\nu t}$ — инвариант группы растяжений, допускаемой системой (1). Функции $\tilde{f}$, $\tilde{g}$, $\tilde{h}$ определяются из системы уравнений, которая может быть сведена к одному квазилинейному эллиптическому уравнению 4-го порядка для функции тока $\Psi(r, \theta, t) = \Psi(\theta, \xi)$, связанной с компонентами скорости соотношениями $v_r = \nu r^{-1}\partial\Psi/\partial\theta$, $v_\theta = -\nu\partial\Psi/\partial r$.

Постановка нестационарной задачи для системы (1) требует задания начального поля скоростей, которое должно быть соленоидальным и масштабно инвариантным. Это возможно в случае, когда

$$v_r = \frac{\nu}{r}f_0(\theta), \quad v_\theta = 0 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Здесь f_0 — заданная гладкая функция $\theta \in [-\beta, \beta]$, удовлетворяющая условиям $f_0(\pm\beta) = 0$ (следствие условия прилипания), а в остальном произвольная. Таким образом, на основе автомодельных решений можно изучить эволюцию течения вязкой несжимаемой жидкости в диффузоре с начальным распределением скоростей, не имеющим трансверсальной компоненты. Для этого следует решить краевую задачу в секторе для упомянутого эллиптического уравнения, которому удовлетворяет функция $\Psi(\theta,\ \xi)$. Эта задача решена численно в работе [51] для различных видов функции $\Psi_0(\theta) = \lim\limits_{\xi\to\infty}\Psi(\theta,\xi)$, являющейся первообразной функции $f_0(\theta)$. Характер возникающего (нерадиального!) течения во многом зависит от величины $\Psi_0(\beta) - \Psi_0(-\beta) = \tilde{Q}$, где $\tilde{Q}$ — суммарный безразмерный расход жидкости через поперечное сечение сектора (аналог числа Рейнольдса). При умеренных значениях $|\tilde{Q}|$ с ростом t (что соответствует уменьшению $\xi = r/\sqrt{\nu t}$) происходит стабилизация в любой конечной части сектора к течению Джеффри—Гамеля с $\mathrm{Re} = \tilde{Q}$.

Случай $\tilde{Q} = 0$ (но $f_0 \not\equiv 0$) является особым. Он выделен тем, что в этом (и только в этом) случае скорость диссипации энергии в секторе, занятом жидкостью, остается конечной при всех $t > 0$. В [51] были выполнены расчеты для начальной функции $\Psi_0 = (\theta^2 - \beta^2)^2/\beta^4$, $\beta = \pi/12$. С ростом времени, благодаря действию вязкости, появляется трансверсальная компонента скорости; кроме того, функция Ψ теряет свойство четности относительно θ которое, впрочем, восстанавливается в пределе $\xi \to 0$ (т.е. $t \to \infty$). Появление окружной компоненты скорости вместе с затуханием радиальной компоненты приводит к образованию системы вихрей с уменьшающейся интенсивностью при $\xi \to 0$. Вихри с относительно большой интенсивностью несимметричны ввиду действия сил инерции. При приближении к началу координат вихри уменьшают размеры и интенсивность и одновременно симметризуются. Если $t \to \infty$, то в любом конечном секторе течение стабилизируется к системе стационарных вихрей, найденных Х.К. Моффаттом [52].

Вернемся к стационарным автомодельным решениям системы (1) в плоском случае. Оказывается, что их интерпретация в виде течения в секторе, ограниченном твердыми стенками, не единственно возможная. Далее предположим, что границы сектора суть лучи $\theta = 0$ и $\theta = \gamma$. Эти линии являются инвариантными многообразиями группы растяжений. Если принять одну из них (например, $\theta = \gamma$) за свободную границу, то в случае отсутствия поверхностного натяжения на основании теоремы 1 из раздела 3 мы можем утверждать, что условия на свободной границе (5), (6) приводят к некоторым условиям для инвариантов f, g, h группы с оператором Z. Как уже отмечалось, вследствие уравнения неразрывности и представления (32) $g = \mathrm{const}$, а в силу условия (5), выполненного на линии $\theta = \gamma$, возникающая постоянная с неизбежностью равняется нулю. Таким образом, возникающее течение, как и течение Джеффри-Гамеля, является радиальным.

Пользуясь формулами (11) для вычисления элементов тензора D в полярных координатах и учитывая равенства (32), мы получаем из условия (6) при $\sigma = 0$ следующие равенства:

$$2f - h = 0\,,\ \ f' = 0 \qquad \theta = \gamma\,. \tag{39}$$

Первое из равенств (39) вместе с соотношением (34), выполненном при всех $\theta \in [0, \gamma]$, показывает, что $C = 0$. Тогда уравнение (35) принимает вид

$$f'' + 4f + f^2 = 0\,, \quad 0 < \theta < \gamma\,. \tag{40}$$

Предполагая, что вторая часть границы сектора $\theta = 0$ является твердой стенкой, на которой выполнено условие прилипания, и используя второе из равенств (39), получим краевые условия для уравнения (40):

$$f(0) = f'(\gamma) = 0\,. \tag{41}$$

Теперь заметим, что ввиду прямолинейности свободной границы правая часть в условии (6) обращается в нуль. Поэтому первое из равенств (39) сохраняет свой вид и при $\sigma \neq 0$. И хотя теорема 1 не гарантирует инвариантности соотношений на свободной границе в этом случае, мы имеем здесь факт условной инвариантности данных соотношений на инвариантном многообразии специального вида.

Присоединим к (41) условие расхода

$$\int_0^\gamma f(\theta)d\theta = \mathrm{Re}\,, \tag{42}$$

где $\mathrm{Re} = Q/\nu$ — число Рейнольдса, а Q — размерный расход жидкости через начало координат. Положительность Re означает наличие источника, а отрицательность — наличие стока в начале координат. Сформулируем задачу I: при заданном Re найти функцию $f(\theta)$ и число $\gamma \in (0, 2\pi)$ так, чтобы выполнялись соотношения (40)—(42). Наряду с этой задачей, рассмотрим задачу II: найти функцию $f(\theta)$ и параметр γ, чтобы удовлетворялись уравнение (40), условие (42) и условия

$$f'(0) = f'(\gamma) = 0\,. \tag{43}$$

Первое из условий (43) означает, что и вторая сторона сектора является свободной границей. Отличие задач I и II от классической задачи Джеффри—Гамеля состоит в отсутствии дополнительной постоянной C, входящей в уравнение (35). Поэтому при произвольно заданных величинах Re и γ задачи I, II, вообще говоря, не имеют решений. То, что угол раствора сектора γ является искомой величиной, и означает “свободность” границы в этих одномерных задачах.

Задачи I и II изучались в работе [18] (см. также [6, 9]). Оказалось, что задача II имеет по крайней мере одно решение при $-8\pi < \mathrm{Re} \leqslant 0$ и не имеет решений при $\mathrm{Re} > 0$, $\mathrm{Re} \leqslant -8\pi$. При малых $|\mathrm{Re}|$ эта задача имеет 7 решений, с ростом $|\mathrm{Re}|$ ее решения исчезают парами и при Re, близком к -8π, остается одно решение $f = -4$. Это решение — единственное, в котором функция $f(\theta)$ не меняет знака на интервале $[0, \gamma]$.

Что касается задачи I, то она имеет, в зависимости от Re, от одного до 4-х решений, если $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_1 \approx -22{,}65$. Как и в случае задачи II, среди нескольких решений задачи I лишь одно является знакопостоянным. Если $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_2 \approx 1{,}66$, решение задачи I единственно, и в этом решении $f > 0$ при $0 < \theta \leqslant \gamma$. Неожиданным является поведение решения этой задачи при $\mathrm{Re} \to \infty$:

$$\gamma = \frac{1}{2\,\mathrm{Re}}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \,\mathrm{Re}^{-2k}\right),$$

$$f(\theta) = \frac{1}{\gamma^2}\sum_{i=0}^{\infty}\gamma^{2i} y_i\left(\frac{\theta}{\gamma}\right).$$

Функции $y_i(\varphi)$ и постоянные C_k определяются из рекуррентных соотношений. Примечательно, что угловой размер γ области течения при больших Re много меньше такого при течении Джеффри—Гамеля в конфузоре (толщина пограничных слоев вблизи стенок конфузора там имеет порядок $|\mathrm{Re}|^{-1/2}$ [10, 45]). Структура полученной асимптотики показывает, что вообще не существует узких зон, примыкающих к твердой стенке и свободной границе, в которых решение описывалось бы функциями типа погранслоя, и заключенного между ними "ядра", где влияние вязкости при $\mathrm{Re} \to \infty$ пренебрежимо мало.

В заключение этого раздела упомянем работу [53], в которой убедительно показана роль точных решений уравнений Навье—Стокса как предельных режимов течения вязкой жидкости в областях большой протяженности. Рассматривается плоская стационарная задача о стекании тяжелой жидкости вдоль бесконечной наклонной стенки в бассейн бесконечной глубины. Пусть x_1 — горизонтальная, а x_2 — вертикальная координата, α — угол наклона стенки к горизонту и ускорение силы тяжести $\mathbf{g}$ направлено вертикально вниз, а уровень свободной границы в бассейне приближается к нулевому при $x_1 \to \infty$. В работе [53] доказано существование решения задачи при достаточно малых числах Рейнольдса $\mathrm{Re} = Q/\nu$, где Q — расход жидкости через поперечное сечение слоя, примыкающего к стенке. Установлено также, что при удалении вдоль стенки вверх решение задачи стремится к решению Нуссельта (29), а при $x_2 < 0$ и $(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} = r \to \infty$ решение близко к решению задачи (40)—(42); при этом асимптотическая ширина слоя h при заданных α, Re, g и ν определяется апостериори.

8. ЗАДАЧА ЗАБАБАХИНА

В этом и следующем разделах s обозначает сферический радиус, $s = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$.

Наличие в группе G_∞ трехмерной подгруппы вращений позволяет искать сферически симметричные решения системы (1), (2), в которых функции $\mathbf{v}$ и p зависят только от s и t, причем вектор $\mathbf{v}$ имеет лишь радиальную компоненту, которую мы обозначим через u. Уравнения (1), (2) в случае сферически симметричного движения допускают интегрирование по s, что приводит к соотношениям

$$u = \frac{\Phi(t)}{s^2}, \quad p = \rho\left(\frac{\Phi_t}{s} - \frac{\Phi^2}{2s^4}\right) + p_\infty, \tag{44}$$

где $\Phi(t)$ — функция, подлежащая определению, а p_∞ — давление на бесконечности, которое будем считать постоянным и положительным.

Решение (44) позволяет описать процесс заполнения сферического пузырька в вязкой жидкости под действием заданного перепада давления между бесконечностью и свободной поверхностью пузырька $s = a(t)$. Для этого необходимо подчинить искомые функции начальным условиям

$$a(0) = s_0, \quad a_t(0) = 0, \quad \Phi(0) = 0 \tag{45}$$

и краевым условиям, вытекающим из условий (5), (6) на свободной границе. Равенства (45) означают, что в начальный момент жидкость покоится, а начальный радиус пузырька равен s_0. Поставляя представление (44) в соотношения (5), (6), получаем уравнение для радиуса пузырька $a(t)$ и связь между функциями Φ и a:

$$2aa_{tt} + 3a_t^2 = -\frac{8\nu a_t}{a} - \frac{4\sigma}{\rho a} - \frac{2p_\infty}{\rho}, \quad \Phi = a^2 a_t. \tag{46}$$

Предельным случаем задачи (45), (46) является задача Рэлея о коллапсе сферической полости в идеальной жидкости [11]; здесь $\nu = 0$, $\sigma = 0$. В этом случае полость исчезает за конечное время t_*, а асимптотика скорости границы полости a_t такова: $a \sim c_1 a^{-3/2}$, $a \to 0$, если $t \to t_*$ (кумулятивный эффект). Случай $\nu > 0$, $\sigma = 0$ исследовал Е.И. Забабахин [26]. Он обнаружил, что существует два режима заполнения полости в зависимости от числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = (p_\infty/\rho)^{1/2} s_0 \nu^{-1}$. Если $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_* \approx 8{,}4$, пузырек исчезает за конечное время, и асимптотика решения вблизи коллапса такая же, как в задаче Рэлея, хотя величины t_* и c_1 зависят от Re. Если же $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_*$, то заполнение пузырька происходит за бесконечное время: кумуляция энергии полностью устраняется вязкостью. В промежуточном случае $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_*$ время заполнения конечно, но $a_t \sim c_2 a^{-1}$ при $a \to 0$. Заметим, что движение с полем скоростей (44) является потенциальным, и поэтому вязкие силы не вносят вклада в уравнение импульса (1), а проявляют себя только в динамическом условии на свободной границе (6). Результат Забабахина показывает, что это влияние может быть весьма существенным.

Включение в игру капиллярных сил приводит к новому качественному эффекту. Задача о заполнении пузырька в вязкой капиллярной жидкости исследовалась в дипломной работе выпускника Красноярского госуниверситета (1981 г.) В.А. Гальперина (ее результаты опубликованы в книге [55]). Вследствие (45), (46), в процессе движения выполнено неравенство $a_t < 0$, что позволяет перейти к новой независимой переменной α и новой искомой функции ς:

$$\alpha = \mathrm{Re}\, s_0^{-1} a\,, \quad \varsigma = (\rho / p_\infty)^{1/2} a_t\,.$$

Отметим, что величины α и ς безразмерны. Функция $\zeta(\alpha)$ является решением задачи Коши

$$\frac{d\varsigma}{d\alpha} = -\frac{3\alpha\varsigma^2 + 2\alpha + 8\varsigma + 4\beta}{2\alpha^2\varsigma} \quad \text{при} \quad \alpha < \mathrm{Re}\,, \;\; \varsigma(\mathrm{Re}) = 0\,, \qquad (47)$$

где $\beta = \sigma\nu^{-1}(\rho / p_\infty)^{1/2}$ — аналог числа Вебера.

Уравнение (47) имеет две особые точки: $\alpha = 0$, $\varsigma = -\beta/2$ и $\alpha = -2\beta$, $\varsigma = 0$. Вторая точка не представляет интереса, так как вблизи нее значения радиуса a отрицательны. Для анализа поведения решений вблизи особой точки $\alpha = 0$, $\varsigma = -\beta/2$ сделаем замену $\varsigma = \xi - \beta/2$. Функция $\xi^{-1}(\alpha)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\xi^{-1}}{d\alpha} = \frac{-12\alpha\xi^{-1} - 12\beta\alpha\xi^{-2} + 3\beta^2\alpha\xi^{-3} + 8\alpha\xi^{-3} + 32\xi^{-2}}{4\alpha^2(2 - \beta\xi^{-1})}\,. \qquad (48)$$

У уравнения (48) имеется единственная интегральная кривая, входящая в особую точку (0, 0) с ненулевым наклоном $\xi^{-1} = -\alpha/8$. Она является сепаратрисой, поскольку разграничивает два различных семейства решений. Интегральные кривые, расположенные выше сепаратрисы, входят в узел, где $\xi^{-1} \sim -\alpha^{3/2}$, а ниже сепаратрисы они образуют седло, причем $\xi^{-1} \sim -32\alpha^{-1}(3\beta^2 + 8)$ при $\alpha \to 0$.

Решению задачи отвечает та кривая, которая приходит в точку, соответствующую начальному условию $\alpha = \mathrm{Re}$, $\xi^{-1} = 2/\beta$ (т.е. $\varsigma = 0$). При разных числах Рейнольдса Re решения могут принадлежать к различным семействам. В случае принадлежности к узлу они соответствуют неограниченному возрастанию скорости a_t границы пузырька $a_t \sim \nu^{3/2}(\rho / p_\infty)^{1/4} a^{-3/2}$, $a \to 0$, а в случае седла — движению с ограниченной скоростью, $a_t \to -\sigma / 2\rho\nu$, $a \to 0$. Для сепаратрисы скорость в окрестности особой точки растет по закону $a_t \sim -\nu/a$. Важными характеристиками решения являются критическое число Рейнольдса Re_*, соответствующее сепаратрисе, и критический радиус пузырька $s_0^* = \mathrm{Re}_* \nu(\rho / p_\infty)^{1/2}$. Величина Re_* определяется путем продолжения сепаратрисы от $\alpha = 0$ до значения $\alpha = \mathrm{Re}_*(\beta)$, где $\xi = 0$. Значения β и $\mathrm{Re}_*(\beta)$ для ряда жидкостей при $p_\infty = 1$ атм приведены в [55]. В частности, для воды $\beta = 7{,}2$ и $\mathrm{Re}_* = 2{,}66$. Таким образом, наличие двух режимов заполнения пузырька имеет место и при учете капиллярных сил. Если начальный радиус пузырька меньше критического, то заполнение достигается за конечное время, и скорость границы пузырька в момент заполнения равна $-\sigma/2\rho\nu$.

9. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Здесь будут рассмотрены решения ранга 1 системы (1), (2), инвариантные относительно подгруппы $H\langle X_0, X_{12}, Z\rangle$. Они описывают стационарные автомодельные вращательно симметричные течения. Класс таких решений был открыт Н.А. Слезкиным [56]. Удобное представление решений получается, если в системе (10) считать искомые функции не зависящими от переменных t и θ, а их зависимость от пространственных координат r и z взять в масштабно-инвариантной форме. Переходя к полярным координатам s, φ на плоскости r, z, так что $r = s\sin\varphi$, $z = s\cos\varphi$ и обозначая U, V, W проекции вектора скорости на оси s, φ, θ мы приходим к представлению инвариантного решения в виде

$$U = \frac{F'(x)}{s}, \quad V = \frac{F(x)}{s\sin\varphi}, \quad W = \frac{\Omega(x)}{s\sin\varphi}, \tag{49}$$

где $x = \cos\varphi$. В результате уравнения Навье—Стокса редуцируются к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\nu(1-x^2)F'''' - 4\nu xF''' + FF''' + 3F'F'' = -2\Omega\Omega'/(1-x^2), \tag{50}$$

$$\nu(1-x^2)\Omega'' + F\Omega' = 0. \tag{51}$$

Система (50), (51) имеет семейство решений, в которых $\Omega = 0$. Им соответствуют осесимметричные течения. Уравнение (50) с $\Omega = 0$ допускает трехкратное интегрирование

$$\nu(1-x^2)F' + 2\nu xF + F^2/2 = C_0 + C_1x + C_2x^2 \tag{52}$$

(C_0, C_1, C_2 — постоянные) и последующую линеаризацию преобразованием Риккати, что позволяет выразить общее решение (52) в терминах гипергеометрических функций [57]. Наиболее простое из нетривиальных решений уравнения (52) было найдено Л.Д. Ландау [58]. Оно имеет вид

$$F = 2\nu\frac{1-x^2}{a-x}, \tag{53}$$

где $a > 1$ — постоянная. Подробный анализ решения Ландау имеется в учебниках [11, 12]. Согласно (49), (53), поле скоростей определено и регулярно во всем пространстве, за исключением начала координат. Имеющаяся там сингулярность интерпретируется как точечный импульсный источник; при этом расход жидкости через любую сферу с центром в начале координат равен нулю. Ю.Б. Румер [59] рассмотрел задачу о затопленной струе, вытекающей из тонкой трубы в пространство, заполненное вязкой жидкостью, и нашел асимптотику решения вдали от отверстия трубы. Оказалось, что решение Ландау дает главный член разложения решения уравнений Навье—Стокса по малому отношению d/s, где d — диаметр отверстия, а s — расстояние от места истечения струи. Следующий член разложения пропорционален расходу через поперечное сечение трубы.

Решение (53) уравнения (52) с $\Omega = 0$ является в известном смысле исключительным, так как не содержит особенностей на всем промежутке $|x| \leqslant 1$. Если использовать решения этого уравнения, неограниченные в одной из точек $x = \pm 1$, то можно согласовать решения класса (49) с условиями прилипания на плоской или конической твердой поверхности (если $z > 0$ — ось конуса, то эта поверхность есть инвариантное многообразие группы H). На этом пути были получены неожиданные результаты в задаче о взаимодействии распределенного источника с твердой плоскостью [60, 61].

Итак, пусть жидкость заполняет полупространство $z > 0$, граница которого — твердая неподвижная непроницаемая плоскость. На положительной полуоси z распределены источники или стоки с постоянной линейной плотностью Q, инициирующие стационарное автомодельное осесимметричное течение. Для его определения следует решить уравнение (52) при условиях

$$F(0) = 0\,, \quad F'(0) = 0\,, \tag{54}$$

$$\nu F(x) \to Q\,/\,2\pi\,, \quad \text{ограничено при} \quad x \to 1\,. \tag{55}$$

Равенства (54) гарантируют выполнение условий прилипания на плоскости $z = 0$. Первое из условий (55) задает обильность источника, а второе обеспечивает ограниченность осевой компоненты скорости при $r \to 0$, $(x \to 1)$. Нетрудно видеть, что решение задачи (52), (54), (55) зависит лишь от одного безразмерного параметра $\mathrm{Re} = Q/2\pi\nu$ (числа Рейнольдса). Случай $\mathrm{Re} > 0$ соответствует распределенному источнику, а $\mathrm{Re} < 0$ — стоку.

В работе А.А. Голубинского и В.В. Сычева [60] были построены решения задачи (52), (54), (55), аналитические в особой точке $x = 1$. Оказалось, что такие решения существуют лишь в диапазоне $-\infty < \mathrm{Re} < \mathrm{Re}_* \approx 0{,}847$. Аналитическое решение единственно, если $\mathrm{Re} \leqslant 0$. В интервале $0 < \mathrm{Re} < \mathrm{Re}_*$ имеется два аналитических решения с существенно различными качественными свойствами. Авторы книги [61] отказались от требования аналитичности решения, что позволило установить разрешимость обсуждаемой задачи при всех $\mathrm{Re} > 0$. Неаналитические решения обладают континуальным произволом. Для выделения единственного решения этого семейства при $\mathrm{Re} > 0$ следует задать величину продольной скорости на оси симметрии. Таким образом, автомодельные решения задачи о взаимодействии распреленного источника или стока с твердой плоскостью существуют для любых значений Re — как положительных, так и отрицательных. При этом в интервале $(0,\ \mathrm{Re}_*)$ имеется три решения данной задачи.

Предположим теперь, что плоскость $z = 0$ является свободной границей [62]. Очевидно, что эта плоскость есть инвариантное многообразие группы H. Теорема 1 (раздел 3) обеспечивает возможность записи граничных условий (5), (6) на свободной поверхности в терминах инвариантов H (но, конечно, не гарантирует разрешимость возникающей краевой задачи для уравнения (52)). Вместо (54) сейчас будем иметь

$$F(0) = 0\,,\ \ F''(0) = 0\,, \tag{56}$$

а второе из условий (55) здесь является лишним: в случае $\mathrm{Re} \geqslant 0$ оно выполняется автоматически; если же $\mathrm{Re} < 0$, то требование ограниченности F' при $x \to 1$ делает задачу неразрешимой. В работе [62] доказано, что задача (52), (56), (55') (т.е. первое условие (55)) имеет, и притом единственное, решение, если $\mathrm{Re} \geqslant -2$, и не имеет решений, если $\mathrm{Re} < -2$. В последнем случае любое решение уравнения (52), удовлетворяющее условию (55'), имеет целую последовательность особенностей, сходящуюся к $x \to 1$. Аналитические решения обсуждаемой задачи существуют лишь при трех значениях числа Рейнольдса, равных приблизительно 1,07; 3,34; 5,9.

Неаналитические решения имеют сильную особенность продольной скорости на оси симметрии, если $\mathrm{Re} \in [-2,\ 0)$, и слабую — если $\mathrm{Re} > 0$, причем с ростом Re эта особенность перемещается в сторону производных функции F все более высокого порядка. Свойства гладкости неаналитических решений задач (52), (54), (55) и (52), (56), (55') в зависимости от параметра Re вполне аналогичны. С другой стороны, имеется значительное различие в поведении решений обеих задач при $\mathrm{Re} \to \infty$. Пограничный слой в первой задаче имеет угловую толщину порядка $\mathrm{Re}^{-2/3}$ в то время как во второй задаче его толщина пропорциональна $\mathrm{Re}^{-1}\ln\mathrm{Re}$. Для обоих решений характерно, что в ядре течения обе компоненты безразмерной скорости имеют порядок Re при $\mathrm{Re} \to \infty$. Однако при приближении к твердой стенке радиальная скорость ввиду условия прилипания уменьшается до нуля. В случае же свободной границы происходит стремительный рост радиальной скорости в пограничном слое. На самой поверхности размерная радиальная скорость имеет вид $u = Q(Q + 8\pi\nu)\,/\,16\pi\nu r$, так что $u \to \infty$, когда $\nu \to 0$. Примечательно, что в любом конусе с осью $z > 0$ и углом раствора, меньшим $\pi/2$, завихренность ω при этом стремится к ненулевому пределу:

$$\lim \omega = \frac{Q\sqrt{2}}{4\pi s^2} \cdot \frac{\sin\varphi}{(1 + \cos^2\varphi)^{3/2}} \quad \text{при} \quad \nu \to 0$$

равномерно по φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \delta < \pi/2$.

В задаче (52), (54), (55), где решение существует при всех Re, интересно сравнить его асимптотики при $\mathrm{Re} \to -\infty$ и $\mathrm{Re} \to \infty$. В первом случае вблизи стенки формируется классический пограничный слой Прандтля, угловой размер которого имеет порядок $|\mathrm{Re}^{-1/2}|$, когда $\mathrm{Re} \to -\infty$ [60, 61]. Во втором случае структура течения более сложная, что связано с неравномерным характером распределения давления. Давление на стенке выражается формулой $p = p_\infty + Q^2/(8\pi^2 r^2)$, в то время как вдали от плоскости, где течение близко к потенциальному, $p \to p_\infty - Q^2/(8\pi^2 r^2)$. Благоприятный градиент давления на стенке предотвращает отрыв пограничного слоя и способствует образованию пристенной струи, структура которой изучена в [61].

Мы оставляем в стороне другие примеры осесимметричных автомодельных течений (о них см. в [16, 61]) и перейдем к описанию движений с вращательной симметрией. Здесь приходится иметь дело с системой квазилинейных уравнений шестого порядка (50), (51) с особенностями в коэффициентах при $x = \pm 1$. Подчиним решение этой системы краевым условиям

$$F(0) = 0\,,\quad F'(0) = 0\,,\quad \Omega(0) = 0\,, \tag{57}$$

$$\nu\Omega(x) \to \Gamma/2\pi \quad \text{при} \quad x \to 1. \tag{58}$$

Решение задачи (50), (51), (57), (58) интерпретируется как взаимодействие полубесконечной вихревой нити $z > 0$ с твердой плоскостью $z = 0$. Параметр Γ задает интенсивность вихря, а величина $\mathrm{Re} = \Gamma/2\pi\nu$ (число Рейнольдса) является единственным определяющим параметром задачи. Не нарушая общности, можно считать, что $\Gamma > 0$. Данная задача впервые рассматривалась в работе М.А. Гольдштика [63]. Основной результат этой работы состоит в том, что при условии ограниченности осевой скорости w на оси симметрии решение задачи (50), (51), (57), (58) существует лишь в диапазоне чисел Рейнольдса $0 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant \mathrm{Re}^* \approx 5{,}53$.

Парадокс Гольдштика стимулировал дальнейшие исследования задачи взаимодействия вихря с плоскостью [61, 64–67]. В [65] было показано, что если расширить класс решений задачи, допустив логарифмическую особенность функции w при $r \to 0$, то задача становится разрешимой при любом значении $\mathrm{Re} > 0$. Однако коэффициент при этой особенности оставался неопределенным. Принципиальный шаг в раскрытии этой неопределенности был сделан в работе [67], где задача взаимодействия исследовалась в пределе $\mathrm{Re} \to \infty$. Асимптотическое решение задачи (50), (51), (57), (58) описывается системой сращиваемых разложений, определенных в четырех областях, в которых $r/z = \mathrm{tg}\varphi$ последовательно принимает значения порядка Re^{-1}, $\mathrm{Re}^{-3/4}$, $\mathrm{Re}^{-2/3}$, 1. Вязкие члены оказываются существенными в каждой из этих областей. При этом в основной области, где $r/z \sim 1$, течение хорошо аппроксимируется решением задачи взаимодействия линейного стока с твердой плоскостью [60], на которое накладывается слабая закрутка. В приосевой области ($r/z \sim \mathrm{Re}^{-1}$) окружная и осевая скорости достигают своих экстремальных значений, а радиальная скорость относительно мала. Асимптотика осевой скорости вблизи вихревой нити такова:

$$w = \mathrm{Re}\,\Gamma z^{-1}[\ln(\mathrm{Re}\,r / z) + O(1)] \quad \text{при} \quad r / z \to 0\,.$$

Положительность коэффициента в правой части равенства означает, что течение вблизи оси симметрии направлено в сторону плоскости.

Естественным аналогом предыдущей задачи является задача о взаимодействии линейного вихря с конической свободной поверхностью. Инвариантность условия на свободной границе (6) здесь возможна лишь при нулевом поверхностном натяжении, $\sigma = 0$. В работе [68] доказана теорема существования решения этой задачи при любых $\mathrm{Re} = \Gamma/2\pi\nu > 0$ и изучены его качественные свойства. Характерной особенностью решения является наличие логарифмической сингулярности осевой скорости при $r/z \to 0$. Другое его сходство с решением предыдущей задачи состоит в том, что движение вблизи вихревой нити направлено в сторону границы области течения. Если $\mathrm{Re} \to \infty$, около свободной поверхности образуется пограничный слой толщины порядка Re^{-1}. Следует отметить, что в решении [68] угол раствора конической свободной поверхности α может принимать любое значение из интервала $[\pi/2, \pi)$ что вносит элемент неопределенности в решение задачи. Если выбрать $\alpha = \pi$ (коническая поверхность превращается в плоскость), то точное решение задачи существует и при $\sigma > 0$; кроме того, допускается наличие силы тяжести, действующей по нормали к свободной поверхности жидкости. Здесь мы имеем дело с феноменом условной инвариантности решения краевой задачи для системы (1), (2), о котором шла речь в разделе 7.

Стационарные вращательно симметричные автомодельные решения уравнений Навье—Стокса исследовались и в других работах, которые упоминаются в заключительной части обзора [16] и в параграфе 3 главы 2 монографии [61]. Интерес к ним вызван тем, что они могут служить относительно простыми и в то же время содержательными моделями течений, возникающих в атмосфере и океане, а также в технологических аппаратах. Вместе с тем, остается открытым вопрос об асимптотическом характере этих решений как пределов решений задач взаимодействия интенсивно закрученных потоков вязкой жидкости с твердыми границами конечной протяженности.

До сих пор речь шла об автомодельных стационарных решениях системы (1), (2), редуцируемых к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Отказ от предположения о вращательной симметрии решения радикально усложняет задачу. Первые результаты исследования существенно трехмерных конических течений вязкой жидкости принадлежат С.Н. Аристову [69, 70]. Они основаны на представлении автомодельных стационарных решений уравнений (1), (2) в виде

$$U = \frac{\nu}{s}\Delta_S\Phi, \quad V = \frac{\nu}{s\sin\varphi}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} - \frac{\upsilon}{s}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi},$$
$$W = -\frac{\nu}{s}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} - \frac{\nu}{s\sin\varphi}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}, \quad p = \frac{\rho\nu^2}{s}P,$$

где U, V, W — проекции вектора скорости на оси s, φ, θ сферической системы координат, а Δ_S — оператор Лапласа—Бельтрами на единичной сфере,

$$\Delta_S = \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}.$$

При этом уравнение неразрывности выполняется автоматически. Функции Φ, Ψ, P удовлетворяют весьма сложной системе уравнений, которая здесь не выписывается. Оказывается [69], что эта система допускает два семейства точных решений. Одно из них описывается формулами $\Psi = \pm\Phi$, $P = -\nabla_S\Phi \cdot \nabla_S\Phi$ (∇_S — поверхностный градиент), а функция Φ удовлетворяет уравнению $\Delta_S\Phi = A\exp(-\Phi)$, A — произвольная постоянная. В решениях второго семейства $\Psi = 0$, а для Φ получается уравнение

$$\nabla_S(\Delta_S\Phi + 2)\cdot\nabla_S[\ln(\Delta_S\Phi + 2) + \Phi] = q, \qquad (59)$$

где q — произвольная постоянная. В работе [70] показано, что в случае $q = 0$ общее решение уравнения (59) с условием 2π-периодичности по переменной θ допускает представление в терминах гармонических функций на плоскости. Среди решений (59) содержится решение Ландау [58] (по-видимому, это единственное нетривиальное решение данного уравнения, не имеющее особенностей на единичной сфере), вращательно симметричные решения, изученные в [71], а также ряд новых решений. Одно из них описывает течение, генерируемое системой произвольного числа линейных источников с постоянной линейной плотностью. Для ненулевых значений параметра q найдено семейство частных решений вида $\Phi = m\ln\sin\varphi + \Lambda(\theta)$, где $m = \text{const}$, а Λ подчиняется уравнению 4-го порядка, допускающему двукратное интегрирование. Подробный анализ и физическая интерпретация этих решений содержатся в [70].

10. ДВИЖЕНИЯ СО СПИРАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

Рассмотрим систему уравнений Навье—Стокса, записанную в цилиндрических координатах (10). Она допускает преобразования переноса по переменным θ, z, p, а следовательно, и их комбинации. Обозначим $X = \alpha\partial/\partial\theta - \partial/\partial z$, $Y = A\partial/\partial p - \partial/\partial z$ где α и A — постоянные, и будем рассматривать решения системы (10), инвариантные относительно группы $H\langle X,\ Y\rangle$. Общий вид таких решений дается формулами

$$v_r = u(r,\xi,t)\,,\quad v_\theta = v(r,\xi,t)\,,\quad v_z = w(r,\xi,t)\,,\quad p = q(r,\xi,t) - Az\,, \qquad (60)$$

где $\xi = \theta + \alpha z$ — инвариант группы H. Подстановка выражений (60) в уравнения (10) приводит к системе, содержащей две пространственных переменных. Линии r, $\xi = \mathrm{const}$ образуют семейство спиралей, поэтому решения вида (60) называются решениями со спиральной симметрией (или просто "спиральными" решениями уравнений Навье—Стокса). Для того, чтобы такие решения были совместимы с условиями прилипания на твердых поверхностях, необходимо, чтобы эти поверхности были инвариантными многообразиями группы H. Если предположить еще, что область спирального течения не зависит от времени, то уравнение ее границы Σ записывается в виде $f(\xi,\ r) = 0$ где f — 2π-периодическая функция переменной ξ. Функция f может не зависеть от этой переменной, и тогда удается рассмотреть спиральные движения в бесконечной круглой трубе или в зазоре между соосными цилиндрами. В более общем случае поверхность Σ имеет форму змеевика — устройства, которое часто используется в энергетических и технологических установках.

Спиральные решения уравнений Навье—Стокса содержат подкласс стационарных решений. Такие решения впервые рассмотрел В.О. Бытев [72]. В частности, им доказана теорема существования "в целом" для задачи о стационарном спиральном течении в змеевике под действием заданного градиента давления по оси z. Спиральные движения имеют много общего с другими инвариантными решениями уравнений Навье—Стокса — плоскими и вращательно симметричными. Оба этих последних класса объединяет возможность введения функции тока. Для движений с вращательной симметрией функция тока ψ вводится соотношениями

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\,,\quad v_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\,, \qquad (61)$$

после чего система (10) сводится к двум уравнениями для функции тока и окружной компоненты скорости v_θ (см., например, [73]). Это позволяет разработать эффективные численные методы решения задач с вращательной симметрией, имеющих важные приложения, например, в технологии получения полупроводниковых материалов методом Чохральского или бестигельной зонной плавки [73]. Оказывается, что функцию тока можно ввести и для движений со спиральной симметрией [74]. Действительно, если подставить выражения (60) в последнее уравнение системы (10), то мы получим

$$(ru)_r + (v + \alpha rw)_z = 0\,.$$

Отсюда следует существование функции Ψ такой, что

$$u = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v + \alpha w = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}.$$

Система двух уравнений для функций Ψ, v, равносильная уравнениям Навье—Стокса в случае спиральных движений, выведена в [74].

Как известно, для эффективно двумерных (плоских, осесимметричных и вращательно симметричных) движений вязкой несжимаемой жидкости доказаны теоремы об однозначной разрешимости "в целом" по времени естественных начально-краевых задач без ограничений малости на норму начальных данных [75, 76] (что до сих пор не удается сделать в общем трехмерном случае). В работе [77] аналогичные результаты были установлены для задач о спиральном движении во вращающейся круглой трубе и в зазоре между вращающимися соосными цилиндрами. Однозначная определенность оператора сдвига по траекториям, порожденного системой уравнений спиральных движений, позволяет рассматривать ее как бесконечномерную динамическую систему на полуоси $t > 0$. В [77] доказано существование глобального аттрактора [78] для этой системы; показано, что аттрактор является компактным конечномерным многообразием, и дана верхняя оценка его размерности. Указанный класс движений интересен еще и тем, что дает содержательный пример потери устойчивости стационарного течения вязкой жидкости за счет нарушения его свойств симметрии. Для течения Пуазейля в круглой вращающейся трубе этот факт был установлен в работе [79]. Оказалось, что с увеличением числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = a/W\nu$ и безразмерной угловой скорости вращения трубы $\Omega = \omega a/W$ первая потеря устойчивости течения происходит именно по отношению к спиральным возмущениям с азимутальным волновым числом $n = 1$ (здесь a — радиус трубы, ω — угловая скорость ее вращения, $W = Aa^2/4\rho\nu$ — скорость на оси трубы, A — продольный градиент давления). Критические параметры, соответствующие бифуркации основного течения, таковы: $\mathrm{Re}_* = 81$, $\Omega_* = 415$, критическое значение осевого волнового числа $\alpha = 0{,}1$. Отметим, что еще до появления цитированных выше теоретических работ устойчивые спиральные движения были обнаружены экспериментально как вторичные течения, возникающие при потере устойчивости течения Пуазейля с вращением в пространстве между соосными цилиндрами [80].

11. ПРИМЕР ЧАСТИЧНО ИНВАРИАНТНОГО РЕШЕНИЯ

Рассмотрим систему (1), (2) в плоском случае. Она допускает трехпараметрическую группу G_3, генерируемую операторами $X_2 = \partial/\partial x_2$, $Y_2 = t\partial/\partial x_2 + \partial/\partial v_2$ и $P = \partial/\partial_p$. Полный набор инвариантов G_3 есть t, $x = x_1$, $u = v_1$. Этот набор слишком беден для существования инвариантного решения системы (1), (2) относительно данной группы. Однако мы можем искать ее частично инвариантные решения [1] относительно G_3, назначая единственную инвариантную зависимую переменную u функцией инвариантов x, t и находя остальные искомые функции в соответствии с процедурой, описанной в [1]. Всякое частично инвариантное решение характеризуется своим рангом r (числом независимых переменных в редуцированной системе, связывающей только инварианты порождающей его группы) и дефектом δ (числом неинвариантных искомых функций, которые определяются из переопределенной системы, приведенной в инволюцию). В рассматриваемом случае $r = \delta = 2$. Обозначим $y = x_2$, $v = v_2$ и подставим эти выражения вместе с $v_1 = u(x, t)$ в уравнение (2). Мы найдем, что

$$v = -yu_x + \varphi(x,t). \tag{62}$$

Тем самым первая из неинвариантных функций v выразилась через инвариантные, u и φ. Теперь следует подставить выражение (62) в уравнения (1), которые образуют переопределенную систему для оставшейся неинвариантной функции $p(x, y, t)$

$$p_x = \rho(\nu u_{xx} - u_t - uu_x),$$
$$p_y = \rho[y(\nu u_{xxx} - u_{xt} - uu_{xx} + u_x^2) + \nu\varphi_{xx} - \varphi_t - u\varphi_x + u_x\varphi].$$

Условия совместности полученной системы приводят к уравнениям для функций u и φ

$$\nu u_{xxx} - u_{xt} + u_x^2 - uu_{xx} = \chi(t), \quad \nu\varphi_{xx} - \varphi_t - u\varphi_x + u_x\varphi = \psi(t), \tag{63}$$

Если система (63) решена, функция p дается явной формулой

$$p = \rho\left[\frac{1}{2}y^2\chi(t) + y\psi(t) + \nu u_x - \frac{1}{2}u^2 - \int_0^x u_t(z,t)dz\right] + \omega(t) \tag{64}$$

(здесь χ, ψ, ω — произвольные функции t).

Подчиним функцию u условию $u = 0$ при $x = 0$ и положим $\chi = \psi = 0$. Тогда второе уравнение (63) допускает решение $\varphi = 0$, а представление частично инвариантного решения принимает вид

$$u = -\int_0^x f(z,t)dz, \quad v = yf(x,t),$$
$$p = \rho\left[\nu u_x - \frac{1}{2}u^2 - \int_0^x u_t(z,t)dz\right] + \omega(t), \tag{65}$$

где функция f удовлетворяет уравнению

$$f_t + f^2 - f_x \int_0^x f(z,t)dz = \nu f_{xx}\,. \qquad (66)$$

В работе [81] были рассмотрены задачи со свободной границей для этого уравнения. Их формулировка такова: найти функцию $s(t)$ и решение уравнения (66) в области $S_T = \{x,\, t : 0 < x < s(t),\, 0 < t < T\}$ так, чтобы выполнялись начальные условия

$$s(0) = a > 0\,,\;\; f(x,0) = f_0(x)\,,\;\; x \in [0,a]\,,$$

условия на свободной границе

$$f_x(s(t),t) = 0\,,\;\; \frac{ds}{dt} = -\int_0^{s(t)} f(x,t)dx$$

и одно из условий на линии $x = 0$:

$$f_x(0,t) = 0 \;\;\text{(задача А) или}\;\; f(0,t) = 0 \;\;\text{(задача Б)}.$$

Решение задачи А описывает симметричную деформацию полосы вязкой жидкости с двумя свободными границами $x = \pm s(t)$, в то время как решение задачи Б соответствует случаю, когда линия $x = 0$ является твердой стенкой. Условие $f_x = 0$ при $x = s(t)$ гарантирует отсутствие касательных напряжений на свободной границе, а условие обращения в нуль нормального напряжения можно обеспечить подходящим выбором функции $\omega(t)$ в представлении (65). Предположим, что функция $f_0(x)$ удовлетворяет условию гладкости $f_0 \in C^{2+\alpha}[0,\, a]$, $0 < \alpha < 1$, и условиям согласования $f_0'(0) = f_0'(a) = 0$ для задачи А и $f_0(0) = f_0''(0) = 0$, $f_0'(a) = 0$ для задачи Б. Тогда существует единственное решение каждой из этих задач в соответствующих классах Гельдера по крайней мере для достаточно малых T.

В противоположность локальным свойствам, поведение решения этих задач в целом по времени существенно различно. Рассмотрим сначала задачу А. Она имеет семейство “плоских решений” $f = f_c(t) \equiv (t + c)^{-1}$, где $c = \mathrm{const}$. В случае $c > 0$ такие решения существуют при любом $t > 0$; если же $c < 0$, плоские решения f_c разрушаются за конечное время $-1/c$. При этом свободные границы жидкости уходят на бесконечность, и в момент времени $-1/c$ жидкость оккупирует все пространство. Решение (62) описывает потенциальное движение жидкости с тем же полем скоростей, что и в известном решении Л.В. Овсянникова задачи о деформации полосы идеальной жидкости со свободными границами

[82]. Для описания более общей ситуации введем обозначения: $\bar{f}(t)$ — среднее значение функции $f(x, t)$ на интервале $(0, s(t))$, $\bar{f}_0 = \bar{f}(0)$, $g = f - \bar{f}$. Функции $\bar{f}$ и g связаны соотношением

$$\frac{d\bar{f}}{dt} = -\bar{f}^2 - \frac{2}{s}\int_0^{s(t)} g^2 dx,$$

из которого следует, что при условии $\bar{f} < 0$ время жизни решения задачи A меньше или равно, чем $-1/\bar{f}_0$.

Пусть теперь $f_0(x) \geqslant \delta > 0$ для $x \in [0, a]$. В этом случае справедлива оценка снизу $f(x, t) \geqslant \delta(1 + \delta t)^{-1}$ в области S_T при всех $T > 0$. Она получается путем сравнения решения задачи A с плоским решением $f_c(t)$, где $c = 1/\delta$. Вместе с аналогичной верхней оценкой это обеспечивает глобальную разрешимость задачи и наличие универсальной асимптотики

$$f(x,t) = t^{-1}[1 + O(t^{-1})] \quad \text{при} \quad t \to \infty, \quad 0 \leqslant t \leqslant s(t).$$

Похожая асимптотика справедлива и для функции s, $s(t) = Kt^{-1}[1 + O(t^{-1})])$, но здесь уже постоянная $K > 0$ зависит от f_0. Этот результат усилен в работе [83], где показано, что задача A разрешима в целом, если $\bar{f}_0 > 0$ и "отрицательная часть" функции f_0 достаточно мала. Отметим, что в рассматриваемом благоприятном случае главные члены асимптотики функций f и s при $t \to 0$ не зависят от вязкости.

Обе возможности эволюции решения задачи A с ростом времени хорошо иллюстрируются на примере точных решений этой задачи

$$f = l(t) + m(t)\cos[\pi n x / s(t)],$$

где n — натуральное число, а функции l, m, s образуют решение задачи Коши

$$\begin{gathered} l' = -l^2 - m^2, \quad m' = -[2l + \nu(\pi n / s)^2]m, \quad s' = -ls \quad \text{при} \quad t > 0, \\ l(0) = l_0, \quad m(0) = m_0, \quad s(0) = a, \end{gathered} \tag{67}$$

где l_0, m_0 — произвольные постоянные. Если $l_0 > 0$ то решение задачи (67) существует при всех $t > 0$. Если же $l_0 < 0$ или $l_0 = 0$ но $m_0 \neq 0$ то найдется такое $t_*(0 < t_* < \infty)$, что $s \to \infty$, $l \to -\infty$ при $t \to t_*$. Главный член асимптотики решения задачи (67) имеет вид $l \sim -1/2(t_* - t)$, $m \sim \mathrm{sgn} m_0/2(t_0 - t)$, $s \sim \pi/q(t_* - t)^{1/2}$, когда $t \to t_*$ с некоторым $q > 0$. Эти соотношения приводят к асимптотике функции $f(x, t)$ вблизи момента коллапса вида $f = -(t_* - t)^{-1/2}\{1 - \mathrm{sgn} m_0 \cos[nqx(t_* - t)^{1/2}]\}/2 + O(1)$. В.А. Галактионов и Х.Л.Васкес [84] доказали, что при $n = 1$ и $m_0 < 0$ указанная асимптотика правильно описывает структуру разрушающихся решений задачи (A), если гладкая функция $f_0(x)$ монотонно убывает и удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, включая условие "крутости".

Задача А имеет трехмерный аналог, в котором $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$, $p = p(x, y, t)$, $w = -z(u_x + v_y)$. Это решение является частично инвариантным решением системы (1), (2) ранга 3 и дефекта 1 относительно двухпараметрической группы переносов и галилеевых переносов по оси $z = x_3$. В работе [83] показано, что с помощью решений указанного вида можно описать неустановившееся движение жидкости с цилиндрической (не обязательно круговой) свободной границей. Здесь также найдены условия разрушения решения за конечное время, причем этому процессу не может помешать действие вязкости и капиллярных сил.

Обратимся теперь к задаче Б и предположим дополнительно, что $f_0'(x) > 0$ для $0 \leqslant x < a$. Тогда функции f, f_x будут положительными в S_T вследствие принципа максимума. Это позволяет переформулировать задачу А, вводя новую независимую пространственную переменную β и новую искомую функцию η с помощью равенств

$$\beta = f(x,t), \quad \eta(\beta,t) = [f_x(x,t)]^{1/2}. \tag{68}$$

Вследствие (66), (68), функция η удовлетворяет уравнению

$$\eta_t - \nu\eta\eta_{\beta\beta} + \eta_\beta^2/2 - \beta^2\eta_\beta + 2\beta\eta = 0. \tag{69}$$

Фактически мы понизили порядок исходного уравнения 3-го порядка для функции u (63). Этот результат не случаен: он связан с наличием бесконечномерной псевдогруппы Ли, порождаемой оператором $\Psi = \psi(t)\partial_x - \dot{\psi}(t)\partial_u$ (ψ — произвольная функция t класса C^∞) и допускаемой эквивалентной первому из уравнений (63) системой $f_t - uf_x + f^2 = \nu f_{xx}$, $u_x = -f$. Указанная выше редукция есть результат т.н. группового расслоения [1] последней системы на базе бесконечномерной псевдогруппы Ли. Преобразование (68) аналогично известному преобразованию Крокко [85] в теории пограничного слоя. Групповая природа этого преобразования вскрыта в работе [86].

Обозначим $\beta_0 = f_0(a)$ и определим функцию $\eta_0(\beta)$ на отрезке $[0, \beta_0]$ соотношениями $\eta_0(\beta) = [f_0'(x)]^{1/2}$, $\beta = f_0(x)$ а затем продолжим ее нулем для значений $\beta = \beta_0$. Присоединяя к уравнению (69) начальное и краевое условия

$$\eta(\beta,0) = \eta_0(\beta), \text{ если } \beta \geqslant 0, \quad \eta_\beta(0,t) = 0, \text{ если } t \geqslant 0 \tag{70}$$

мы приходим к начально-краевой задаче для вырождающегося параболического уравнения (69) в полуполосе $\beta \geqslant 0$, $0 < t < T$. Ее решение имеет компактный носитель: существует такая функция $\gamma(t)$ что $\eta(\beta, t) = 0$, если $\beta \geqslant \gamma(t)$. Образ границы носителя на физической плоскости x, t определяет свободную границу $x = s(t)$ в задаче Б. В работе [81] показано, что при выполнении естественных условий гладкости и согласования для функции $f_0(x)$ задача (69), (70) имеет, и притом единственное, решение при всех $T > 0$.

Мы предполагаем. что теорема о разрешимости в целом имеет место для задачи Б и в случае $f_0'(x) < 0$ при $0 \leqslant x < a$. Основанием к этому является наличие у нее семейства автомодельных решений $f = (t + c)^{-1}F[x/(t + c)^{1/2}]$, где $c > 0$ — постоянная [81]. Они описывают неограниченное расширение полосы при $t \to \infty$, причем скорость расширения стремится к нулю вследствие тормозящего действия твердой стенки. Эти решения могут служить барьерами при получении априорных оценок решения начально-краевой задачи. Любопытным является тот факт, что автомодельные решения задачи Б отсутствуют в случае $f_0'(x) > 0$, соответствующем сжатию полосы. Что касается задачи А, то она имеет лишь тривиальные автомодельные решения с $F = 1$.

Обратимся снова к системе (63) и заметим, что при постоянном $\chi > 0$ и $\psi = 0$ она имеет стационарное решение с $\varphi = 0$. Соответствующее поле скоростей дается формулами

$$u = -kh(\xi), \quad v = kyh'(\xi), \tag{71}$$

где $\xi = (k/\nu)^{1/2}x$, $k = \chi^{1/2}$. Функция $h(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$h''' + hh'' - h'^2 + 1 = 0.$$

Решение (71) было получено К. Хименцом (1911), его анализ можно найти в книгах [11, 13]. Если функция h подчиняется краевым условиям

$$h = h' = 0 \text{ при } \xi = 0, \quad h' \to 1 \text{ при } \xi \to \infty,$$

то решение (71) описывает стационарное течение жидкости в полуплоскости $x > 0$ с критической точкой $x = y = 0$. В отсутствие вязкости поле скоростей является потенциальным, $u = -kx$, $v = ky$. Действие вязкости приводит к появлению пограничного слоя вблизи стенки, эффективная ширина которого (т.е. значение x, при котором $v = 0{,}99ky$) не зависит от y и равна $\delta = 2{,}4(\nu/k)^{1/2}$. Если потенциальное течение вдали от стенки меняет направление, $u = kx$, $v = -ky$ (что соответствует условию $h' \to -1$ при $\xi \to \infty$), то такая краевая задача не имеет решения. Физически это означает невозможность формирования стационарного пограничного слоя вблизи стенки $x = 0$ при наличии неблагоприятного градиента давления на всем ее протяжении. Течение Хименца имеет целый ряд осесимметричных и трехмерных аналогов (см. обзор [16] и имеющиеся в нем ссылки).

Пусть теперь в системе (63) $\chi = 0$, тогда уравнение для функции h в представлении (71) принимает вид

$$h''' + hh'' - h'^2 = 0. \tag{72}$$

Если потребовать, чтобы

$$h(0) = h''(0) = 0\,, \quad h'(0) = 1\,,$$

то решение уравнения (71) будет описывать течение вблизи критической точки на свободной границе $x = 0$ [87]. Если краевые условия имеют вид

$$h = 0\,,\ \ h' = 1 \ \text{ при } \ \xi = 0\,,\ \ h' \to 0 \ \text{ при } \ \xi \to \infty\,,$$

то уравнение (72) допускает точное решение [88]

$$h = 1 - \exp(-\xi)\,.$$

Это решение моделирует процесс экструзии при производстве листовых изделий. Характерной особенностью обоих решений уравнения (72) является однородное растяжение границы области течения, $v = ky$ при $x = 0$. Кроме того, это уравнение обладает двухпараметрической группой преобразований, что обеспечивает возможность его редукции к уравнению 1-го порядка и полное качественное исследование семейства траекторий [87].

12. ГРУППОВАЯ ПРИРОДА РЕШЕНИЯ КАРМАНА И ЕГО ОБОБЩЕНИЯ

В 1921 г. Т. Карман [89] нашел точное решение уравнений стационарного вращательно-симметричного движения вязкой несжимаемой жидкости, в котором

$$u = r\Omega F(\zeta)\,,\ \ v = r\Omega G(\zeta)\,,\ \ w = (\nu\Omega)^{1/2} H(\zeta)\,, \tag{73}$$

$$p = -\rho\nu\Omega P(\zeta)\,,\ \text{ где } \ \zeta = (\Omega / \nu)^{1/2} z\,,$$

Ω — положительная постоянная, а u, v, w — проекции вектора скорости на оси цилиндрической системы координат. Подстановка (73) в уравнения (10) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для функций F, G, H, P,

$$F^2 - G^2 + F'H = F''\,,\ \ 2FG + G'H = G''\,, \tag{74}$$

$$HH' = P' + H''\,,\ \ 2F + H' = 0\,,$$

где штрих означает дифференцирование по ζ. Будем рассматривать решения системы (74) на всей полуоси $\zeta > 0$ и подчиним их следующим краевым условиям:

$$F = 0\,,\ \ G = 1\,,\ \ H = 0 \ \text{ при } \ \zeta = 0\,, \tag{75}$$

$$F \to 0\,,\ \ G \to 0 \ \text{ при } \ \zeta \to \infty\,.$$

Тогда решение (73) будет описывать движение жидкости в полупространстве $z > 0$, индуцированное равномерным вращением ограничивающей ее плоскости вокруг оси симметрии с угловой скоростью Ω.

Задача (74), (75) была численно решена в 1934 г. У.Дж. Кокраном [90]. Примечательно, что последующие результаты, выполненные с применением ЭВМ, привели к поправкам только в третьем знаке после запятой. Вычисления показали, что существует ненулевой предел функции H при $\zeta \to \infty$, $H(\infty) = -0{,}883$. Это означает, что вдали от плоскости движение стремится к равномерному потоку, $u = v = 0$, $w = -0{,}883(\nu\Omega)^{1/2}$. Другой важной характеристикой решения задачи (74), (75) является величина $G'(0) = -0{,}616$. С ее помощью по формулам (11), (73) вычисляется касательное напряжение на плоскости, $2\rho\nu D_{\theta z} = \rho\nu^{1/2}\Omega^{3/2}rG'(0)$. Наконец, можно вычислить условную толщину пограничного слоя, т.е. расстояние от плоскости, на котором $v/\Omega r = 0{,}01$; она не зависит от r и равна $\delta = 5{,}4(\nu/\Omega)^{1/2}$. Последнее обстоятельство делает правдоподобной гипотезу о том, что с помощью решения Кармана можно приближенно описать движение жидкости в непосредственной окрестности вращающегося диска радиуса a при условии, что $\delta/a \ll 1$, пренебрегая при этом краевым эффектом. Доказательство этой гипотезы представляет весьма сложную математическую задачу. Однако в ее пользу говорит сравнение величины

$$M = 4\pi\int_0^a 2\,\rho\nu D_{\theta z} r^2 dr = \pi a^4\rho\nu^{1/2}\Omega^{3/2}G'(0)\,,$$

выражающей вычисленный на основе решения Кармана момент импульса, действующего со стороны жидкости на обе стороны диска, с экспериментальными значениями момента импульса. Оказалось, что обе величины находятся в согласии, если $1 \ll a^2\Omega/\nu < 10^5$, а при превышении указанного порога стационарное движение теряет устойчивость [11]. Отметим еще, что решение Кармана лежит в основе теории вращающегося дискового электрода (чувствительного элемента, позволяющего изучать свойства электролитов), разработанной В.Г. Левичем [91].

Существует заблуждение (см., например, [16]), что решение Кармана является автомодельным. Однако единственное преобразование растяжения, допускаемое уравнениями Навье—Стокса, задается оператором Z (3) и определяет однородное растяжение как пространственных координат, так и компонент вектора скорости. Очевидно, что решение (73) этому условию не удовлетворяет. Покажем, как можно получить решение Кармана из теоретико-групповых соображений. С этой целью рассмотрим 5-параметрическую подгруппу H группы G_∞, порожденную операторами X_1, X_2, Y_1, Y_2, X_{12}. Этой подгруппе соответствует частично инвариантное решение системы (1), (2) ранга 2 и дефекта 2. Представление инвариантной части решения в цилиндрических координатах имеет вид $w = h(z, t)$, $p = q(z, t)$. В силу уравнения неразрывности радиальная и осевая компоненты скорости u и w связаны соотношением $u_r + u/r + w_z = 0$. Подчинив функцию u условию ограниченности при $r \to 0$, будем иметь $u = rf(z, t)$, где $f = -h_z/2$. Подставив теперь выражения для u, w, p в первое уравнение системы (11), мы придем к представлению окружной скорости v в виде $v = rg(z, t)$ где g выражается в терминах производных функции $h(z, t)$. После подстановки полученных выражений во второе уравнение (10) и сокращения результирующего равенства на r получается еще одно соотношение между g и h. Итак, общее представление частично инвариантного решения системы (1), (2) относительно группы H, регулярного на оси симметрии, имеет вид

$$u = rf(z,t)\,,\quad v = rg(z,t)\,,\quad w = h(z,t)\,,\quad p = q(z,t)\,. \tag{76}$$

Функции f, g, h, q удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial f}{\partial t} + h\frac{\partial f}{\partial z} + f^2 - g^2 = \nu\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,,\quad \frac{\partial g}{\partial t} + h\frac{\partial g}{\partial z} + 2fg = \nu\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\,,\\ \frac{\partial h}{\partial t} + h\frac{\partial h}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial q}{\partial z} + \nu\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\,,\quad 2f + \frac{\partial h}{\partial z} = 0\,.\end{gathered} \tag{77}$$

Система (77) наследует часть групповых свойств исходной системы уравнений Навье—Стокса, в частности, преобразование переноса по времени. Соответствующее ему стационарное решение системы (77) с точностью до обозначений совпадает с решением Кармана. Можно сказать, что решение Кармана является инвариантным решением некоторой частично инвариантной подмодели уравнений Навье—Стокса. Решение же вида (76) является нестационарным аналогом решения Кармана. Оказывается, что с его помощью можно описать процесс растекания слоя на вращающейся плоскости [92] (см. также [6]).

Потребуем, чтобы на инвариантном многообразии $z = s(t)$ группы H для решения (76) выполнялись условия (5), (6). Для этого достаточно подчинить неизвестные функции f, g, h, q, s следующим условиям:

$$\begin{gathered}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z} = 0\,,\quad h = 0\,,\quad q - 2\rho\nu\frac{\partial h}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = s(t)\,,\quad t > 0;\\ \frac{ds}{dt} = h[s(t),t] \quad \text{при} \quad t > 0\,.\end{gathered} \tag{78}$$

Кроме того, поставим краевые условия

$$f = 0, \quad g = \Omega(t), \quad h = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad t > 0. \tag{79}$$

Здесь $\Omega(t)$ — заданная функция, $\Omega(0) = 0$, $\Omega'(0) = 0$. Наконец, зададим начальные условия

$$f = g = 0, \quad h = 0, \quad s = s_0 > 0 \quad \text{при} \quad t > 0. \tag{80}$$

Мы пришли к следующей задаче с неизвестной границей: найти функцию $s(t)$ и решение системы (77) в области $S_T = \{z, t : 0 = z < s(t), 0 < t < T\}$ так, чтобы выполнялись условия (78)—(80). Предположим, что функция $\Omega(t)$ принадлежит классу Гельдера $C^{1+\alpha/2}[0, T]$, где $0 < \alpha < 1$. Тогда существует, и притом единственное, классическое решение задачи (77)—(80) при любом $T > 0$ [93].

Интерпретация полученного решения такова. В начальный момент покоящаяся жидкость заполняет бесконечный слой $0 < z < s_0$, нижняя граница которого — твердая плоскость, а верхняя граница свободна. Затем плоскость начинает плавно вращаться вокруг оси симметрии с угловой скоростью $\Omega(t)$, увлекая за собой жидкость. Характерная особенность задачи состоит в том, что свободная граница остается плоской при всех $t > 0$. Данное свойство было использовано при разработке технологии нанесения покрытий на плоские экраны (см. [94] и цитированную там литературу). Поскольку решение задачи неограниченно продолжимо по времени, представляет интерес изучить его поведение при $t \to \infty$. Это было сделано в работе [95], где найдена асимптотика решения в случаях, когда функция $\Omega = At^n$, начиная с некоторого $t = \tau$ (A и n — постоянные). В этой же работе приведены результаты численного решения задачи (77)—(80) для нескольких типичных зависимостей $\Omega(t)$.

Выше уже отмечалось, что система (77) наследует часть групповых свойств системы (1), (2). Одно из них — наличие преобразования растяжения, что позволяет изучать автомодельные решения задачи (77)—(80). Им отвечает зависимость $\Omega = \omega\Omega_0(1 + n\Omega_0 t)^{-1}$ где $\Omega_0 > 0$ — постоянная размерности $1/t$, а ω и n — безразмерные постоянные. Не теряя общности, можно считать, что $\omega > 0$, а n принимает одно из трех значений: -1, 0, 1. Подробный анализ автомодельных решений обсуждаемой задачи выполнен в работе О.М. Лаврентьевой [94]. В автомодельных решениях толщина слоя изменяется по закону $s = d[\nu(1 + \Omega_0 t)/\Omega_0]^{1/2}$ причем постоянная d подлежит определению вместе с решением соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая здесь не приводится. Важной характеристикой решения является зависимость коэффициента утолщения слоя d от коэффициента интенсивности скорости вращения плоскости ω. Путем комбинации численных и аналитических методов в [94] были обнаружены следующие свойства автомодельных решений. Для $n = 1$ (что соответствует утолщению слоя) имеется одно автомодельное решение. При этом функция $d(\omega)$ оказывается немонотонной: она возрастает от величины $d(0) = 1{,}32$ до своего максимального значения $d(\omega_0) = 2{,}5$, принимаемого при $\omega = 1{,}53$, и убывает при $\omega > \omega_0$. Для больших ω имеет место асимптотика $d = c\,\omega^{-1/2} + O(\omega^{-3/2})$. Немонотонный характер функции $d(\omega)$ связан с изменением характера течения. При малых ω осевая компонента скорости всюду положительна, радиальная — отрицательна, а окружная меняет знак. При больших ω, вблизи твердой плоскости возникает зона, где осевая скорость отрицательна, а радиальная положительна. Это означает, что при больших ω, несмотря на замедление вращения плоскости со временем, жидкость вблизи нее отбрасывается от оси вращения, чего не наблюдается при малых ω.

Пусть теперь $n = -1$. В этом случае толщина слоя обращается в нуль за конечное время Ω_0^{-1}. Оказалось, что в этом случае автомодельные решения существуют лишь при $\omega > \omega^* = 30{,}68$, причем зависимость $d(\omega)$ двузначна. Нижняя ветвь функции $d(\omega)$ имеет ту же асимптотику, что и в случае $n = 1$. Качественные картины течения в обоих случаях совпадают. Предельный режим течения при $\omega \to \infty$ для нижней ветви характеризуется отсутствием пограничных слоев вблизи твердой плоскости и свободной границы, что объясняется взаимопроникающим влиянием обеих границ на интервале длины $d = O(\omega^{-1/2})$. В этом смысле рассматриваемое движение подобно автомодельному стационарному течению в угле, ограниченном свободной поверхностью и твердой стенкой при больших числах Рейнольдса [9] (см. раздел 7).

Решения, отвечающие верхней ветви двузначной функции $d(\omega)$ обнаруживают совсем иное поведение при $\omega \to \infty$. При больших ω область течения состоит из пограничного слоя, примыкающего к вращающейся плоскости, и невязкого ядра, которое простирается вплоть до свободной границы. Зависимость $d(\omega)$ здесь асимптотически линейна, как и зависимость осевой компоненты скорости от автомодельной координаты в основной области течения. Две другие компоненты скорости в этой области в пределе $\omega \to \infty$ от этой координаты не зависят.

Рассмотрим, наконец, случай $n = 0$, $\Omega = \mathrm{const}$. Ему отвечают стационарные решения задачи о движении слоя, ограниченного вращающейся плоскостью и параллельной ей плоской свободной поверхностью. Такие решения образуют однопараметрическое семейство, параметризуемое толщиной слоя b. При этом для всех стационарных решений число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \Omega b^2/\nu$ одинаково и приблизительно равно 53,73. Данный факт есть следствие масштабной инвариантности системы (77).

О других инвариантных решениях системы (77), описывающих движения в областях с твердыми границами, см. обзор [15] и имеющиеся в нем ссылки. Требование масштабной инвариантности начально-краевой задачи ограничивает рассмотрение случаем, когда область течения — полупространство или слой $0 < z < l(1 + \beta t)^{1/2}$, где $l > 0$ и β — постоянные. Ограничивающие его плоскости могут вращаться с угловыми скоростями, пропорциональными $(1 + \beta t)^{-1}$. Отметим работу [96], в которой рассматривается задача в полупространстве. Движение индуцируется плоскостью, угловая скорость которой есть $\Omega(1 + \beta t)^{-1}$; при $z \to \infty$ движение стремится к покою. Данные граничные условия выделяют единственную комбинацию $\beta/\Omega = 1{,}607$, при которой автомодельное решение существует. С помощью этого решения авторы [96] описывают финальную стадию свободного вращения диска нулевой массы в безграничной вязкой жидкости.

Рассмотрим теперь 4-параметрическую группу с базисными операторами X_1, X_2, Y_1, Y_2 (4). Она тоже порождает класс частично инвариантных решений ранга два и дефекта два, в котором инвариантная часть снова имеет вид $v_3 = w = f(z, t)$, $p = q(z, t)$, а неинвариантная часть $v_1 = U(x, y, z, t)$, $v_2 = V(x, y, z, t)$ допускает представление [97]

$$U = \frac{\partial\psi}{\partial y} - x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial\psi}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial z}$$

(здесь $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ — декартовы координаты, а v_1, v_2, v_3 — соответствующие компоненты вектора скорости). Функция $\psi(x, y, z, t)$ удовлетворяет переопределенной системе уравнений, которая здесь не выписывается. Следствием этой системы является уравнение Монжа—Ампера

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial t} + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 - \nu\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}. \qquad (81)$$

В этом уравнении правая часть не зависит от x и y, поэтому оно масштабным преобразованием может быть приведено к случаю, когда правая часть постоянна. Пусть она неотрицательна:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial t} + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 - \nu\frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = \alpha^2, \qquad (82)$$

где $\alpha = \alpha(z, t)$. В этом случае уравнение (81) является гиперболическим и с помощью интеграла Гурса может быть сведено к уравнению первого порядка. Это позволяет выполнить исследование совместности упомянутой переопределенной системы до конца [97]. Для приведения ее в инволюцию использовалась программа аналитических вычислений REDUCE. По ходу дела возникает четыре различных случая, объединенных следующим обстоятельством: функция ψ выражается через три функции f, α, λ переменных z, t и функцию трех переменных $\mu(x + ky, z, t)$, где $k = const$. При этом уравнения для функций f и α образуют замкнутую систему, состоящую из уравнения (82) и

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} + 2f\frac{\partial\alpha}{\partial z} - 2\alpha\frac{\partial f}{\partial z} - \nu\frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2} = 0. \qquad (83)$$

Уравнения для функций λ и μ являются линейными и решаются последовательно.

Система (82), (83) допускает операторы

$$Z_\gamma = 2\gamma(t)\partial_z + \gamma'(t)\partial_f\,, \quad T = \partial_t \quad R = 2t\partial_t + z\partial_z - f\partial_f - 2\alpha\partial_\alpha$$

с произвольной функцией $\gamma(t)$. В работе [97] перечислены все существенно различные классы инвариантных решений системы и дана их интерпретация. Кроме того, сделано групповое расслоение этой системы на основе оператора Z_γ, в результате чего она сводится к двум квазилинейным параболическим уравнениям 2-го порядка и одной квадратуре.

Пусть теперь правая часть уравнения (81) неположительна. Тогда справедливо представление Бернштейна общего решения уравнения Монжа—Ампера в терминах аналитических функций комплексного переменного. В принципе это дает ключ к анализу совместности переопределенной системы для ψ, однако при этом необходимо обеспечить вещественность решений после приведения ее в инволюцию. В полном объеме эта задача пока не решена, однако заведомо известно, что указанная система имеет семейство решений, в котором ψ квадратично зависит от x и y. Среди решений этого семейства имеются нестационарные аналоги решения Кармана. Таким образом, реализация описанного выше двухшагового процесса позволяет получать новые решения системы уравнений Навье—Стокса как инвариантные решения некоторых частично инвариантных подмоделей этой системы.

Отметим, что решение Кармана и его нестационарные аналоги, записанные в декартовых координатах, так же как и решение Хименца, и решения, рассмотренные в [83, 98, 99], объединяет одно обстоятельство: поле скоростей в этих решениях уравнений Навье—Стокса линейно зависит от одной или двух пространственных переменных. Подобные решения характерны для многих моделей механики сплошной среды (не только гидродинамики, но также и теории пластичности, где аналогичным свойством обладает известное решение Прандтля о деформации полосы). Для уравнений газовой динамики решения, линейные по части переменных, изучались в [100], для уравнений тепловой гравитационной конвекции — в [101], для уравнений термокапиллярного движения — в [102—104]. Все они имеют ту или иную теоретико-групповую природу.

Вернемся к системе (1), (2) и заметим, что она допускает 6-параметрическую группу G_6 с операторами X_1, X_2, Y_1, Y_2, X_{12}, P, где $P = \partial/\partial p$. Группе G_6 соответствует частично инвариантное решение этой системы ранга 2 и дефекта 3 — максимально возможного дефекта для уравнений Навье—Стокса. Общий вид этого частично инвариантного решения дается формулами

$$u = rf(z,t)\,, \quad v = rg(z,t)\,, \quad w = h(z,t)\,, \quad p = q(z,t) + Cr^2\,, \qquad (84)$$

где C = const. Мы не будем выписывать систему для определения функций f, g, h и q, а отметим лишь, что она обладает стационарными решениями. После исключения функций f, q и постоянной C получается система обыкновенных уравнений для функций h и g:

$$hh''' + 4gg' = \nu h'''' , \quad hg' - gh' = \nu g'' \tag{85}$$

(штрих обозначает производную по z). Для системы (84) естественной является краевая задача

$$\begin{gathered} h(-a) = \lambda_- , \quad h(a) = \lambda_+ , \quad h'(-a) = h'(a) = 0 , \\ g(-a) = \Omega_- , \quad g(a) = \Omega_+ , \end{gathered} \tag{86}$$

где λ_-, λ_+, Ω_-, Ω_+ и a — заданные постоянные. Решение задачи (85), (86) интерпретируется как движение вязкой жидкости в слое $|z| < a$, границы которого твердые (вообще говоря, проницаемые) плоскости $z = -a$ и $z = a$, вращающиеся вокруг оси z соответственно с угловыми скоростями Ω_- и Ω_+. Если $\lambda_- = \lambda_+ = 0$ то условия (86) переходят в условия прилипания. Случай ненулевых λ_- и λ_+ соответствует наличию равномерного вдува или отсоса жидкости через границы области течения.

Оставляя в стороне малосодержательный случай $\Omega_- = \Omega_+ = 0$ предположим, что $\Omega_+ > 0$ и $|\Omega_-| < \Omega_+$ (очевидно, это не умаляет общности). Тогда в качестве четырех безразмерных определяющих параметров задачи можно выбрать $\mathrm{Re} = a^2\Omega_+/\nu$ (число Рейнольдса), $\omega = \Omega_-/\Omega_+(|\omega| < 1)$, $a_+ = \lambda_+/a\Omega_+$ и $a_- = \lambda_-/a\Omega_-$. В случае $\lambda_- = \lambda_+ = 0$ (т.е в отсутствие вдува или отсоса) число параметров снижается до двух, однако задача все равно остается очень сложной. Одними из первых ее исследовали Дж.К. Бэтчелор [105] и К. Стюартсон [106]. Ими были высказаны различные предположения о характере течения при больших числах Рейнольдса. Согласно [105], течение имеет два пограничных слоя, примыкающих к плоскостям, а в ядре между ними жидкость вращается как твердое тело с некоторой промежуточной между Ω_- и Ω_+ угловой скоростью. В работе [106] приведены доводы в пользу существования другого типа течения, характерным свойством которого является медленное, исчезающее в пределе $\mathrm{Re} \to \infty$, вращение жидкости вне пограничных слоев. Далее эти решения будут называться решениями типа B и S соответственно.

Дальнейшие исследования показали, что существует несколько непрерывных ветвей решений, зависящих от Re. Наиболее подробно изучен случай, когда $\Omega_- = 0$ (нижний диск неподвижен, а верхний вращается). Тогда в задаче (85), (86) остается единственный определяющий параметр Re. Согласно [107], только одна из ветвей решений существует при всех $\mathrm{Re} > 0$ при больших Re — это решения типа B. Другая непрерывная ветвь, содержащая при больших Re решения типа S, существует лишь при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_1 \approx 868$. Наблюдаемые в экспериментах при $\mathrm{Re} < 8000$ профили скоростей ламинарного течения между дисками, диаметр которых велик по сравнению с расстоянием между ними, согласуются с численными решениями, принадлежащими B-ветви [107, 108]. В работах [109, 110] задача (85), (86) с $\lambda_- = \lambda_+ = 0$ исследовалась численным методом при различных значениях Re во всем диапазоне изменения относительной угловой скорости $\omega \in [-1, 1]$. Для Re = 2500 найдено 20 семейств решений, причем авторы не уверены, что это количество решений окончательное. Найденные решения разнообразны, среди них имеются и такие, для которых функция $g(z)$ несколько раз меняет знак на отрезке $[-1, 1]$. Выбранный авторами метод решения задачи чувствителен к величине шага сетки при численном интегрировании системы (85), (86): недостаточное число точек сетки может привести к появлению паразитических решений. Полученная в [109, 110] информация наводит на мысль о том, что при $\mathrm{Re} \to \infty$ число решений обсуждаемой задачи может быть сколь угодно большим. Здесь наблюдается аналогия с задачей Джеффри—Гамеля (см. раздел 7), где факт существования произвольно большого числа решений при $\mathrm{Re} \to \infty$ можно считать доказанным.

Неединственность решения задачи (85), (86), имеющая место при достаточно больших Re, делает актуальной проблему изучения их устойчивости. Эта проблема весьма далека от решения. Необходимые условия устойчивости могут быть получены при рассмотрении возмущений стационарных решений из класса решений (84) уравнений (1), (2). Если число Re мало, то для получения достаточных условий можно воспользоваться энергетическим методом, однако его применение накладывает жесткие условия на поведение возмущения вектора скорости при $r \to \infty$ Рассмотрение общего случая требует развития специального математического аппарата для изучения решений уравнений Навье—Стокса в областях типа слоя с линейным ростом скорости на бесконечности. Эта задача еще ждет своих исследователей.

Обратимся теперь к задаче (85), (86) при $\Omega_- = 0$, $\lambda_+ = 0$ (это означает, что жидкость вдувается через нижний неподвижный диск с постоянной скоростью λ_-). Эта задача рассматривалась для значений $\mathrm{Re} < 400$ в работах [111, 108]. Наиболее подробный ее анализ выполнен в [112], где интервал чисел Рейнольдса расширен до Re = 2800. В этой задаче возникает еще одно число Рейнольдса $\Lambda = \lambda_- a/\nu$, характеризующее интенсивность вдува. Поскольку при $\Lambda = 0$ и малых Re существует единственное решение типа B, то естественно использовать метод продолжения по параметру для получения решений при больших значениях Re и Λ. Оказалось, что при фиксированном $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_* \approx 680$ для некоторого интервала (Λ_1, Λ_2) значений Λ существует три решения, принадлежащие одной непрерывной ветви. На границах этого интервала происходит ветвление: на одном из концов пара решений возникает, на другом исчезает. Кривые зависимости характеристик течения от параметра вдува Λ имеют S-образную форму. По известным соображениям теории бифуркаций верхние и нижней части кривой соответствуют решения, устойчивые, по крайней мере, в классе возмущений вида (84), а средней — неустойчивые. Когда Λ, возрастая, проходит через точку Λ_2, происходит скачкообразная перестройка течения. При этом исчезает пограничный слой, примыкающий к неподвижному диску, и течение вне пограничного слоя приближается к чисто осевому. Аналогичное явление наблюдается, когда Λ убывает, проходя через значение Λ_1. Если $\Lambda > \Lambda_1$ решение характеризуется единственным пограничным слоем на вращающемся диске. При переходе через точку Λ_1 скачком возникает пограничный слой на неподвижном диске и вращение в ядре течения.

В общей постановке задача (85), (86) исследовалась П.И. Зандбергеном и Д. Дийкстрой с помощью высокоточных численных методов. Их результаты изложены в обзоре [17], который содержит также обширную информацию предшествующих работ по задаче Кармана и ее обобщениям (список литературы в [17] насчитывает 79 наименований). Не имея возможности подробно описывать результаты анализа задачи (85), (86), отметим лишь, что характерным ее свойством является несвязность множества решений в пространстве параметров задачи.

Среди работ, посвященным решениям кармановского типа, следует отметить статьи Р. Беркера [113, 114]. В них показано, что существует бесконечное множество решений задачи о стационарном движении вязкой жидкости между параллельными плоскостями, вращающимися с одинаковой угловой скоростью Ω вокруг общей оси $x_3 = z$. Поле скоростей этих движений в декартовых координатах имеет вид:

$$v_1 = -\Omega[x_2 - g(x_3)], \;\; v_2 = \Omega[x_1 - f(x_3)], \;\; v_3 = 0. \qquad (87)$$

Функции f и g даются явными формулами

$$\frac{f(z)}{l} = \frac{1-\varphi(a)}{\Delta}[\varphi(z)-\varphi(a)] - \frac{\chi(a)}{\Delta}[\chi(z)-\chi(a)],$$

$$\frac{g(z)}{l} = \frac{\chi(a)}{\Delta}[\varphi(z)-\varphi(a)] + \frac{1-\varphi(a)}{\Delta}[\chi(z)-\chi(a)],$$

где l — произвольный параметр, $2a$ — расстояние между плоскостями,

$$\varphi(z) = \mathrm{ch}(mz)\cos(mz), \;\; \chi(z) = \mathrm{sh}(mz)\sin(mz),$$
$$m = (\Omega/2\nu)^{1/2}, \;\; \Delta = [\mathrm{ch}(ma) - \cos(ma)]^2 .$$

Траектории частиц в движении с полем скоростей (87) являются окружностями. Каждая из них расположена в плоскости, параллельной плоскости $z = 0$, а центры окружностей образуют кривую $x = f(z)$, $y = g(z)$. Параметр l имеет простой геометрический смысл: он равен максимальному удалению центра указанных окружностей от оси z. Это позволяет интерпретировать решение (87) в качестве вихря с криволинейной осью. В [114] получено обобщение решения (87) на случай, когда плоскости вращаются с одной и той же угловой скоростью, но вокруг разных осей, параллельных оси z и отстоящих друг от друга на расстоянии b. Такое решение хорошо аппроксимирует течение в т.н. ортогональном реометре. Этот прибор был сконструирован и использован Б. Максвеллом и Р.П. Чартоффом для определения реологических свойств вязкоупругих сред [115]. В [114] на основе энергетического метода [116] был выполнен анализ устойчивости решения (87) и его обобщения в классе возмущений конечной амплитуды, быстро убывающих при $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \to \infty$. В простейшем случае $b = 0$ (оси вращения плоскостей совпадают) достаточное условие устойчивости имеет вид

$$\frac{l}{a} < \frac{\pi^2 \mathrm{th}(\mathrm{Re}/2)^{1/2}}{2\,\mathrm{Re}^{3/2}}, \tag{88}$$

где $\mathrm{Re} = a^2\Omega/\nu$ — число Рейнольдса.

Тот факт, что условие (88) не выделяет единственное или хотя бы несколько решений из однопараметрического семейства (87), требует осмысления. Можно предположить, что он связан с “эффектом бесконечности”, а семейство решений (87) при выполнении условия (88) образует устойчивое инвариантное многообразие в подходящем пространстве решений уравнений Навье—Стокса. Дать более точные формулировки затруднительно, поскольку решения системы (1), (2), определенные в бесконечном слое $|z| < a$ и имеющие линейный рост скоростей при $r \to \infty$, до сих пор не подвергались систематическому изучению.

13. НЕЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, СКРЫТАЯ СИММЕТРИЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ

Как известно [1], точечные преобразования в системе дифференциальных уравнений не меняют структуру допускаемой ею группы Ли. Иначе обстоит дело, если эта система подвергается нелокальным преобразованием. В качестве примера рассмотрим систему уравнений Навье—Стокса (1), (2) в плоском случае. Введем функцию тока $\psi(x_1, x_2, t)$ плоского движения соотношениями

$$v_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}.$$

Функция ψ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \frac{\partial(\Delta\psi, \psi)}{\partial(x_1, x_2)} = \nu\Delta\Delta\psi. \tag{89}$$

Рассмотрим двумерную группу G_2, порожденную операторами галилеева переноса Y_1, Y_2 по осям x_1, x_2. Она допускается уравнениями (1), (2). Преобразования галилеева переноса индуцируют преобразования пространства независимых переменных x_1, x_2, t и искомой функции ψ в уравнении (89). Соответствующие им инфинитезимальные операторы имеют вид

$$P_1 = t\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial \psi}, \quad P_2 = t\frac{\partial}{\partial x_2} - x_1\frac{\partial}{\partial \psi}.$$

Поскольку коммутатор этих операторов $[P_1, P_2] = -2\partial/\partial\psi$ не принадлежит линейной оболочке P_1, P_2, то данной паре операторов не отвечает никакая группа Ли.

Попробуем теперь построить инвариантное решение системы (1), (2) относительно группы G_2. Общий вид такого решения дается формулами $v_1 = t^{-1}x_1 + c_1(t)$, $v_2 = t^{-1}x_2 + c_2(t)$, $p = c_3(t)$. Подстановка этих выражений в уравнение неразрывности дает противоречие, $2t^{-1} = 0$. Этот пример показывает, что выполнение необходимого условия существования инвариантного решения (см. [1, 6]) еще не гарантирует разрешимость редуцированной системы с меньшим числом независимых переменных. Вопрос о том, является ли случайной или закономерной связь между отсутствием инвариантных G_2-решений системы (1), (2) и тем фактом, что операторы P_1, P_2 не образуют алгебру Ли, остается открытым.

Рассмотрим теперь вращательно-симметричные решения системы (1), (2). Уравнения для их описания получаются из (10), если считать искомые функции в этой системе не зависящими от угла θ. С помощью нелокального преобразования (61) уравнения вращательно симметричных движений сводятся к системе

$$E\psi_t - r\frac{\partial(\psi, r^{-2}E\psi)}{\partial(r,z)} - 2r^{-2}JJ_z = \nu E^2\psi, \qquad (90)$$

$$J_t - r^{-1}\frac{\partial(\psi, J)}{\partial(r,z)} = \nu EJ. \qquad (91)$$

Здесь $J = rv_\theta$, $E = \partial^2/\partial r^2 - r^{-1}\partial/\partial r + \partial^2/\partial z^2$ — оператор Стокса. Основная алгебра Ли системы (90), (91) вычислена в работе [117]. Там же перечислены все существенно различные классы инвариантных решений данной системы, найдены ее новые решения. Другие решения уравнений вращательно-симметричного движения построены в работах [118—123]. Им посвящен также ряд параграфов в монографиях [6, 61, 93, 124, 125]. Кроме того, отдельные решения с указанной симметрией рассматривались в разделах 9, 12 настоящего обзора. Мы не будем останавливаться на изложении результатов упомянутых статей, а сосредоточим свое внимание на новом нелокальном преобразовании уравнений вращательно-симметричного движения [118].

Введем вместо давления p новую искомую функцию Φ с помощью соотношения

$$p = -\frac{1}{r^2}\psi_r^2 + \frac{1}{r}\Phi_r\,.$$

Тогда для искомых функций ψ, J, Φ получается система, состоящая из уравнения (91) и еще двух уравнений

$$\psi_t - \frac{1}{r}\psi_r\psi_z + \Phi_z = \nu E\psi\,, \tag{92}$$

$$E\Phi = \frac{1}{r^2}(J^2 + \psi_z^2) + \frac{2}{r}\psi_r E\psi\,. \tag{93}$$

Уравнения (91)—(93) обладают богатыми групповыми свойствами. Наиболее широкая группа преобразований, допускаемая этими уравнениями, вычислена С.В. Головиным. Базис соответствующей алгебры Ли образован следующими операторами:

$$T_1 = \partial_t\,,\;\; T_2 = 2t\partial_t + r\partial_r + z\partial_z + \psi\partial_\psi\,,$$
$$T_3 = 2\alpha\partial_t + r^2\dot\alpha\partial_\psi + (4\dot\alpha - r^2 z\ddot\alpha)\partial_\Phi\,,$$
$$T_4 = \beta\partial_\psi - z\dot\beta\partial_\Phi\,,\;\; T_5 = \gamma\partial_\Phi\,,\;\; T_6 = r^2\delta\partial_\Phi\,.$$

Здесь α, β, γ, δ — произвольные (класса C^∞) функции t; точка означает производную по t. С согласия С.В. Головина и с указанием его авторства этот результат был впервые опубликован в работе [118].

Заметим, что базис основной алгебры Ли системы (90), (91) состоит из операторов T_1, T_2, $T_7 = 2\alpha\partial_z + r^2\dot\alpha\partial_\psi$, $T_8 = \beta\partial_\psi$. Таким образом, налицо расширение основной группы при переходе к новым искомым функциям в системе (90), (91).

Наличие в группе симметрий системы (91)—(93) преобразований, зависящих от произвольных функций времени, позволяет строить инвариантные решения этой системы, априори обладающие функциональным произволом. Рассмотрим группу, порожденную оператором $T_3 + T_4$. Общий вид инвариантного решения относительно данной группы таков:

$$\psi = \frac{z}{2\alpha}(r^2\dot\alpha + 2\beta) + f(r,t)\,,\;\; J = g(r,t)\,,$$
$$\Phi = \frac{z^2}{2\alpha^2}\left[r^2\left(\dot\alpha^2 - \frac{\alpha\ddot\alpha}{2}\right) + 2\dot\alpha\beta - \alpha\dot\beta\right] + \frac{2\dot\alpha z}{\alpha}f + h(r,t)\,.$$

Функции f, g, h удовлетворяют рекуррентной системе линейных уравнений [118]. Данное решение в двух направлениях обобщает известный вихрь Бюргерса [120]. Во-первых, описываемое им движение является нестационарным, а во-вторых, при $\beta \neq 0$ поле скоростей имеет особенность на оси симметрии, порожденную распределенным источником с линейной плотностью $\beta/4\pi\alpha$, произвольно зависящей от времени.

Заметим, что классическое решение Бюргерса,

$$v_r = -ar\,,\;\; v_z = 2az\,,\;\; v_\theta = \frac{b}{2\pi r}\left[1 - \exp\left(-\frac{ar^2}{\nu}\right)\right],$$

($a > 0$ и b — постоянные) имеет нетривиальную теоретико-групповую природу: оно не является инвариантным решением системы (1), (2), но может быть получено как инвариантное решение некоторой частично инвариантной подмодели этой системы. Между тем, использование уравнений (91)—(93) позволяет получить решение Бюргерса и его обобщения достаточно простым способом.

Множество точных решений системы (91)—(93) не исчерпывается ее инвариантными решениями. Одно из них (стационарный цилиндрический вихрь) построено в работе С.Н. Аристова [119]:

$$\psi = zU(r)\,,\;\; J = zV(r)\,,\;\; \Phi = z^2W(r)\,. \qquad (94)$$

Функции U, V, W определяются из решения нелинейной краевой задачи для системы 6-го порядка, которая детально исследована в [119]. Решение (94) удовлетворяет условиям ограниченности на оси симметрии и условиям прилипания на боковой поверхности полубесконечного цилиндра $0 < r < R$, $z > 0$. На основании цилиндра ($z = 0$) условия прилипания выполняются частично: $v_z = v_\theta = 0$ но $v_r \neq 0$. Решение Аристова хорошо описывает вихревое течение, возникающее при размешивании чая в стакане. Известно, что вращение жидкости вблизи свободной поверхности стакана вызывает интенсивное движение в вертикальном направлении, благодаря которому частички чая движутся вверх. Увеличение скорости вращения приводит к формированию нисходящего потока вблизи оси вращения. Аналогичное явление характерно для мощных атмосферных вихрей.

Теоретико-групповую подоплеку решения (94) мы обсудим ниже, а сейчас заметим, что это решение имеет нестационарные аналоги, среди которых особый интерес представляют автомодельные решения

$$\psi = zA(\xi)\,,\;\; J = t^{-1/2}zB(\xi)\,,\;\; \Phi = t^{-1}z^2F(\xi)\,,$$

где $\xi = r(\nu t)^{-1/2}$. Эти решения еще подробно не исследовались.

Предположим, что решение системы (91)—(93) определено в области $\Pi_T = R_+^2 \times (0,T)$ и удовлетворяет условиям быстрого убывания при $r^2 + z^2 \to \infty$ (точные формулировки см. в [118]). Тогда интегрирование равенства (93) по $r > 0$ полуплоскости приводит к соотношению

$$\int\limits_{r>0} (v_r^2 + v_\theta^2 - 2v_z^2) r dr dz = 0, \quad 0 < t < T. \qquad (95)$$

Тождество (95) выражает закон сохранения при движении вязкой жидкости, заполняющей все пространство. Оно является частным случаем тождеств, полученных в [126] для общего трехмерного движения. Другое интегральное тождество получается из уравнения (92) и имеет вид

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{r>0} r\psi dr dz = -\int\limits_{r>0} r^2 v_r v_z dr dz.$$

О дальнейших исследованиях в этом направлении см. [127] и цитированную там литературу.

Новые возможности построения точных решений дает аппарат дифференциальных инвариантов группы Ли [1]. Рассмотрим n-мерное эвклидово пространство независимых переменных X и m-мерное пространство U функций $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Предположим для простоты, что эти функции бесконечно дифференцируемы. Пусть в пространстве $Z = X \times U$ действует группа Ли G точечных преобразований $T : Z \to Z$. Соответствующая ей алгебра Ли L порождается инфинитезимальными операторами $Y = \xi^i \partial_{x^i} + \eta^\alpha \partial_{u^\alpha}$ (здесь и ниже по повторяющимся верхнему и нижнему индексам производится суммирование).

Преобразования функций $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, осуществляемые действием группы G индуцируют преобразования их производных до любого порядка k. Таким образом возникает понятие продолженной группы Ли, действующей в пространстве $\underset{k}{Z} = X \times U \times \underset{1}{U} \times \ldots \times \underset{k}{U}$ где $\underset{s}{U}$ есть пространство всех частных производных компонент u^l вектор-функции $\mathbf{u}$ порядка $s = i_1 + \ldots + i_n$:

$$u^l_{i_1 \ldots i_n} = \frac{\partial^s u^l}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}.$$

Ей отвечает продолженная алгебра Ли $\underset{k}{L}$, генерируемая операторами

$$\underset{k}{Y} = \xi^i \partial_{x^i} + \eta^\alpha \partial_{u^\alpha} + \zeta_i^\alpha \partial_{u_i^\alpha} + \ldots + \zeta^\alpha_{i_1 \ldots i_k} \partial_{u^\alpha_{i_1 \ldots i_k}}. \qquad (96)$$

Координаты продолженного оператора (96) вычисляются по известным формулам [1]

$$\zeta^\alpha_{i_1 \ldots i_s} = D_{i_1} \ldots D_{i_s} (\eta^\alpha - u^\alpha_j \xi^j) + \xi^j u^\alpha_{j\, i_1 \ldots i_s},$$

где D_i — оператор полного дифференцирования по переменной x_i.

Обозначим через $D^j\mathbf{u}$ и совокупность всех частных производных функции $\mathbf{u}$ и порядка j. Дифференциальным инвариантом k-того порядка группы G называется такая функция $J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, D^1\mathbf{u}, \ldots D^k\mathbf{u})$, что для любого преобразования $T \in G$ справедливо равенство

$$J_k(T\mathbf{x}, T\mathbf{u}, T_1 D^1\mathbf{u}, \ldots, T_k D^k\mathbf{u}) = J_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}, D^1\mathbf{u}, \ldots, D^k\mathbf{u}).$$

Оператор $\delta = \lambda^i D_i$ называется оператором инвариантного дифференцирования, если и только если для любого дифференциального инварианта J функция $\delta J = \lambda^i(D_i J)$ также будет дифференциальным инвариантом. Важным свойством операторов инвариантного дифференцирования является то, что они образуют алгебру Ли над полем дифференциальных инвариантов группы. Любой оператор, коммутирующий со всеми операторами $Y_\infty \in L_\infty$, есть оператор инвариантного дифференцирования.

В работе [128] доказано, что алгебра операторов инвариантного дифференцирования всегда может быть преобразована в коммутативную алгебру. Центральным фактом теории дифференциальных инвариантов является следующая

Теорема 3. Для любой группы G существует конечный базис дифференциальных инвариантов, т.е. такое конечное множество скалярных дифференциальных инвариантов, что любой дифференциальный инвариант группы G может быть получен из базисных операторов с помощью конечного числа функциональных операций и операций инвариантного дифференцирования.

В работе С.В. Головина [129] построены базисы дифференциальных инвариантов для бесконечномерных групп Ли, допускаемых системой уравнений Навье-Стокса несжимаемой жидкости и двух систем, описывающих стационарные течения идеального газа. Для группы G_∞, сохраняющей систему (1), (2), этот базис состоит из 13 инвариантов:

$$t, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_1^3 v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Для группы, допускаемой уравнениями (90), (91) вращательно-симметричного движения в переменных ψ, J, базис дифференциальных инвариантов имеет вид

$$t, \quad r, \quad \psi_z, \quad \psi_{rr} - r^{-1}\psi_r. \qquad (97)$$

Алгоритм построения дифференциально инвариантных решений во многом схож с тем, который применяется при отыскании инвариантных и частично инвариантных решений. Продемонстрируем его на примере системы (90), (91). Рассмотрим два инварианта нулевого и первого порядков, r и ψ_z, из базиса (94) и свяжем их функциональной зависимостью,

$$\psi_z = U(r). \tag{98}$$

Это означает, что функция ψ линейно зависит от z. Исследование совместности системы соотношений (90), (91), (98) приводит к равенству $J_z = V(r)$, которое вместе с (98) определяет решение Аристова. Система обыкновенных дифференциальных уравнений для U и V получается после подстановки выражений $\psi = zU(r)$, $J = zV(r)$ в уравнения (90), (91). Теперь заметим, что переменная t тоже входит в базис (97). Расширяя зависимость (98) до $\psi_z = Q(r, t)$, мы приходим к нестационарным аналогам решения (97).

Для получения решений типа Кармана следует связать функциональной зависимостью инварианты нулевого и второго порядков,

$$\psi_{rr} - r^{-1}\psi_r = R(r,t).$$

Интегрирование этого соотношения дает представление функции тока в виде

$$\psi = r^2 f(z,t) + g(z,t) + h(r,t). \tag{99}$$

Подстановка выражения (99) в уравнения (90), (91) приводит к переопределенной системе для функций f, g и h. Эта система допускает решения с $g = h = 0$. Им соответствуют нестационарные аналоги решения Кармана. Само решение Кармана получается в случае, когда функция f не зависит от t. В полном объеме задача исследования совместности соотношений (90), (91), (99) еще не решена. Можно ожидать, что ее решение приведет к новым точным решениям уравнений вращательно симметричного движения вязкой жидкости.

Рассмотрения этого и предыдущего разделов дают основание говорить о скрытой симметрии уравнений Навье—Стокса. Она проявляется в наличии таких решений системы (1), (2), которые не видны невооруженным глазом, но могут быть получены в результате двухшагового алгоритма (см. раздел 12), или являются дифференциально инвариантными решениями этой системы, или обнаруживаются после применения к ней нелокального преобразования. Последняя возможность далеко не исчерпана переходом к функции тока для эффективно двумерных течений или преобразованием, описанным в начале настоящего раздела. Классическим примером нелокального преобразования уравнений гидродинамики является переход в них к лагранжевым координатам. В.К. Андреев и А.А. Родионов исследовали групповые свойства уравнений движения идеальной несжимаемой жидкости (в том числе и неоднородной) в лагранжевых координатах и получили целый ряд их новых точных решений (см. [130—132], а также [6], [93]). Групповой анализ уравнений Навье—Стокса в переменных Лагранжа до сих пор не проводился. Не приходится сомневаться, что на этом пути будут получены нетривиальные результаты.

14. ДИСКРЕТНЫЕ СИММЕТРИИ И РЕШЕНИЯ БОГОЯВЛЕНСКОГО

Наряду с непрерывными преобразованиями, образующими группу G_∞ (см. раздел 1), уравнения Навье—Стокса допускают дискретные преобразования вида

$$t' = t\,,\quad x_i' = x_i\,,\quad x_j' = -x_j\,,\quad v_i' = v_i\,,\quad v_j' = -v_j\,,\quad p' = p\,, \tag{100}$$

где i, $j = 1, 2, 3$ и $i \neq j$. Свойство инвариантности системы (1), (2) относительно преобразований (100) используется в теории гидродинамической устойчивости. В частности, вихри Тэйлора, возникающие после потери устойчивости течения Куэтта между вращающимися цилиндрами [21, 22], обладают двоякой симметрией: они стационарны и инвариантны относительно вращений вокруг оси z (непрерывная группа симметрий) и допускают согласованные преобразования отражений относительно плоскостей $z = 0$ в координатном пространстве и $v_z = 0$ в пространстве годографа (дискретная симметрия).

С другой стороны, группа G_∞ содержит шестимерную подгруппу движений в пространствах координат и скоростей, и можно рассмотреть дискретные подгруппы этой группы (кристаллографические симметрии). В серии работ О.И. Богоявленского [133—137] (последняя из них написана с Б. Фухсштайнером) построены бесконечные семейства точных решений уравнений Навье-Стокса. В работах [133—135] найдены решения, прототипом которых являются известные течения Бельтрами [15]. Работы [136, 137] посвящены решениям, инвариантным относительно кристаллографических групп симметрий.

Еще в 1919 г. В. Тркал показал, что уравнения (1), (2) допускают точные решения с полем скоростей

$$\mathbf{v}(x,t) = \exp(-\alpha^2 \nu t)\mathbf{u}(x)\,,$$

где $\alpha = \mathrm{const}$, а компоненты вектора $\mathbf{u}$ удовлетворяют системе Бельтрами

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}\,. \tag{101}$$

Среди решений системы (101) имеются т.н. ABC-решения, в которых

$$u_1 = A\sin x_3 + C\cos x_2\,,\quad u_2 = B\sin x_1 + A\cos x_3\,,\quad u_3 = C\sin x_2 + B\cos x_1$$

(A, B, C — постоянные). В работе [133] найден обширный класс решений системы (101), далеко обобщающий ABC-решения, и на его основе построено семейство точных решений уравнений Навье—Стокса, обладающих функциональным произволом:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \exp(-\alpha^2 \nu t)\int\!\!\int_{S^2} (\sin(\alpha\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\mathbf{T}(\mathbf{k}) + \cos(\alpha\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})k \times \mathbf{T}(\mathbf{k}))d\sigma\,,$$

$$p(\mathbf{x},t) = K - \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}/2\,. \qquad (102)$$

Здесь интеграл берется по любой мере $d\sigma$ на двумерной единичной сфере S^2 : $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$, $\mathbf{T}(\mathbf{k})$ — произвольное гладкое векторное поле, касательное к единичной сфере, $\mathbf{T}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{k} = 0$ и $\alpha \neq 0$ — произвольный параметр. Для специального класса векторных полей $\mathbf{T}(\mathbf{k})$ и эвклидовой меры $d\sigma$, решения (102) имеют солитоноподобные свойства и называются "висконами" [134, 135].

Если мера $d\sigma$ имеет вид $d\sigma = \delta(\mathbf{k}_1) + \ldots + \delta(\mathbf{k}_P)$, где δ — мера Дирака, формула (102) дает точные решения

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \exp(-\alpha^2\nu t)\sum_{i=1}^{P}(\sin(\alpha\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{x})\mathbf{T}(\mathbf{k}_i) + \cos(\alpha\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{x})\mathbf{k}_i\times\mathbf{T}(\mathbf{k}_i))\,. \qquad (103)$$

Здесь $\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{k}_i = 1$ и $\mathbf{T}(\mathbf{k}_i)\cdot\mathbf{k}_i = 0$. Как решения (102), так и решения (103) определены во всем пространстве. Если векторы $\mathbf{k}_i$ произвольны, решение (103) является квазипериодической функцией координат. Оно становится периодическим по x_1, x_2, x_3 при специальном выборе векторов и может иметь прямоугольную или косоугольрую решетку периодов [134].

В работе [136] изучены пространственно-периодические решения системы (1), (2) с кубической решеткой периодов:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}+2\pi\mathbf{e}_j,t) = \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\,,\quad p(\mathbf{x}+2\pi\mathbf{e}_j,t) = p(\mathbf{x},t)\,,$$

где $\mathbf{e}_j$ (j = 1, 2, 3) — единичные базисные векторы. Такие решения представимы рядом Фурье

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \sum_k \exp(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\mathbf{V}_k(t)\,. \qquad (104)$$

Ввиду вещественности $\mathbf{v}$, амплитудные функции $\mathbf{V}_k$ и $\mathbf{V}_{-k}$ должны быть комплексно сопряженными. Волновые векторы $\mathbf{k}$ имеют произвольные целочисленные компоненты k_1, k_2, k_3. Подстановка (104) вместе с соответствующим представлением для давления в уравнения (1), (2) приводит к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $\mathbf{V}_k(t)$. Эта система описывает взаимодействие мод, отвечающих различным волновым векторам $\mathbf{k}$. Рассмотрим две моды с векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{m}$. Оказывается [136], что в трехмерном случае две моды не взаимодействуют, если их волновые вектора коллинеарны. Если для произвольных волновых векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{m}$ соответствующие амплитудные функции пропорциональны, $\mathbf{V}_k(t) = \lambda(t)\mathbf{V}_m(t)$, то эти моды также не взаимодействуют. Рассмотрим двумерные уравнения Навье—Стокса. В этом случае две моды не взаимодействуют, если и только если $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{m}\cdot\mathbf{m}$ или $\mathbf{k} = \lambda\mathbf{m}$.

В работе [136] дана полная классификация возможных периодических решений трехмерных уравнений Навье—Стокса с попарно не взаимодействующими модами Фурье. Волновые векторы $\mathbf{k} \in Z^3$ для таких решений принадлежат к одному из следующих четырех семейств множеств:

(A) прямые линии $\mathbf{k} = \lambda\mathbf{n}$,
(B) плоскости $\mathbf{k}\cdot\mathbf{e} = 0$,
(C) окружности $\mathbf{k}\cdot\mathbf{e} = 0$, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = N$,
(D) сферы $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = N$.

Здесь допустимы любые натуральные значения $N \neq 4^l(8k + 7)$ где k и l — произвольные целые положительные числа. Соответствующие периодические решения уравнений Навье—Стокса представимы в виде сходящихся рядов Фурье (104) с коэффициентами

$$\mathbf{V}_k(t) = \exp(-\nu t\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\mathbf{V}_k(0).$$

Заметим, что равенство (D) означает представимость натурального числа N в виде суммы квадратов трех целых чисел. Поскольку число подобных представлений $r(N) \to \infty$ при $N \to \infty$ то и семейство построенных точных решений системы (1), (2) бесконечно. Все решения этого семейства объединяет замечательное свойство: в них отсутствует передача энергии по спектру.

Результаты статьи [136] получили дальнейшее развитие в работе [137]. В ней, в частности, изучены пространственно-периодические решения уравнений Навье—Стокса с произвольными векторами периодов $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ Кроме того, рассмотрен случай, когда на жидкость действует пространственно-периодическое поле массовых сил.

Еще одно интересное приложение дискретные симметрии находят в задаче Коши для уравнений Навье—Стокса. Пусть жидкость заполняет все пространство и в начальный момент имеет распределение скорости

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \tag{105}$$

где $\mathbf{v}_0$ — соленоидальная вектор-функция. Условия разрешимости задачи (1), (2), (105) можно найти в книге [75]. Особый интерес представляют решения этой задачи, быстро убывающие при $\mathbf{x} \to \infty$,

$$|\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)| \leqslant C(1 + |\mathbf{x}|)^{-\gamma}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t \in [0, T], \tag{106}$$

где γ и C — положительные постоянные (допускается также зависимость C от t). Если неравенство (106) выполнено при $t = 0$, это еще не гарантирует его справедливость при $t > 0$. В работе [139] выделен интервал значений γ, $4 < \gamma \leqslant 5$ и класс функций $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$, для которых асимптотика (106) воспроизводится со временем. Указанный класс функций характеризуется следующей дискретной симметрией:

функция $v_{0,j}$ четна по переменной x_j и нечетна по остальным переменным ($j = 1, 2, 3$);

$$v_{0,1}(x_1, x_2, x_3) = v_{0,2}(x_3, x_1, x_2) = v_{0,3}(x_2, x_3, x_1)\,.$$

Кроме того, подходящая норма вектор-функции $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ должна быть достаточно малой. Отметим, что для решения задачи Коши с такими начальными данными при $\gamma \in (4, 5]$ справедливы тождества Доброхотова—Шафаревича [126].

Высшая степень симметрии начальных данных, ассоциированная с группой одного из правильных многогранников в $\mathbb{R}^3$, даст возможность увеличить критический показатель γ, но даже в самой благоприятной ситуации, соответствующей группе икосаэдра, его значение не превзойдет 7 (гипотеза Л. Брандолезе).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Знание группы G_∞, допускаемой системой (1), (2), позволяет найти все ее инвариантные решения. Однако нет необходимости перечислять их полную совокупность, поскольку одно решение может получаться из другого каким-либо преобразованием группы G_∞. (Например, решение, инвариантное относительно подгруппы с оператором X_1, переходит в инвариантное X_2 — решение под действием преобразования подгруппы X_{12} — поворота на угол $\pi/2$ в плоскостях x_1, x_2 и v_1, v_2). Два таких решения естественно назвать несущественно различными. Задача описания всех классов существенно различных инвариантных решений изучаемой системы сводится к построению внутренних автоморфизмов допускаемой ею алгебры Ли и исследования ее структуры [1].

Обозначим через L_∞ алгебру Ли, соответствующую группе G_∞ и через $\mathrm{Int}L_\infty$ группу ее внутренних автоморфизмов. Две подалгебры M и N алгебры L_∞ называются подобными, если существует внутренний автоморфизм $A \in \mathrm{Int}L_\infty$ такой что $A(N) = M$. Тем самым все подалгебры данной алгебры Ли разбиваются на классы неподобных подалгебр. Совокупность представителей классов неподобных подалгебр данной размерности s называется оптимальной системой порядка s и обозначается символом θ_s. Алгоритм построения оптимальной системы можно найти в книгах [1, 6]. Его применению к задачам группового анализа фундаментальных уравнений математической физики и механики сплошной среды посвящены работы [2, 140—142].

Как уже не раз отмечалось выше, наиболее широкая группа G_∞, допускаемая уравнениями (1), (20), является бесконечномерной, так же как группа $\tilde{G}_\infty$ допускаемая уравнениями Эйлера несжимаемой жидкости (соответствующая ей алгебра $\tilde{L}_\infty$ получается в результате расширения алгебры L_∞ путем присоединения к ее базисным операторам оператора растяжения $\tilde{Z} = t\partial_t + x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + x_3\partial_{x_3}$). Подобная ситуация характерна для многих других уравнений и систем уравнений механики сплошной среды: уравнения двумерного стационарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости [143]; уравнения нестационарного пограничного слоя Марангони [144]; уравнения стационарной газовой динамики с "разделенным" уравнением состояния $p = f(S)g(\rho)$, где S — удельная энтропия, ρ — плотность, p — давление газа [145]; уравнение Кармана—Гудерлея, описывающее трехмерные стационарные трансзвуковые течения газа [129]; уравнение Линя—Рейснера—Цяня, возникающее в теории нестационарных околозвуковых движений [146]; уравнения коротких волн [147].

Изучение множества подалгебр бесконечномерных алгебр Ли представляет достаточно сложную задачу, которая решена лишь в отдельных случаях. Ю.В. Шанько провел исследование структуры алгебры $\tilde{L}_\infty$ допускаемой уравнениями движения идеальной несжимаемой жидкости. Им построены оптимальные системы θ_1 и θ_2 алгебры $\tilde{L}_\infty$. Результаты исследования опубликованы в книге [6]. Задача построения оптимальных систем θ_1, θ_2 и θ_3 алгебры L_∞ допускаемой системой уравнений Навье—Стокса, решена в серии работ Р.О. Поповича и В.И. Фущича [148—150]. В этих работах также выписаны системы уравнений с тремя, двумя и одной независимыми переменными, к которым сводится отыскание инвариантных решений ранга три, два и один системы (1), (2). Найден ряд новых решений ранга три и два, обладающих функциональным произволом. Среди них имеется большое число решений, удовлетворяющих принципу линейной суперпозиции. Для редуцированных систем обыкновенных дифференциальных уравнений найдены общие или частные точные решения. Кроме того, в [148—150] изучены групповые свойства ряда редуцированных систем уравнений. Это позволило обнаружить новые скрытые симметрии уравнений Навье—Стокса. Наконец, для отдельных редуцированных систем уравнений исследованы т.н. неклассические симметрии [151] и условные симметрии [152].

Использование подалгебр алгебры L_∞, содержащих операторы Φ, Ψ_i ($i = 1, 2, 3$), ведет к инвариантным решениям, априори обладающим функциональным произволом. Одно из простейших решений получается, если рассмотреть подгруппу с операторами Ψ_1, Ψ_2 (3) и подчинить входящие в их коэффициенты произвольные гладкие функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ равенству $\psi_1\psi_2 = 1$. Поле скоростей в этом решении имеет вид

$$v_1 = \psi_1^{-1}\dot{\psi}_1 x_1\,,\;\; v_2 = \psi_2^{-1}\dot{\psi}_2 x_2\,,\;\; v_3 = 0\,, \qquad (107)$$

а давление является квадратичной функцией x_1, x_2. Пусть $\psi(0) = 0$, тогда $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ при $t = 0$ и мы получаем пример неединственности решения задачи Коши (1), (2), (105) в классе функций с линейным ростом скорости на бесконечности.

Кроме того, наличие в координатах операторов Ψ_i, Φ четырех произвольных функций времени создает предпосылки для группового расслоения системы (1), (2). Эта задача стоит на повестке дня.

Среди других актуальных задач группового анализа уравнений Навье—Стокса можно отметить систематическое изучение их инвариантных решений ранга два. Такие решения определяются из системы с двумя независимыми переменными и поэтому являются достаточно обозримыми, поддающимися аналитическому и численному исследованию. Решения этого класса описывают, в частности, эффективно одномерные нестационарные движения [19, 23, 81, 104], а также установившиеся плоские и осесимметричные течения (см. обзор [153] и цитированную в нем литературу). В последнем случае комбинация аналитических и численных методов позволила авторам описать новые вихревые структуры в течениях вязкой жидкости. Не имея возможности здесь сколь-нибудь подробно представить изложенные в [153] результаты, отметим лишь два из них. Для осесимметричных течений доказана теорема существования аналитического решения задачи Коши для уравнения (90) при $J = 0$ с данными на оси симметрии, которая является особой линией для этого уравнения, и дана оценка размера области аналитичности. Для плоских течений при наличии критической точки на прямолинейной твердой границе установлена возможность подхода разделяющей линии тока к границе под любыми углами, а также возможность прихода нескольких линий тока в одну точку границы.

Наконец, необходимо расширить запас частично инвариантных решений уравнений Навье—Стокса. Все построенные ранее решения этого класса базировались на подгруппах, содержащих операторы переноса и галилеева переноса, и являлись регулярными частично инвариантными решениями в смысле определения, данного в [1]. Между тем, уравнения газовой динамики обладают также и нерегулярными решениями данного класса — таковы, например, двойные и тройные волны (см. работу [100] и имеющиеся в ней ссылки). Сравнительно недавно было обнаружено, что нерегулярные частично инвариантные решения имеются у уравнений двумерного нестационарного пограничного слоя [154] и уравнений концентрационного пограничного слоя [155]. Было бы весьма интересно найти такие решения и у уравнений Навье—Стокса.

В заключение я выражаю искреннюю признательность академику Л.В. Овсянникову, у которого я учился теории и приложениям группового анализа дифференциальных уравнений, и академику Г.Г. Черному, вдохновившему меня на написание настоящего обзора. Я благодарен С.Н. Аристову, М.В. Башевой, О.И. Богоявленскому, Г.Б. Волковой, С.В. Головину, Е.В. Мамонтову, С.В. Мелешко, Е.Ю. Мещеряковой, Н.В. Петровской, Р.О. Поповичу за большую помощь в работе над рукописью. Я признателен также профессору А. Кадиру за приглашение в Центр перспективной математики и физики при Национальном университете наук и технологии Пакистана, где была написана значительная часть рукописи.

Литература

1. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., Наука, 1978, 400 с.
2. *Овсянников Л.В.* Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика. ПММ, 1994, т. 58, вып. 4, с. 30—55.
3. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М., Наука, 1983, 280 с.
4. *Бытев В.О.* Групповые свойства уравнений Навье-Стокса. Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1972, т. 3, № 3, с. 13—17.
5. Бучнев А.А. Группа Ли, допускаемая уравнениями идеальной несжимаемой жидкости. Динамика сплошной среды. Сб. науч. тр. Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1972, вып. 7, с. 212—214.
6. *Андреев В.К., Капцов О.В., Пухначев В.В., Родионов А.А.* Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск, ВО “Наука”. Сибирская издательская фирма, 1994, 319 с.
7. *Меньщиков В.М.* О продолжении инвариантых решений уравнений газовой динамики через ударную волну. Динамика сплошной среды. Сб. науч. тр. Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1970, вып. 4, с. 163—169.
8. *Меньщиков В.М.* О непрерывном сопряжении инвариантных решений. Динамика сплошной среды. Сб. науч. тр. Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1972, вып. 10, с. 70—84.
9. *Пухначев В.В.* Инвариантые решения уравнений Навье-Стокса, описывающие движения со свободными границами. Докл. АН СССР. 1972, т. 202, № 2, с. 302—305.
10. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М., ГИФМЛ, 1963, 728 с.
11. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М., Мир, 1973. 542 с.
12. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М., Наука, 1988, 736 с.
13. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М., Наука, 1974, 711 с.
14. *Berker R.* Integration des equations du mouve ment d'un fluide visquex incompressible. Handbuch der Physik, 1963, bd 8, ht 2, s. 1—384.
15. *Wang C.Y.* Exact solution of the unsteady Navier-Stokes equations. Appl. Mech. Rev. Nov. 1989, v. 42, № 11, part 2, p. 269—282.
16. *Wang C.Y.* Exact solution of the steady Navier-Stokes equations. Annu. Rev. Fluid Mech. 1991, 23, p. 159—177.

17. *Zandbergen P.J., Dijkstra D.* Von Karman swirling flows. Annu. Rev. Fluid Mech. 1987, p. 465–491.
18. *Пухначев В.В.* Плоское стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости с прямолинейными свободными границами. Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1971, т. 2, № 4, с. 67–75.
19. *Pukhnachov V.V.* Effectively one-dimensional free boundary problems for Navier-Stokes equations. Analysis and Approximation of Boundary Value Proble ms. 2000, № A2, 2000, p. 153–163.
20. *Долидзе Д.Е.* О некоторых случаях вращения вязкой несжимаемой жидкости. Известия АН СССР. Отделение техн. наук. 1937, № 2, с. 197–208.
21. *Taylor G.I.* Stability of a viscous fluid contained between two rotating cylinders. Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 223:289, 1923.
22. *Chossat P., Iooss G.* The Couette-Taylor Problem. Applied Mathe matical Sciences.- Springer-Verlag New York, 1994, v. 102, p. 233.
23. *Лаврентьева О.М.* Предельные режимы движения вращающегося вязкого кольца. Динамика сплошной среды. Сб. науч. тр. Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1980, вып. 44, с. 15–34.
24. *Бытев В.О.* Неустановившиеся движения кольца вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами. ПМТФ. 1970, № 3, с. 82–88.
25. *Налимов В.И., Пухначев В.В.* Неустановившиеся движения идеальной жидкости со свободной границей. Новосибирск, Изд-во НГУ, 1975, 172 с.
26. *Забабахин Е.И.* Заполнение пузырьков в вязкой жидкости. ПММ. 1960, вып. 6, с. 1129.
27. *Батищев В.А., Срубщик Л.С.* Об асимптотике свободной поверхности жидкости при исчезновении вязкости. Докл. АН СССР. 1975, т. 222, № 4, с. 782–785.
28. *Пухначев В.В.* Неклассические задачи теории пограничного слоя. Новосибирск, Изд-во НГУ, 1979.
29. *Пухначев В.В.* Квазистационарное приближение в задаче о движении изолированного объема вязкой несжимаемой капиллярной жидкости. ПММ. 1998, т. 62, вып. 6, с. 1002–1013.
30. *Solonnikov V.A.* On the justification of the quasistationary approximation in the problem of motion of a viscous capillary drop. Interfaces Free Bound. 1999,v. 1,№ 2, p. 125–174.
31. *Пухначев В.В.* Квазистационарное приближение в задаче о вращающемся кольце. Сибирский математический журнал. 2002, т. 42, № 3, с. 652–677.
32. *Пилецкас К., Кебликас В.* О существовании нестационарного решения Пуазейля. Сибирский математический журнал. 2005, т. 46, № 3(271), с. 649–662.
33. *Пилецкас К.* О поведении нестационарного решения Пуазейля при $t \to \infty$. Сибирский математический журнал. 2005, т. 46, № 4, с. 890–900.
34. *Капица П.Л.* Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. ЖЭТФ. 1948, т. 18, вып. 1, с. 3–18.
35. *Пухначев В.В.* К теории катящихся волн. ПМТФ. 1975, № 5, с. 47–58.
36. *Benjamin T.B.* Wave formation in laminar flow down an inclined plane. J. Fluid Mech. 1957, v. 2, p. 554–574.

37. *Алексеенко С.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г.* Волновое течение пленок жидкости. Новосибирск, ВО "Наука". Сибирская издательская фирма, 1992, 256 с.
38. *Алексеенко С.В., Гешев П.И., Куйбин П.А.* Течение жидкости со свободной границей по наклонному цилиндру. Докл. АН. 1997, т. 354, № 1, с. 47–50.
39. *Alekseenko S.V., Licht W., Markovich D.M. et al.* Proc. II Intern. Conf. Multiphase Flow. Japan, Kyoto. 1995, v. 1, p. 35–39.
40. *Jeffery G.B.* The two-dimentional steady motion of a viscous fluid. Phil. Mag. 1915, ser. 6, v. 29, № 172, p. 455–465.
41. *Hamel* G. Spiralformige Bewegungen zahen Flussigkeiten. Jahres. ber. Deutsch. Math. Ver. 1917, bd 25, s. 34–60.
42. *Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Кумакшев С.А.* Регулярно продолжаемые по числу Рейнольдса решения задачи Джеффри-Гамеля. Известия РАН. МЖГ. 2004, № 1, с. 15–32.
43. *Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А.* Многомодовая бифуркация течения вязкой жидкости в плоском диффузоре. ДАН. 2004, т. 399, № 5, с. 620–624.
44. *Rivkind L., Solonnikov V.A.* Jeffery-Hamel asymptotics for steady state Navier-Stokes flow in domains with sector-like outlets to infinity. J. Math. Fluid Mech. 2000, v. 2, № 4, p. 324–352.
45. *Serrin J.* On the Mathematical Basis for Prandtl's Boundary Layer Theory: an Example. Arch. Rational Mech. Anal. 1968, v. 28, p. 217–225.
46. *Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Кумакшев С.А.* Течение вязкой жидкости в конфузоре с большим углом раствора. Докл. РАН. 2002, т. 386, № 3, с. 333–337.
47. *Rosenhead L.* The steady two-dimentional radial flow of viscous fluid between two inclined plane walls. Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1940, v. 175, № 963, p. 436–467.
48. *Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А.* Бифуркация течения вязкой жидкости в плоском диффузоре. Докл. РАН. 2004, т. 396, № 4, с. 480–484.
49. *Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Нестеров С.В.* Эффективное численно-аналитическое решение изопериметрических вариационных задач механики методом ускоренной сходимости. ПММ. 2002, т. 66, вып. 5, с. 723–741.
50. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Эффективное численно-аналитическое решение вариационных задач механики. Докл. РАН. 2000, т. 374, № 5, с. 624-627.
51. *Nazarov S.A.* On the two-dimentional aperture problem for Navier-Stockes equations. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. Math. 1996, v. 323, p. 699–703.
52. *Шапеев А.В.* Нестационарное автомодельное течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском диффузоре. Механика жидкости и газа. 2004, № 1, с. 41–46.
53. *Moffatt H.K.* Viscous and resistive eddies near a sharp corner. J. Fluid Mech. 1964, v. 18, № 1, p. 1–18.
54. *Солонников В.А.* Разрешимость задачи о стекании вязкой несжимаемой жидкости в открытый бассейн. Труды МИАН. 1988, т. 179, с. 174–202.
55. *Андреев В.К.* Устойчивость неустановившихся движений жидкости со свободной границей. Новосибирск, ВО "Наука". Сибирская издательская фирма, 1992,

136 с.
56. *Слезкин Н.А.* Об одном случае интегрируемости полных дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости. Уч. зап. МГУ. 1934, вып. 2, с. 89–90.
57. *Яцеев В.И.* Об одном классе точных решений уравнений движения вязкой жидкости. ЖЭТФ. 1950, т. 20, вып. 11, с. 1031–1034.
58. *Ландау Л.Д.* Об одном новом точном решении уравнений Навье-Стокса. ДАН СССР. 1944, т. 43, № 7, с. 299–301.
59. *Румер Ю.Б.* Задача о затопленной струе. ПММ. 1952, т. 16, вып. 2, с. 255–256.
60. *Голубинский А.А., Сычев В.В.* Об одном автомодельном решении уравнений Навье-Стокса. Уч. зап. ЦАГИ. 1976, т. 7, № 6, с. 11–17.
61. *Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И.* Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск, ВО "Наука". Сибирская издательская фирма, 1989, 336 с.
62. *Пухначев В.В.* Взаимодействие распределенного источника с плоской свободной поверхностью вязкой жидкости. Известия РАН. МЖГ. 1996, № 2, с. 53–65.
63. *Гольдштик М.А.* Одно парадоксальное решение уравнений Навье-Стокса. ПММ. 1960, т. 24, вып. 4, с. 610–621.
64. *Burggraf O.R., Stewartson K., Belcher R.* Boundary layer induced by a potential vortex. Phys. Fluids. 1971, v. 14, № 9, p. 1821–1833.
65. *Serrin J.* The swirling vortex. Phyl. Trans. Roy. Soc. Ser. A. 1972, v. 271, № 1214, p. 325–360.
66. *Goldshtik V.F.* Viscous flow paradoxes. Ann. Rev. Fluid Mech. 1992, v. 22, p. 441–472.
67. *Судаков В.Г., Сычев В.В.* Асимптотическая теория вязкого взаимодействия вихря с плоскостью. Известия РАН. МЖГ. 2002, № 6, с. 22–30.
68. *Никулин В.В.* Взаимодействие линейного вихря со свободной поверхностью. Динамика сплошной среды. Сб. науч. тр. Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1979, вып. 42, с. 31–42.
69. *Аристов С.Н.* Точное решение задачи о точечном источнике. Докл. РАН. 1995, т. 343, № 1, с. 50–52.
70. *Аристов С.Н.* Трехмерные конические течения вязкой несжимаемой жидкости. Известия РАН. МЖГ. 1998, № 6, с. 144–148.
71. *Paull R., Pillow A.F.* Conically similar viscous flows. Part 2. One-parameter swirl-free flows. J. Fluid Mech. 1985, v. 155, p. 343–358.
72. *Бытев В.О.* Инвариантные решения уравнений Навье-Стокса. ПМТФ. 1972, № 6, с. 56–64.
73. *Полежаев В.И., Бунэ А.В., Верезуб Н.А. и др.* Математическое моделирование конвективного тепломассообмена на основе уравнений Навье-Стокса. М., Наука, 1987, 272 с.
74. *Sparenberg J.F.* On the stream function in low Reynolds number flow for general curvilinear coordinates. In: Mathematical Approaches in Hydrodynamics. Ed. T. Miloh. SIAM, Philadelphia, 1991, p. 461–472.
75. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой

жидкости. М., Наука, 1970, 288 с.
76. *Уховский М.Р., Юдович В.И.* Осесимметричные течения идеальной и вязкой жидкости, заполняющей все пространвнство. ПММ. 1968, т. 32, вып. 1, с. 59—69.
77. *Mahalov A., Titi E.S., Leibovich S.* Invariant helical subspaces for the Navier-Stokes equations. Arch. Rational Mech. Anal. 1990, v. 112, № 3, p. 193—222.
78. *Constantin P., Foias C.* Global Lyapunov exponents, Kaplan-Yorke formulas and the dimension of the attractor for 2D Navier-Stokes equations. Comm. Pure Appl. Math. 1985, v. 38, № 1, p. 1—27.
79. *Cotton F., Salwen H.* Linear stability of rotating Hagen-Poiseuille flow. J. Fluid Mech. 1981, v. 108, p. 101—125.
80. *Nagib H.M.* On instabilities and secondary motions in swirling flows through annuli. PhD Thesis. Illinois Institute of Technology, 1972.
81. *Pukhnachov V.V.* On the proble m of viscous stri p deformation witha free boundary. C.R. Acad. Sci. Paris. 1999, v. 328, ser. 1, p. 357—362.
82. *Овсянников Л.В.* Общие уравнения и примеры. Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. Новосибирск, Наука, Сибирское отделение, 1967, с. 5—75.
83. *Pukhnachov V.V.* Nonstationary viscous flows with a cylindrical free surface. Topics in Nonlinear Analysis. The Herbert Amann Anniversary Volume. Basel et al.: Birkhauser, 1998, p. 655—677.
84. *Galaktionov V.F., Vazquez J.L.* Blow-up for a class of solutions with free boundaries for the Navier-Stokes equations. Adv. Diff. Eq. 1999, v. 4, p. 297—321.
85. *Crocco L.* Sulla sbrado limito laminare nei gas lungo una laino plano. Rend. Mat. Univ. Roma. 1941, v. 2, p. 138—154.
86. *Овсянников Л.В.* Групповое расслоение уравнений пограничного слоя. Динамика сплошной среды. Сб. науч. тр. Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1969, вып. 1, с. 24—35.
87. *Пухначев В.В., Пухначева Т.П.* Стационарное течение вязкой жидкости вблизи критической точки на свободной границе. Вестник НГУ, сер. “Мат., мех., информ.”. 2003, т. 3, вып. 4, с. 51—67.
88. *Crane L.J.* Flow past a stretching plate. ZAMP. 1970, v. 21, p. 645—647.
89. *Von Karman T.* Uber laminare und turbulente Reibung. ZAMM. 1921, b. 1, № 4, s. 233—252.
90. *Cochran W.G.* The flow due to a rotating disc. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1934, v. 30, p. 365—375.
91. *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М., Изд. Акад. наук СССР, 1952, 532 с.
92. *Пухначев В.В.* Неустановившиеся движения вязкой жидкости со свободными границами, описываемые частично инвариантными решениями уравнений Навье-Стокса. Динамика сплошной среды. Сб. науч. тр. Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1972, вып. 10, с. 125—137.
93. *Andreev V.K., Kaptsov O.V., Pukhnachov V.V., Rodionov A.A.* Applications of group-theoretical methods in hydrodynamics. Kluwer, Dordrecht et al., 1998, 408 p.
94. *Лаврентьева О.М.* Течение вязкой жидкости в слое на вращающейся плоско-

сти. ПМТФ. 1989, № 5, с. 41–48.

95. *Лаврентьева О.М., Волкова Г.Б.* Предельные режимы растекания слоя на вращающийся плоскости. Динамика сплошной среды. Сб. науч. тр. Ин-т гидродинамики СО РАН. 1996, вып. 111, с. 68–77.
96. *Watson L.T., Wang C.Y.* Deceleration of a rotating disk in a viscous fluid. Phys. Fluids. 1979, v. 22, № 12, p. 2267–2269.
97. *Мелешко С.В., Пухначев В.В.* Об одном классе частично инвариантных решений уравнений Навье-Стокса. ПМТФ. 1999, т. 40, № 2, с. 24–33.
98. *Wang C.Y.* Axisymmetric stagnation flow on a cylinder. Q. Appl. Math. 1974, v. 32, № 2, p. 207–213.
99. *Wang C.Y.* The three-dimensional flow due to a stretching flat surface. Phys. Fluids. 1984, v. 27, № 8, p. 1915–1917.
100. *Сидоров А.Ф.* О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн. ПМТФ. 1989, № 2, с. 34–40.
101. *Петровская Н.В., Юдович В.И.* Вторичные стационарные и периодические режимы конвекции во вращающемся слое со свободными недеформируемыми границами. Задачи гидромеханики и тепломассообмена со свободными границами. Межвуз. сб. науч. трудов. Новосибирск, Изд. НГУ, 1987, с. 116–126.
102. *Андреев В.К., Пухначев В.В.* Инвариантные решения уравнений термокапиллярного движения. Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1983, т. 14, № 5, с. 3–23.
103. *Andreev V.K., Admaev O.V.* Axisymmetric thermocapillary flow in cylinder and cylindrical layer. Hydromechanics and Heat/Mass Transfer in Microgravity. Amsterdam, Gordon and Beach Science Publ., 1992, p. 169–172.
104. *Pukhnachov V.V.* Model of viscous layer deformation by thermocapillary forces. Euro. J. Appl. Math. 2002, v. 13, № 2, p. 205–224.
105. *Batchelor G.K.* Note on a class of solutions of the Navier-Stokes equations representing steady rotationally-symmetric flow. Quart. J. Mech. Appl. Math. 1951, v. 4, p. 29–41.
106. *Stewartson K.* On the flow between two rotating coaxial disks. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1953, v. 49, p. 333–341.
107. *Mellor G.L., Chappie P.J., Stokes V.K.* On the flow between a rotating and a snanionary disks. J. Fluid Mech. 1968, v. 31, pt. 1, p. 95–112.
108. *Nguen N.D., Ribault J.P., Florent P.* Multiple solutions for flow between coaxial disks. J. Fluid Mech. 1975, v. 68, pt. 2, p. 369–388.
109. *Holodniok M., Kubicek M., Hlavacek V.* Computation of the flow between two rotating coaxial disks. J. Fluid Mech. 1977, v. 81, pt. 4, p. 689–699.
110. *Holodniok M., Kubicek M., Hlavacek V.* Computation of the flow between two rotating coaxial disks: multiplicity of steady-state solutions. J. Fluid Mech. 1981,v. 108, p. 227–240.
111. *Дорфман Л.А.* Течения вязкой жидкости между неподвижным и обдуваемом вращающимися дисками. Известия АН СССР. МЖГ. 1966, № 2, с. 86–91.
112. *Петровская Н.В.* Влияние поперечного вдува на стационарное течение жидкости между вращающимся и неподвижным пористыми дисками. ПМТФ. 1982,

№ 5, с. 58—61.

113. *Berker R.* A new solution of the Navier-Stokes equations for the motion of a fluid contained between parallel plates rotating about the same axis. Arch. Mech. Stosow. 1979, v. 31, № 2, p. 265—280.
114. *Berker R.* An exact solution of the Navier-Stokes equation: the vortex with curvilinear axis. Int. J. Engn Sci. 1981, v. 20, № 2, p. 217—230.
115. *Maxwell B., Chartoff R.P.* Studies of polymer melt in an orthogonal rheometer. Trans. Soc. Rheol. 1965, v. 9, № 1, p. 41—52.
116. *Serrin J.* On the stability of viscous fluid motions. Arch. Rational Mech. Anal. 1959, v. 3, № 1, p. 1—13.
117. *Капитанский Л.В.* Групповой анализ уравнений Навье-Стокса при наличии вращательной симметрии и некоторые новые точные решения. Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1979, т. 84, с. 89—107.
118. *Аристов С.Н., Пухначев В.В.* Об уравнениях вращательно-симметричного движения вязкой несжимаемой жидкости. Докл. РАН. 2004, т. 394, № 5, с. 611—614.
119. *Аристов С.Н.* Стационарный цилиндрический вихрь в вязкой жидкости. Докл. РАН. 2001, т. 377, № 4, с. 477—480.
120. *Burgers J.M.* A mathematical model illustrating the theory of turbulence. Adv. Appl. Mech. 1948, v. 1, p. 171—199.
121. *Краснов Ю.К.* Эволюция смерчей. Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. М., Наука, 1987, с. 174—189.
122. *Кикнадзе Г.И., Краснов Ю.К.* Эволюция смерчеобразных течений вязкой жидкости. ДАН СССР. 1986, т. 290, № 4, с. 1315—1319.
123. *Ярмицкий А.Г.* Об одном классе осесимметричных неустановившихся течений вязкой несжимаемой жилкости. ПМТФ. 1978, № 2, с. 59—66.
124. *Majda A.J., Bertozzi A.L.* Vorticity and incompressible flow. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2002, 545 p.
125. *Алексеенко С.В., Куйбин П.А, Окулов В.Л.* Введение в теорию концентрированных вихрей. Новосибирск, Институт теплофизики СО РАН, 2003, 504 с.
126. *Доброхотов С.Ю., Шафаревич А.И.* О поведении на бесконечности поля скоростей несжимаемой жидкости. Известия РАН. МЖГ. 1996, № 4, с. 38—42.
127. *Пухначев В.В.* Интегралы движения несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство. ПМТФ. 2004, т. 45, № 2, с. 22—27.
128. *Chupakhin A.P.* The differential invariants. Theorem of commutativity. Commun. Nonlinear Sci. and Numer. Simulation. 2004, v. 9, p 25—33.
129. *Golovin S.V.* Applications of the differential invariants of infinite dimensional groups in hydrodynamics. Commun. Nonlinear Sci. and Numer. Simulation. 2004, v. 9, p. 35—51.
130. *Андреев В.К., Родионов А.А.* Групповая классификация и точные решения уравнений плоского и вращательно-симметричного течения идеальной жидкости в лагранжевых координатах. Дифференц. уравнения. 1988, т. 24, № 9, с. 1577—1586.
131. *Андреев В.К., Родионов А.А.* Групповые свойства уравнений вращательно-симметричного течения неоднородной жидкости в лагранжевых координатах. Краевые задачи уравнений математической физики. Красноярск, изд-во Красно-

ярского университета, 1987, с. 27–37.

132. *Андреев В.К., Родионов А.А.* Групповой анализ плоских течений идеальной жидкости в лагранжевых координатах. ДАН СССР. 1998, т. 298, № 6, с. 1358–1361.
133. *Bogoyavlenskij O.I.* Method of symmetry transforms for ideal MHD equilibrium equations. The legacy of the inverse scattering transform in applied mathematics. Contemp. Math. Providence, RJ, Amer. Math. Soc, 2002, v. 301, p. 195–218.
134. *Bogoyavlenskij O.I.* Exact solutions to the Navier-Stokes equations. Comptes Rendus Math. Acad. Sci. Soc. R. Canada, 2002, v. 24, № 4, p. 138–143.
135. *Bogoyavlenskij O.I.* Exact solutions to the Navier-Stokes equations and viscous MHD equations. Phys. Lett., Ser. A. 2003, v. 307, № 5–6, p. 281–286.
136. *Bogoyavlenskij O.I.* Infinite families of exact periodic solutions to the Navier-Stokes equations. Moscow Math. J. 2003, v. 3, № 2, p. 263–272.
137. *Bogoyavlenskij O.I., Fuchssteiner B.* Exact NSE solutions with crystallographic symmetries and no transfer of energy through the spectrum. J. Geom. Phys. 2005, v. 54, № 3, p. 324–338.
138. *Trkal V.* Poznamka k hydrodynamike vazkychtekutin. Casopis pro Pestovani Matematiky a Fysiky (Praha), 1919, t. 48, s. 302–311.
139. *Brandolese L.* On the localization of symmetric and asymmetric solutions of the Navier-Stokes equations. C. R. Acad. Sci. Paris. 2001, v. 332, ser. 1, p. 125–130.
140. *Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H.* Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. III. The De Sitter groups. J. Math. Phys. 1977, v. 18, № 12, p. 2259–2288.
141. *Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф.* Подгрупповой анализ групп Галилея и Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. Киев, Наукова думка, 1991, 300 с.
142. *Овсянников Л.В.* Об оптимальных системах подалгебр. Доклады РАН. 1993, т. 333, № 6, с. 702–704.
143. *Павловский Ю.Н.* Исследование некоторых инвариантных решений уравнений пограничного слоя. ЖВМиМФ. 1961, т. 1, № 2, с. 280–294.
144. *Пухначев В.В.* Групповой анализ уравнений нестационарного пограничного слоя Марангони. ДАН СССР. 1984, т. 279, № 5, с. 1061–1064.
145. *Munk M., Prim R.* On the multiplicity of steady-gas flows having the same streamline pattern. Proc. Nation. Acad. Sci. USA, 1947, v. 33, p. 137–141.
146. *Мамонтов Е.В.* К теории нестационарных околозвуковых течений. ДАН СССР. 1969, т. 185, № 3, с. 538–540.
147. *Кухарчик П.* Групповые свойства уравнений коротких волн в газовой динамике. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. 1965, т. 13, № 5, с. 469–477.
148. *Fushchych W.I., Popovich R.O.* Symmetry reduction and exact solutions of the Navier-Stokes equations. I. J. Nonlinear Math. Phys. 1994, v. 1, № 1, p. 75–113.
149. *Fushchych W.I., Popovich R.O.* Symmetry reduction and exact solutions of the Navier-Stokes equations. II. J. Nonlinear Math. Phys. 1994, v. 1, № 2, p. 156–188.
150. *Fushchych W.I., Popovich R.O.* Symmetry reduction and exact solutions of the Navier-Stokes equations. В.И.Фущич. Избранные труды. Киев, Наукова думка, 2005, с. 238–297.

151. *Bluman G.W., Cole J.D.* The general similarity solution of the heat equation. J. math. Mech. 1969, v. 18, № 11, p. 1025—1042.
152. *Фущич В.И., Штелень В.М., Серов М.И., Попович Р.О.* Q-условная симметрия линейного уравнения теплопроводности. Доповиди акад. наук Украины. 1992, № 12, с. 29—37.
153. *Котеров В.Н., Шмыглевский Ю.Д., Щепров А.В.* Обзор аналитических исследований установившихся течений вязкой несжимаемой жидкости (2000—2004 гг.). ЖВМиМФ. 2005, т. 45, № 5, с. 899—920.
154. *Ondich J.* A differential constrains approach to partial invariance. Euro. J. Appl. Math. 1995, v. 6, p. 631—637.
155. *Пухначев В.В.* Точные решения уравнений гидродинамики, построенные на основе частично инвариантных. ПМТФ. 2003, т. 44, № 3, с. 18—25.

Статья поступила в редакцию 8 декабря 2005 года