УДК 532.135 *Данная статья будет опубликована в журнале ПМТФ в 2008 году*

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ МАКСВЕЛЛА

В.В. Пухначев

Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: pukhnachev@gmail.com

Рассматриваются неустановившиеся плоскопараллельные движения несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла с постоянным временем релаксации. Система уравнений движения среды и реологическое соотношение допускают расширенную группу Галилея. Изучается класс частично инвариантных решений этой системы относительно подгруппы указанной группы, порожденной переносом и галилеевым переносом вдоль одной из осей координат. Инвариантные решения здесь отсутствуют, а множество частично инвариантных решений оказывается весьма узким. Предложен способ расширения множества точных решений, позволяющий найти решения с нетривиальной зависимостью элементов тензора напряжений от пространственных координат. Среди полученных на этом пути решений особый физический интерес представляют те, что описывают деформацию вязкоупругой полосы со свободными границами.

Ключевые слова: вязкоупругая среда, несжимаемость, соотношение Максвелла, группа Галилея, частично инвариантное решение, движение со свободной границей.

Введение. Стимулом для написания данной работы послужили статьи [1-3]. В них убедительно показано, что обычные жидкости, подобные воде, обнаруживают вязкоупругие свойства в условиях, когда определяющими факторами являются вязкость и сдвиговая упругость, а сжимаемостью среды и температурными неоднородностями можно пренебречь. В качестве модели такой среды в [3] предложена математическая модель несжимаемой среды Максвелла с постоянным временем релаксации. Насколько известно автору, систематическое изучение свойств такой модели до сих пор не проводилось, в то время как теория сжимаемой вязкоупругой среды Максвелла развита с большой степенью полноты [4, 5].

Известно, что предельный переход от слабосжимаемой к несжимаемой среде является нетривиальным даже в линейной теории упругости. В случае тела Максвелла ситуация усугубляется тем, что система уравнений движения содержит большее число искомых функций. Кроме того, предельная система, соответствующая несжимаемому телу, теряет такое важное свойство, как гиперболичность, и вообще не имеет определенного типа. В такой ситуации особую ценность приобретает получение точных решений, зависящих как минимум от двух переменных. Этой цели и посвящена данная работа.

Математическая модель. Ниже t обозначает время, u, v - проекции вектора скорости $\mathbf{v}$ на оси x, y декартовой системы координат; p - давление,

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта – 07-01-00168)

$P_{xy} = A, P_{xy} = P_{yx} = B, P_{yy} = C$ - элементы тензора напряжений P, D - тензор скоростей деформаций, I - единичный тензор, τ - время релаксации, μ - динамический коэффициент вязкости, ρ - плотность среды. Рассматриваемая математическая модель состоит из реологического соотношения Максвелла [6]

$$\tau(\frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla P + \nabla \mathbf{v}^T \cdot P + P \cdot \nabla \mathbf{v}) + P = -pI + 2\mu D, \tag{1}$$

уравнения импульса

$$\rho(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = divP \tag{2}$$

и уравнения неразрывности

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{3}$$

Выражение в скобке в соотношении (1) представляет верхнюю конвективную производную Яуманна [6], верхний индекс T – операцию транспонирования; символы ∇ и div обозначают градиент и дивергенцию по переменным x, y.

Область применимости модели (1)-(3) – конечные, но сравнительно небольшие деформации и умеренные скорости движения. Это дает основание пренебречь членом, ответственным за диссипацию кинетической энергии в уравнении переноса тепла. Если при этом отсутствует приток тепла с границ области течения, то движение можно считать изотермическим, а величины τ, μ и ρ - положительными постоянными. Тогда система (1)-(3), состоящая из шести скалярных уравнений и содержащая шесть искомых функций u, v, p, A, B, C, становится замкнутой.

Как уже отмечалось, система (1)-(3) не имеет определенного типа. Она эволюционна относительно всех искомых функций, кроме давления. В этом смысле она подобна системе уравнений Навье-Стокса в случае несжимаемой жидкости. Однако в отличие от последней, которая близка к параболической, система (1)-(3) обладает рядом свойств, характерными для гиперболических систем. Рассмотрение общих начально-краевых задач для указанной системы выходит за рамки настоящей работы. Вместе с тем, некоторые характерные ее свойства можно выявить на основе изучения достаточно содержательных точных решений. Универсальным инструментом для регулярного построения точных решений является групповой анализ дифференциальных уравнений [7]. И хотя наиболее широкая группа преобразований, допускаемая системой (1)-(3), пока не вычислена, заведомо известно, что она достаточно широка.

Пример частично инвариантного решения системы (1)-(3). Прямая проверка показывает, что система (1)-(3) допускает расширенную группу Галилея на плоскости (необходимость расширения группы связана с присутствием в этой системе дополнительных искомых функций A,B,C). Расширенная группа Галилея состоит из переносов по осям t,x,y, галилеевых переносов по осям x,y и согласованных вращений в плоскостях x,y и u,v, при которых тензор P преобразуется естественным образом.

Рассмотрим подгруппу расширенной группы Галилея, порожденную операторами переноса ∂_x и галилеева переноса $t\partial_x+\partial_u$ по оси x. Данная подгруппа имеет следующий полный набор инвариантов: t,y,v,p,A,B,C. Так как ранг соответствующей матрицы Якоби (см. [7]) здесь меньше, чем число искомых функций в системе (1)-(3), то инвариантного решения относительно указанной подгруппы эта система не имеет. Однако есть возможность найти ее частично инвариантное решение, следуя алгоритму, изложенному в [7]. С этой целью следует положить

$$v=v(y,t), p=p(y,t), A=A(y,t), B=B(y,t), C=C(y,t) \qquad (4)$$

и найти функцию $u(x,y,t)$ из условия совместности переопределенной системы, получающейся путем присоединения к (1)-(3) добавочных равенств

$$v_x=0, p_x=0, A_x=0, B_x=0, C_x=0.$$

Подстановка выражения для v (4) в уравнение неразрывности (3) показывает, что функция u может быть лишь линейной функцией x. Предположим для простоты, что эта функция однородна, тогда из (3) следует равенство

$$u=-xv_y. \qquad (5)$$

Равенство (5) фактически есть результат интегрирования автоморфной системы [7], состоящей здесь из одного уравнения. Подстановка выражения (5) в уравнения (1), (2) с учетом (4) приводит к соотношениям:

$$\tau(A_t+vA_y-2v_yA-2xv_{yy}B)+A=-p-2\mu v_y,\ \ \tau(B_t+vB_y-xv_{yy}C)+B=-\mu xv_{yy,} \qquad (6)$$

$$\tau(C_t+vC_y+2v_yC)+C=-p+2\mu v_y,\ \rho x(-v_{yt}+v_y^2-vv_{yy})=B_{y,}\ \rho(v_t+vv_y)=C_y.$$

Система (6) допускает частичное разделение переменных, что позволяет выписать уравнения разрешающей системы и проинтегрировать их в явном виде. Опуская рутинные вычисления, приведем общее решение этой системы

$$v=-\frac{\alpha y}{1+\alpha t}+l(t), C=\frac{\rho\alpha^2 y^2}{(1+\alpha t)^2}+\rho(\dot{l}-\frac{\alpha l}{1+\alpha t})y+m(t), B=\beta e^{-t/\tau}, \qquad (7)$$

$$p=\rho y^2\left[\frac{6\tau\alpha^3}{(1+\alpha t)^3}-\frac{\alpha^2}{(1+\alpha t)^2}\right]+\rho y\left\{-\tau\left[\ddot{l}-\frac{4\alpha\dot{l}}{1+\alpha t}+\frac{6\alpha^2}{(1+\alpha t)^2}\right]-\dot{l}+\frac{\alpha l}{1+\alpha t}\right\}-$$

$$-\tau(\dot{m}-\frac{\alpha m}{1+\alpha t})-m-\frac{2\alpha\mu}{1+\alpha t},$$

где α,β - произвольные постоянные, l,m - произвольные функции t, точка над функцией, зависящей лишь от времени, обозначает ее производную. При известных функциях v,p функция $A(y,t)$ находится из решения линейного уравнения переноса

$$\tau(A_t+vA_y-2v_yA)+A=-p-2\mu v_y.$$

Располагая произволом в решении (7), можно удовлетворить условиям на свободных границах $\pm y=s(t)\equiv s_0(1+\alpha t)^{-1}$, где $s_0=const$. Действительно, если $l=0$, то на этих линиях выполнено кинематическое условие $\dot{s}=v(s,t)$. Полагая $\beta=0$, убеждаемся, что на них выполнено также условие отсутствия касательных напряжений $P_{xy}=0$. Если теперь взять $m(t)=-\rho\alpha^2 s_0^2(1+\alpha t)^{-4}$, то на линиях $y=\pm s(t)$ будет выполнено и условие отсутствия нормальных напряжений $P_{yy}=0$. Это позволяет дать простую физическую интерпретацию решения (8) с $l=0,\beta=0$ и указанным выше $m(t)$. В начальный момент среда занимает полосу $|y|<s_0$ и имеет следующие поля скоростей $u=\alpha x, v=-\alpha y$ и напряжений $P_{xx}=P_0(y), P_{xy}=0, P_{yy}=\rho\alpha^2(y^2-s_0^2)$, где P_0 - четная функция y класса $C^1[-s_0,s_0]$. Далее движение происходит по инерции; при этом линии $y=\pm s(t)$ остаются свободными границами. Если $\alpha>0$, решение определено при всех $t>0$; ширина полосы убывает со временем как t^{-1}. При $\alpha<0$ в момент $t^*=-\alpha^{-1}$ возникает коллапс: расширяющаяся полоса заполняет всю плоскость. Причиной такого поведения среды является неограниченный рост продольной компоненты скорости, когда $|x|\to\infty$.

Если положить в построенном решении $\tau=0$, оно перейдет в решение задачи о симметричной деформации полосы вязкой несжимаемой жидкости с линейным полем скоростей [8]. Полагая в последнем решении $\mu=0$, придем к известному решению Л.В.Овсянникова для идеальной жидкости («брус под штампом», [9]).

Расширение семейства точных решений. Построенное в предыдущем разделе решение системы (1)-(3) обладает бедной кинематикой: компоненты скорости в нем линейно зависят от пространственных координат. Кроме того, поле напряжений в этом решении не зависит от переменной x, что не позволяет, например, рассмотреть на его основе задачу о деформации полосы растягивающими или сжимающими усилиями в направлении оси x. Однако можно существенно расширить множество точных решений, если ослабить требование инвариантности части искомых функций относительно переносов и галилеевых переносов по оси x. Положим

$$v = v(y,t), P_{xx} = D(x,y,t), P_{xy} = E(x,y,t), P_{yy} = C(y,t), p = p(y,t). \tag{8}$$

Таким образом, функции v, P_{yy} и p по-прежнему являются инвариантами указанной двухпараметрической подгруппы расширенной группы Галилея, в то время как P_{xx} и P_{xy} таковыми не являются.

Ограничиваясь, как и ранее, однородной зависимостью функции u от переменной x и подставляя соотношения (5), (9) в уравнения (1), (2), будем иметь:

$$\tau(D_t - xv_y D_x + vD_y - 2v_y D - 2xv_{yy}E) + D = -p - 2\mu v_y, \tag{9}$$

$$\tau(E_t - xv_y E_x + vE_y - xv_{yy}C) + E = -\mu x v_{yy},\ \tau(C_t + vC_y + 2v_y C) + C = -p + 2\mu v_y,$$

$$\rho x(-v_{yt} + v_y^2 - vv_{yy}) = D_x + E_y,\ \rho(v_t + vv_y) = E_x + C_y.$$

Полученные равенства следует дополнить соотношениями

$$v_x = 0, p_x = 0, C_x = 0. \tag{10}$$

Система (9), (10), очевидно, является переопределенной, и возникает вопрос о ее совместности. Не ставя вопрос о множестве всех ее решений, заметим, что среди них имеются следующие:

$$D = x^2 a(y,t) + d(y,t), E = xb(y,t), C = c(y,t), v = v(y,t), p = p(y,t). \tag{11}$$

Подстановка выражений (11) в уравнения (10) приводит к равенствам

$$\tau(a_t + va_y - 4v_y a - 2v_{yy}b) + a = 0,\ \tau(b_t + vb_y - v_y b - v_{yy}c) + b = -\mu v_{yy}, \tag{12}$$

$$\rho(-v_{yt} + v_y^2 - vv_{yy}) = 2a + b_y,\ \rho(v_t + vv_y) = b + c_y,$$

$$\tau(c_t + vc_y + 2v_y c) + c = -p + 2\mu v_y,\ \tau(d_t + vd_y - 2v_y d) = -p - 2\mu v_y. \qquad (13)$$

Уравнения (12) образуют замкнутую подсистему для определения функций a, b, c, v. Если они найдены, оставшиеся искомые функции p, d определяются путем последовательного решения уравнений (13).

Найденное расширение семейства точных решений системы (1)-(3) на основе ее частично инвариантного решения (4), (5) можно трактовать как новый эффект в практике группового анализа дифференциальных уравнений. Другой способ подобного расширения предложен в работе [10]. Групповая природа решения (5), (11) системы (1)-(3) неясна. Можно ожидать, что оно является дифференциально инвариантным решением указанной системы. Теория дифференциально инвариантных решений стала развиваться недавно (см. [11] и имеющиеся там ссылки).

Для системы (12) можно поставить задачу со свободной границей. Она состоит в определении неотрицательной функции $s(t)$ и решения системы (12) в области $S_T = \{y, t : 0 < y < s(t), 0 < t < T\}$ так, чтобы удовлетворялись условия на свободной границе

$$\frac{ds}{dt} = v[s(t), t],\ b[s(t), t] = 0,\ c[s(t), t] = 0,\ 0 < t < T, \qquad (14)$$

условия симметрии

$$v(0,t) = 0,\ a_y(0,t) = 0,\ b(0,t) = 0,\ c_y(0,t) = 0,\ 0 < t < T \qquad (15)$$

и начальные условия

$$s(0) = s_0 > 0,\ a(y,0) = a_0(y),\ b(y,0) = b_0(y),\ v(y,0) = v_0(y),\ 0 \le y \le s_0. \qquad (16)$$

Решение задачи (12), (14)-(16) описывает движение вязкоупругой среды в полосе с линией симметрии $y = 0$ и свободными границами $y = \pm s(t)$. Здесь, в отличие от примера, рассмотренного в предыдущем разделе, источником движения является не только начальное поле скоростей, но и распределенные в начальный момент напряжения вдоль оси x.

Сформулированная задача весьма сложна ввиду нелинейности системы (12), отсутствия у нее определенного типа и наличия неизвестной границы области течения. Оставляя в стороне вопросы ее однозначной разрешимости, укажем пример ее точного решения, соответствующего следующему выбору начальных данных: $a_0 = g_0$, $b_0 = 0$, $v_0 = -k_0 y$, где g_0 и k_0 - постоянные. (Сам факт наличия точного решения является косвенным подтверждением корректности постановки обсуждаемой задачи). Это решение имеет вид:

$$a = g(t),\ v = -yk(t)\ ,\ b = 0\ ,\ c = y^2 q(t) + r(t)\ . \tag{17}$$

Функции g и k образуют решение задачи Коши

$$\tau(\frac{dg}{dt} + 4gk) + g = 0\ ,\ \rho(\frac{dk}{dt} + k^2) = 2g\ ,\ 0 < t < T\ ;\ g(0) = g_0\ ,\ k(0) = k_0\ . \tag{18}$$

После решения задачи (18) функции $s(t), q(t), r(t)$ определяется равенствами

$$s = s_0 \exp[-\int_0^t k(z)dz]\ ,\ q = \frac{1}{2}(-\dot{k} + k^2)\ ,\ r = -qs^2\ . \tag{19}$$

Примечательно, что полученные формулы не входит коэффициент вязкости μ, хотя такие компоненты решения полной системы (1)-(3), как напряжение P_{xx} и давление p от вязкости зависят. Отметим также, что в предельном случае $\tau = 0$ (вязкая несжимаемая жидкость) $g \equiv 0$, и зависимость тензора напряжений от x исчезает.

Вернемся к системе (12) Преобразованиями эквивалентности можно привести ее к виду, в котором $\tau = 1$, $\rho = 1$ и $\mu = 0$. Далее, указанная система допускает унаследованные из исходной системы (1)-(3) преобразования переноса по осям t, y и преобразование галилеева переноса по оси y. Наличие группы переносов позволяет строить решения системы (12) типа бегущих волн. К сожалению, ни эти решения, ни решение (17) не проясняют математическую природу данной системы. Чтобы подойти к ее пониманию, линеаризуем систему (12) на точном решении (17). Сначала превратим эту систему в систему первого порядка путем введения новой искомой функции $w = v_y$. Обозначим через $\delta a, \delta b, \delta w, \delta v, \delta c$ вариации функций a, b, w, v, c. Выполняя в (12), процедуру линеаризации, получим:

$$\delta a_t - ky\delta a_y + (4k + \tau^{-1})\delta a = 0\ , \tag{20}$$

$$\delta b_t - ky\delta b_y + (\mu\tau^{-1} - qy^2 - r)\delta w_y + (k + \tau^{-1})\delta b = 0\ , \tag{21}$$

$$\delta w_t + \rho^{-1}\delta b_y - ky\delta w_y + 2\rho^{-1}\delta a - 2k\delta w = 0\ , \tag{22}$$

$$\delta v_y = \delta w\ ,\ \delta c_y = \rho(\delta v_t - k\delta v - ky\delta w) + \delta b\ .$$

Уравнения (20) независимо от остальных уравнений линейной системы. При известном δa уравнения (21), (22) образуют замкнутую подсистему для нахождения функций $\delta b, \delta w$. После того, как они найдены, функции $\delta v, \delta c$ определяются квадратурами из оставшихся двух уравнений.

Случай $k=0$, $q=0$, $r=0$ соответствует линеаризации на состоянии покоя. В этом случае система (20)-(22) является гиперболической и имеет семейство траекторных характеристик $x=const$ и два семейства звуковых характеристик, соответствующих скоростям «звуковых волн» $\pm(\mu/\rho\tau)^{1/2}$; происхождение кавычек вызвано тем, что эти волны являются поперечными, а не продольными. В общем случае $k\neq 0$ дифференциальные уравнения характеристик таковы:

$$\frac{dy_1}{dt}=-ky\,,\ \frac{dy_{2,3}}{dt}=-ky\pm\left[\frac{\mu}{\rho\tau}+(k^2-\frac{g}{\rho})(s^2-y^2)\right]^{1/2}. \qquad (23)$$

При выводе уравнений (23) были использованы выражения (19) функций q и r в терминах k, g и s; при этом также использовалось второе уравнение системы (18).

Заметим, что в силу первого уравнения (18) функция $g(t)$ сохраняет знак на всем интервале $[0,\ T]$ существования решения системы (18), и этот знак совпадает со знаком постоянной g_0. Учитывая, что в области течения $|y|<s$, можно сделать следующий вывод: если $g_0<0$, то система (20)-(22) является гиперболической на всем интервале $[0,\ T]$. Вследствие (11), (17), этот случай соответствует сжимающим полосу напряжениям в направлении оси x (быть может, за исключением малой окрестности линии $x=0$). Если же $g_0>0$, то гипотетически возможна ситуация, когда система теряет свойство гиперболичности во внутренних точках отрезка $[-s,s]$. Это может породить коротковолновую (адамаровскую) неустойчивость течения при растяжении вязкоупругой полосы в случае, когда на нее действуют растягивающие усилия, распределенные по квадратичному закону согласно (11). Отметим, что это возможно лишь в случае больших растягивающих усилий, при малых вязкостях или при больших временах релаксации. Полный ответ на данный вопрос требует детального изучения поведения решений задачи Коши (18). Этому будет посвящена отдельная работа. Пока же заметим, что эта задача имеет простое решение $k=-1/4\tau\,, g=\rho/32\tau^2$. Несмотря на положительность g, гиперболичность системы (20)-(22) здесь сохраняется при всех $t>0$. В этом решении $s=s_0\exp(t/4\tau)$, поле скоростей стационарно и имеет вид $u=-x/4\tau$, $v=y/4\tau$, давление $p=\rho(s^2-y^2)/4\tau^2+\mu/2\tau$, а поле напряжений дается формулами $P_{xx}=\rho x^2/32\tau^2+d(y,t)$, $P_{xy}=0$, $P_{yy}=\rho(y^2-s^2)/32\tau^2$, где функция d определяется как решение линейного уравнения переноса (13).

Данное решение задачи о деформации полосы специфично для несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла. Оно не имеет аналога в динамике вязкой несжимаемой жидкости.

Заключительные замечания. 1) Простое решение, данное в конце предыдущего раздела, может показаться парадоксальным: ширина полосы со временем растет, несмотря на действие растягивающих усилий. Однако эти усилия преодолеваются силами инерции, действующими в противоположном направлении в соответствии с начальным распределением скоростей, что и снимает кажущееся противоречие.

2) Физическая реализация решения (4), (5) и его обобщения (5), (11) затруднена по двум причинам: «обрезание» полосы приводит к постановке краевых условий на ее краях, которые трудно обеспечить в эксперименте; наличие даже малой силы тяжести может исказить прямолинейность границ полосы конечной длины при практически любом способе ее фиксации в пространстве. Более пригодным с точки реализации является решение задачи о растекании вязкоупругой полосы с прямолинейной свободной границей вдоль плоской стенки. Математическая постановка такой задачи отличается от рассмотренной выше заменой условий симметрии (15) на линии $y = 0$ условиями прилипания $u = v = 0$ при $y = 0,\ 0 < t < T$. В предельном случае вязкой несжимаемой жидкости эта задача исследовалась в работе [8].

3) Вопрос о нарушении свойства гиперболичности системы (20)-(22) не имеет однозначного ответа. Возможно, здесь возникает противоречие между областью применимости модели Максвелла (умеренные деформации) и неограниченным ростом решения при $x \to \infty$. Другая мыслимая причина – несжимаемость среды. Было бы весьма интересно построить аналог решения (17) для слабосжимаемой вязкоупругой среды Максвелла и рассмотреть линеаризацию определяющих уравнений на этом решении, а затем перейти к пределу несжимаемой среды. Заметим, что некорректность по Адамару задачи Коши для системы (20)-(22) не наблюдается для сжимающих или малых растягивающих продольных усилий, когда $g < \rho k^2$, а также вблизи свободной границы.

4) В заключение обсудим вопрос о месте модели несжимаемой среды в теории вязкоупругого континуума. Конечно, несжимаемая среда ущербна с термодинамической точки зрения (что, впрочем, не мешает использовать уравнения вязкой несжимаемой жидкости для решения многих прикладных задач). Однако существует много материалов, проявляющих как вязкие, так и упругие свойства, и обладающих разными временами релаксации объемных и сдвиговых упругих напряжений. (Относительно описания максвелловской среды с разными временами релаксации см., например, [12]). Что касается воды, то разные авторы приводят различные значения времен релаксации τ' объемных напряжений под действием импульсных нагрузок. Здесь уместнее говорить о диапазоне времен релаксации $10^{-8} < \tau' < 10^{-6}$ сек. Между тем,

время релаксации τ сдвиговых напряжений в воде, согласно данным работы [3], равно 29,33 мин. Это означает, что при описании эволюции такой среды на больших временах из заданного начального состояния с необходимостью придется изучать ее поведение «в несжимаемом пределе». Тем самым возникает дополнительный интерес к изучению модели несжимаемой вязкоупругой среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Апакашев Р.А, Павлов В.В. *Определение предела прочности и модуля сдвига воды при малых скоростях течения* // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1997. №1. С. 3–7.
2. Стебновский С.В. *Термодинамическая неустойчивость дисперсных сред, изолированных от внешних воздействий* // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 3. С. 53–58.
3. Коренченко А.Е., Бескачко В.П. *Определение модуля сдвига воды в экспериментах с плавающим диском* // ПМТФ. 2008. Т. 49, №1. С. 100–103.
4. Годунов С.К. *Элементы механики сплошной среды*. М.: Наука, 1978. – 304 с.
5. Годунов С.К., Роменский Е.И. *Элементы механики сплошных сред и законы сохранения*. Новосибирск: Науч. книга, 1998. – 280 с.
6. Астарита Дж, Маруччи Дж. *Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей*. М.: Мир, 1978. – 312 с.
7. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 1978. – 400 с.
8. Pukhnachov V.V. *On the problem of viscous strip deformation with a free boundary* // C.R. Acad. Sci. Paris. 1999. T. 328, ser. 1. P. 357–362.
9. Овсянников Л.В. *Общие уравнения и примеры* // В сб. «Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей». Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1967. С. 5–75.
10. Golovin S.V. *Applications of the differential invariants of infinite dimensional groups in hydrodynamics* // Commun. Nonlinear Sci. and Numer. Simulation. 2004. Vol. 9. P.35–51.
11. Пухначев В.В. *Точные решения уравнений гидродинамики, построенные на основе частично инвариантных* // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 3. С. 18-25.
12. Жермен П. *Курс механики сплошных сред.* М.: Высшая школа, 1983. – 400 с.