ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ХИМИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ, 2006, том 40, № 6, с. 1–10

УДК 532+574+517

НОВЫЕ КЛАССЫ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФУЗИОННО-КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ОБЩЕГО ВИДА

© 2006 г. Е. А. Вязьмина, А. Д. Полянин

Московский физико-технический институт

Институт проблем механики РАН, Москва

vyazmina@list.ru

Поступила в редакцию 24.04.2006 г.

Описаны новые классы точных решений нелинейных уравнений и систем уравнений, которые встречаются в теории массо- и теплообмена реагирующих сред и математической биологии. Основное внимание уделено уравнениям и системам уравнений общего вида, когда скорости химических реакций зависят от одной или нескольких произвольных функций. Найдены решения, содержащие произвольные функции (они выражаются через решения линейного уравнения теплопроводности и нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений); описаны решения с обобщенным разделением переменных и др. Рассмотрены зависимости коэффициентов переноса и кинетики химических реакций от температуры (концентрации).

Нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка используются для математического моделирования процессов массо- и теплопереноса, осложненных химическими реакциями. Общее решение таких уравнений и систем уравнений удается получить в исключительных случаях, поэтому обычно ограничиваются поиском и анализом частных решений, которые принято называть точными.

Точные решения уравнений диффузионно-кинетического типа играют важную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей процессов химической технологии. Они позволяют понять механизм таких сложных нелинейных эффектов, как пространственная локализация, множественность или отсутствие стационарных состояний при определенных условиях, существование режимов с обострением, наличие или отсутствие периодических режимов и др.

Точные решения типа бегущей волны и автомодельные решения часто представляют собой асимптотики существенно более обширных классов решений, соответствующих другим начальным и граничным условиям, что позволяет делать выводы общего характера и прогнозировать динамику различных явлений и процессов.

Даже те частные решения дифференциальных уравнений, которые не имеют ясного физического смысла, могут быть использованы в качестве тестовых задач при проверке корректности и оценке точности различных численных, асимптотических и приближенных аналитических методов. Кроме того, допускающие точные решения модельные уравнения и задачи служат основой для разработки новых численных, асимптотических и приближенных аналитических методов, которые, в свою очередь, позволяют исследовать более сложные задачи, не имеющие точного аналитического решения. Точные методы и решения необходимы также для разработки и совершенствования соответствующих разделов компьютерных программ, предназначенных для аналитических вычислений (системы MATHEMATICA, MAPLE и др.).

Важно отметить, что диффузионно-кинетические уравнения, используемые для моделирования химико-технологических процессов, содержат эмпирические параметры или эмпирические функции. Точные решения позволяют планировать эксперимент для определения этих параметров или функций путем подбора граничных и начальных условий.

Точными решениями уравнений тепло- и массопереноса и других нелинейных уравнений математической физики считаются решения, которые выражаются элементарными функциями, в виде квадратур, через решения линейных уравнений с частными производными (линейные интегральные уравнения), а также обыкновенными дифференциальными уравнениями или системами.

Наиболее эффективными методами построения точных решений нелинейных уравнений тепло- и массопереноса и гидродинамики являются групповые методы [1–15] и методы обобщенного и функционального разделения переменных [16–27].

СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Большой интерес представляет исследование систем двух связанных нелинейных уравнений в частных производных, часто встречающихся при описании химических и биологических систем. Обычно исследование таких систем представляет значительные трудности, и если обнаруживается возможность изучить некоторые частные решения, получение которых сводится к исследованию линейных уравнений в частных производных или же обыкновенных дифференциальных уравнений, то такая возможность является весьма привлекательной. Для поиска таких решений можно воспользоваться методами обобщенного и функционального разделения переменных.

В этом разделе приводятся новые точные решения некоторых классов нелинейных уравнений второго порядка вида

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= a_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F_1(u, w),\\ \frac{\partial w}{\partial t} &= a_2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F_2(u, w)\end{aligned} \qquad (1)$$

и их обобщений. Подобные уравнения и системы уравнений широко используют в теории массо- и теплообмена реагирующих сред [28–30], в теории горения [31], в математической биологии и биофизике [32, 33].

Точные решения одного уравнения системы (1) для различных кинетических функций при $F_1 = F_1(u)$ рассмотрены, например, в работах [3, 5, 6, 16, 40]. Групповая классификация нелинейных систем вида (1) и их пространственных аналогов приведена в [8–10], некоторые инвариантные и неинвариантные точные решения – в [11, 17].

В определенных случаях удается получить точное решение нелинейных систем в виде

$$\begin{aligned}u &= \varphi_1(t)\theta(x, t) + \psi_1(t),\\ w &= \varphi_2(t)\theta(x, t) + \psi_2(t),\end{aligned} \qquad (2)$$

где функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ подбираются таким образом, чтобы оба уравнения системы приводились к одному и тому же уравнению для функции $\theta(x, t)$.

Рассмотрим систему 1

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + uf(bu - cw) + g_1(bu - cw),\\ \frac{\partial w}{\partial x} &= a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + wf(bu - cw) + g_2(bu - cw),\end{aligned} \qquad (3)$$

где $f(z)$, $g(z)$ и $h(z)$ – произвольные функции.

Точное решение ищем в виде (2). Считаем что аргумент функций входящих в систему зависит только от времени t, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial x}(bu - cw) = [b\varphi_1(t) - c\varphi_2(t)]\frac{\partial}{\partial x}\theta(x, t) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi_1(t) = c\varphi(t), \quad \varphi_2 = b\varphi(t). \qquad (4)$$

Подставив (2) с учетом (4) в (3), после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{\partial t} &= a\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \left[f(b\psi_1 - c\psi_2) - \frac{\varphi'}{\varphi}\right]\theta +\\ &+ \frac{1}{c\varphi}[\psi_1 f(b\psi_1 - c\psi_2) + g_1(b\psi_1 - c\psi_2) - \psi_2'],\\ \frac{\partial\theta}{\partial t} &= a\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \left[f(b\psi_1 - c\psi_2) - \frac{\varphi'}{\varphi}\right]\theta +\\ &+ \frac{1}{b\varphi}[\psi_2 f(b\psi_1 - c\psi_2) + g_2(b\psi_1 - c\psi_2) - \psi_2'].\end{aligned} \qquad (5)$$

Чтобы уравнения (5) совпали, приравняем нулю все выражения в квадратных скобках. В результате получим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $\varphi = \varphi(t)$, $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\psi_2 = \psi_2(t)$:

$$\begin{aligned}\varphi' &= \varphi f(b\psi_1 - c\psi_2),\\ \psi_1' &= \psi_1 f(b\psi_1 - c\psi_2) + g_1(b\psi_1 - c\psi_2),\\ \psi_2' &= \psi_2 f(b\psi_1 - c\psi_2) + g_2(b\psi_1 - c\psi_2).\end{aligned} \qquad (6)$$

Из (5)–(6) следует, что функция $\theta = \theta(x, t)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = a\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}. \qquad (7)$$

Из первого уравнения системы (6) функцию φ можно выразить через две другие

$$\varphi = C_1\exp\left[\int f(b\psi_1 - c\psi_2)dt\right].$$

Константу интегрирования C_1 можно считать равной 1, поскольку функции φ и θ входят в решение в виде произведения. В итоге получим точное решение системы (3):

$$\begin{aligned}u &= \psi_1(t) + c\exp\left[\int f(b\psi_1 - c\psi_2)dt\right]\theta(x, t),\\ w &= \psi_2(t) + b\exp\left[\int f(b\psi_1 - c\psi_2)dt\right]\theta(x, t),\end{aligned}$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются двумя последними уравнениями системы (6), функция $\theta(x, t)$ является решением линейного уравнения теплопроводности (7).

В случае

$$a = b = c = 1, \quad g_1(u-w) = \mu u + G(u-w) - uf(u-w), \quad g_2(u-w) = \mu u + G(u-w) - wf(u-w),$$

где μ – произвольная постоянная, $G(u - w)$ – произвольная функция, то решение системы (3) сводится к решению однородного и неоднородного уравнений соответственно [15]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu u + G(W), \tag{8}$$

$$W = u - w.$$

Система 2 содержит две произвольные функции, зависящие от линейной комбинации искомых величин:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(bu + cw),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a_2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(bu + cw).$$

Частному случаю $f(z) = z$, $g(z) = -z$ соответствует обратимая химическая реакция первого порядка [28].

Решение для любых a_1 и a_2:

$$u = c(\alpha x^2 + \beta x + \gamma t) + y(\xi),$$

$$w = -b(\alpha x^2 + \beta x + \gamma t) + z(\xi),$$

$$\xi = kx - \lambda t,$$

где $k, \alpha, \beta, \gamma, \lambda$ – произвольные постоянные, функции $y(\xi)$ и $z(\xi)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$a_1k^2y''_{\xi\xi} + \lambda y'_\xi + 2a_1c\alpha - c\gamma + f(by + cz) = 0,$$

$$a_2k^2z''_{\xi\xi} + \lambda z'_\xi + 2a_2b\alpha + b\gamma + g(by + cz) = 0.$$

Решение при $a_1 = a_2 = a$:

$$u = c\theta(x, t) + y(\xi), \quad w = -b\theta(x, t) + z(\xi),$$

$$\xi = kx - \lambda t,$$

где функции $y(\xi)$ и $z(\xi)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$a_1k^2y''_{\xi\xi} + \lambda y'_\xi + f(by + cz) = 0,$$

$$a_2k^2z''_{\xi\xi} + \lambda z'_\xi + g(by + cz) = 0,$$

функция $\theta = \theta(x, t)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = a\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}.$$

В случае

$$a_1 = a_2 = a = b = 1,$$

$$c = -1\, f(u-w) = \mu u + G(u-w),$$

$$g(u-w) = \mu u + G(u-w),$$

решение рассматриваемой системы сводится [15] к решению системы (8).

Система 3 содержит четыре произвольные функции, зависящие от отношения искомых величин:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial u}{\partial x}\right) + uf_1\left(\frac{w}{u}\right) + wg_1\left(\frac{w}{u}\right),\\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial w}{\partial x}\right) + uf_2\left(\frac{w}{u}\right) + wg_2\left(\frac{w}{u}\right).\end{aligned} \tag{9}$$

Значению $n = 0$ соответствуют одномерные задачи, $n = 1$ – плоские задачи с осевой симметрией, $n = 2$ – трехмерные задачи с радиальной симметрией. Модель Эйгена–Шустера [33], описывающая конкурентную борьбу популяций за питательный субстракт при постоянных коэффициентах размножения, приводит к системе (9) при

$$f_1(z) = \frac{k}{z+1}, \quad f_2(z) = g_1(z) = 0,$$

$$g_2(z) = -\frac{kz}{z+1},$$

где k – разность коэффициентов размножения.

Решение:

$$u = \exp\{\int[f_1(\varphi) + \varphi g_1(\varphi)]dt\}\theta(x, t),$$

$$w = \varphi(t)\exp\{\int[f_1(\varphi) + \varphi g_1(\varphi)]dt\}\theta(x, t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t = f_2(\varphi) + \varphi g_2(\varphi) - \varphi[f_1(\varphi) + \varphi g_1(\varphi)], \tag{10}$$

функция $\theta = \theta(x, t)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial\theta}{\partial x}\right).$$

Система 4 содержит пять произвольных функций, зависящих от отношения искомых величин:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f\left(\frac{w}{u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + ug_1\left(\frac{w}{u}\right) + wh_1\left(\frac{w}{u}\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f\left(\frac{w}{u}\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + ug_2\left(\frac{w}{u}\right) + wh_2\left(\frac{w}{u}\right).$$

Решение:

$$u = \exp\{\int[g_1(\varphi) + \varphi h_1(\varphi)]dt\}\theta(x, \tau),$$

$$\tau = \int f(\varphi)dt,$$

$$w = \varphi(t)\exp\{\int[g_1(\varphi) + \varphi h_1(\varphi)]dt\}\theta(x, \tau),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными (10), а функция $\theta = \theta(x, \tau)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}.$$

Система 5 из n уравнений содержит n^2 произвольных функций, зависящих от отношений искомых величин и времени (обобщает систему 3):

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = L[u_m] + \sum_{k=1}^{n} u_k f_{mk}\left(t, \frac{u_1}{u_n}, \ldots, \frac{u_{n-1}}{u_n}\right),$$
$$m = 1, \ldots, n,$$

где L – произвольный линейный дифференциальный оператор по пространственным переменным $x_1, ..., x_n$ (любого порядка по производным), коэффициенты которого могут зависеть от $x_1, ..., x_n, t$. Считается, что $L[const] = 0$.

Точное решение:

$$u_m(x_1, ..., x_n, t) = \varphi_m(t)F(t)\theta(x_1, \ldots, x_n, t),$$
$$m = 1, \ldots, n,$$

$$F(t) = \exp\left[\int\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(t)f_{nk}(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})dt\right],$$
$$\varphi_n(t) = 1,$$

где функции $\varphi_m = \varphi_m(t)$ – описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\varphi'_m = \sum_{k=1}^{n}\varphi_k(t)f_{mk}(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) -$$
$$-\varphi_m\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(t)f_{nk}(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}),$$
$$m = 1, \ldots, n-1,$$

функция $\theta = \theta(x_1, \ldots, x_n, t)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = L[\theta].$$

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДИФФУЗИОННО-КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПЕРЕНОСА

Рассмотрим нелинейное уравнение диффузии с объемной химической реакцией [21], в котором коэффициент переноса и скорость химической реакции являются произвольными функциями концентрации (температуры):

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + g(w), \qquad (11)$$

где w – концентрация (температура), t – время, x – координата, $f(w)$ – коэффициент диффузии (теплопроводности), $g(w)$ – скорость объемной химической реакции.

Групповой анализ уравнения (11) проведен при $g = 0$ [1], а также [3, 4]. Точные решения (11) в виде обобщенной бегущей волны получены методом разделения переменных. Некоторые другие решения (11) можно найти в [6, 8, 12–14, 16].

Решение 1. Для решения уравнения (11) используем метод функционального разделения переменных в специальном виде

$$w = w(z), \quad z = \varphi(t)x^2 + \psi(t), \qquad (12)$$

где функции $w(z)$, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ находят в процессе решения, определяется также связь между функциями $f(w)$ и $g(u)$, необходимая для существования решения вида (12).

Подстановка (12) в (11) и переход от переменной x к новой переменой z, приводит (11) к функционально-дифференциальному уравнению

$$\left(\psi'_t - \frac{\varphi'_t}{\varphi}\psi\right)w'_z + \frac{\varphi'_t}{\varphi}w'_z z + 4\varphi\psi[f(w)w'_z]'_z -$$

$$-g(w) - 2\varphi\left\{2[f(w)w'_z]'_z z + f(w)w'_z\right\} = 0.$$

Его можно переписать в форме

$$\Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + \Phi_3\Psi_3 + \Phi_4\Psi_4 + \Phi_5\Psi_5 = 0, \quad (13)$$

путем подстановки

$$\Psi_1 = \psi'_t - \frac{\varphi'_t}{\varphi}\psi, \quad \Phi_1 = w'_z,$$

$$\Psi_2 = \frac{\varphi'_t}{\varphi}, \quad \Phi_2 = w'_z z,$$

$$\Psi_3 = 4\varphi\psi, \quad \Phi_3 = [f(w)w'_z]'_z, \quad (14)$$

$$\Psi_4 = 1, \quad \Phi_4 = -g(w),$$

$$\Psi_5 = 2\varphi, \quad \Phi_5 = -\{2[f(w)w'_z]'_z z + f(w)w'_z\}.$$

Заметим, что уравнение (13) содержит нечетное число слагаемых. Его частное решение, согласно [5], имеет вид

$$\Phi_1 = A_1\Phi_4 + A_2\Phi_5,$$

$$\Phi_2 = A_3\Phi_4 + A_4\Phi_5,$$

$$\Phi_3 = A_5\Phi_4 + A_6\Phi_5, \quad (15)$$

$$\Psi_4 = -A_1\Psi_1 - A_3\Psi_2 - A_5\Psi_3,$$

$$\Psi_5 = -A_2\Psi_1 - A_4\Psi_2 - A_6\Psi_3,$$

где A_m – произвольные постоянные. Подставив (14) в (15), приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\psi'_t - \frac{\varphi'_t}{\varphi}\psi = A_1 + 2A_2\varphi,$$

$$\frac{\varphi'_t}{\varphi} = A_3 + 2A_4\varphi,$$

$$4\varphi\psi = A_5 + 2A_6\varphi, \quad (16)$$

$$g(w) = A_1 w'_z + A_3 w'_z z + A_5[f(w)w'_z]'_z,$$

$$2[f(w)w'_z]'_z z + f(w)w'_z =$$

$$= A_2 w'_z + A_4 w'_z z + A_6[f(w)w'_z]'_z.$$

В невырожденном случае, когда $A_3 \neq 0$, получаем $\psi(t) = \text{const}$, что с точностью до сдвига по оси z приводит к автономному решению, которое хорошо известно и здесь не рассматривается.

В вырожденном случае, когда $A_3 = 0$, система уравнений (16) несколько упрощается, второе и четвертое уравнения в ней принимают вид

$$\frac{\varphi'_t}{\varphi} = 2A_4\varphi, \quad (17)$$

$$g(w) = A_1 w'_z + A_5[f(w)w'_z]'_z, \quad (18)$$

Решение уравнения (17) после интегрирования имеет вид

$$\varphi(t) = -\frac{1}{2A_4 t + C_1}, \quad (19)$$

Подставляя решение (19) в третье уравнение системы (16), найдем функцию:

$$\psi(t) = -\frac{1}{2}A_4 A_5 t + \frac{2A_6 - A_5 C_1}{4}. \quad (20)$$

Подстановка далее (19) и (20) в первое уравнение системы (16) позволяет получить условия для коэффициентов

$$A_1 = -A_4 A_5, \quad A_2 = -\frac{1}{2}A_4 A_6.$$

С учетом этого условия систему, состоящую из уравнения (18) и последнего уравнения (16) можно переписать в виде

$$g(w) = -A_4 A_5 w'_z + A_5(f(w)w'_z)'_z,$$

$$2(f(w)w'_z)'_z z + f(w)w'_z =$$

$$= -\frac{1}{2}A_4 A_6 w'_z + A_4 w'_z z + A_6(f(w)w'_z)'_z.$$

Заменив $w'_z = \rho(z)$, непосредственно получаем выражения для $f(w)$ и $g(w)$:

$$f(w) = \frac{C_2}{\rho(z)\sqrt{2z - A_6}} +$$

$$+\frac{A_4}{2\rho(z)\sqrt{2z - A_6}}\int \rho(z)\sqrt{2z - A_6}\,dz,$$

$$g(w) = -\frac{A_4 A_5}{2}\rho(z) - \frac{A_5 C_2}{(2z - A_6)^{\frac{3}{2}}} -$$

$$-\frac{A_4 A_5}{2(2z - A_6)^{\frac{3}{2}}}\int \rho(z)\sqrt{2z - A_6}\,dz,$$

$$w(z) = \int \rho(z)\,dz + C_3,$$

где $\rho(z)$ – произвольная функция.

Для удобства записи введем функцию $\zeta(z) = \int \rho(z)\sqrt{2z - A_6}dz + \frac{2C_2}{A_4}$, и выразим функции $f(w)$, $g(w)$, $w(z)$ через $\zeta(z)$

$$f(w) = \frac{A_4}{2}\frac{\zeta(z)}{\zeta'_z},$$

$$g(w) = -\frac{A_4A_5}{2}\frac{\zeta'_z}{\sqrt{2z - A_6}} - \frac{A_4A_5}{2}\frac{\zeta(z)}{(2z - A_6)^{\frac{3}{2}}}, \qquad (21)$$

$$w(z) = \int \frac{\zeta'_z}{\sqrt{2z - A_6}}dz + C_3.$$

Для некоторых функций $\zeta(z)$ простейшего вида из системы (21) можно в явном виде выписать зависимости $f(w)$ и $g(w)$. Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 1. Пусть функции $f(w)$ и $g(w)$ определяются формулами

$$f(w) = ae^{\lambda w}, \quad g(w) = be^{-\lambda w},$$

где λ, a и b – произвольные постоянные. Тогда решение с функциональным разделением переменных определяется с помощью формулы

$$w(x, t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left|\frac{x^2}{C - 2at} + \frac{b\lambda}{4a}(2at - C)\right|,$$

Пример 2. Пусть функции $f(w)$ и $g(w)$ определяются формулами

$$f(w) = aw^m, \quad g(w) = bw^{1-m},$$

где m, a и b – произвольные постоянные. Тогда решение с функциональным разделением переменных определяется с помощью формулы

$$w(x, t) = \left\{-\frac{mx^2}{2a(2 + m)t + C} + \frac{bm}{4a(m + 1)}[2a(2 + m)t + C]\right\}^{\frac{1}{m}}.$$

Заметим, что при $m = 1$ имеем диффузионно-кинетическое уравнение с химической реакцией нулевого порядка и линейной зависимостью коэффициента диффузии от концентрации. При $m = -1$ решение соответствует случаю димолекулярной химической реакции и обратно пропорциональной зависимости коэффициента диффузии от концентрации.

Решение 2. Пусть функции $f(w)$ и $g(w)$ определяются формулами

$$f(w) = w^m,$$
$$g(w) = aw - bw^{1+m} + cw^{1-m},$$

где m, a, b и c – произвольные постоянные. Тогда решение с функциональным разделением переменных определяется с помощью формулы

$$w = \{mc[\varphi(t)e^{\lambda x} + \psi(t)]\}^{\frac{1}{m}},$$

где функции $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ имеют вид

$$\psi(t) = \frac{(2 + m)a}{2m(1 + m)bc} + \frac{\sqrt{(2 + m)^2a^2 - 4(1 + m)bc}}{2m(1 + m)bc} \times \operatorname{th}\left[\sqrt{\frac{1}{4}m^2a^2 - \frac{m^2(1 + m)}{2 + m}bct + C_1}\right],$$

$$\varphi(t) = C_2\exp(b_3mt + m^2bc\int\psi(t)dt),$$

$$\lambda^2 = \frac{m^2b}{2 + m}.$$

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ДИФФУЗИОННО-КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ В СЛУЧАЕ РАДИАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ

Рассмотрим нелинейное уравнение тепло- и массопереноса в случае радиальной симметрии [6, 16, 19]

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^n f(w)\frac{\partial w}{\partial r}\right] + g(w), \qquad (22)$$

где r – радиальная координата, значения $n = 1$ и $n = 2$ дают двумерный и трехмерный случаи соответственно. Отметим, что уравнение (22) описывает также кратковременное распределение температуры при отсутствии терморелаксации [18].

Методом функционального разделения переменных получены следующие точные решения уравнения (22).

Решение 1. Пусть функция $f(w)$ – произвольна, функция $g(w)$ определяется соотношением

$$g(w) = \left(\frac{a}{f(w)} + b\right)\left(\int f(w)dw + c\right),$$

где a, b, c – произвольные постоянные.

Тогда решение с функциональным разделением переменных определяется неявно с помощью формулы

$$\int f(w)dw + c = e^{at}z(r),$$

где функция $z = z(r)$ описывается обыкновенным линейным дифференциальным уравнением

$$z''_{rr} + \frac{n}{r}z'_r + bz = 0. \qquad (23)$$

Общее решение (23) выражается через функции Бесселя.

Решение 2. Пусть функции $f(w)$ и $g(w)$ определяются формулами

$$f(w) = a\zeta^{-\frac{n+1}{2}}\zeta'_w\int\zeta^{\frac{n+1}{2}}dw, \quad g(w) = b\frac{\zeta}{\zeta'_w},$$

где $\zeta = \zeta(w)$ – произвольная функция, a и b – произвольные постоянные.

В этом случае существует решение с функциональным разделением переменных, определяемое неявным соотношением

$$\zeta(w) = \frac{br^2}{Ce^{-bt} - 4a}.$$

Решение 3. Пусть функции $f(w)$ и $g(w)$ определяются формулами

$$f(w) = a\frac{\zeta(z)}{\zeta'_z(z)},$$

$$g(w) = b\left[2z^{-\frac{n+1}{2}}\zeta'_z(z) + (n+1)z^{-\frac{n+3}{2}}\zeta(z)\right],$$

где $\zeta(z)$ – произвольная функция z, a и b – произвольные постоянные, функция w задается выражением

$$w = \int z^{-\frac{n+1}{2}}\zeta'_z(z)dz + C_1. \qquad (24)$$

Тогда существует решение уравнения (22) с функциональным разделением переменных в форме (24), где

$$z = -\frac{r^2}{4at + C_2} + 2bt + \frac{bC_2}{2a}.$$

Для некоторых простейших функций $\zeta(z)$ можно получить зависимость $f(w)$ и $g(w)$ в явном виде. Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 1. Пусть функции $f(w)$ и $g(u)$ определяются формулами

$$f(w) = ae^{\lambda w}, \quad g(w) = be^{-\lambda w},$$

где λ, a и b – произвольные постоянные.

Тогда решение с функциональным разделением переменных определяется с помощью формулы

$$w(r, t) = \frac{1}{\lambda}\times$$
$$\times\ln\left|\frac{r^2}{C - 2(n+1)at} + \frac{b\lambda}{4(n+1)a}[2(n+1)at - C]\right|.$$

Пример 2. Пусть функции $f(w)$ и $g(w)$ определяются формулами

$$f(w) = aw^m, \quad g(w) = bw^{1-m},$$

где m, a и b – произвольные постоянные.

Тогда решение с функциональным разделением переменных осуществляют с помощью формулы

$$w(z) = \left\{-\frac{mr^2}{[2m(n+1)+4]at + C} + \right.$$
$$\left. + \frac{mb}{4m(n+1)a}([2m(n+1)+4]4at + C)\right\}^{\frac{1}{m}}.$$

Заметим, что при $m = 1$ имеем решение диффузионно-кинетического уравнения с радиальной симметрией и химической реакцией нулевого порядка, когда коэффициент диффузии пропорционален концентрации. При $m = -1$ решение соответствует случаю бимолекулярной химической реакции и обратно пропорциональной зависимости коэффициента диффузии от концентрации.

ДИФФУЗИОННО-КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ СО СЛОЖНОЙ РЕОЛОГИЕЙ

Рассмотрим обобщение диффузионно-кинетическое уравнение в случае реологически сложной среды, когда закон Фика записывают в степенном виде относительно градиента концентрации [14]

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^n\right] + g(w). \qquad (25)$$

Некоторые точные решения уравнения для частных зависимостей $f(w)$ и $g(w)$, содержащих свободные параметры, были получены в [20]. Ниже будут описаны новые классы точных решений уравнения (25), когда функции $f(w)$ и $g(w)$ зависят от одной произвольной функции. Заметим, что при $n = 1$ уравнение (25) переходит в уравнение (11).

Решение 1. Пусть функция $f(w)$ и произвольная функция $g(w)$ определяется соотношением

$$g(w) = a[f(w)]^{-1/n} - b,$$

где a и b – произвольные постоянные.

В этом случае существует решение с функциональным разделением переменных, определяемое неявном образом,

$$\int [f(w)]^{1/n} dw = at + \frac{n}{b(n+1)}(bx + C_1)^{\frac{n+1}{n}} + C_2.$$

Решение 2. Пусть функция $g(w)$ – произвольная, функция $f(w)$ задается зависимостью

$$f(w) = \frac{a}{[g(w)]^n} \exp\left[b\int \frac{dw}{g(w)}\right].$$

В этом случае существует решение с функциональным разделением переменных, определяемое в неявном виде соотношением

$$\int \frac{dw}{g(w)} = t + \frac{n}{b}\ln\left(\frac{b}{n}x + C_1\right) + C_2.$$

Решение 3. Пусть функция $g(w)$ – произвольна, функция $f(w)$ задается соотношением

$$f(w) = \frac{aw + c}{[g(w)]^n} + \frac{b}{[g(w)]^n}\int z\,dw, \quad z = \int \frac{dw}{g(w)}, \tag{26}$$

где a, b и c – произвольные постоянные.

В этом случае уравнение (25) имеет неявное решение (26) в виде обобщенной бегущей волны

$$w = w(z), \quad z = \varphi(t)x + \psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ задаются выражениями

$$\varphi(t) = \left[\frac{1}{C_1 - b(n+1)t}\right]^{\frac{1}{n+1}},$$

$$\psi(t) = \varphi(t)\left[a\int [\varphi(t)]^n dt + \int \frac{dt}{\varphi(t)} + C_2\right].$$

Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 1. Пусть функции $f(w)$ и $g(w)$ определяются формулами

$$g(w) = 0, \quad f(w) = \alpha w^2 + \beta w + \gamma,$$

где b, α, β и γ – произвольные постоянные.

Тогда решение с функциональным разделением переменных определяется с помощью формулы

$$w = \varphi(t)x + \psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют вид

$$\varphi(t) = \left[\frac{1}{C_1 - 2\alpha(n+1)t}\right]^{\frac{1}{n+1}},$$

$$\psi(t) = \varphi(t)\left[\beta\int [\varphi(t)]^n dt + b\int \frac{dt}{\varphi(t)} + C_2\right].$$

Пример 2. Пусть функции $f(w)$ и $g(w)$ определяются формулами

$$g(w) = be^{\lambda w},$$

$$f(w) = \alpha w e^{-\lambda n w} + \beta e^{-\lambda(n+1)w} + \gamma e^{-\lambda n w},$$

где b, α, β, γ и λ – произвольные постоянные.

Тогда решение с функциональным разделением переменных находят с помощью формулы

$$w = -\frac{1}{\lambda}\ln|\lambda z|, \quad z = \varphi(t)x + \psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют вид

$$\varphi(t) = \left[\frac{1}{C_1 - (n+1)\lambda^2\beta t}\right]^{\frac{1}{n+1}},$$

$$\psi(t) = \varphi(t)\left[\alpha\int [\varphi(t)]^n dt + b\int \frac{dt}{\varphi(t)} + C_2\right].$$

Заметим, что этот пример описывает нестационарный теплоперенос в среде с объемным тепловым источником (сток) экспоненциального вида, который может возникать в случае экзо- или эндотермической химической реакции.

Решение 4. Пусть функция $g(w)$ – произвольна, а функция $f(w)$ задается соотношением

$$f(w) = \frac{1}{[g(w)]^n}\left(aw + b\int z\,dw\right)\exp\left[nc\int \frac{dw}{g(w)}\right],$$
$$z = \frac{1}{c}\exp\left[c\int \frac{dw}{g(w)}\right] - \beta, \tag{27}$$

где a, b, c и β – произвольные постоянные ($c \neq 0$).

В этом случае уравнение (25) имеет решение в виде обобщенной бегущей волны

$$w = w(z), \quad z = \varphi(t)x + \psi(t),$$

где функция $w(z)$ определяется неявно соотношением (27), функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют вид

$$\varphi(t) = \left(C_1 e^{-(n+1)ct} - \frac{b}{c}\right)^{-\frac{1}{n+1}},$$

$$\psi(t) = \varphi(t)\left[a\int [\varphi(t)]^n dt + \beta c\int \frac{dt}{\varphi(t)} + C_2\right].$$

Решение 5. Пусть функции $f(w)$ и $g(w)$ определяются соотношениями

$$f(w) = b[\zeta'_w(w)]^n \exp[-\beta\zeta(w)],$$

$$g(w) = \frac{\alpha}{\zeta'_w(w)} - \beta\gamma\exp[-\beta\zeta(w)],$$

где $\zeta = \zeta(w)$ – произвольная функция, b, α, β и γ – произвольные постоянные.

Тогда существует решение с функциональным разделением переменных, определяемое неявным соотношением

$$\zeta(w) = \alpha t + \theta(x),$$

где функция $\theta(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$n(\theta'_x)^{n-1}\theta''_{xx} = \beta(\theta'_x)^{n+1} + n\gamma.$$

Общее решение этого уравнения можно записать в параметрическом виде

$$\theta = n\int \frac{u^n}{\beta u^{n+1} + n\gamma}du + C_1,$$

$$x = n\int \frac{u^{n-1}}{\beta u^{n+1} + n\gamma}du + C_2.$$

Решение 6. Пусть функции $f(w)$ и $g(w)$ определяются соотношениями

$$f(w) = \frac{1}{\lambda^n}\left(A - \frac{n\lambda}{n+1}w\right)[\zeta'_w(w)]^n,$$

$$g(w) = \lambda\frac{\zeta(w)}{\zeta'_w(w)} + \frac{n\lambda}{n+1}w - A,$$

где $\zeta(w)$ – произвольная функция, A и λ – постоянные.

Тогда существует решение с функциональным разделением переменных, определяемое неявным соотношением

$$\varphi(w) = C_1e^{\lambda t} + \frac{n\lambda}{n+1}(x + C_2)^{\frac{n+1}{n}}.$$

Решение 7. Пусть функции $f(w)$ и $g(w)$ определяются соотношениями

$$f(w) = A\frac{\zeta(z)}{[\zeta'_z(z)]^n}z^{n-1},$$

$$g(w) = B(n+1)\zeta'_z(z)z^{-\frac{n}{n+1}} + B\zeta(z)z^{-\frac{2n+1}{n+1}},$$

где $\zeta(z)$ – произвольная функция, A и B – произвольные постоянные ($AB \neq 0$), функция $z = z(w)$ задается неявным соотношением

$$w = \int z^{-\frac{n}{n+1}}\zeta'_z(z)dz + C_1. \qquad (28)$$

Тогда существует решение с функциональным разделением переменных в форме (28), где

$$z = \left[\frac{x^{n+1}}{C_2 - (n+1)k^nAt}\right]^{\frac{1}{n}} + (n+1)Bt - \frac{(n+1)BC_2}{nk^{n+1}A}, \qquad (29)$$

$k = (n + 1)/n$.

В заключение отметим, что полученные решения можно применять для расчета нестационарных полей температур и концентраций в неподвижных средах со сложной кинетикой однокомпонентной химической реакции в случае зависимости коэффициентов переноса от концентрации или температуры. Однако практическое использование этих результатов имеет важное значение. Найденные точные решения нелинейных дифференциальных уравнений являются частными. Это доказывает существование решений таких уравнений, но не дает ответа на вопрос о их единственности, что требует для каждого отдельного уравнения дополнительного исследования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 04-02-17281, № 05-07-90297, № 05-01-00693).

ОБОЗНАЧЕНИЯ

C, C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянников Л.В.* Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // Докл. АН СССР. 1959. Т. 125. № 3. С. 492.
2. *Андреев В.К., Капцов О.В., Пухначев В.В., Родионов А.А.* Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука, 1994.
3. *Дородницын В.А.* Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником // Журн. вычисл. математики и математической физики. 1982. Т. 22. № 6. С. 1393.
4. *Дородницын В.А.* Групповые свойства и инвариантные решения уравнений нелинейной теплопроводности с источником или стоком. М.: Инст. прикл. математики АН СССР. Препринт № 57. 1979. С. 32.
5. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.
6. *Galaktionov V.A.* Quasilinear heat equations with firstorder signinvariants and new expicit solutions, Nonlinear Analys, Theory // Math. and Applications. 1994. V. 23. P. 1595.

7. *Svirshchevski S.R.* Lie-Bäcklund symmetries of linear ODEs and generalized separation of variables in nonlinear equations // Phys. Lett. A, 1995. V. 199. P. 344.
8. *Nikitin A.G., Wiltshire R.J.* Systems of reaction-diffusion equations and their symmetry properties // J. Math. Phys. 2000. V. 42. № 4. P. 1667.
9. *Cherniha R., King J.R.* Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems: I // J. Phys. A: Math. Gen. 2000. V. 33. P. 267.
10. *Cherniha R., King J.R.* Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems: II // J. Phys. A: Math. Gen. 2003. V. 36. P. 405.
11. *Barannyk T.* Symmetry and Exact Solutions for Systems of Nonlinear Reaction-Diffusion Equations // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. 2002. V. 43. Part 1. P. 80.
12. *Vorob'ev E.M.* Weak and partial symmetries of nonlinear PDE in two independent variables // Nonlinear Mathematical Physics. 1996. V. 3. № 3–4. P. 330.
13. *Nikitin A.G., Wilshire R.J.* Symmetries of systems of nonlinear reaction-diffusion equations, Proceedings of Third International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (12–18 July, 1999, Kyiv). Institute of Mathematics. 2000. V. 30. Part 1. P. 47.
14. *Saied E.A., Abd El-Rahman R.G.* On the porous medium equation with modified Fourier's low: symmetries and intergrability // J. of the Physical Society of Japan. 1999. V. 68. № 2. P. 360.
15. *Берман В.С.* Исследование нестационарных процессов в химически активных средах. Дис. ... докт. физ. математических наук. М.: Институт проблем механики, 1981.
16. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2004.
17. *Полянин А.Д.* Точные решения нелинейных систем уравнений теории тепломассопереноса реагирующих сред и математической биологии // Теорет. основы хим. технологии. 2004. Т. 38. № 6. С. 661.
18. *Paskal H.* A nonlinear model of heat conduction // J. Phys. Math. Gen. 1992. V. 25. P. 939.
19. *Saied E.A., Hussein M.M.*, Similarity solutions for nonlinear model of the heat equation // Nonlinear Mathematical Physics. 1996. V. 3. № 1–2. P. 219.
20. *Estevez P.G., Qu C.L., Zhang S.L.* Separation of variables of generalized porous medium equation with nonlinear source // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 275. P. 44.
21. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2002.
22. *Grundland A.M., Infeld E.* A family of non-linear Klein-Gordon equations and their solutions // J. Vath. Phys., 2992. V. 33. P. 2498.
23. *Miller J.* (Jr.), Rubel L.A. Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions // J. Phys. A., 1993. V. 26. P. 1901.
24. *Zhdanov R.Z.* Separation of variables in the non-linear wave equation // J. Phys. A. 1994. V. 27. P. L291.
25. *Doyle Ph.W., Vassilion P.J.* Separation of variables for the 1-demensional non-linear diffusion equation // Int. J. Non-Linear Mech. 1998. V. 33. № 2. P. 315.
26. *Polyanin A.D., Zhurov A.I., Vyazmin A.V.* Generalized separation of variables in nonlinear heat and mass transfer equations // J. Non-Equlibrium Thermodynamics. 200. V. 25. № 3/4. P. 251.
27. *Полянин А.Д.* Точные решения уравнений Навье-Стокса с обобщенным разделением переменных // Докл. РАН. 2001. Т. 380. № 4. С. 491.
28. *Данквертс П.В.* Газожидкостные реакции. М.: Химия, 1973.
29. *Перлмуттер Д.* Устойчивость химических реакторов. Л.: Химия, 1976.
30. *Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А.* Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. М.: Наука, 1987.
31. *Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М.* Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.
32. *Марри Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. М.: Мир, 1983.
33. *Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С.* Математическая биофизика. М.: Наука, 1984.