ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ: ОТ НЕПРЕРЫВНЫХ ГРУПП К ФОРМАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРАМ

Зайцев В.Ф., Линчук Л.В.

Российский государственный педагогический
университет им. А.И. Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: valentin_zaitsev@mail.ru
e-mail: lidiya_linchuk@mail.ru

Известно, что групповой анализ дифференциальных уравнений основан Софусом Ли в конце XIX века. Гениальной находкой С.Ли явилась линеаризация определяющих уравнений для поиска непрерывных групп преобразований с помощью перехода к бесконечно-малым преобразованиям, которые могут быть заданы **инфинитезимальным оператором**. Далее, в течение века групповой анализ развивался на основе этого основополагающего понятия.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right), \quad H = y^{(n)} - F. \tag{1}$$

Координата допускаемого канонического оператора

$$X = \Phi \partial_y, \tag{2}$$

удовлетворяет **определяющему уравнению**

$$\left.\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y^{(k)}} D_x^k \Phi \right|_{[H]} = 0, \tag{3}$$

где $[H]$ – многообразие, заданное уравнением (1), и все его дифференциальные следствия, D_x – оператор полной производной.

Форма решения уравнения (3) определяет тип оператора (2):

Форма решения	**Тип оператора**
Элементарная функция	Локальный
Квадратура	Нелокальный
“Степенной ряд”	Формальный

Под “степенным рядом” мы условно понимаем решение уравнения (3), не представимое в общем случае ни в виде элементарной функции, ни в виде квадратур. Для обыкновенных дифференциальных уравнений аналогом такого типа решений было бы “решение, представимое в специальных функциях”. Однако уравнение (3) – не обыкновенное дифференциальное, а **уравнение в полных производных** относительно функции Φ. Заметим, что функция Φ зависит, вообще говоря, от x, y и производных y любого порядка вплоть до бесконечного.

Но если для приложений ОДУ нам, как правило, требуется явное представление решения, то для факторизации ОДУ в групповом анализе нам требуется не знание самого оператора в явном виде, а знание его инвариантов. Рассмотрим процедуру факторизации некоторого конкретного исходного ОДУ (1) с помощью оператора (2). Если нам удалось найти Φ в явном аналитическом виде, мы переходим к вычислению инвариантов допускаемого оператора. Инварианты удовлетворяют уравнению

$$\Phi\frac{\partial J}{\partial y} + D_x\Phi\frac{\partial J}{\partial y'} + \ldots + D_x^{n-1}\Phi\frac{\partial J}{\partial y^{(n-1)}}\bigg|_{[H]} = 0. \tag{4}$$

Выберем из найденного множества решений уравнения (4) решение $J = J(x, y, y', \ldots, y^{(k)})$, $(k < n)$, старшая производная в котором имеет наименьший порядок (этот инвариант называется младшим). Тогда исходное уравнение (1) можно записать в виде факторсистемы

$$\begin{cases} u = J(x, y, y', \ldots, y^{(k)}), \\ u^{(n-k)} = G(x, u, u', \ldots, u^{(n-k-1)}). \end{cases} \tag{5}$$

Заметим, что уравнения (3) и (4) имеют схожую структуру, а именно, в них линейно входит функция Φ и ее полные производные, с той лишь разницей, что в уравнении (3) функция Φ является искомой, а в уравнении (4) считается известной. Если поделить эти уравнения почленно на Φ, получим выражения, в которые функция Φ входит лишь в виде отношений

$$\frac{D_x\Phi}{\Phi}, \frac{D_x^2\Phi}{\Phi}, \ldots, \frac{D_x^n\Phi}{\Phi}.$$

Следовательно, для поиска факторсистемы нам достаточно знать эти отношения, а не искать собственно функцию Φ. Более того, достаточно знать лишь первое отношение, так как остальные могут быть получены из него простым дифференцированием.

Если, например, отношение $D_x\Phi/\Phi = \zeta(x, y, y')$, то мы получаем определение ЭНО в каноническом виде

$$X = \exp\left(\int \zeta(x, y, y')\, dx\right)\partial_y.$$

В данном случае мы восстанавливаем явный вид функции Φ (квадратурой), хотя для факторизации, как мы показали, это не принципиально, и вид оператора не имеет значения ни для прямой, ни для обратной задачи, а ключевую роль играет выражение $D_x\Phi = \zeta(x, y, y')\Phi$, которое можно назвать **правилом дифференцирования** функции Φ.

Введем в рассмотрение оператор (2) в котором

$$\Phi = \sum_{i=1}^{k} \xi_i(x, y, y', \ldots, y^{(p)})A_i, \tag{6}$$

где A_i $(i = 1, \ldots, k)$ – нелокальные переменные, правила диффернцирования которых задаются линейными выражениями

$$D(A_i) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) A_j. \tag{7}$$

По сути, эти правила дифференцирования задают правило дифференцирования координаты оператора Ф. Соотношения (7) теоретически позволяют восстановить нелокальные переменные A_i, а следовательно, функцию Ф, что необходимо для реализации классического подхода группового анализа. Для наших целей решение этой задачи будет излишним.

Уравнения (7) задают, согласно таблице, формальный оператор, обобщающий как локальные, так и нелокальные операторы и позволяющий получать новые результаты, которые невозможно получить применением классического алгоритма.

Если рассматривать уравнения с частными производными (УрЧП), то ситуация становится существенно сложнее. Например, УрЧП второго порядка с двумя независимыми переменными может быть два случая:

1) существует лишь один первый дифференциальный инвариант J, и для исходного уравнения можно построить факторизацию в виде

$$\begin{cases} J = U(x, y, u, u_x, u_y), \\ V(x, y, J, J_x, J_y) = 0 \end{cases}$$

(в этом случае, решив второе уравнение, мы получаем для определения искомой функции u **УрЧП первого порядка**);

2) существует два инварианта первого порядка J_1, J_2, и мы можем искать классы частных решений исходного УрЧП из уравнения первого порядка $J_2 = W(J_1)$ (этот прием обобщает обычный метод поиска инвариантных решений).

Пример 1. Решим прямую задачу для ОДУ 2-го порядка

$$y'' = (xy^{-3} + x^{-1})y'$$

в классе операторов

$$X = A\partial_y,$$

где правило дифференцирования нелокальной переменной A:

$$D_x A = \alpha(x, y)A.$$

Соответствующее определяющее уравнение имеет вид

$$A\left[(\alpha'_y + 3xy^{-4})y' + \alpha'_x + \alpha^2 - (xy^{-3} + x^{-1})\alpha\right] = 0.$$

Расщепив по переменной y' выражение в квадратных скобках, получаем систему

$$\begin{cases} \alpha'_y + 3xy^{-4} = 0, \\ \alpha'_x + \alpha^2 - (xy^{-3} + x^{-1})\alpha = 0, \end{cases}$$

решением которой будет

$$\alpha = xy^{-3}.$$

Используя полученный результат, найдем дифференциальный инвариант допускаемого оператора $J = J(x, y, y')$ из уравнения:

$$J_y + xy^{-3}J_{y'} = 0.$$

Его решение

$$J = y' + \frac{x}{2y^2}.$$

Отсюда вытекает, что исходное уравнение факторизуется следующим образом:

$$\begin{cases} u = y' + \dfrac{x}{2y^2}, \\ xu' - u = 0. \end{cases}$$

Пример 2. Уравнение

$$uu_{xx} = auu_{xy} + bu_xu_y - \frac{b}{a}\,u_x^2,$$

факторизуется до системы

$$\begin{cases} w = u^{b/a}u_x, \\ aw_y - w_x = 0. \end{cases}$$

Пример 3. Уравнение

$$u^2u_xu_{yy} - uu_{xx} + uu_y^2u_x - u_x^2 = 0$$

имеет факторсистему

$$\begin{cases} v = uu_y, \\ w = uu_x, \\ wv_xv_y - w_xw_y = 0. \end{cases}$$

Из последнего уравнения факторсистемы видно, что частное решение этого уравнения должно удовлетворять уравнению 1-го порядка

$$uu_y = \pm 2\sqrt{uu_x} + C.$$