А. Д. Полянин, Доклады РАН, 2001, т. 379, № 3, с. 334–339

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

© 2001 **А. Д. Полянин**

Указаны общие преобразования, сохраняющие вид уравнений трехмерного пограничного слоя в произвольной ортогональной криволинейной системе координат. Рассматриваются ньютоновские и неньютоновские жидкости. Исследуются неизотермические и диффузионные пограничные слои. Приведены новые точные решения уравнений стационарного и нестационарного пограничного слоя, зависящие от произвольных функций. Описан простой приближенный метод решения задач пограничного слоя об обтекании гладких слабо деформированных поверхностей.

1. Уравнения двумерного нестационарного пограничного слоя

Уравнения двумерного нестационарного ламинарного пограничного слоя имеют вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+u_2\frac{\partial u_1}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+f(x,t),\qquad \frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}=0, \tag{1}$$

где x и y — продольная и поперечная координаты (значение $y=0$ соответствует обтекаемой поверхности), u_1 и u_2 — продольная и поперечная компоненты скорости жидкости, ν — кинематическая вязкость жидкости, $\nabla_x p=-\rho f(x,t)$ — градиент давления.

Система (1) путем введения функции тока w по формулам $u_1=\frac{\partial w}{\partial y}$, $u_2=-\frac{\partial w}{\partial x}$ сводится к одному нелинейному уравнению третьего порядка [1, 2]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\nu\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+f(x,t). \tag{2}$$

Уравнение (2) инвариантно относительно преобразования

$$w=W(x,\xi,t)+\frac{\partial}{\partial t}\int\varphi(x,t)\,dx,\qquad \xi=y+\varphi(x,t), \tag{3}$$

где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция двух аргументов.

Преобразование (3) в терминах компонент скоростей было получено в [3], стационарный случай $\varphi=\varphi(x)$ описан в [4] (см. также [5, 6]). Это преобразование будет использовано для построения точных решений уравнений пограничного слоя в разд. 6.

2. Трехмерные уравнения пограничного слоя

Трехмерные уравнения нестационарного ламинарного пограничного слоя в декартовой системе координат имеют вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+u_2\frac{\partial u_1}{\partial y}+u_3\frac{\partial u_1}{\partial z}=\nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}+f_1(x,y,t), \tag{4}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_2}{\partial x}+u_2\frac{\partial u_2}{\partial y}+u_3\frac{\partial u_2}{\partial z}=\nu\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}+f_2(x,y,t), \tag{5}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial u_3}{\partial z}=0, \tag{6}$$

где $u_k=u_k(x,y,z,t)$ — компоненты скорости жидкости ($k=1,\,2,\,3$); z — координата, отсчитываемая по нормали к обтекаемой поверхности. В правые части уравнений (4)–(5) помимо градиента давления включены и непотенциальные массовые силы, т. е. функции $f_1(x,y,t)$ и $f_2(x,y,t)$ — произвольны.

Преобразование

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2, \quad u_3 = v_3 - \varphi_x v_1 - \varphi_y v_2 - \varphi_t, \\ u_k = u_k(x,y,z,t), \quad v_k = v_k(x,y,\xi,t), \quad \xi = z + \varphi(x,y,t), \tag{7}$$

где $\varphi = \varphi(x,y,t)$ — произвольная функция трех аргументов (φ_x, φ_y, φ_t — частные производные функции φ по x, y, t), сохраняет вид уравнений нестационарного пограничного слоя (4)–(6). Преобразование (7) при $(f_1)_y = (f_2)_x$ было получено методами группового анализа в [3].

Преобразование (7) позволяет по любым частным решениям уравнений пограничного слоя строить более общие решения, зависящие от произвольной функции трех аргументов (в частности, каждое стационарное решение порождает соответствующие нестационарные решения). Оно допускает различные обобщения (см. разд. 3–5) и будет использовано в разд. 8 для приближенного решения задач об обтекании гладких слабо деформированных поверхностей.

3. Уравнения пограничного слоя неньютоновских жидкостей

Трехмерные нестационарные уравнения

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial z} = F_1\Big(x,y,t,u_1,u_2,\frac{\partial u_1}{\partial z},\frac{\partial u_2}{\partial z},\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2},\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\Big),$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial z} = F_2\Big(x,y,t,u_1,u_2,\frac{\partial u_1}{\partial z},\frac{\partial u_2}{\partial z},\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2},\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\Big),$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0$$

инвариантны относительно преобразования (7) при произвольных функциях F_1 и F_2. Частные случаи подобных уравнений широко используются для описания пограничного слоя неньютоновских жидкостей [7, 8].

4. Уравнения неизотермического и диффузионного пограничного слоя

Рассмотрим теперь более сложную систему уравнений

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial z} = F_1, \tag{8}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial z} = F_2, \tag{9}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} = F_3, \tag{10}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \theta}{\partial y} + u_3 \frac{\partial \theta}{\partial z} = F_4, \tag{11}$$

правые части которых содержат произвольные функции

$$F_n = F_n\Big(x,y,t,u_1,u_2,\theta,\frac{\partial u_1}{\partial z},\frac{\partial u_2}{\partial z},\frac{\partial \theta}{\partial z},\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2},\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2},\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\Big); \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Частные случаи подобных уравнений используются для описания неизотермического пограничного слоя ньютоновской и неньютоновских жидкостей [1, 2, 7, 8] (в том числе в задачах с тепловыми источниками; в задачах с вязкой диссипацией; в задачах со свободной конвекцией; в задачах, где вязкость среды зависит от температуры θ). Они встречаются также в задачах диффузионного пограничного слоя (в том числе в задачах с химическим реакциями [8]).

Преобразование

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2, \quad u_3 = v_3 - \varphi_x v_1 - \varphi_y v_2 - \varphi_t, \quad \theta = \vartheta, \\ u_k = u_k(x,y,z,t), \quad \theta = \theta(x,y,z,t), \quad v_k = v_k(x,y,\xi,t), \quad \vartheta = \vartheta(x,y,\xi,t), \\ \xi = z + \varphi(x,y,t),$$

где $\varphi = \varphi(x,y,t)$ — произвольная функция трех аргументов (φ_x, φ_y, φ_t — ее частные производные), сохраняет вид уравнений (8)–(11).

Замечание 1. Эти результаты нетрудно обобщить на многокомпонентный случай, если к уравнениям (8)–(10) вместо одного уравнения (11) добавить несколько уравнений аналогичного вида для θ_m (правые части уравнений могут зависеть от всех θ_m и их первых и вторых производных по z).

5. Трехмерные уравнения пограничного слоя в произвольной ортогональной системе координат

Трехмерные уравнения ламинарного нестационарного пограничного слоя в произвольной ортогональной криволинейной системе координат имеют вид [9]

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{u_1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{u_2}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{u_3}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + A_1 u_2^2 + B_1 u_1 u_2 = \frac{\nu}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + f_1(x_1, x_2, t),$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{u_1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{u_2}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{u_3}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + A_2 u_1^2 + B_2 u_1 u_2 = \frac{\nu}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + f_2(x_1, x_2, t),$$
$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Bigl(u_1\sqrt{\frac{g}{g_{11}}}\Bigr) + \frac{\partial}{\partial x_2}\Bigl(u_2\sqrt{\frac{g}{g_{22}}}\Bigr) + \frac{\partial}{\partial x_3}\Bigl(u_3\sqrt{\frac{g}{g_{33}}}\Bigr) = 0,$$

где $u_k = u_k(x_1, x_2, x_3, t)$ — компоненты скорости жидкости ($k = 1,\ 2,\ 3$); x_3 — координата, направленная по нормали к обтекаемой поверхности (которая задается значением $x_3 = 0$); $g_{kk} = g_{kk}(x_1, x_2)$ — компоненты метрического тензора при $x_3 = 0$; $g = g_{11}g_{22}g_{33}$ — третий инвариант метрического тензора. Функции $A_n = A_n(x_1, x_2)$, $B_n = B_n(x_1, x_2)$, где $n = 1,\ 2$, выражаются через компоненты метрического тензора и их производные при $x_3 = 0$. В правые части уравнений помимо градиента давления включены и непотенциальные массовые силы, т. е. функции $f_1(x_1, x_2, t)$ и $f_2(x_1, x_2, t)$ — произвольны.

Преобразование

$$\begin{aligned} &u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2, \quad u_3 = v_3 - \psi_1 v_1 - \psi_2 v_2 - \psi_3,\\ &u_k = u_k(x_1, x_2, x_3, t), \quad v_k = v_k(y_1, y_2, y_3, t),\\ &y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3 + \varphi(x_1, x_2, t), \end{aligned}$$

где

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{g_{33}}{g_{11}}}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \quad \psi_2 = \sqrt{\frac{g_{33}}{g_{22}}}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \quad \psi_3 = \sqrt{g_{33}}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

$\varphi = \varphi(x_1, x_2, t)$ — произвольная функция трех аргументов, сохраняет вид уравнений нестационарного пограничного слоя для произвольной ортогональной криволинейной системы координат.

Замечание 2. Результаты этого раздела распространяются на трехмерные уравнения нестационарного пограничного слоя неньютоновских жидкостей, записанные в произвольной ортогональной криволинейной системе координат.

Замечание 3. Результаты этого раздела распространяются на трехмерные уравнения нестационарного неизотермического (диффузионного) пограничного слоя несжимаемой жидкости для произвольной ортогональной криволинейной системы координат.

6. Использование преобразований для построения точных решений уравнений пограничного слоя

Преобразование (3) позволяет по любым частным решениям уравнений двумерного пограничного слоя строить более общие решения, зависящие от произвольной функции двух аргументов (в частности, каждое стационарное решение порождает соответствующие нестационарные решения).

Следствие преобразования (3): если $w = w(x, y, t)$ — решение уравнения гидродинамического пограничного слоя (2), то функция

$$w_1 = w(x, y + \varphi(x, t), t) + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x, t)\, dx \qquad (12)$$

также является решением этого уравнения.

1°. Используя формулу (12), в частности, можно получить следующие точные решения уравнения (2) при $f \equiv 0$:

$$
\begin{aligned}
&w = \frac{6\nu x + C_1}{y + \varphi(x)} + \frac{C_2}{[y + \varphi(x)]^2} + C_3,\\
&w = \varphi(x)\exp(-C_1 y) + \nu C_1 x + C_2,\\
&w = C_1 \exp\bigl[-C_2 y - C_2\varphi(x)\bigr] + C_3 y + C_3\varphi(x) + \nu C_2 x + C_4,\\
&w = 6\nu C_1 x^{1/3}\,\mathrm{th}\,\xi + C_2, \quad \xi = C_1 \frac{y}{x^{2/3}} + \varphi(x),\\
&w = -6\nu C_1 x^{1/3}\,\mathrm{tg}\,\xi + C_2, \quad \xi = C_1 \frac{y}{x^{2/3}} + \varphi(x),
\end{aligned}
$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция; C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. Для построения второго, третьего и четвертого решений в качестве основы использованы более простые решения, указанные в [1, 2, 4, 6]. Для простоты здесь приведены решения стационарного уравнения, соответствующие случаю $\varphi(x,t) = \varphi(x)$ в (12).

2°. В качестве примера использования общей формулы (12) укажем точное решение нестационарного уравнения при $f \equiv 0$ (которое обобщает второе решение, приведенное выше):

$$
w(x,y,t) = \psi(x)\exp\bigl[-\lambda y + \lambda\varphi(x,t)\bigr] - \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx + \nu\lambda x,
$$

где $\varphi(x,t)$, $\psi(x)$ — произвольные функции, λ — произвольный параметр.

Отметим также невязкое решение уравнения (2) для любой функции $f(x,t)$:

$$
w(x,y,t) = ay^2 + \varphi(x,t)y + \frac{1}{4a}\varphi^2(x,t) + \frac{1}{2a}\int\Bigl[\frac{\partial\varphi}{\partial t} - f(x,t)\Bigr]dx.
$$

где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция, a — произвольная постоянная.

7. Точные решения уравнений пограничного слоя с неполным разделением переменных.

В этом разделе описаны новые точные решения уравнений двумерного нестационарного пограничного слоя с неполным (обобщенным) разделением переменных. Ряд точных решений уравнений теплопроводности и других нелинейных уравнений математической физики второго порядка с неполным разделением переменных приведен в [10–12].

1°. Точные решения уравнения (2) при $f(x,t) = f_1(t)x + f_2(t)$:

$$
w(x,y,t) = xF(y,t) + G(y,t), \tag{13}
$$

где функции $F = F(y,t)$ и $G = G(y,t)$ определяются из более простых уравнений с двумя переменными

$$
\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial y} + \Bigl(\frac{\partial F}{\partial y}\Bigr)^2 - F\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} + f_1(t), \tag{14}
$$

$$
\frac{\partial^2 G}{\partial t\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y} - F\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 G}{\partial y^3} + f_2(t). \tag{15}
$$

Если $F = F(y,t)$ — решение уравнения (14), то

$$
F_1 = F(y + \psi(t), t) + \psi'_t(t),
$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, также является решением этого уравнения.

Если известно частное решение уравнения (14), то соответствующее уравнение (15) заменой $U = \frac{\partial G}{\partial y}$ приводится к линейному уравнению второго порядка

$$
\frac{\partial U}{\partial t} - F\frac{\partial U}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial F}{\partial y}U + f_2(t). \tag{16}
$$

Точное решение уравнения (14):

$$
F(y,t) = a(t)y + b(t), \qquad \text{где} \qquad a'_t + a^2 = f_1(t), \tag{17}
$$

$b(t)$ — произвольная функция.

Подставив решение (17) в уравнение (16), имеем
$$\frac{\partial U}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\big[a(t)y+b(t)\big]\frac{\partial U}{\partial y}-a(t)U+f_2(t).$$
Преобразование [12]
$$U=\frac{1}{\Phi(t)}\Big[u(z,\tau)+\int f_2(t)\Phi(t)\,dt\Big],\quad \tau=\int\Phi^2(t)\,dt+C_1,\quad z=y\Phi(t)+\int b(t)\Phi(t)\,dt+C_2,$$
где $\Phi(t)=\exp\Big[\int a(t)\,dt\Big]$, приводит к классическому уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами:
$$\frac{\partial u}{\partial\tau}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$
Отметим два других простых точных решения уравнения (14) при $f_1(t)=0$:
$$F(y,t)=6\nu[y+\psi(t)]^{-1}+\psi'_t(t),$$
$$F(y,t)=C\exp\big[-\lambda y+\lambda\psi(t)\big]-\psi'_t(t)+\nu\lambda,$$
где $\psi(t)$ — произвольная функция; C, λ — произвольные постоянные.

2°. Точное решение уравнения (2) при $f(x,t)=f(t)$:
$$w(x,y,t)=\int u(z,t)\,dz+\varphi(t)y+\psi(t)x,\qquad z=kx+\lambda y,\tag{18}$$
где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции; k, λ — произвольные параметры; функция $u(z,t)$ описывается линейным параболическим уравнением второго порядка:
$$\frac{\partial u}{\partial t}+\big[k\varphi(t)-\lambda\psi(t)\big]\frac{\partial u}{\partial z}=\nu\lambda^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{\lambda}\varphi'_t(t)+\frac{1}{\lambda}f(t).$$
Преобразование
$$u=U(\xi,t)-\frac{1}{\lambda}\varphi(t)+\frac{1}{\lambda}\int f(t)\,dt,\quad \xi=z-\int\big[k\varphi(t)-\lambda\psi(t)\big]\,dt$$
приводит его обычному уравнению теплопроводности
$$\frac{\partial U}{\partial t}=\nu\lambda^2\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}.$$
3°. Точное решение уравнения (2) при $f(x,t)=0$:
$$w(x,y,t)=A(t)\exp(kx-\lambda y)+B(t)\exp(\beta kx-\beta\lambda y)+\psi'_t(t)x+ay,\tag{19}$$
$$A(t)=C_1\exp\big[(\nu\lambda^2-ak)t-\lambda\psi(t)\big],$$
$$B(t)=C_2\exp\big[(\nu\beta^2\lambda^2-ak\beta)t-\beta\lambda\psi(t)\big],$$
где $\psi(t)$ — произвольная функция; C_1, C_2, a, k, β, λ — произвольные параметры.

Замечание 4. Решения (13), (18), (19) можно обобщить с помощью формулы (12).

4°. Точное решение уравнения (2) при $f(x,t)=0$:
$$w(x,y,t)=\big[C_1e^{k_1(x-at)}+C_2e^{k_2(x-at)}\big]E(x,t)e^{-\lambda y}+\frac{\partial}{\partial t}\int\varphi(x,t)\,dx+ay,\tag{20}$$
$$E(x,t)=\exp\big[\nu\lambda^2t-\lambda\varphi(x,t)\big],$$
где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция; C_1, C_2, a, k_1, k_2, λ — произвольные параметры.

5°. Точное решение уравнения (2) при $f(x,t)=g(x)e^{\beta t}$:
$$w(x,y,t)=\varphi(x,t)e^{\lambda y}+\psi(x,t)e^{-\lambda y}+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial t}\int\ln|\varphi(x,t)|\,dx-\nu\lambda x,$$
$$\psi(x,t)=-\frac{e^{\beta t}}{2\lambda^2\varphi(x,t)}\int g(x)\,dx,\qquad \lambda=\pm\sqrt{\frac{\beta}{2\nu}},$$
где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция двух аргументов.

6°. Точное решение уравнения (2) при $f(x,t)=ae^{\beta x-\gamma t}$:
$$w(x,y,t)=\varphi(x,t)e^{\lambda y}-\frac{a}{2\beta\lambda^2\varphi(x,t)}e^{\beta x-\lambda y-\gamma t}+$$
$$+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial t}\int\ln|\varphi(x,t)|\,dx-\nu\lambda x+\frac{2\nu\lambda^2+\gamma}{\beta}\Big(y+\frac{1}{\lambda}\ln|\varphi(x,t)|\Big),$$
где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция двух аргументов, λ — произвольная постоянная.

8. Построение приближенных решений задач пограничного слоя

Преобразование (7) может использоваться для приближенного решения задач об обтекании гладких слабо деформированных поверхностей (мало отличающихся от плоскости). Будем рассматривать стационарные задачи. Считаем, что обтекаемая поверхность задается уравнением

$$z = \psi(x, y).$$

Пусть решение более простой задачи при $\psi \equiv 0$ получено и имеет вид

$$u_k^\circ = u_k^\circ(x, y, z); \qquad k = 1,\ 2,\ 3.$$

Тогда приближенное решение задачи для $\psi \not\equiv 0$ можно построить по формулам

$$\begin{aligned} &u_1 = u_1^\circ(x, y, z - \psi(x, y)), \quad u_2 = u_2^\circ(x, y, z - \psi(x, y)),\\ &u_3 = u_3^\circ(x, y, z - \psi(x, y)) + u_1^\circ(x, y, z - \psi(x, y))\,\frac{\partial \psi}{\partial x} + u_2^\circ(x, y, z - \psi(x, y))\,\frac{\partial \psi}{\partial y}, \end{aligned} \tag{20}$$

которые получены из (7) при $\varphi = -\psi$. Так как выполняются равенства $u_k^\circ\big|_{z=0} = 0$, то приближенное решение (20) удовлетворяет условиям прилипания на обтекаемой поверхности: $u_k\big|_{z=\psi(x,y)} = 0$. Функции u_k и u_k° имеют одинаковую асимптотику при $z \to \infty$ (т. е. приближенное решение сращивается с невязким решением в ядре потока). Если функция ψ и ее частные производные ψ_x и ψ_y равны нулю при $x = 0$ и $y = 0$, то приближенное решение u_k будет удовлетворять таким же граничным условиям при $x = 0$ и $y = 0$, что и решение u_k°.

Поскольку функции u_k точно удовлетворяют граничным условиям при $z = \psi(x, y)$, следует ожидать, что они лучше описывают течение вблизи обтекаемой поверхности, чем u_k° (т. к. функции u_k° не удовлетворяют условиям прилипания на поверхности), и будут приводить к более точным значениям при расчетах коэффициента сопротивления трения.

Решение (20) удобно выбирать в качестве первого приближения при использовании итерационных методов решения задач пограничного слоя [9]. Решение (20) можно применять для тестирования конечно-разностных и других численных методов решения задач пограничного слоя при обтекании деформированных поверхностей [важно, что решение (20) является точным решением уравнений (4)–(6) для любой функции $\varphi = \varphi(x, y)$].

Замечание 5. Хотя решение (20) и является точным решением уравнений (4)–(6), однако сами эти уравнения в случае деформированной поверхности будут уже не точными, а приближенными.

Пример. Решение задачи Блазиуса о двумерном обтекании плоской пластинки описывается формулами [1, 2]:

$$u_1^\circ = U_\infty \Phi'_\eta(\eta), \quad u_3^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}}\,\bigl[\eta \Phi'_\eta(\eta) - \Phi(\eta)\bigr], \quad \eta = z\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}, \tag{21}$$

где x и z — продольная и поперечная координаты, u_1° и u_3° — продольная и поперечная компоненты скорости жидкости, U_∞ — скорость жидкости вдали от пластинки, а функция $\Phi = \Phi(\eta)$ определяется путем решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\Phi'''_{\eta\eta\eta} + \tfrac{1}{2}\Phi\Phi''_{\eta\eta} = 0; \qquad \Phi = \Phi'_\eta = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0; \qquad \Phi \to 1 \quad \text{при} \quad \eta \to \infty.$$

Приближенное решение задачи о двумерном обтекании слабо деформированной пластинки с поверхностью $z = \psi(x)$ строим по формулам (20) и (21) при $u_2 = u_2^\circ = 0$. В результате получим

$$\begin{aligned} &u_1 = U_\infty \Phi'_\zeta(\zeta), \quad \zeta = \bigl[z - \psi(x)\bigr]\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}},\\ &u_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}}\,\bigl[\zeta \Phi'_\zeta(\zeta) - \Phi(\zeta)\bigr] + U_\infty \Phi'_\zeta(\zeta)\psi'_x(x), \end{aligned}$$

где функция $\Phi = \Phi(\zeta)$ берется из решения задачи Блазиуса.

Замечание 6. Описанный метод может использоваться также для приближенного решения задач нестационарного пограничного слоя об обтекании гладких слабо деформированных поверхностей с начальными условиями: $u_1^\circ|_{t=0} = u_2^\circ|_{t=0} = 0$, $u_3^\circ|_{t=0} = \omega(x, y)$ (и прежними геометрическими условиями на функцию φ).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 00-02-18033 и № 00-03-32055).

Список литературы

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 848 с.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
3. Верещагина Л. И. Групповое расслоение уравнений пространственного нестационарного пограничного слоя. // Вест. Лен. унив., 1973, т. 13, вып. 3, с. 82–86.
4. Павловский Ю. Н. Исследование некоторых инвариантных решений уравнений пограничного слоя. // Журн. выч. матем. и мат. физики, 1961, т. 1, N 2, с. 280–294.
5. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
6. CRC Handbook of Lie Group to Differential Equations, Vol. 2 / Ed. by Ibragimov N. H. Boca Raton, CRC Press, 1995. 546 p.
7. Шульман З. П., Берковский Б. М. Пограничный слой неньютоновских жидкостей. Минск: Наука и техника, 1966. 240 с.
8. Кутепов А. М., Полянин А. Д., Запрянов З. Д., Вязьмин А. В., Казенин Д. А. Химическая гидродинамика. М.: Квантум, 1996. 336 с.
9. Шевелев Ю. Д. Трехмерные задачи теории ламинарного пограничного слоя. М.: Наука, 1977. 224 с.
10. Галактионов В. А., Посашков С. А. О новых точных решениях параболических уравнений с квадратичными нелинейностями.// Журн. выч. матем. и мат. физики, 1989, т. 29, N 4, с. 497–506.
11. Полянин А. Д., Журов А. И., Вязьмин А. В. О точных решениях нелинейных уравнений тепло- и массопереноса.// Теор. основы химич. технол., 2000, т. 34, N 5, с. 451–464.
12. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения. М.: Международная программа образования, 1996. 496 с.