А. Д. Полянин, Доклады РАН, 2005, т. 400, № 5

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ДИФФУЗИИ РЕАГИРУЮЩИХ СРЕД И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ БИОЛОГИИ

© 2004 **А. Д. Полянин**

Описаны новые классы точных решений нелинейных систем уравнений теории тепломассопереноса реагирующих сред и математической биологии. Рассматриваются системы общего вида, когда скорости химической реакции зависят от двух или трех произвольных функций. Получены точные решения с обобщенным и функциональным разделением переменных, периодические решения и др. Ряд решений содержит функциональный произвол (они выражаются через решения линейного уравнения теплопроводности и решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений). Исследуются некоторые нелинейные системы произвольного порядка с несколькими пространственными переменными.

Введение. Точные решения нелинейных уравнений математической физики играют важную роль для формирования правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Точные решения нелинейных уравнений наглядно демонстрируют и позволяют разобраться в механизме таких сложных нелинейных эффектов, как пространственная локализация процессов переноса, множественность или отсутствие стационарных состояний при определенных условиях, существование режимов с обострением и др. Даже те частные точные решения дифференциальных уравнений, которые не имеют ясного физического смысла, могут быть использованы в качестве тестовых задач для оценки точности различных численных, асимптотических и приближенных аналитических методов.

Важно отметить, что многие уравнения прикладной и теоретической физики, химии и биологии содержат эмпирические параметры или эмпирические функции. Точные решения позволяют планировать эксперимент для определения этих параметров или функций путем искусственного создания подходящих начальных и граничных условий.

Под точными решениями нелинейных систем уравнений математической физики будем понимать решения, которые описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений и линейными уравнениями с частными производными.

Будем рассматривать нелинейные системы уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u,w), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = b\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + G(u,w). \tag{1}$$

Подобные уравнения и системы уравнений широко используются в теории массотеплопереноса реагирующих сред [1], в теории химических реакторов [2], в теории горения [3], в математической биологии и биофизике [4, 5].

Точные решения одного уравнения (1) для различных кинетических функций при $F = F(u)$ рассматривались, например, в работах [6–11]. В [12–14] дана групповая классификация нелинейных систем вида (1) и их пространственных аналогов, в [15] приведены некоторые инвариантные и неинвариантные точные решения.

Ниже дан краткий перечень новых нелинейных систем уравнений вида (1), содержащих три или две произвольные функции, которые допускают точные решения с обобщенным и функциональным разделением переменных. Рассмотрены также более общие системы произвольного порядка с несколькими пространственными переменными.

Далее $f(\ldots)$, $g(\ldots)$, $h(\ldots)$ — произвольные функции соответствующего аргумента.

Система 1. Система содержит три произвольные функции, зависящие от линейной комбинации искомых величин:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + uf(bu-cw) + g(bu-cw),\\ \frac{\partial w}{\partial t} &= a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + wf(bu-cw) + h(bu-cw).\end{aligned} \tag{2}$$

Частному случаю $f(z) = 0$, $g(z) = z$, $h(z) = -z$ соответствует обратимая химическая реакция первого порядка [1]. При $f(z) = z + k$, $g(z) = h(z) = 0$ данная система является специальным случаем системы Вольерры — Лотки, которая описывает конкурентную борьбу двух биологических видов, питающихся одной и той же пищей [5, стр. 35, 57].

1°. Решение:

$$u = \varphi(t) + c\exp\Bigl[\int f(b\varphi - c\psi)\,dt\Bigr]\theta(x,t),$$
$$w = \psi(t) + b\exp\Bigl[\int f(b\varphi - c\psi)\,dt\Bigr]\theta(x,t),$$

где $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t = \varphi f(b\varphi - c\psi) + g(b\varphi - c\psi),$$
$$\psi'_t = \psi f(b\varphi - c\psi) + h(b\varphi - c\psi),$$

а функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = a\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}. \tag{3}$$

2°. Система (2) допускает факторизацию. Умножим первое уравнение (2) на b, а второе — на $-c$ и сложим. В результате приходим к уравнению

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = a\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \zeta f(\zeta) + bg(\zeta) - ch(\zeta), \qquad \zeta = bu - cw, \tag{4}$$

которое будем рассматривать вместе с первым уравнением исходной системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + uf(\zeta) + g(\zeta). \tag{5}$$

Обширный перечень точных решений уравнений вида (4) для различных кинетических функций $F(\zeta) = \zeta f(\zeta) + bg(\zeta) - ch(\zeta)$ можно найти в книгах [10, 11] (для данной F две функции из трех f, g, h можно задавать произвольно).

Если известно некоторое решение $\zeta = \zeta(x,t)$ уравнения (4), то функцию $u = u(x,t)$ можно найти путем решения линейного уравнения (5), а затем определить функцию $w = w(x,t)$ по формуле $w = (bu - \zeta)/c$.

Отметим, что в общем случае уравнение (4) допускает точное решение типа бегущей волны $\zeta = \zeta(z)$, где $z = kx - \lambda t$; при этом соответствующие точные решения уравнения (5) имеют вид $u = u_0(z) + \sum e^{\beta_n t}u_n(z)$.

Система 2. Система содержит две произвольные функции, зависящие от отношения искомых величин:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + uf\Bigl(\frac{u}{w}\Bigr), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = b\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + wg\Bigl(\frac{u}{w}\Bigr). \tag{6}$$

Частному случаю $f(z) = k_1 - k_2 z^{-1}$, $g(z) = k_2 - k_1 z$ соответствует обратимая химическая реакция первого порядка [1]. Модель Эйгена — Шустера [5, стр. 31, 32], описывающая конкурентную борьбу популяций за питательный субстракт при постоянных коэффициентах размножения, приводит к системе (6) при $f(z) = \dfrac{k}{z+1}$, $g(z) = -\dfrac{kz}{z+1}$, где k — разность коэффициентов размножения.

1°. Решение в виде произведения функций разных аргументов, периодическое по пространственной переменной:

$$u = [C_1\sin(kx) + C_2\cos(kx)]\varphi(t), \quad w = [C_1\sin(kx) + C_2\cos(kx)]\psi(t),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, а функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t = -ak^2\varphi + \varphi f(\varphi/\psi), \quad \psi'_t = -bk^2\psi + \psi g(\varphi/\psi).$$

2°. Решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$u = [C_1\exp(kx) + C_2\exp(-kx)]U(t), \quad w = [C_1\exp(kx) + C_2\exp(-kx)]W(t),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, а функции $U = U(t)$, $W = W(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$U'_t = ak^2U + Uf(U/W), \quad W'_t = bk^2W + Wg(U/W).$$

3°. Вырожденное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$u = (C_1x + C_2)U(t), \quad w = (C_1x + C_2)W(t),$$

где функции $U = U(t)$, $W = W(t)$ описываются системой уравнений

$$U'_t = Uf(U/W), \quad W'_t = Wg(U/W).$$

4°. Решение в виде произведения двух бегущих волн с разными скоростями:

$$u = e^{kx-\lambda t}y(\xi), \quad w = e^{kx-\lambda t}z(\xi), \quad \xi = \beta x - \gamma t,$$

где k, λ, β, γ — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$, $z = z(\xi)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$a\beta^2 y''_{\xi\xi} + (2ak\beta + \gamma)y'_\xi + (ak^2 + \lambda)y + yf(y/z) = 0,$$
$$b\beta^2 z''_{\xi\xi} + (2bk\beta + \gamma)z'_\xi + (bk^2 + \lambda)z + zg(y/z) = 0.$$

Частному случаю $k = \lambda = 0$ соответствует решение типа бегущей волны.

Система 2a. Частный случай системы 2 при $b = a$, имеются дополнительные решения.

5°. Решение типа точечного источника:

$$u = \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right)\varphi(t), \quad w = \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t = -\frac{1}{2t}\varphi + \varphi f\left(\frac{\varphi}{\psi}\right), \quad \psi'_t = -\frac{1}{2t}\psi + \psi g\left(\frac{\varphi}{\psi}\right).$$

6°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$u = \exp\bigl(kxt + \tfrac{2}{3}ak^2t^3 - \lambda t\bigr)y(\xi), \quad \xi = x + akt^2,$$
$$w = \exp\bigl(kxt + \tfrac{2}{3}ak^2t^3 - \lambda t\bigr)z(\xi),$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$, $z = z(\xi)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$ay''_{\xi\xi} + (\lambda - k\xi)y + yf(y/z) = 0, \quad az''_{\xi\xi} + (\lambda - k\xi)z + zg(y/z) = 0.$$

7°. Решение:

$$u = \varphi(t)\exp\left[\int g(\varphi(t))\,dt\right]\theta(x,t), \quad w = \exp\left[\int g(\varphi(t))\,dt\right]\theta(x,t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t = [f(\varphi) - g(\varphi)]\varphi, \tag{7}$$

а функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности (3).

Система 3. Система содержит три произвольные функции, зависящие от отношения искомых величин:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + uf\left(\frac{u}{w}\right) + \frac{u}{w}h\left(\frac{u}{w}\right),$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + wg\left(\frac{u}{w}\right) + h\left(\frac{u}{w}\right).$$

Решение:

$$u = \varphi(t)G(t)\left[\theta(x,t) + \int \frac{h(\varphi)}{G(t)}\,dt\right], \quad G(t) = \exp\left[\int g(\varphi)\,dt\right],$$
$$w = G(t)\left[\theta(x,t) + \int \frac{h(\varphi)}{G(t)}\,dt\right],$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (7), а функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности (3).

Система 4. Система содержит три произвольные функции, зависящие от отношения искомых величин, и логарифмические функции:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + uf\Big(\frac{u}{w}\Big)\ln u + ug\Big(\frac{u}{w}\Big),$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + wf\Big(\frac{u}{w}\Big)\ln w + wh\Big(\frac{u}{w}\Big).$$

Решение:

$$u(x,t) = \varphi(t)\psi(t)\theta(x,t), \quad w(x,t) = \psi(t)\theta(x,t),$$

где $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ определяются путем решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_t = \varphi[g(\varphi) - h(\varphi) + f(\varphi)\ln\varphi], \tag{8}$$
$$\psi'_t = \psi[h(\varphi) + f(\varphi)\ln\psi], \tag{9}$$

а функция $\theta = \theta(x,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + f(\varphi)\theta\ln\theta. \tag{10}$$

Решение уравнения с разделяющимися переменными (8) можно представить в неявном виде. Уравнение (9) легко интегрируется, поскольку заменой $\psi = e^\zeta$ сводится к линейному уравнению. Уравнение (10) допускает точные решения вида

$$\theta = \exp\big[\sigma_2(t)x^2 + \sigma_1(t)x + \sigma_0(t)\big],$$

где функции $\sigma_n(t)$ описываются уравнениями

$$\sigma'_2 = f(\varphi)\sigma_2 + 4a\sigma_2^2,$$
$$\sigma'_1 = f(\varphi)\sigma_1 + 4a\sigma_1\sigma_2,$$
$$\sigma'_0 = f(\varphi)\sigma_0 + a\sigma_1^2 + 2a\sigma_2.$$

Эта система может быть последовательно проинтегрирована, поскольку первое уравнение является уравнением Бернулли, а второе и третье уравнение – линейны относительно искомой функции. Отметим, что первое уравнение имеет частное решение $\sigma_2 = 0$.

Система 5. Система содержит три произвольные функции, зависящие от суммы квадратов искомых величин, и обратные тригонометрические функции:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + uf(u^2+w^2) - wg(u^2+w^2) - w\,\mathrm{arctg}\Big(\frac{w}{u}\Big)h(u^2+w^2),$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + wf(u^2+w^2) + ug(u^2+w^2) + u\,\mathrm{arctg}\Big(\frac{w}{u}\Big)h(u^2+w^2).$$

При $f(z) = k - z$, $g(z) = -2$, $h(z) = 0$ рассматриваемая система без диффузии $a = 0$ использовалась для моделирования кинематических волн в реакциях типа Белоусова — Жаботинского [8, стр. 211].

Решение с функциональным разделением переменных (при фиксированном t определяет периодическую по x структуру со сдвигом фаз у компонент):

$$u = r(t)\cos\big[\varphi(t)x + \psi(t)\big], \quad w = r(t)\sin\big[\varphi(t)x + \psi(t)\big],$$

где функции $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} r'_t &= -ar\varphi^2 + rf(r^2),\\ \varphi'_t &= h(r^2)\varphi,\\ \psi'_t &= h(r^2)\psi + g(r^2). \end{aligned} \tag{11}$$

Система 6. Система содержит три произвольные функции, зависящие от разности квадратов искомых величин, и обратные гиперболические функции:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + uf(u^2-w^2) + wg(u^2-w^2) + w\,\mathrm{arth}\Big(\frac{w}{u}\Big)h(u^2-w^2),$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + wf(u^2-w^2) + ug(u^2-w^2) + u\,\mathrm{arth}\Big(\frac{w}{u}\Big)h(u^2-w^2).$$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$u = r(t)\,\mathrm{ch}\big[\varphi(t)x + \psi(t)\big], \quad w = r(t)\,\mathrm{sh}\big[\varphi(t)x + \psi(t)\big],$$

где функции $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (11), в которой a надо заменить на $-a$.

Система 7. Система содержит две произвольные функции, зависящие от разных аргументов:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + uf(u^2 + w^2) - wg\Big(\frac{w}{u}\Big),$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + wf(u^2 + w^2) + ug\Big(\frac{w}{u}\Big).$$

Решение:

$$u = r(x,t)\cos\varphi(t), \quad w = r(x,t)\sin\varphi(t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t = g(\mathrm{tg}\,\varphi),$$

а функция $r = r(x,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial r}{\partial t} = a\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + rf(r^2). \tag{12}$$

В общем случае уравнение (12) допускает точное решение типа бегущей волны $r = r(z)$, где $z = kx - \lambda t$. О других точных решениях уравнения (12) при различных функциях f см. [10, 11].

Система 8. Система содержит две произвольные функции, зависящие от разных аргументов:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + uf(u^2 - w^2) + wg\Big(\frac{w}{u}\Big),$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + wf(u^2 - w^2) + ug\Big(\frac{w}{u}\Big).$$

Решение:

$$u = r(x,t)\,\mathrm{ch}\,\varphi(t), \quad w = r(x,t)\,\mathrm{sh}\,\varphi(t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t = g(\mathrm{th}\,\varphi),$$

а функция $r = r(x,t)$ описывается уравнением (12).

Ряд приведенных выше результатов допускает существенные обобщения.

Система 9. Система содержит произвольный оператор и три произвольные функции двух аргументов, зависящие от линейной комбинации искомых величин и времени (обобщает систему 1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L[u] + uf(t, bu - cw) + g(t, bu - cw),$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = L[w] + wf(t, bu - cw) + h(t, bu - cw).$$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор по пространственным переменным $x_1, \dots, x_n$ (любого порядка по производным), коэффициенты которого могут зависеть от $x_1, \dots, x_n, t$. Считается, что $L[\mathrm{const}] = 0$.

Примеры часто используемых операторов в теории тепло- и массопереноса:

$$L[u] = \frac{\partial}{\partial x}\Big[a(x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big] + \beta(x)\frac{\partial u}{\partial x},$$
$$L[u] = a\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\Big).$$

Первый оператор встречается в одномерных задачах конвективного массопереноса при переменном коэффициенте диффузии, второй — в различных трехмерных задачах.

Решение:

$$u = \varphi(t) + c\exp\Big[\int f(t, b\varphi - c\psi)\,dt\Big]\theta(x,t),$$
$$w = \psi(t) + b\exp\Big[\int f(t, b\varphi - c\psi)\,dt\Big]\theta(x,t),$$

где $\varphi=\varphi(t)$, $\psi=\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\varphi_t'&=\varphi f(t,b\varphi-c\psi)+g(t,b\varphi-c\psi),\\ \psi_t'&=\psi f(t,b\varphi-c\psi)+h(t,b\varphi-c\psi),\end{aligned}$$

а функция $\theta=\theta(x_1,\dots,x_n,t)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=L[\theta]. \tag{13}$$

Система 10. Система содержит произвольный оператор и три произвольные функции, зависящие от отношения искомых величин и времени (обобщает систему 3):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=L[u]+uf\Bigl(t,\frac{u}{w}\Bigr)+\frac{u}{w}h\Bigl(t,\frac{u}{w}\Bigr),\\ \frac{\partial w}{\partial t}&=L[w]+wg\Bigl(t,\frac{u}{w}\Bigr)+h\Bigl(t,\frac{u}{w}\Bigr).\end{aligned}$$

Здесь L — произвольный линейный оператор, описанный в системе 11.

Решение:

$$\begin{aligned}u&=\varphi(t)G(t)\Bigl[\theta(x_1,\dots,x_n,t)+\int\frac{h(t,\varphi)}{G(t)}\,dt\Bigr],\quad G(t)=\exp\Bigl[\int g(t,\varphi)\,dt\Bigr],\\ w&=G(t)\Bigl[\theta(x_1,\dots,x_n,t)+\int\frac{h(t,\varphi)}{G(t)}\,dt\Bigr],\end{aligned}$$

где функция $\varphi=\varphi(t)$ описывается нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$\varphi_t'=[f(t,\varphi)-g(t,\varphi)]\varphi,$$

а функция $\theta=\theta(x_1,\dots,x_n,t)$ удовлетворяет линейному уравнению (13).

Система 11. Система содержит произвольный оператор и три произвольные функции, зависящие от отношения искомых величин и времени (обобщает систему 4):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=L[u]+uf\Bigl(t,\frac{u}{w}\Bigr)\ln u+ug\Bigl(t,\frac{u}{w}\Bigr),\\ \frac{\partial w}{\partial t}&=L[w]+wf\Bigl(t,\frac{u}{w}\Bigr)\ln w+wh\Bigl(t,\frac{u}{w}\Bigr).\end{aligned}$$

Здесь L — произвольный линейный оператор, описанный в системе 11.

Решение:

$$u=\varphi(t)\psi(t)\theta(x_1,\dots,x_n,t),\quad w=\psi(t)\theta(x_1,\dots,x_n,t),$$

где функции $\varphi=\varphi(t)$ и $\psi=\psi(t)$ определяются путем решения обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\varphi_t'&=\varphi[g(t,\varphi)-h(t,\varphi)+f(t,\varphi)\ln\varphi],\\ \psi_t'&=\psi[h(t,\varphi)+f(t,\varphi)\ln\psi],\end{aligned} \tag{14}$$

а функция $\theta=\theta(x_1,\dots,x_n,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=L[\theta]+f(t,\varphi)\theta\ln\theta. \tag{15}$$

Если известно решение первого уравнения (14), то решение второго уравнения можно найти путем замены $\psi=e^{\zeta}$ (оно сводится к линейному уравнению для ζ). Если L — одномерный оператор ($n=1$) с постоянными коэффициентами и $f=\mathrm{const}$, то уравнение (15) имеет решение типа бегущей волны $\theta=\theta(kx-\lambda t)$.

Система 12. Система содержит содержит два произвольных оператора и две произвольные функции, зависящие от отношения искомых величин и времени (обобщает систему 2):

$$\frac{\partial u}{\partial t}=L_1[u]+uf\Bigl(\frac{u}{w}\Bigr),\quad \frac{\partial w}{\partial t}=L_2[w]+wg\Bigl(\frac{u}{w}\Bigr).$$

Здесь L_1, L_2 — произвольные линейные дифференциальные операторы (любого порядка) по переменной x с постоянными коэффициентами.

1°. Решение в виде произведения двух бегущих волн с разными скоростями:

$$u = e^{kx-\lambda t} y(\xi), \quad w = e^{kx-\lambda t} z(\xi), \quad \xi = \beta x - \gamma t,$$

где $k, \lambda, \beta, \gamma$ — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$M_1[y] + \lambda y + y f(y/z) = 0, \quad M_2[z] + \lambda z + z g(y/z) = 0,$$
$$M_1[y] = e^{-kx} L_1[e^{kx} y(\xi)], \quad M_2[z] = e^{-kx} L_2[e^{kx} z(\xi)].$$

Частному случаю $k = \lambda = 0$ соответствует решение типа бегущей волны.

2°. Если L_1, L_2 содержат только четные производные, то существуют решения вида:

$$u = [C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)]\varphi(t), \qquad w = [C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)]\psi(t);$$
$$u = [C_1 \exp(kx) + C_2 \exp(-kx)]\varphi(t), \quad w = [C_1 \exp(kx) + C_2 \exp(-kx)]\psi(t);$$
$$u = (C_1 x + C_2)\varphi(t), \qquad w = (C_1 x + C_2)\psi(t),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные (первое решение является периодическим по пространственной координате, а третье решение является вырожденным). Отметим, что коэффициенты операторов L_1, L_2 и функции f, g могут зависеть также от времени t.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 04-02-17281).

Список литературы

1. Данквертс П. В. Газо-жидкостные реакции. — М.: Химия, 1973.
2. Перлмуттер Д. Устойчивость химических реакторов. — Л.: Химия, 1976.
3. Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М. Математическая теория горения и взрыва. — М.: Наука, 1980.
4. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. — М.: Мир, 1983.
5. Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математическая биофизика. — М.: Наука, 1984.
6. Дородницын В. А. Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником, Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1982, Vol. 22, No. 6, pp. 1393–1400.
7. Маслов В. П., Данилов В. Г., Волосов К. А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. М.: Наука, 1987.
8. Galaktionov V. A. Quasilinear heat equations with first-order sign-invariants and new explicit solutions. Nonlinear Analys., Theory, Meth. and Applications, Vol. 23, pp. 1595–1621, 1994.
9. Kaptsov O. V., Verevkin I. V. Differential constraints and exact solutions of nonlinear diffusion equations. J. Phys. A: Math. Gen., Vol. 36, pp. 1401–1414, 2003.
10. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. — М.: Физматлит, 2002.
11. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. — Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2004.
12. Nikitin A. G., Wiltshire R. J. Systems of reaction-diffusion equations and their symmetry properties. J. Math. Phys., Vol. 42, No. 4, pp. 1667–1688, 2001.
13. Cherniha R., King J. R. Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems: I. J. Phys. A: Math. Gen., Vol. 33, pp. 267–282, 7839–7841, 2000.
14. Cherniha R., King J. R. Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems: II. J. Phys. A: Math. Gen., Vol. 36, pp. 405–425, 2003.
15. Barannyk T. A. Symmetry and exact solutions for systems of nonlinear reaction-diffusion equations. Proc. of Inst. of Mathematics of NAS of Ukraine, Vol. 43, Part 1, pp. 80–85, 2002.