ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2009, том 428, № 2, с. 180–185

МЕХАНИКА

УДК 533+532+517.9

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА: ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ, ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, НЕЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

© 2009 г. А. Д. Полянин, С. Н. Аристов

Представлено академиком Ф.Л. Черноусько 13.05.2009 г.
Поступило 19.05.2009 г.

Рассматриваются системы гидродинамического типа, которые выводятся из уравнений Навье–Стокса и уравнений пограничного слоя. Описаны новые классы точных решений. Приведено преобразование типа Крокко, понижающее порядок уравнения для продольной компоненты скорости. Исследованы вопросы о нелинейной устойчивости полученных решений. Обнаружено, что характерной чертой многих решений уравнений Навье–Стокса является неустойчивость. Для доказательства нелинейной неустойчивости решений в сообщении применен новый точный метод, который может быть полезен для анализа других нелинейных физических моделей и явлений.

Автомодельные, инвариантные, частично инвариантные, с обобщенным разделением переменных и некоторые другие точные решения уравнений Навье–Стокса рассматривались, например, в [1–11].

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Рассматриваемые системы уравнений. Будем исследовать системы уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial z}+F\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}-m\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = \nu\frac{\partial^3 F}{\partial z^3}+q(t)\frac{\partial F}{\partial z}+p(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t}+F\frac{\partial G}{\partial z}-kG\frac{\partial F}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}+s(t). \quad (2)$$

При $m=\frac{1}{2}$ и $m=1$ одно уравнение (1) и система уравнений (1), (2) при $k=1$ встречались в работах [5, 8, 10, 11], где рассматривались точные решения уравнений Навье–Стокса и уравнений пограничного слоя (F – одна из компонент скорости жидкости, G – вспомогательная функция, ν – кинематическая вязкость жидкости). Отметим, что при $m=1$ функции $p(t)$ и $q(t)$ в (1) могут выбираться произвольно [11]. Далее будет описан новый класс точных решений уравнений Навье–Стокса, который описывается системой (1), (2) при $m=k=\frac{1}{2}$, $q(t)=0$.

Нелинейное уравнение (1) может рассматриваться независимо, а уравнение (2) линейно относительно искомой функции G.

Общее свойство уравнения (1) [8, 11]: если $\tilde F(z,t)$ – некоторое его решение, то функция

$$F = \tilde F(z+\psi(t),t)-\psi'_t(t), \quad (3)$$

где $\psi(t)$ – произвольная функция, также будет решением уравнения (1). Кроме того, решением будет и функция $F=-\tilde F(-z,t)$.

Один класс точных решений уравнений Навье–Стокса. Трехмерные нестационарные движения вязкой несжимаемой жидкости описываются уравнениями Навье–Стокса и неразрывности:

$$\frac{\partial V_n}{\partial t}+V_1\frac{\partial V_n}{\partial x}+V_2\frac{\partial V_n}{\partial y}+V_3\frac{\partial V_n}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\nabla_n P+\nu\left(\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2}\right), \quad n = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}+\frac{\partial V_2}{\partial y}+\frac{\partial V_3}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Здесь x, y, z – декартовы координаты, t – время, V_1, V_2, V_3 – компоненты скорости жидкости, P – давление, ρ – плотность жидкости; $\nabla_1 P=\frac{\partial P}{\partial x}$, $\nabla_2 P=\frac{\partial P}{\partial y}$, $\nabla_3 P=\frac{\partial P}{\partial z}$. При записи уравнений (4) считалось, что массовые силы потенциальны и включены в давление.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской Академии наук, Москва
Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской Академии наук, Пермь

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости (1) допускают точные решения вида

$$V_1 = G - \frac{1}{2}x\frac{\partial F}{\partial z}, \quad V_2 = -\frac{1}{2}y\frac{\partial F}{\partial z}, \quad V_3 = F,$$

$$\frac{P}{\rho} = p_0(t) + \frac{1}{4}\alpha(t)(x^2+y^2) - s(t)x - \frac{1}{2}F^2 +$$

$$+\nu\frac{\partial F}{\partial z} - \int\frac{\partial F}{\partial t}dz,$$

где $p_0(t)$, $\alpha(t)$, $s(t)$ – произвольные функции времени t, а функции F, G зависят от z и t и удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial z} + F\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = \nu\frac{\partial^3 F}{\partial z^3} + \alpha(t), \tag{5}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} + F\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{1}{2}G\frac{\partial F}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + s(t). \tag{6}$$

Система (5), (6) является частным случаем системы (1), (2) при $m = k = \frac{1}{2}$, $q(t) = 0$.

ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА УРАВНЕНИЯ (1) И ЕГО ОБОБЩЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТИПА КРОККО

П о н и ж е н и е п о р я д к а у р а в н е н и я (1). Обозначим

$$\eta = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \Phi = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}. \tag{7}$$

Перенесем член mF_z^2 (здесь и далее используется также сокращенная запись производных) в правую часть уравнения (1), затем поделим обе части полученного выражения на $F_{zz} = \Phi$ и продифференцируем по z. Учитывая (7), имеем

$$\frac{\Phi_t}{\Phi} - \frac{F_{zt}\Phi_z}{\Phi^2} + \eta = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\nu\Phi_z + m\eta^2 + q(t)\eta + p(t)}{\Phi}. \tag{8}$$

Перейдем в (8) от старых переменных t, x, $F = F(x, t)$ к новым переменным t, η, $\Phi = \Phi(t, \eta)$, где η и Φ определяются по формулам (7). Производные при переходе от старых к новым переменным преобразуются так:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\eta} = F_{zz}\frac{\partial}{\partial\eta} = \Phi\frac{\partial}{\partial\eta},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{\partial}{\partial t} + F_{zt}\frac{\partial}{\partial\eta}.$$

В результате (8) сводится к уравнению второго порядка

$$\frac{\eta}{\Phi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\Phi} = \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{m\eta^2 + q\eta + p}{\Phi}\right) + \nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}$$

или

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + (m\eta^2 + q\eta + p)\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} =$$

$$= [(2m-1)\eta + q]\Phi + \nu\Phi^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}. \tag{9}$$

Здесь и далее для краткости аргументы функций $p(t)$, $q(t)$, $s(t)$ часто будем опускать.

Отметим, что в вырожденном случае (невязкая жидкость, $\nu = 0$) исходное нелинейное уравнение второго порядка (1) сводится к линейному уравнению первого порядка (9), которое можно полностью проинтегрировать методом характеристик.

Если известно решение исходного уравнения (1), то формулы (7) дают параметрическую форму решения уравнения (9).

Пусть $\Phi = \Phi(\eta, t)$ – некоторое решение уравнения (9). Тогда соответствующее решение исходного уравнения (1) также можно представить в параметрической форме

$$z = \int\frac{ds}{\Phi(s, t)} + \psi(t), \quad F = \int\frac{s\,ds}{\Phi(s, t)} - \psi_t'(t),$$

где $\psi(t)$ – произвольная функция (при интегрировании t рассматривается как параметр).

П р е о б р а з о в а н и е с и с т е м ы (1), (2). Считая $F_{zz} \neq 0$, перейдем в системе (1), (2) от переменных t, z, F к новым переменным t, η, Φ согласно (7). Уравнение (1) преобразуется в уравнение (9), а уравнение (2) – в уравнение

$$\frac{\partial G}{\partial t} + (m\eta^2 + q\eta + p)\frac{\partial G}{\partial\eta} - k\eta G = \nu\Phi^2\frac{\partial^2 G}{\partial\eta^2} + s(t). \tag{10}$$

При выводе этого уравнения использовалось представление для смешанной производной, полученное из уравнения (1).

При $m = k$ уравнение (10) имеет точные решения вида

$$G = A\eta + B\Phi + C, \tag{11}$$

где $A = A(t)$, $B = B(t)$, $C = C(t)$ искомые функции, которые описываются соответствующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений (при $m = k \neq 1$ имеем $B = 0$). Для доказательства данного факта надо выражение (11) подставить в (10) и учесть (9). Формула (11) будет использована далее для представления решений уравнения (2) через решения уравнения (1).

Н е к о т о р ы е о б о б щ е н и я. Рассмотрим нелинейное уравнение n-го порядка

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial t} + [a(t)F + b(t)z]\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} =$$

$$= H\left(t, \frac{\partial F}{\partial z}, \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \frac{\partial^3 F}{\partial z^3}, \ldots, \frac{\partial^n F}{\partial z^n}\right), \tag{12}$$

которое обобщает уравнение (1) и также допускает понижение порядка. Переходя в (12) от переменных t, x, $F = F(x, t)$ к новым переменным t, η, $\Phi = \Phi(t, \eta)$, где η и Φ определяются по формулам (7), получим уравнение $(n - 1)$-го порядка

$$\frac{a(t)\eta + b(t)}{\Phi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\Phi} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{1}{\Phi}H\left(t, \eta, \Phi, \Phi\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}, \ldots, \frac{\partial^{n-2}\Phi}{\partial z^{n-2}}\right)\right], \qquad (13)$$

где старшие производные вычисляются по формулам

$$\frac{\partial^k F}{\partial z^k} = \frac{\partial^{k-2}\Phi}{\partial z^{k-2}} = \Phi\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\partial^{k-3}\Phi}{\partial z^{k-3}}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \Phi\frac{\partial}{\partial\eta},$$
$$k = 3, 4, \ldots, n.$$

В частном случае уравнения второго порядка при $n = 1$, $a(t) = -1$, $b(t) = 0$, $H = H(F_z)$ уравнение (12) переходит в уравнение Калоджеро, которое рассматривалось в [8, 12, 13]. Видно, что более общее уравнение (12) при $n = 1$, $H = H(t, F_z)$, где $a(t)$, $b(t)$ – произвольные функции (логично его называть обобщенным уравнением Калоджеро), преобразованием типа Крокко преобразуется в уравнение первого порядка (13), которое становится линейным после подстановки $\Phi = \dfrac{1}{\Psi}$.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ (2) ЧЕРЕЗ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (1)

Случай $m = k = 1$. Пусть $F = F(z, t)$ – решение уравнения (1). Тогда в силу (11), (7) уравнение (2) имеет решение

$$G = A'_t + Aq + A\frac{\partial F}{\partial z} + B\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \qquad (14)$$

где функции $A = A(t)$ и $B = B(t)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$A''_{tt} + qA'_t + (p + q'_t)A = s, \qquad (15)$$

$$B'_t + qB = 0. \qquad (16)$$

Доказательство проводится путем исключения функции G из (2) и (14) с последующим сопоставлением полученного выражения как с уравнением (1), так и с уравнением, возникающим в результате дифференцирования (1) по z.

Общее решение уравнения (16) имеет вид $B = C\exp(-\int q\,dt)$, где C – произвольная постоянная.

Случай $m = k \neq 1$. В этом случае в силу (11), (7) уравнение (2) имеет решение

$$G = \frac{1}{m}(A'_t + Aq) + A\frac{\partial F}{\partial z}, \qquad (17)$$

где функция $A = A(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$A''_{tt} + qA'_t + (mp + q'_t)A = ms. \qquad (18)$$

Точные решения уравнения (1) можно найти в [5, 8, 10, 11]. Формулы (14)–(16) и (17), (18) позволяют получать соответствующие точные решения уравнения (2).

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ (1)

Линейное преобразование относительно искомой функции

$$F = a(t)f(\tau, \xi) + b(t)z + c(t),$$
$$\xi = \lambda(t)z + \sigma(t), \quad \tau = \int\lambda^2(t)dt + C_0, \qquad (19)$$

где $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$, $\lambda = \lambda(t)$, $\sigma = \sigma(t)$ – произвольные функции, приводит уравнение (1) к виду

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\tau\partial\xi} + [\tilde{a}(\tau)f + \tilde{b}(\tau)\xi + \tilde{c}(\tau)]\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2} - m\tilde{a}(\tau)\left(\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)^2 =$$
$$= \nu\frac{\partial^3 f}{\partial\xi^3} + \tilde{q}(\tau)\frac{\partial f}{\partial\xi} + \tilde{p}(\tau), \qquad (20)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\tilde{a} = \frac{a}{\lambda}, \quad \tilde{b} = \frac{1}{\lambda^3}(b\lambda - \lambda'_t),$$
$$\tilde{c} = \frac{1}{\lambda^3}(c\lambda^2 - b\lambda\sigma + \lambda\sigma'_t - \sigma\lambda'_t),$$
$$\tilde{q} = \frac{1}{a\lambda^3}[aq\lambda + 2mab\lambda - (a\lambda)'_t], \qquad (21)$$
$$\tilde{p} = \frac{1}{a\lambda^3}(p + bq + mb^2 - b'_t).$$

Аргумент функций в левых частях равенств τ, а в правых частях равенств t; переменные τ и t связаны последним соотношением в (19).

Наличие в (1) и (19) большого числа (от пяти до семи) произвольных функций позволяет строить различные точные решения уравнения (1).

Пример 1. Полагая последовательно в (19), (20) $f = \xi^{-1}$, $f = Ae^{\xi} + Be^{-\xi}$, $f = A\sin\xi + B\cos\xi$, $f = \operatorname{th}\xi$ при $m = 1$, можно путем подбора произвольных функций получить решения, приведенные в [8, 11]. Уравнению (20) удовлетворяют также функции $f = (1 \pm e^{\xi})^{-1}$ и $f = \operatorname{tg}(\xi + A)$, что дает новые решения.

Пример 2. Полагая

$$\tilde{a} = C_1, \ \tilde{b} = C_2, \ \tilde{c} = C_3, \ \tilde{q} = C_4, \ \tilde{p} = C_5, \qquad (22)$$

где C_n – произвольные постоянные, получаем из (20) обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $f = f(\xi)$. В этом случае соотношения (21) при условии (22) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функциональных коэффициентов преобразования (19). При $m = 1$ в уравнении (1) и преобразовании (19) при ограничениях (21), (22) две функции можно задать произвольно (напомним, что p и q – произвольные функции). Стационарное решение $f = f(\xi)$ уравнения (20) порождает нестационарное решение типа обобщенной бегущей волны (19) исходного уравнения (1).

Пример 3. Положим теперь

$$\tilde{a} = C_1\tau^{-(k+1)/2}, \quad \tilde{b} = C_2\tau^{-1}, \quad \tilde{c} = C_3\tau^{-1/2},$$
$$\tilde{q} = C_4\tau^{-1}, \quad \tilde{p} = C_5\tau^{(k-3)/2}, \quad \tau = \int\lambda^2(t)dt + C_0, \tag{23}$$

где k, C_n – произвольные постоянные. В этом случае уравнение (20) допускает автомодельное решение вида

$$f = \tau^{k/2}h(\zeta), \quad \zeta = \xi\tau^{-1/2},$$

где функция $h = h(\zeta)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{k-1}{2} - C_4\right)h'_\zeta + \left[C_1h + \left(C_2 - \frac{1}{2}\right)\zeta + C_3\right]h''_{\zeta\zeta} - $$
$$- mC_1(h'_\zeta)^2 = \nu h'''_{\zeta\zeta\zeta} + C_5. \tag{24}$$

Подставив (23) в (21), получим систему интегро-дифференциальных уравнений для определения функциональных параметров исходного уравнения (1) и преобразования (19). Отметим, что замена $\lambda = \sqrt{\varphi'_t}$ позволяет с учетом равенства $\tau = \varphi(t) + C_0$ перейти к стандартной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В результате получим неавтомодельное решение вида (19).

НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ/НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ

Анализ устойчивости/неустойчивости решений, основанный на уравнении (2). Рассмотрим систему (1), (2) при $m = k = 1$, $s = 0$, которая была получена в [11]. Для анализа устойчивости/неустойчивости решений используем формулу (14) и уравнения (15), (16), которые связывают решения уравнений (1), (2). Важно отметить, что во многих случаях нет необходимости знать явный вид функции F.

Исследуем сначала задачи со стационарной продольной компонентой скорости, что соответствует $F = F(z)$, $p = \text{const}$, $q = \text{const}$. В этом случае решение уравнения (15) зависит от знака дискриминанта $\Delta = q^2 - 4p$:

$$A(t) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{qt}{2}\right)\left[C_1\exp\left(\dfrac{t\sqrt{\Delta}}{2}\right) + C_2\exp\left(-\dfrac{t\sqrt{\Delta}}{2}\right)\right] \\ \text{при } \Delta > 0, \\ \exp\left(-\dfrac{qt}{2}\right)\left[C_1\sin\left(\dfrac{t\sqrt{|\Delta|}}{2}\right) + C_2\cos\left(\dfrac{t\sqrt{|\Delta|}}{2}\right)\right] \\ \text{при } \Delta < 0, \\ \exp\left(-\dfrac{qt}{2}\right)(C_1t + C_2) \text{ при } \Delta = 0, \end{cases} \tag{25}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Далее для простоты в (14) и (16) полагаем $B = 0$. При анализе будем различать два случая.

1°. Невырожденный случай $F_z \not\equiv 0$. При $q < 0$ (p – любое) или $p < 0$ (q – любое) решения (14) и (25) (при $C_1 \neq 0$) экспоненциально растут при $t \longrightarrow \infty$. Поэтому указанные значения параметров p и q определяют область нелинейной неустойчивости системы (1), (2) для любого ограниченного стационарного профиля продольной компоненты скорости $F(z)$ (отличного от константы). Точка $p = q = 0$ также относится к области неустойчивости системы (1), (2).

Действительно, за счет выбора постоянных C_1 и C_2 в силу (14), (25) можно сделать начальную величину $|G|_{t=0}$ (которая трактуется как начальное возмущение относительно тривиального решения $G = 0$ уравнения (2)) меньше любого наперед заданного ε. Однако при $q < 0$ (p – любое) или $p < 0$ (q – любое) имеем $|G| \longrightarrow \infty$ при $t \longrightarrow \infty$. Это означает, что произвольно малые начальные возмущения решений системы (1), (2) с увеличением времени неограниченно возрастают.

Замечание. Если $F \longrightarrow F_1$ при $z \longrightarrow -\infty$ и $F \longrightarrow F_2$ при $z \longrightarrow +\infty$ (F_1, $F_2 = \text{const}$), то решение (14) при $A = 0$, $B \neq 0$ стремится к нулю при $z \longrightarrow \pm\infty$.

При $q = 0$, $p > 0$ решение (25), а следовательно, и решение (14) являются периодическими. Совместное выполнение неравенств $q \geq 0$, $p \geq 0$ ($|p| + |q| \neq 0$) определяет область условной устойчивости рассматриваемых решений.

Важно подчеркнуть, что здесь речь идет о нелинейной неустойчивости, причем все полученные выше результаты и решения являются точными (а не линеаризованными, как это имеет место в теории линейной устойчивости; здесь не использованы также различные допущения, разложения и аппроксимации, характерные для многих нелинейных теорий [2, 14, 15]).

Пример 1. Стационарное пространственно-периодическое решение

$$F = a\sin(\sigma z + b), \quad G = 0 \quad (p = -a^2\sigma^2, q = \nu\sigma^2)$$

системы (1), (2) является неустойчивым при любых значениях a, b, σ ($a \neq 0$, $\sigma \neq 0$).

Пример 2. Стационарное монотонное ограниченное решение

$$F = -6\nu\sigma\,\mathrm{th}(\sigma z + b), \quad G = 0\ (p = 0, q = 8\nu\sigma^2)$$

системы (1), (2) является устойчивым.

Все приведенные выше выводы по устойчивости и неустойчивости, а также формулы (14), (25) остаются справедливыми для любых нестационарных решений $F = F(z, t)$, $G = G(z, t)$ (при условии ограниченности производной $F_z \not\equiv 0$) системы (1), (2) при $p = \mathrm{const}$, $q = \mathrm{const}$.

В силу вышеизложенного три четверти плоскости параметров p, q соответствует неустойчивым решениям. Важно отметить, что описанная выше неустойчивость течений не связана с конкретным профилем скорости и реализуется за счет уравнения (2), отвечающего за поперечные компоненты скорости жидкости. Поскольку в уравнение (15) и формулы (25) не входит вязкость жидкости ν, то указанные результаты не зависят от числа Рейнольдса, т. е. свойство неустойчивости решений имеет место не только при достаточно больших, но и при малых числах Рейнольдса ($0 < \mathrm{Re} < \infty$).

Замечание. Аналогичным образом с помощью уравнений (14), (15) можно исследовать на устойчивость нестационарные решения уравнений (1), (2) при переменных $p = p(t)$, $q = q(t)$.

2°. Вырожденный случай $F_z \equiv 0$. Пусть

$$F = a = \mathrm{const} \quad (\text{при } p = 0). \tag{26}$$

Тогда любое решение уравнения (2), которое при переходе от z, t к новым переменным t, $\xi = z - at$ сводится к классическому уравнению теплопроводности, является устойчивым при любых значениях параметров a и q.

Анализ устойчивости решений $F = \mathrm{const}$ уравнения (1) при $p = 0$.

1°. Сначала исследуем на устойчивость тривиальное решение $F = 0$ уравнения (1) при $p = 0$ для различных значений параметра $q = \mathrm{const}$. Уравнение (1) допускает точное решение

$$F = \varepsilon e^{ikz + \lambda t}, \quad \lambda = q - \nu k^2, \tag{27}$$

где ε, k, λ – действительные числа. Это решение является также решением линеаризованного уравнения (1), в котором отброшены квадратичные члены. Модуль разности между решением (27) и тривиальным решением в начальный момент времени равен $|\varepsilon|$ (за счет выбора ε эту разность можно сделать сколь угодно малой).

При $q - \nu k^2 > 0$ тривиальное решение будет неустойчивым, а при $q - \nu k^2 < 0$ –устойчивым. Граница устойчивости представляет собой параболу $q = \nu k^2$ в плоскости k,q. При уменьшении вязкости жидкости $\nu \longrightarrow 0$ (что соответствует увеличению чисел Рейнольдса) ветви параболы стремятся к линии $q = 0$, а область неустойчивости расширяется и в пределе распространяется на всю верхнюю полуплоскость $q > 0$. Увеличение ν или k приводит к расширению области устойчивости.

Поскольку параметром k можно свободно распоряжаться, то при любом $q > 0$ за счет выбора k можно добиться неустойчивости тривиального решения.

2°. Рассмотрим теперь произвольное стационарное решение уравнения (26). Вместо (27) возьмем теперь функцию

$$F = \varepsilon e^{ik(z - at) + \lambda t} + a, \quad \lambda = q - \nu k^2, \tag{28}$$

которая в силу свойства (3) при $\psi(t) = -at$ также является решением уравнения (1). Модуль разности между решениями (26) и (28) в начальный момент времени можно сделать сколь угодно малым за счет выбора ε. Все критерии устойчивости и неустойчивости решения (26) в зависимости от параметров k, q остаются теми же самыми, что и для тривиального решения.

Замечание. Из приведенных результатов следует, что при $p = 0$, $q \le 0$ устойчивым является только постоянный профиль продольной компоненты скорости $F = \mathrm{const}$.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Нестационарные уравнения плоского пограничного слоя в терминах функции тока w сводятся к одному уравнению третьего порядка [8]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + f(x, t).$$

Перейдем от t, x, y, w к новым переменным t, x, η, Φ, где η, Φ – обобщенные переменные Крокко:

$$\eta = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \Phi(x, t, \eta) = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

В результате получим уравнение второго порядка

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \eta\frac{\partial \Phi}{\partial x} + f(x, t)\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \nu\Phi^2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2},$$

которое заменой $\Phi = \dfrac{1}{\Psi}$ сводится к нелинейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \eta\frac{\partial \Psi}{\partial x} + f(x, t)\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = \nu\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{\Psi^2}\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right).$$

1°. Рассмотрим специальный случай $f(x, t) = f(t)$. Ищем решения специального вида

$$\Psi = Z(\xi, \tau), \quad \xi = x - \eta t + \int t f(t)\,dt,$$

$$\tau = \frac{1}{3}t^3.$$

Имеем разрешимое уравнение

$$\frac{\partial Z}{\partial \tau} = \nu \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{Z^2}\frac{\partial Z}{\partial \xi}\right), \tag{29}$$

которое можно свести к линейному уравнению теплопроводности [8].

2° Рассмотрим более общий случай $f(x, t) = f(t)x + g(t)$. Ищем решения специального вида

$$\Psi = Z(\xi, \tau), \quad \xi = \varphi(t)x + \psi(t)\eta + \theta(t),$$

$$\tau = \int \psi^2(t)dt,$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\theta = \theta(t)$ описываются линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t + f\psi = 0, \quad \psi'_t + \varphi = 0, \quad \theta'_t + g\psi = 0.$$

В результате приходим к разрешимому уравнению (29).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08-01-00553, 08-08-00530, 07-01-96003-р_урал_а и 09-01-00343).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. 3-е изд. М.: Наука, 1986.
3. *Ibragimov N.H.* CRC Handbook of Lie Group to Differential Equations. V. 2. Boca Raton: CRC Press, 1995.
4. *Ludlow D.K., Clarkson P.A., Bassom A.P.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1998. V. 31. P. 7965–7980.
5. *Полянин А.Д.* // ДАН. 2001. Т. 380. № 4. С. 491–496.
6. *Aristov S.N., Gitman I.M.* // J. Fluid Mech. 2002. V. 464. P. 209–215.
7. *Meleshko S.V.* // Nonlin. Dyn. 2004. V. 36. № 1. P. 47–68.
8. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2004.
9. *Drazin P.G., Riley N.* The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006.
10. *Пухначев В.В.* // Успехи механики. 2006. Т. 4. № 1. С. 6–76.
11. *Аристов С.Н., Полянин А.Д.* // ДАН. 2009. Т. 427. № 1. С. 35–40.
12. *Calogero F.* // Stud. Appl. Math. 1984. V. 70. № 3. P. 189–199.
13. *Павлов М.В.* // ТМФ. 2001. Т. 128. № 1. С. 109–115.
14. *Гольдштик М.А., Штерн В.Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977.
15. Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности / Под ред. Х. Суинни, Дж. Голлаба. М.: Мир, 1984.